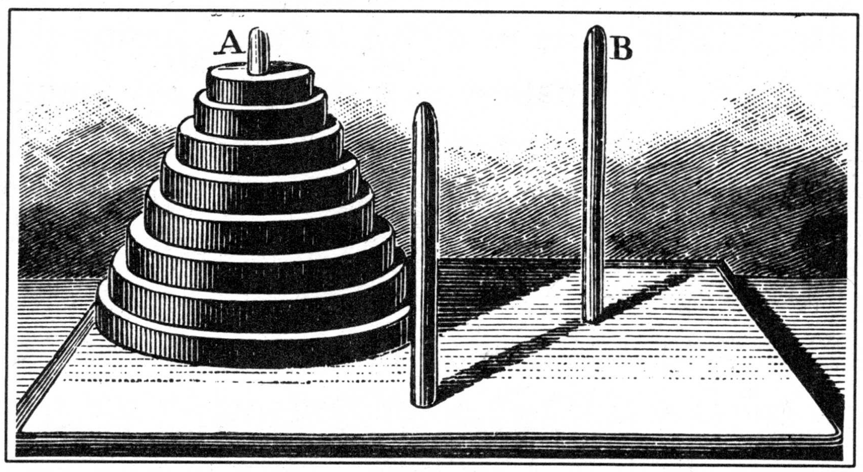
Übungen Kombinatorik WS 2010 (Version 15. November 2010)

Ilse Fischer und Bernhard Krön

Aufgabe 1. Der Turm von Hanoi

Das folgende Rätsel stammt vom französischen Mathematiker Edouard Lucas aus dem Jahr 1883. Auf einem Brett sind 3 Stäbe montiert. Auf einem der Stäbe befinden sich unterschiedliche, der größe nach geordnete Holzscheiben, die größte ganz unten, die kleinste ganz oben. Ein Spielzug besteht darin, die jeweils oberste Scheibe von einem Stab zu entfernen und sie auf einen anderen Stab zu stecken. Dabei darf nie eine größere Scheibe auf einer kleineren Scheibe zu liegen kommen.



Die Aufgabe ist gelöst, wenn der ganzen Turm auf einem anderen Stab wieder aufgebaut ist. Was ist die minimale Anzahl von Zügen, die man dafür benötigt? Begründen Sie, warum die vorgeschlagene Lösung die bestmögliche Lösung ist.

Es gibt auch Legenden über einen viel größeren Turm dieser Art, welcher aus 64 goldenen Scheiben auf drei diamantenen Stäben besteht. Am Anfang der Welt, so erzählt Lucas, platzierte Gott die 64 Scheiben auf einem der diamantenen Stäbe und beauftrage eine Gruppe von Priestern, diesen Turm wie oben beschrieben auf eine andere Nadel zu versetzen. Seither arbeiten die Priester Tag und Nacht. Sie verstezen eine Scheibe pro Sekunde. Wenn sie ihren Auftrag erfüllt haben, wird der Turm einstürzen und die Welt untergehen. Wie lange wird dies dauern?

Hinweis: Versuchen Sie zuerst die Situation für kleinere Türme zu verstehen. Leiten Sie eine Rekursionn für die Anzahl der benötigten Züge für Türme der Höhe n her. Erraten Sie dann die Lösung, indem Sie sich die ersten Werte der Folge ausrechnen.

Aufgabe 2. Für eine formale Potenzreihe $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ bezeichne $\langle z^n \rangle A(z)$ den Koeffizienten a_n. Der *formale Differentialoperator* D bildet formale Potenzreihen auf formale Potenzreihen ab und ist definiert durch

$$D(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

(a) Zeigen Sie $$\left\langle z^k \right\rangle A(z) = \frac{1}{k!} D^k A(z)|_{z=0}.$$

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von (a) die Identitäten

(i) $$\left\langle z^k \right\rangle (1+z)^n = \binom{n}{k},$$

(ii) $$\left\langle z^k \right\rangle \left(\frac{1}{1-z}\right)^n = \binom{n+k-1}{k}.$$

(c) Finden Sie für die Gleichungen in (b) rein kominatorische Begründungen (also ohne Rechnung).

Aufgabe 3. Zeigen Sie $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ für formale Potenzreihen.

Aufgabe 4. Die Menge $\mathbb{C}[[z]]$ der formalen Potenzreihen über $\mathbb{C}$ (d.h. die Koeffizienten sind komplexe Zahlen) bilden einen Ring bezüglich der koordinatenweisen Addition

$$(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) + (\sum_{n\geq 0} b_n z^n) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$$

und dem Cauchyprodukt (manchmal "Konvolutionsprodukt" genannt)

$$(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) \times (\sum_{n\geq 0} b_n z^n) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ genau dann ein multiplikatives Inverses besitzt, wenn $a_0 \neq 0$ ist.
(ii) Wie ist das bei formalen Laurentreihen? Bilden sie einen Körper?

Aufgabe 5. Der Fächer F_n ist definiert als Graph $X = (VX, EX)$, mit

$$VX = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \quad \text{und}$$

$$EX = \{\{0, k\} \mid 1 \leq k \leq n\} \cup \{\{k, k+1\} \mid 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Berechnen Sie die Anzahl der spannenden Bäume von F_n.

Aufgabe 6. Gegeben ist die formale Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{1 - 2z - z^2}.$$

Berechnen Sie die erzeugende Funktion der Folge $(a_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ ohne die Koeffizienten a_n zu bestimmen.

Hinweis 1: Es sei ξ_m eine primitive m-te Einheitswurzel und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Dann ist

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_m^k z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} z^{mn}.$$

Hinweis 2: Um Ihre Rechnung zu überprüfen, können Sie ein Programm wie Mathematica oder Maple verwenden. In Mathematica vergleichen Sie z.B.
`Series[`$1/(1-2z-z^2), \{z, 0, 21\}$`]` mit `Series[Lösung(z),`$\{z, 0, 5\}$`]`,
wobei `Lösung(z)` das Ergebnis Ihrer Rechnung ist.

Aufgabe 7.

Satz 1 (aus der VL "Diskrete Mathematik"). Eine formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hat genau dann eine zusammensetzungsinverse Potenzreihe, wenn $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$ ist.

Satz 2. Es sei f eine beliebig oft differenzierbare reelle Funktion, deren Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ um $x_0 = 0$ einen positiven Konvergenzradius hat. Es sei $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine *lokale Inverse* g von f, sodass $g(f(x)) = x$ ist, für alle $x \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Wiederholen Sie den Beweis von Satz 1 und geben Sie für Satz 2 einen analytischen Beweis, der die Koeffizienten a_n, für $n \geq 2$, außer Acht lässt. Diskutieren Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser zwei Sätze.

Aufgabe 8. Beschreiben Sie formal die Spezies der Mengenpartitionen und überprüfe Sie dann die Axiome einer Spezies.

Aufgabe 9. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion und die typenerzeugende Funktion der folgenden Spezies.

(a) Spezies der Mengen E, definiert durch $E[U] = \{U\}$.
(b) Spezies der Elemenete ϵ, definiert durch $\epsilon[U] = U$.
(c) Spezies der zyklischen Permutationen $\mathcal{C}$.
(d) Spezies der n-elementigen Mengen E_n, definiert durch

$$E_n[U] = \begin{cases} \{U\} & \text{falls } |U| = n, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 10. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der folgenden Spezies als Reihe (nicht als Bruchterm).

(a) Spezies der (einfachen) Graphen $\mathcal{G}$ (Kanten sind zweielementige Mengen).
(b) Spezies der gerichteten Graphen $\mathcal{D}$ (Kanten sind Paare von Ecken).
(c) Spezies der Endofunktionen $\mathrm{End}(U) = \{f \mid f : U \to U\}$.

Aufgabe 11. Bestimmen Sie die typenerzeugende Funktion der

(a) Spezies $\mathcal{S}$ der Permutationen.
(b) Spezies Par der Mengenpartitionen.
(c) Spezies $\mathcal{P}$ der Teilmengen.

Aufgabe 12. Für die Spezies L der linearen Ordnungen und die Spezies S der Permutationen gilt $L(z) = S(z)$ aber $\widetilde{L}(z) \neq \widetilde{S}(z)$. Daher sind diese Spezies nicht isomorph. Zeigen Sie dies nun auch anhand der Definition, in dem Sie für $U = V = \{1, 2\}$ nachweisen, dass es keine Bijektionen $\alpha_U : L[U] \to S[U]$ gibt, für die das Diagramm in der Definition kommutiert.

Aufgabe 13. Zeigen Sie für Spezies F, G:

$$(F \cdot G)(z) = F(z)G(z) \qquad \text{und} \qquad (\widetilde{F \cdot G})(z) = \widetilde{F}(z)\widetilde{G}(z).$$

Aufgabe 14. Zunächst ein paar Definitionen: Ein *Wurzelbaum* ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten (Wurzel). Ein Wurzelbaum heißt *n-vollständig*, wenn die Wurzel Grad n oder 0 hat und jeder andere Knoten Grad $n+1$ oder 1 hat. Man sagt, dass ein Baum *eben* ist, wenn es auf die Reihenfolgen der Äste ankommt. Berechnen Sie mit Hilfe der Theorie der Spezies die Anzahl der unbezeichneten, ebenen, vollständig binären Wurzelbäume mit n Knoten.

Aufgabe 15.

(a) Mit $\mathrm{Bal}^{[k]}$ bezeichnet man die Spezies der geordneten Mengenpartitionen mit k Blöcken. Berechnen Sie die erzeugende Funktion und die typenerzeugende Funktion von $\mathrm{Bal}^{[k]}$.
(b) Berechnen Sie nun die erzeugende Funktion und die typenerzeugende Funktion der Spezies Bal aller geordneten Mengenpartitionen.
(c) Stimmt es, dass die Spezies Bal isomorph zu

$$\prod_{n \geq 1} (1 + E_n + E_n^2 + E_n^3 + \cdots)$$

ist?

Aufgabe 16. In the lecture we saw that the number of surjections of an n-element set onto an r-element set is $r! \cdot S_n^{(r)}$, where

$$S_n^{(r)} = \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{r-i} i^n$$

is the Stirling number of the second kind. Use this to explain why $S_n^{(r)}$ is the number of partitions of an n-element set into r blocks and give a combinatorial proof (bijective proof) for the recurrence

$$S_n^{(r)} = S_{n-1}^{(r-1)} + r S_{n-1}^{(r)}.$$

Aufgabe 17. We say that a species F has property $(*)$ if $F(z) = \widetilde{F}(z)$.

(a) Explain why the species L of linear orders has property $(*)$.
(b) Explain why different species of plane rooted trees (binary, complete binary, with given vertex degrees, with arbitrary vertex degrees,...) have property $(*)$.
(c) Show that if F has property $(*)$ then any of its "subspecies" has property $(*)$.
(d) Find a species with property $(*)$ which is not as in (a)–(c).
(e) Give a general criterion when a species has property $(*)$.

Aufgabe 18. In a country there are coins with values $1, 2, 5, 10, 20$. Show that the number of possibilities of forming the value n with such coins is

$$\langle z^n \rangle \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)(1-z^{10})(1-z^{20})}.$$

Identify the possible coin arrangements with a species of certain set partitions. Write this species as product of more elementary species and derive the identity above.

Aufgabe 19. Find two non-isomorphic species F, G with $F(z) = G(z)$ and $\widetilde{F}(z) = \widetilde{G}(z)$.

Hint: Let T be a set of cycle types and denote by $\mathcal{S}^T$ the species of permutations whose cycle types are included in T. Find appropriate sets T_1, T_2 such that the requirements are fulfilled for $F = \mathcal{S}^{T_1}$ and $G = \mathcal{S}^{T_2}$.

Aufgabe 20.

(a) Compute the number of (unlabeled) plane rooted trees such that each node has either 0, 1 or 2 branches.
(b) Compute the number of possibilities to draw any number of non-intersecting chords joining n labeled points on a circle.

Aufgabe 21. An involution is a permutation π such that $\pi \circ \pi$ is the identity. Show that the number involutions on an n-element set is

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2k)! \cdot 2^k \cdot k!} =: a_n.$$

Then give a bijective proof of the recurrence $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$.

Hint: Write the species of involutions as product and composition of other known species.

Aufgabe 22. Compute the generating function of the species of derangements (= permutations without fixed point) and use it to derive a formula for the number of derangements of n elements.

Aufgabe 23. We have seen that the n-th Catalan number C_n is

(a) the number of unlabeled, plane rooted trees with $n+1$ nodes,
(b) the number of triangulations of a convex labeled $(n+2)$-gon as well as
(c) the number of unlabeled, complete binary, plane rooted trees with $n+1$ leaves (Why does such a tree have $2n+1$ nodes?).

Construct a bijection between the first and the third set and between the second and the third set.

Aufgabe 24. For which sequence $\mathbf{k} = [k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}^n$ with $\sum_{i=1}^{n} ik_i = n$ do we have the maximal number of permutations in $\mathcal{S}_n$ of cycle type $\mathbf{k}$?

Aufgabe 25. Recall that the species Bal of ballots is characterized by the combinatorial equation $\mathrm{Bal} = L(E_+)$. Show that the derivation of this species satisfies

$$\mathrm{Bal}' = \mathrm{Bal}^2 \cdot E$$

by graphical arguments as well as in a purely formal fashion, i.e. by using rules of combinatorial differential calculus, associativity, etc.

Aufgabe 26. Calculate the successive derivatives of

(a) the species $\mathcal{P} = E^2$ of subsets of a set,
(b) the species L of linear orderings.

Aufgabe 27. Compute the number of labeled rooted trees (not plane) with n vertices and where the root has k neighbors.

Aufgabe 28.

(a) Let $b(n)$ denote the number of permutations of $[n]$ whose cycles are all of odd length. Show that $b(2n) = (1 \cdot 3 \cdots (2n-1))^2$ and $b(2n+1) = (2n+1)b(2n)$. (Hint: Show that $b(n+1) = b(n) + n(n-1)b(n-1)$.)

(b) Compute the number of permutations of $[n]$ whose cycles are all of even length.

Aufgabe 29. Give a bijection between the number of labeled rooted trees (not plane) with n vertices and sequences $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$ with $k_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. (Prüfer Correspondence)

Aufgabe 30. For the Platonic solids let e be the number of edges of a face and let d be the number of faces in each vertex. Note that d is also the number of edges in each vertex. There are five Platonic solids, the Tetrahedron ($e = d = 3$), the Cube ($e = 4$, $d = 3$), the Octahedron ($e = 3$, $d = 4$), the Dodecahedron ($e = 5$, $d = 3$) and the Icosahedron ($e = 3$, $d = 5$). Set $G = \langle a, b \mid a^2 = b^d = (ab)^e = 1 \rangle$ and $S = \{a, b\}$. These five polyhedrons correspond to regular graphs whose vertices have degree d. A Platonic solid with parameters e_1 and f_1 is said to be *dual* to the Platonic solid with parameters e_2 and f_2 if $e_1 = f_2$ and $f_1 = e_2$.

(a) Draw the Cayley graphs $\mathrm{Cay}(G, S)$ for the parameters of the five Platonic solids. These graphs are Platonic solids with "chopped off" vertices.

(b) What happens if we consider other values for the parameters e and d? If the resulting group is infinite then draw a finite part of the Cayley graph.

Without proof: Which of these graphs can you use as a model for tiling your bathroom? Which of them are dual to each other?

Aufgabe 31. Let $X = (VX, EX)$ be the graph with

$$VX = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{and} \quad EX = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}.$$

(a) Determine a presentation of the group of automorphisms of X which uses the least possible number of generators and draw the corresponding Cayley-Graph.

(b) How many actions of the infinite cyclic group $(\mathbb{Z}, +) = \langle a \mid \emptyset \rangle = F_1$ are there on this graph? How many different kernels are there?

Aufgabe 32.

(a) Zeigen Sie, dass jede Gruppe auf ihren Cayleygraphen durch Multiplikation von links wirkt.
(b) Finden Sie einen Cayleygraphen, auf dem seine Gruppe nicht durch Multiplikation von rechts wirkt.

Aufgabe 33. Let $X = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\})$ be the triangle graph.

(a) Find a presentation of a group G with the following properties:
   (i) The group G has order 12.
   (ii) The group is generated by three independent elements a, b, c (i.e, the cyclic subgroups generated by these elements are disjoint except for the neutral element).

(iii) There is an action $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(X)$ such that $\alpha(b)$ is the cyclic permutation $(1\,2\,3)$ and $\alpha(c)$ is the transposition $(2\,3)$.

(b) Determine the kernel of this action.

(c) Draw the Cayley graph $\mathrm{Cay}(G, \{a, b, c\})$.

(d) Confirm Burnside's Lemma for this action of G on X (i.e. on VX).