Piotr Sawuk

Diskrete Mathematik (Ilse Fischer, WS 2006/07)

Aufgabe 34) Finde die Zyklenbelegung k mit maximaler Anzahl möglicher Permutationen in $\mathcal{S}_n$:

Die Anzahl möglicher Permutationen mit Zyklentyp k wo der i'te Zyklus jeweils die Zahl z_i mit $1 \leqslant i \leqslant m := \sum_{j=1}^n k_j$ enthält (wobei $k = [k_j]_{1 \leqslant j \leqslant n}$ und $[z_i]_{1 \leqslant i \leqslant m}$ fix vorgegeben sind) ist natürlich $(n - m)!$, und weil die k_j Zyklen mit Zyklentyp j auf $k_j!$ viele Arten angeordnet werden können is die Anzahl der möglichen Wahlen für die z_i auch $\frac{n\,(n-1)\cdots(n-m+1)}{\prod_{j=1}^n k_j!}$. Insgesamt ist das Produkt der beiden noch nicht die gewünschte Anzahl an möglichen Permutationen mit Zyklentyp k, denn jede Zahl die als ein mögliches z_i gezählt wurde ist später noch im selben Zyklus an anderer Stelle eingefügt worden. Insgesamt gibt es für jeden Zyklentyp j genau j^{k_j} Möglichkeiten eine Zahl pro Zyklus als Anfangswert auszuwählen. Daher lautet die zu maximierende Formel also

$$f(k) := \frac{n!}{\prod_{j=1}^n (k_j!\, j^{k_j})} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot 2^{k_2} \cdots k_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}! \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor^{k_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \cdot \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil^{k_{\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil}} \cdots (n-1)^{k_{n-1}} \cdot n^{k_n}}$$

Auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens habe ich bereits berücksichtigt, daß nach der Hälfte nur noch einzelne Zyklen möglich sind damit die Nebenbedingung $\sum_{i=1}^n i\, k_i = n$ erfüllt werden kann (also für $i > \frac{n}{2}$ gilt $k_i \leqslant 1$). Nicht nur das, falls solch ein $k_i = 1$ mit $\frac{n}{2} < i$ existiert, dann gilt für alle $\frac{n}{2} < j \leqslant n$ mit $i \neq j$, daß auch $k_j = 0$ sein muß.

In der Kombinatorischen Optimierung lernt man daß solche Optimierungsprobleme am besten in Griff zu bekommen sind wenn man sie in Teilprobleme strukturiert. Hier bietet es sich an die k_i teilweise mit fixen Werten zu belegen so daß das Problem nur für die restlichen gelöst werden muß. Ebenso anschaulich sieht man daß es sich eigentlich um ein Minimierungs-Problem handelt, da die k_i nicht im Zähler vorkommen und man also nur den Nenner minimieren muß. Es gilt also das folgende verallgemeinerte Problem für beliebige Mengen $S \subseteq \{1, 2, ..., \tilde{n}\} (=: I_{\tilde{n}})$ und fixes $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ zu lösen:

$$(1) \quad \begin{array}{rl} \text{Minimiere} & f_S(k) = \prod_{j \in S} (k_j! \cdot j^{k_j}) \\ \text{NB:} & \sum_{i \in S} i \cdot k_i = \tilde{n} \end{array}$$

Wenn man solch ein optimales $\bar{k}$ für (1) gefunden hat, dann gilt also, daß für beliebige Belegung von allen $\bar{k_j}$ mit $j \notin S$ in diesem gefundenen Optimum das ursprüngliche $f(\bar{k}) \leqslant f(k)$ für alle k die die Nebenbedingung von (1) erfüllen und deren $k_j = \bar{k_j}$ mit $j \notin S$ sind. Und für das Ursprüngliche Problem mit einem $n \geqslant \tilde{n}$ wiederrum bedeutet dies, daß nun (1) mit $S := I_n - S$ und natürlich $\tilde{n} := n - \tilde{n}$ gelöst werden muß um einen möglichen Kandidaten für die globale Lösung zu erhalten. Wenn man also (1) für beliebige $\tilde{n}$ gelöst hat, dann bringt dies einen der globalen Lösung einen Schritt näher. Meine Methode wird es sein einen Induktionsbeweis aus den Lösungen von (1) zu basteln, der in jedem Schritt mehr k_j berücksichtigt, und dazu verwende ich natürlich, daß das neue S eine Obermenge des alten ist, und somit ein Teil des Problems bereits gelöst ist.

Der Fall $|S| = 1$ ist uninteressant, und zeigt nur daß $n = 1$ nur die Lösung $k_1 = 1$ erlaubt. Auch der Fall $n = 2$ ist eine Ausnahme weil es gleich mehrere Lösungen gibt (alle zulässigen Kombinationen sind Lösung). Sei also $|S| = 2$, betrachte $S = \{i, \tilde{n}\}$ für ein beliebiges $1 < i < \frac{\tilde{n}}{2}$:

Falls $k_i \neq 0$ dann muß $k_{\tilde{n}} = 0$ sein und umgekehrt. Damit die Nebenbedingung für $k_i \neq 0$ erfüllt werden kann muß $i | \tilde{n}$ gelten, also sei $k_i = \frac{\tilde{n}}{i}$. Man sieht gleich daß $k_i!\, i^{k_i} \geqslant k_i\, i = \tilde{n}$, und somit ist $k_{\tilde{n}} = 1$ eine optimale Lösung und $k_i = 0$ muß gelten.

Etwas allgemeiner sieht man daß für $S=\{i,j\}$ mit $1<i<j-1\leqslant\tilde{n}-1$ die Tendenz eher zum j als zum i hingeht, also für $d=\mathrm{kgv}(i,j)$ gilt oft $k_i!\, i^{k_i}\cdot k_j!\, j^{k_j} > (k_i-\frac{d}{i})!\, i^{k_i-\frac{d}{i}}\cdot(k_j+\frac{d}{j})!\, j^{k_j+\frac{d}{j}}$:

$(k_i-\frac{d}{i}+1)\cdots k_i\cdot i^{\frac{d}{i}}\geqslant(i\cdot(k_i+1)-d)^{\frac{d}{i}}>(i\cdot k_i-d)^{\frac{d}{i}}\geqslant(j\cdot k_j+d)^{\frac{d}{j}}$ denn $\mathrm{kgv}(i,j)=\frac{i\cdot j}{\mathrm{ggt}(i,j)}$ und allgemein gilt für $i<j-2$, daß $(i\,k_i-d)^j\geqslant(\tilde{n}-(i\,k_i-d))^i$: Sei $m:=j\,k_j+d=\tilde{n}-(i\,k_i-d)$, dann ist auch $(\tilde{n}-m)^{j-i}\geqslant\sum_{2|l}^{0\leqslant l\leqslant j-i}\binom{j-i}{l}m^l\,\tilde{n}^{j-i-l-1}(\tilde{n}-\frac{j-i-l}{l+1}m)\geqslant m$ für $j-i>2$. Und für $j-i=2$ ist natürlich die einzige interessante Lösung von $m^2-(2\,\tilde{n}+1)\,m+\tilde{n}^2$ immer $m_1=\tilde{n}-\frac{\sqrt{4\,\tilde{n}+1}-1}{2}>\frac{\tilde{n}}{2}$ weil $2\,\tilde{n}<\tilde{n}^2$ für n>2 und somit auch $4\,n+1<n^2+2\,n+1$ gilt. Daher ist auch in diesem Fall eine Optimierung durch Umverteilung für die meisten k_j möglich.

Allgemein heißt das, daß für alle $1<i<n-1$ im ursprünglichen Problem gelten muß, daß $k_i=0$. Denn per Induktion nach der Anzahl der $k_i>1$ gilt in (1) mit $\tilde{n}:=n-k_1, S:=I_{\tilde{n}}-\{1\}$: nehme das größte $1<i<\tilde{n}-1$ mit $k_i>1$. Sei $j:=i\,k_i$, dann ist entweder $k_j=0$ und $k_j:=1, k_i:=0$ währe optimaler, oder $k_j:=k_j+1=2, k_i:=0$ währe wegen dem vorigen Absatz optimaler (denn $j-i=i\,(k_i-1)\geqslant 2$ und $2!\cdot 2^2\cdot 1!\cdot 4^1=(1+1)!\,4^{1+1}$). Man kann dann wiederrum $k_j:=0$ auf die gleiche Weise erreichen. Schließlich, nach einem Induktionsbeweis mit einem weiteren Induktionsbeweis im Induktionsschritt, sind alle $k_i\leqslant 1\,(1<i<n-1)$ und man erhält $f_S(k)=i_1\cdot i_2\cdots i_s$ wobei $k_{i_j}=1$ für alle $1\leqslant j\leqslant s$ und $k_i=0$ wenn $i_j\neq i$ für alle solchen $1\leqslant j\leqslant s$. Für den eigentlichen Beweis meiner Behauptung sei nun $l:=\max\,(k_1-1,0)+\sum_{j=1}^{s}i_j\geqslant n-1$, dann liefert uns $k_1\leqslant 1, k_l:=1, k_j=0$ für alle $1<j<n-1$ eine optimalere Lösung des ursprünglichen Problems, denn $i_1\cdots i_s\geqslant i_s\cdot s$ gilt wegen $i_j\geqslant j+1$ (für alle $1\leqslant j\leqslant s$) und für beliebige $k_1\geqslant 1$ die zulässig sind, ist $k_1!\,i_1\cdots i_s\geqslant((k_1-1)+1)\cdot i_s\cdot s\geqslant k_1-1+i_s\cdot s\geqslant l$.

Sei also $S=\{1,n-1,n\}$, dann gibt es nur 2 Möglichkeiten: $k_1:=0$ oder $k_1:=1$. Für f_S macht dies keinen Unterschied, weil $0!=1!$, aber laut Nebenbedingung muß im letzteren Fall $k_{n-1}=1$ statt $k_n=1$ gelten, und daher ist $f_S(1,1,0)<f_S(0,0,1)$ die Einzige relevante Ungleichung hier. Dies ist auch schon die Lösung der Aufgabe: $k=[1,0,\ldots,0,1,0]$.

Kombinatorisch hätte man dies wohl auch sehen können, denn wie oben beschrieben kann man für fixe z_i die restlichen Plätze vollkommen beliebig mit den restlichen Zahlen belegen (solange natürlich jede Zahl nur einmal vorkommt), und somit muß man nur die Anzahl der z_i minimieren, sodaß die Anzahl der unterschiedlichen Werte für jedes z_i maximiert wird. Genau das habe ich getan, als ich den Bereich $(1,\,n-2]$ von der Lösung ausgeschlossen habe – aus der Anschauung heraus ist mein Ansatz entstanden, es ist nur schwieriger für mich diese Anschauung in Worte zu fassen als sie durch Un-/Gleichungen darzustellen.