Übungen zu Kombinatorik und Graphentheorie

Ilse Fischer, SS 07

(1) (a) In einer Schachtel sind 4 rote, 2 blaue, 5 gelbe und 3 grüne Stifte. Wenn man die Stifte mit geschlossenen Augen zieht, wieviele muss man nehmen, um sicher von jeder Farbe einen zu haben?

(b) In einer Lade sind 4 rote, 2 blaue, 5 gelbe und 3 grüne Socken. Wenn man nun die Socken mit geschlossenen Augen zieht, wieviele muss man nehmen, um sicher zwei gleichfarbige Socken zu haben?

(2) Eine Firma hat 20 Angestellte, davon sind 12 männlich. Auf wieviele Arten können sie eine Arbeitsgruppe bestehend aus 5 Angestellten bilden, sodass zumindest eine Frau und ein Mann in der Arbeitsgruppe vorkommen ?

(3) Im Parlament eines Landes gibt es 151 Sitze und drei Parteien. Wieviele Möglichkeiten der Sitzverteilung gibt es, sodass keine Partei eine absolute Mehrheit hat?

(4) Zeige, dass die Anzahl der Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$, die eine ungerade Anzahl von Elementen enthalten 2^{n-1} beträgt.

(5) (a) Wieviele fünfstellige positive Zahlen gibt es, deren mittlere Stelle 6 ist und die durch 3 teilbar sind ?

(b) Wieviele fünfstellige Zahlen gibt es, die die Ziffer 9 enthalten und die durch 3 teilbar sind ?

(6) (a) Von 6 Personen sind manche miteinander befreundet und manche nicht. Zeige, dass zwei von ihnen gleichviele Freunde in dieser Gruppe haben. (Hinweis: In diesem Beispiel gibt es keine "einseitigen" Freundschaften. Betrachte die Fälle, dass jemand gar keine Freunde hat und dass alle mindestens einen Freund haben, getrennt.)

(b) Zeige, dass es in Klagenfurt zwei Personen gibt, die mit der gleichen Anzahl von KlagenfurterInnen befreundet sind.

(7) (a) Beim Lotto "6 aus 45" werden aus den Zahlen $1-45$ zufällig sechs gezogen. Dann wird noch eine siebente als Zusatzzahl bestimmt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser, wie hoch für einen Fünfer und wie hoch für einen Fünfer mit Zusatzzahl?

(b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei "6 aus 45", dass unter den 6 gezogenen Zahlen zwei aufeinanderfolgende Zahlen sind?

(8) (a) Ein Krankenpfleger muss 5 Tage in der Woche arbeiten, er möchte aber entweder Samstag oder Sonntag frei haben. Wieviele Möglichkeiten hat er, seine Arbeitstage auf die Woche zu verteilen ?

(b) Eine Professorin hat 30 Jahre lang am selben Universitätsinstitut gearbeitet und jedes Semester 2 Vorlesungen gehalten. Das Institut bietet 15 verschiedene Vorlesungen an. Stimmt es, dass es zumindest 2 Semester gibt, in denen die Professorin dieselben Vorlesungen gehalten hat ?

(9) (a) 6 Personen spielen bei einem (kleinen) Tennisturnier mit. Auf wieviele Arten kann man sie in drei Paare für die erste Runde einteilen?
(b) Löse dieselbe Aufgabe für $2n$ Personen.

(10) (a) Wieviele bijektive Funktionen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ nach $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es?
(b) Wieviele nicht-bijektive Funktionen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ nach $\{1, 2, \ldots, n\}$ gibt es?

(11) Ein Restaurant bietet 5 verschiedene Suppen, 10 verschiedene Hauptgerichte und 6 verschiedene Nachspeisen an. Hannes hat sich entschieden, höchstens eine Suppe, höchstens ein Hauptgericht und höchstens eine Nachspeise zu konsumieren. Wieviele verschiedene Menüzusammenstellungen gibt es unter diesen Voraussetzungen ?

(12) Wieviele verschiedene positive 6-stellige Zahlen gibt es, deren Ziffernsumme höchstens 51 beträgt ?

(13) Auf wieviele verschiedene Arten kann man eine 11-köpfige Fullballmannschaft und eine 5-köpfige Basketballmannschaft aus einer Schulklasse mit 30 SchülerInnen auswählen, wenn
(a) niemand in beiden Teams sein soll ?
(b) eine beliebige Anzahl von SchülerInnen in beiden Teams sein kann ?
(c) höchstens einE SchülerIn in beiden Teams sein soll ?

(14) Auf wieviele verschiedene Arten kann man 8 Türme auf einem Schachbrett plazieren, sodass keiner den anderen schlagen kann ?

(15) Wir betrachten Pfade im $\mathbb{Z}^2$-Gitter mit Einheitsschritten in die (positive) x-Richtung (d.h. $(x, y) \to (x + 1, y)$) und Einheitsschritten in die (positive) y-Richtung (d.h. $(x, y) \to (x, y + 1)$). Zeige, dass es $\binom{m+n}{n}$ solche Pfade gibt, die in $(0, 0)$ beginnen und (m, n) enden. (Hinweis: Insgesamt muss man $m + n$ Schritte machen, davon m Schritte in die x-Richtung. Man muss also m "x-Schritte" aus insgesamt $m + n$ Schritten auswählen.)

(16) Man drücke die folgenden Zahlen durch Fibonaccizahlen aus:
(a) Anzahl aller Kompositionen von n, deren Teile (=Summanden) entweder gleich 1 oder 2 sind.
(b) Anzahl aller Kompositionen von n, deren Teile alle grösser oder gleich 2 sind.
(c) Anzahl aller Kompositionen von n in lauter ungerade Teile.
(Hinweis: Man versuche Rekursionen für die gefragten Zahlen zu finden.)

(17) Man gebe kombinatorische Beweise für die folgenden Binomialidentitäten:

(a) $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$. (Anleitung: Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen und in dieser ein Element rot, die restlichen Elemente gelb zu färben?)

(b) $\sum\limits_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$.

(18) Man gebe kombinatorische Beweise für die folgenden Binomialidentitäten:

(a) $\binom{n+1}{k+1} = \sum\limits_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$. (Hinweis: Klassifiziere die $(k+1)$-elementigen Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n+1\}$ nach ihrem größten Element.)

(b) $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$. (Hinweis: Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine k-elementige Teilmenge aus $\{1, 2, \ldots, n\}$ auszuwählen, in der man dann m Elemente rot färbt.)

(19) Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein $2 \times n$ – Rechteck mit 2×1 – Dominos und 2×2 – Quadraten zu überdecken? (Hinweis: Orientiere Dich an dem ähnlichen Beispiel aus der Vorlesung. D.h. leite eine Rekursion her, übersetze diese in eine Gleichung für die erzeugende Funktion, löse sie und verwende Partialbruchzerlegung, um dann die Reihe zu entwickeln und letztlich die Koeffizienten zu bestimmen.)

(20) Zeige, dass die Multiplikation von formalen Potenzreihen assoziativ und kommutativ ist.

(21) Es seien $a(z), b(z)$ Potenzreihen und $n \in \mathbb{Z}$. Beweise folgende Rechenregeln für den Differentiationsoperator.

(a) $D(a(z) \cdot b(z)) = D\,a(z) \cdot b(z) + a(z) \cdot D\,b(z)$

(b) $D(a(z)^n) = na(z)^{n-1} \cdot D\,a(z)$ (Für $n < 0$ muss man $a_0 \neq 0$ voraussetzen.)

(c) Ist $b_0 \neq 0$, dann ist

$$D\left(\frac{a(z)}{b(z)}\right) = \frac{D\,a(z) \cdot b(z) - a(z) \cdot D\,b(z)}{b(z)^2}.$$

(22) Verwende erzeugende Funktionen, um geschlossene Ausdrücke für die folgende, rekursiv definierte Folge zu finden.

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}, \qquad a_0 = 2, a_1 = 5.$$

(23) Ebenso für $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}, a_0 = 2, a_1 = 5$.

(24) Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Glieder der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, die der Rekursion $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = a_1 = 1$ genügt.

(25) Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Glieder der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, die der Rekursion $a_n = -a_{n-1} + 5a_{n-2} - 3a_{n-3}$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 7, a_1 = -12, a_2 = 49$ genügt.

(26) Auf wieviele Arten kann ein $3 \times 2n$-Rechteck mit 2×1 Dominos überdeckt werden? (Hinweis: Bezeichne mit a_n diese Anzahl und mit b_n die Überdeckungen eines solchen Rechtecks, bei dem in der letzten Spalte ein Domino fehlt. Zeige, dass $a_n = a_{n-1} + 2b_n$ und $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Leite daraus Gleichungen für die erzeugenden Funktionen $a(x)$ und $b(x)$ her, aus denen sich $a(x)$ und $b(x)$ berechnen lässt.)

(27) Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Folge mit $a_0 = 1$ und

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1.$$

(Hinweis: Gehe wie bei der Abzählung der Klammerungen in der Vorlesung vor.)

(28) Es sei $f(m,n)$ die Anzahl der Wege von $(0,0)$ nach (m,n) in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, wobei die einzelnen Schritte von der Form $(1,0)$ (Schritt in die x-Richtung), $(0,1)$ (Schritt in die y-Richtung) oder $(1,1)$ (diagonaler Schritt) sind. Man zeige, dass für die erzeugende Funktion dieser Zahlen

$$\sum_{m,n\geq 0} f(m,n) x^m y^n = \frac{1}{1-x-y-xy}$$

gilt. (Hinweis: Leite – wie üblich – eine Rekursion für $f(m,n)$ her, die Du dann in eine Gleichung für die erzeugende Funktion übersetzt.)

(29) Zeichne (bis auf Isomorphie) alle Graphen mit 4 Knoten!

(30) Zeige, dass es in einem Graphen immer mindestens zwei Knoten gibt, die den selben Grad haben.

(31) Zeige, dass ein Graph mit 10 Knoten, der nicht zusammenhängend ist, immer höchstens 36 Kanten hat. Gibt es so einen Graphen mit genau 36 Kanten?

(32) Zeichne alle Bäume mit 6 Knoten!

(33) Es sei G ein Graph. Das Komplement $\overline{G}$ von G ist der Graph mit
  (1) $V(\overline{G}) = V(G)$
  (2) $E(\overline{G}) = \{\{x,y\} | x,y \in V(G) \text{ und } \{x,y\} \notin E(G)\}$.

  Zeige: Es ist entweder G oder $\overline{G}$ zusammenhängend.

(34) Zeige, dass ein Baum T mindestens $\Delta(T)$ viele Blätter hat.

(35) (a) Zeichne den Graphen G mit der Knotenmenge $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ und der Kantenmenge

$$E = \{\{1,4\},\{1,5\},\{1,6\},\{2,3\},\{2,5\},\{2,7\},\{3,4\},\{3,5\},\{4,5\},\{5,6\},\{5,7\},\{6,7\}\}.$$

(b) Zeichne das Komplement $\overline{G}$ von G.
(c) Ist G bipartit? Ist $\overline{G}$ bipartit?

(36) (a) Es sei G ein k-regulärer Graph mit n Knoten. Wieviele Kanten hat G?
(b) Es sei G ein zusammenhängender regulärer Graph mit 22 Kanten. Wieviele Knoten hat G?

(37) Es sei G ein Graph mit 9 Knoten, in dem die Summe der Knotengrade mindestens 27 beträgt. Stimmt es, dass G dann immer einen Knoten mit Grad 4 oder grösser hat?

(38) Wie wir wissen, ist ein regulärer Graph einer, in dem jeder Knoten den selben Grad hat. Stimmt es, dass in so einem Graphen jeder Knoten die selbe Anzahl von “zweiten Nachbarn” hat? (Ein Knoten y ist ein zweiter Nachbar von x, wenn $\{x, y\}$ keine Kante ist, aber x und y durch einen Weg der Länge 2 verbunden sind.)

(39) Sind die Bipartitionsklassen eines regulären bipartiten Graphen stets gleich gross? (Belege Deine Behauptung entweder durch einen Beweis oder durch ein Gegenbeispiel.)

(40) (a) Stimmt es, dass ein Eulerscher Graph immer eine gerade Anzahl von Kanten hat?
(b) Stimmt es, dass ein Hamiltonscher Graph immer eine gerade Anzahl von Kanten hat?
(c) Stimmt es, dass jeder Eulersche Graph auch Hamiltonsch ist?
(d) Stimmt es, dass jeder Hamiltonsche Graph zugleich Eulersch ist?
(Finde immer einen Beweis oder ein Gegenbeispiel!)

(41) Es sei G ein Graph in dem jeder Knoten Grad 4 hat. Zeige, dass es möglich ist, die Kanten von G mit blau und orange so zu färben, dass jeder Knoten an zwei blaue und zwei orangen Kanten inzident ist. (Hinweis: Verwende, dass G ein Eulerscher Graph ist.)

(42) Eine Eulersche Tour in einem Graphen, ist ein Kantenzug, der jede Kante des Graphen genau einmal enthält.
(a) Finde einen Graphen, der keine Eulersche Tour enthält.
(b) Zeige folgenden Satz, der analog zur Charakterisierung von Eulerscher Graphen ist.

Satz. Ein zusammenhängender Graph hat eine Eulersche Tour dann und nur dann, wenn er höchstens zwei Knoten ungeraden Grades hat.

(43) Bestimme alle Eulerschen Graphen, die einen Eulerschen Kreis enthalten, der tatsächlich ein Kreis im Sinne der Definition aus der Vorlesung ist. (D.h. ein Eulerscher Kreis, der gleichzeitig ein Hamiltonscher Kreis ist.)

(44) (a) Es sei n eine positive ganze Zahl und r, s zwei nicht-negative ganze Zahlen mit $n = r + s$ und s gerade. Zeige: Es gibt einen Graphen mit n Knoten, der r Knoten mit geradem Grad und s Knoten mit ungeradem Grad hat.
(b) Für jede ganze Zahl $k \geq 2$, finde k nicht-isomorphe reguläre Graphen, die alle dieselbe Anzahl von Knoten und Kanten haben.

(45) Zeige, dass der 3-partite Graph $K_{r,2r,3r}$ für jede positive ganze Zahl r Hamiltonsch ist, dass aber $K_{r,2r,3r+1}$ für keine positive ganze Zahl r Hamiltonsch ist.

(46) (a) Finde einen planaren Graphen, der keinen Knoten hat, dessen Grad kleiner als 5 hat.
(b) Zeige, dass es nur einen 4-regulären maximal ebenen Graphen gibt.

(47) Es sei G ein Graph mit n Knoten und m Kanten. Zeige, dass G dann zumindest $m - n + 1$ verschiedene Kreise enthält.

(48) Wieviele Farben braucht man mindestens, um die Knoten des Petersen Graphs so zu färben, dass benachbarte Knoten verschiedene Farben tragen.

(49) Finde einen planaren Graphen G mit $|V(G)| = 8$ für den auch $\overline{G}$ planar ist.

(50) Eine Maus frisst sich ihren Weg durch einen $3 \times 3 \times 3$ Quader von Käse, wobei sie jeden der 27 Einheitswürfel genau einmal passiert. Wenn die Maus in einer Ecke beginnt, ist es möglich, dass sie zum Schluss in der Mitte herauskommt?

(51) Gegeben sei ein Graph $G = (V, E)$ mit

$$V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \quad \text{und} \quad E = \{e_1, e_2, \ldots, e_m\}.$$

Die *Inzidenzmatrix* von G ist eine $n \times m$ Matrix $M(G) = (m_{ij})$, wobei $m_{ij} = 1$ genau dann, wenn v_i mit e_j inzident, und $m_{ij} = 0$ andernfalls. Die *Adjazenzmatrix* von G ist eine $n \times n$ Matrix $A(G) = (a_{ij})$, wobei a_{ij} gleich der Anzahl der Kanten ist, die v_i und v_j verbinden.
(a) Zeige, daß jede Spaltensumme der Inzidenzmatrix gleich 2 ist.
(b) Was sind die Spaltensumme von A, was die Zeilensummen?
(c) Berechne die Inzidenzmatrix und die Adjazenzmatrix von zwei selbstgewählten Graphen.
(d) Zeige, daß die Einträge auf der Diagonale von MM^t und auf der Diagonale von A^2 den Knotengraden entsprechen.

(52) Wir haben gesehen, daß man nicht jeden Graphen kreuzungsfrei in den $\mathbb{R}^2$ einbetten kann (d.h. nicht jeder Graph ist planar). Kann man jeden Graphen kreuzungsfrei in den $\mathbb{R}^3$ einbetten? (Es muss kein exakter Beweis angegeben werden.)

(53) Wieviele Farben braucht man mindestens, um die Kanten des Petersen Graphs so zu färben, dass benachbarte Kanten verschiedene Farben haben?

(54) Wir haben gezeigt, dass in einem planaren Graphen mit n Knoten, die Anzahl der Kanten maximal $3n - 6$ beträgt. Formuliere die Umkehrung dieser Aussage und finde heraus, ob sie stimmt.

(55) Es sei G ein planarer Graph mit k Zusammenhangskomponenten. Beweise, dass dann $n - m + l = 1 + k$, wobei n die Anzahl der Knoten, m die Anzahl der Kanten und l die Anzahl der Gebiete ist.

(56) Es sei G ein Graph mit mindestens 11 Knoten. Beweise, dass dann entweder G oder das Komplement $\overline{G}$ nicht planar ist. (Hinweis: Eulersche Polyederformel und ihre Konsequenzen.)

(57) Was ist die chromatische Zahl eines Waldes?

(58) Für jede natürliche Zahlen n finde einen Graphen G_n mit $n = \Delta(G) = \lambda(G)$. (Hinweis: Löse die Aufgabe zunächst für $n = 1, 2, 3, 4$ und versuche daraus ein allgemeines Konstruktionsprinzip abzuleiten.)

(59) Für jede natürliche Zahl n finde einen Graphen G_n mit $n = \Delta(G)$ und $\lambda(G) = 3$.

(60) Für jedes $n \geq 0$ finden einen Graphen G_n mit $\lambda'(G_n) = n$.

(61) Was ist die kantenchromatische Zahl eines Waldes?

(62) Finde eine Kantenfärbung des $K_{m,n}$ mit $\Delta(K_{m,n})$ vielen Farben.

(63) Es sei G ein Hamiltonscher kubischer Graph. Zeige, dass dann $\lambda'(G) = \Delta(G)$.

(64) Es sei G ein regulärer Graph mit einer ungeraden Anzahl von Knoten. Zeige, dass dann $\lambda'(G) = \Delta(G) + 1$.

(65) Die Kanten des K_6 seien mit rot und blau gefärbt. Zeige, dass es dann sogar immer zwei einfärbige Dreiecke gibt.

(66) Ein Graph heisst selbstkomplementär, wenn $G = \overline{G}$. Finde zwei selbstkomplementäre Graphen. Weiters zeige, dass bei einem selbstkomplementären Graphen die Anzahl der Knoten $\equiv 0, 1 \bmod 4$ ist.