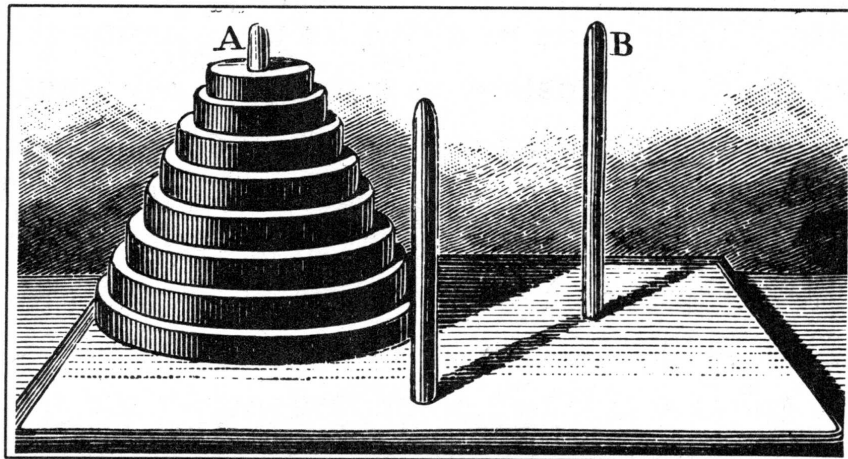


Bernhard Krön

**Aufgabe 1.** Der Turm von Hanoi

Das folgende Rätsel stammt vom französischen Mathematiker Edouard Lucas aus dem Jahr 1883. Auf einem Brett sind 3 Stäbe montiert. Auf einem der Stäbe befinden sich unterschiedliche, der Größe nach geordnete Holzscheiben, die größte ganz unten, die kleinste ganz oben. Ein Spielzug besteht darin, die jeweils oberste Scheibe von einem Stab zu entfernen und sie auf einen anderen Stab zu stecken. Dabei darf nie eine größere Scheibe auf einer kleineren Scheibe zu liegen kommen.



Die Aufgabe ist gelöst, wenn der ganzen Turm auf einem anderen Stab wieder aufgebaut ist. Was ist die minimale Anzahl von Zügen, die man dafür benötigt? Begründen Sie, warum die vorgeschlagene Lösung die bestmögliche Lösung ist.

Es gibt auch Legenden über einen viel größeren Turm dieser Art, welcher aus 64 goldenen Scheiben auf drei diamantenen Stäben besteht. Am Anfang der Welt, so erzählt Lucas, platzierte Gott die 64 Scheiben auf einem der diamantenen Stäbe und beauftragte eine Gruppe von Priestern, diesen Turm wie oben beschrieben auf eine andere Nadel zu versetzen. Seither arbeiten die Priester Tag und Nacht. Sie versetzen eine Scheibe pro Sekunde. Wenn sie ihren Auftrag erfüllt haben, wird der Turm einstürzen und die Welt untergehen. Wie lange wird dies dauern?

Hinweis: Versuchen Sie zuerst die Situation für kleinere Türme zu verstehen. Leiten Sie eine Rekursion für die Anzahl der benötigten Züge für Türme der Höhe  $n$  her. Erraten Sie dann die Lösung, indem Sie sich die ersten Werte der Folge ausrechnen.

**Aufgabe 2.** Für eine formale Potenzreihe  $A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$  bezeichne  $\langle z^n \rangle A(z)$  den Koeffizienten  $a_n$ . Der *formale Differentialoperator*  $D$  bildet formale Potenzreihen auf formale Potenzreihen ab und ist definiert durch

$$D\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n\right) = \sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

(a) Zeigen Sie  $\langle z^k \rangle A(z) = \frac{1}{k!} D^k A(z)|_{z=0}$ .

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von (a) die Identitäten

(i) 
$$\langle z^k \rangle (1+z)^n = \binom{n}{k},$$

(ii) 
$$\langle z^k \rangle \left(\frac{1}{1-z}\right)^n = \binom{n+k-1}{k}.$$

(c) Finden Sie für die Gleichungen in (b) rein kombinatorische Begründungen (also ohne Rechnung).

**Aufgabe 3.** Zeigen Sie  $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$  für formale Potenzreihen.

**Aufgabe 4.** Die Menge  $\mathbb{C}[[z]]$  der formalen Potenzreihen über  $\mathbb{C}$  (d.h. die Koeffizienten sind komplexe Zahlen) bilden einen Ring bezüglich der koordinatenweisen Addition

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n \geq 0} (a_n + b_n) z^n$$

und dem Cauchyprodukt (manchmal “Konvolutionsprodukt” genannt)

$$\left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n\right) \times \left(\sum_{n \geq 0} b_n z^n\right) = \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}\right) z^n.$$

(i) Zeigen Sie, dass  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  genau dann ein multiplikatives Inverses besitzt, wenn  $a_0 \neq 0$  ist.

(ii) Wie ist das bei formalen Laurentreihen? Bilden sie einen Körper?

**Aufgabe 5.** Der Fächer  $F_n$  ist definiert als Graph  $X = (VX, EX)$ , mit

$$VX = \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad \text{und}$$

$$EX = \{\{0, k\} \mid 1 \leq k \leq n\} \cup \{\{k, k+1\} \mid 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Berechnen Sie die Anzahl der spannenden Bäume von  $F_n$ .

**Aufgabe 6.** Gegeben ist die formale Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{1-2z-z^2}.$$

Berechnen Sie die erzeugende Funktion der Folge  $(a_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$  ohne die Koeffizienten  $a_n$  zu bestimmen.

Hinweis 1: Es sei  $\xi_m$  eine primitive  $m$ -te Einheitswurzel und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Dann ist

$$\frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_m^k z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} z^{mn}.$$

Hinweis 2: Um Ihre Rechnung zu überprüfen, können Sie ein Programm wie Mathematica oder Maple verwenden. In Mathematica vergleichen Sie z.B.

`Series[1/(1 - 2z - z^2), {z, 0, 21}]` mit `Series[Lösung(z), {z, 0, 5}]`, wobei `Lösung(z)` das Ergebnis Ihrer Rechnung ist.

### Aufgabe 7.

Satz 1 (aus der VL “Diskrete Mathematik”). Eine formale Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  hat genau dann eine zusammensetzungsinverse Potenzreihe, wenn  $a_0 = 0$  und  $a_1 \neq 0$  ist.

Satz 2. Es sei  $f$  eine beliebig oft differenzierbare reelle Funktion, deren Taylorreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  um  $x_0 = 0$  einen positiven Konvergenzradius hat. Es sei  $a_0 = 0$  und  $a_1 \neq 0$ . Dann gibt es ein  $\epsilon > 0$  und eine lokale Inverse  $g$  von  $f$ , sodass  $g(f(x)) = x$  ist, für alle  $x \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Wiederholen Sie den Beweis von Satz 1 und geben Sie für Satz 2 einen analytischen Beweis, der die Koeffizienten  $a_n$ , für  $n \geq 2$ , außer Acht lässt. Diskutieren Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser zwei Sätze.

**Aufgabe 8.** Beschreiben Sie formal die Spezies der Mengenpartitionen und überprüfe Sie dann die Axiome einer Spezies.

**Aufgabe 9.** Bestimmen Sie die erzeugende Funktion und die typenerzeugende Funktion der folgenden Spezies.

- (a) Spezies der Mengen  $E$ , definiert durch  $E[U] = \{U\}$ .
- (b) Spezies der Elemente  $\epsilon$ , definiert durch  $\epsilon[U] = U$ .
- (c) Spezies der zyklischen Permutationen  $\mathcal{C}$ .
- (d) Spezies der  $n$ -elementigen Mengen  $E_n$ , definiert durch

$$E_n[U] = \begin{cases} \{U\} & \text{falls } |U| = n, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

**Aufgabe 10.** Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der folgenden Spezies als Reihe (nicht als Bruchterm).

- (a) Spezies der (einfachen) Graphen  $\mathcal{G}$  (Kanten sind zweielementige Mengen).
- (b) Spezies der gerichteten Graphen  $\mathcal{D}$  (Kanten sind Paare von Ecken).
- (c) Spezies der Endofunktionen  $\text{End}(U) = \{f \mid f : U \rightarrow U\}$ .

**Aufgabe 11.** Bestimmen Sie die typenerzeugende Funktion der

- (a) Spezies  $\mathcal{S}$  der Permutationen.
- (b) Spezies  $\text{Par}$  der Mengenpartitionen.
- (c) Spezies  $\mathcal{P}$  der Teilmengen.

**Aufgabe 12.** Für die Spezies  $L$  der linearen Ordnungen und die Spezies  $S$  der Permutationen gilt  $L(z) = S(z)$  aber  $\tilde{L}(z) \neq \tilde{S}(z)$ . Daher sind diese Spezies nicht isomorph. Zeigen Sie dies nun auch anhand der Definition, indem Sie für  $U = V = \{1, 2\}$  nachweisen, dass es keine Bijektionen  $\alpha_U : L[U] \rightarrow S[U]$  gibt, für die das Diagramm in der Definition kommutiert.

**Aufgabe 13.** Zeigen Sie für Spezies  $F, G$ :

$$(F \cdot G)(z) = F(z)G(z) \quad \text{und} \quad (\widetilde{F \cdot G})(z) = \tilde{F}(z)\tilde{G}(z).$$

**Aufgabe 14.** Zunächst ein paar Definitionen: Ein *Wurzelbaum* ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten (Wurzel). Ein Wurzelbaum heißt *n-vollständig*, wenn die Wurzel Grad  $n$  oder 0 hat und jeder andere Knoten Grad  $n + 1$  oder 1 hat. Man sagt, dass ein Baum *eben* ist, wenn es auf die Reihenfolgen der Äste ankommt. Berechnen Sie mit Hilfe der Theorie der Spezies die Anzahl der unbezeichneten, ebenen, vollständig binären Wurzelbäume mit  $n$  Knoten.

**Aufgabe 15.**

- (a) Mit  $\text{Bal}^{[k]}$  bezeichnet man die Spezies der geordneten Mengenpartitionen mit  $k$  Blöcken. Berechnen Sie die erzeugende Funktion und die typenerzeugende Funktion von  $\text{Bal}^{[k]}$ .
- (b) Berechnen Sie nun die erzeugende Funktion und die typenerzeugende Funktion der Spezies  $\text{Bal}$  aller geordneten Mengenpartitionen.
- (c) Stimmt es, dass die Spezies  $\text{Bal}$  isomorph zu

$$\prod_{n \geq 1} (1 + E_n + E_n^2 + E_n^3 + \dots)$$

ist?