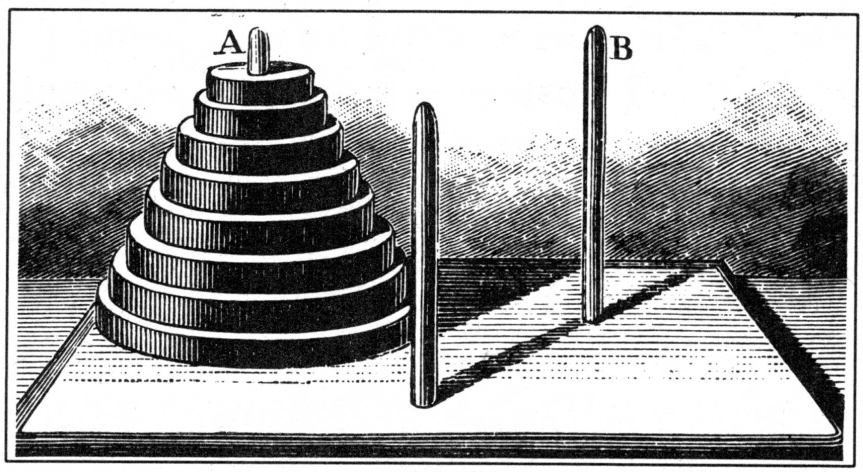
Übungen Kombinatorik WS 2010 (Version 10. Jänner 2011)

Ilse Fischer und Bernhard Krön

Aufgabe 1. Der Turm von Hanoi

Das folgende Rätsel stammt vom französischen Mathematiker Edouard Lucas aus dem Jahr 1883. Auf einem Brett sind 3 Stäbe montiert. Auf einem der Stäbe befinden sich unterschiedliche, der größe nach geordnete Holzscheiben, die größte ganz unten, die kleinste ganz oben. Ein Spielzug besteht darin, die jeweils oberste Scheibe von einem Stab zu entfernen und sie auf einen anderen Stab zu stecken. Dabei darf nie eine größere Scheibe auf einer kleineren Scheibe zu liegen kommen.



Die Aufgabe ist gelöst, wenn der ganzen Turm auf einem anderen Stab wieder aufgebaut ist. Was ist die minimale Anzahl von Zügen, die man dafür benötigt? Begründen Sie, warum die vorgeschlagene Lösung die bestmögliche Lösung ist.

Es gibt auch Legenden über einen viel größeren Turm dieser Art, welcher aus 64 goldenen Scheiben auf drei diamantenen Stäben besteht. Am Anfang der Welt, so erzählt Lucas, platzierte Gott die 64 Scheiben auf einem der diamantenen Stäbe und beauftrage eine Gruppe von Priestern, diesen Turm wie oben beschrieben auf eine andere Nadel zu versetzen. Seither arbeiten die Priester Tag und Nacht. Sie verstezen eine Scheibe pro Sekunde. Wenn sie ihren Auftrag erfüllt haben, wird der Turm einstürzen und die Welt untergehen. Wie lange wird dies dauern?

Hinweis: Versuchen Sie zuerst die Situation für kleinere Türme zu verstehen. Leiten Sie eine Rekursionn für die Anzahl der benötigten Züge für Türme der Höhe n her. Erraten Sie dann die Lösung, indem Sie sich die ersten Werte der Folge ausrechnen.

Aufgabe 2. Für eine formale Potenzreihe $A(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ bezeichne $\langle z^n \rangle A(z)$ den Koeffizienten a_n. Der *formale Differentialoperator* D bildet formale Potenzreihen auf formale Potenzreihen ab und ist definiert durch

$$D(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) = \sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

(a) Zeigen Sie
$$\left\langle z^k \right\rangle A(z) = \frac{1}{k!} D^k A(z)|_{z=0}.$$

(b) Zeigen Sie unter Verwendung von (a) die Identitäten

(i)
$$\left\langle z^k \right\rangle (1+z)^n = \binom{n}{k},$$

(ii)
$$\left\langle z^k \right\rangle \left(\frac{1}{1-z}\right)^n = \binom{n+k-1}{k}.$$

(c) Finden Sie für die Gleichungen in (b) rein kominatorische Begründungen (also ohne Rechnung).

Aufgabe 3. Zeigen Sie $\cosh^2 z - \sinh^2 z = 1$ für formale Potenzreihen.

Aufgabe 4. Die Menge $\mathbb{C}[[z]]$ der formalen Potenzreihen über $\mathbb{C}$ (d.h. die Koeffizienten sind komplexe Zahlen) bilden einen Ring bezüglich der koordinatenweisen Addition

$$(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) + (\sum_{n\geq 0} b_n z^n) = \sum_{n\geq 0} (a_n + b_n) z^n$$

und dem Cauchyprodukt (manchmal "Konvolutionsprodukt" genannt)

$$(\sum_{n\geq 0} a_n z^n) \times (\sum_{n\geq 0} b_n z^n) = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

(i) Zeigen Sie, dass $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ genau dann ein multiplikatives Inverses besitzt, wenn $a_0 \neq 0$ ist.
(ii) Wie ist das bei formalen Laurentreihen? Bilden sie einen Körper?

Aufgabe 5. Der Fächer F_n ist definiert als Graph $X = (VX, EX)$, mit

$$VX = \{0, 1, 2, \ldots, n\} \quad \text{und}$$

$$EX = \{\{0, k\} \mid 1 \leq k \leq n\} \cup \{\{k, k+1\} \mid 1 \leq k \leq n-1\}.$$

Berechnen Sie die Anzahl der spannenden Bäume von F_n.

Aufgabe 6. Gegeben ist die formale Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \frac{1}{1 - 2z - z^2}.$$

Berechnen Sie die erzeugende Funktion der Folge $(a_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ ohne die Koeffizienten a_n zu bestimmen.

Hinweis 1: Es sei ξ_m eine primitive m-te Einheitswurzel und

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Dann ist

$$\frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m-1} f(\xi_m^k z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} z^{mn}.$$

Hinweis 2: Um Ihre Rechnung zu überprüfen, können Sie ein Programm wie Mathematica oder Maple verwenden. In Mathematica vergleichen Sie z.B.
`Series[`$1/(1-2z-z^2), \{z, 0, 21\}$`]` mit `Series[Lösung(z),`$\{z, 0, 5\}$`]`,
wobei `Lösung(z)` das Ergebnis Ihrer Rechnung ist.

Aufgabe 7.

Satz 1 (aus der VL “Diskrete Mathematik”). Eine formale Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ hat genau dann eine zusammensetzungsinverse Potenzreihe, wenn $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$ ist.

Satz 2. Es sei f eine beliebig oft differenzierbare reelle Funktion, deren Taylorreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ um $x_0 = 0$ einen positiven Konvergenzradius hat. Es sei $a_0 = 0$ und $a_1 \neq 0$. Dann gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine *lokale Inverse* g von f, sodass $g(f(x)) = x$ ist, für alle $x \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Wiederholen Sie den Beweis von Satz 1 und geben Sie für Satz 2 einen analytischen Beweis, der die Koeffizienten a_n, für $n \geq 2$, außer Acht lässt. Diskutieren Sie Gemeinsamkeiten und Unterschiede dieser zwei Sätze.

Aufgabe 8. Beschreiben Sie formal die Spezies der Mengenpartitionen und überprüfe Sie dann die Axiome einer Spezies.

Aufgabe 9. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion und die typenerzeugende Funktion der folgenden Spezies.

(a) Spezies der Mengen E, definiert durch $E[U] = \{U\}$.
(b) Spezies der Elemenete ϵ, definiert durch $\epsilon[U] = U$.
(c) Spezies der zyklischen Permutationen $\mathcal{C}$.
(d) Spezies der n-elementigen Mengen E_n, definiert durch

$$E_n[U] = \begin{cases} \{U\} & \text{falls } |U| = n, \\ \emptyset & \text{sonst.} \end{cases}$$

Aufgabe 10. Bestimmen Sie die erzeugende Funktion der folgenden Spezies als Reihe (nicht als Bruchterm).

(a) Spezies der (einfachen) Graphen $\mathcal{G}$ (Kanten sind zweielementige Mengen).
(b) Spezies der gerichteten Graphen $\mathcal{D}$ (Kanten sind Paare von Ecken).
(c) Spezies der Endofunktionen $\mathrm{End}(U) = \{f \mid f : U \to U\}$.

Aufgabe 11. Bestimmen Sie die typenerzeugende Funktion der

(a) Spezies $\mathcal{S}$ der Permutationen.
(b) Spezies Par der Mengenpartitionen.
(c) Spezies $\mathcal{P}$ der Teilmengen.

Aufgabe 12. Für die Spezies L der linearen Ordnungen und die Spezies S der Permutationen gilt $L(z) = S(z)$ aber $\widetilde{L}(z) \neq \widetilde{S}(z)$. Daher sind diese Spezies nicht isomorph. Zeigen Sie dies nun auch anhand der Definition, in dem Sie für $U = V = \{1, 2\}$ nachweisen, dass es keine Bijektionen $\alpha_U : L[U] \to S[U]$ gibt, für die das Diagramm in der Definition kommutiert.

Aufgabe 13. Zeigen Sie für Spezies F, G:

$$(F \cdot G)(z) = F(z)G(z) \qquad \text{und} \qquad (\widetilde{F \cdot G})(z) = \widetilde{F}(z)\widetilde{G}(z).$$

Aufgabe 14. Zunächst ein paar Definitionen: Ein *Wurzelbaum* ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten (Wurzel). Ein Wurzelbaum heißt *n-vollständig*, wenn die Wurzel Grad n oder 0 hat und jeder andere Knoten Grad $n+1$ oder 1 hat. Man sagt, dass ein Baum *eben* ist, wenn es auf die Reihenfolgen der Äste ankommt. Berechnen Sie mit Hilfe der Theorie der Spezies die Anzahl der unbezeichneten, ebenen, vollständig binären Wurzelbäume mit n Knoten.

Aufgabe 15.

(a) Mit $\mathrm{Bal}^{[k]}$ bezeichnet man die Spezies der geordneten Mengenpartitionen mit k Blöcken. Berechnen Sie die erzeugende Funktion und die typenerzeugende Funktion von $\mathrm{Bal}^{[k]}$.
(b) Berechnen Sie nun die erzeugende Funktion und die typenerzeugende Funktion der Spezies Bal aller geordneten Mengenpartitionen.
(c) Stimmt es, dass die Spezies Bal isomorph zu

$$\prod_{n \geq 1} (1 + E_n + E_n^2 + E_n^3 + \cdots)$$

ist?

Aufgabe 16. In the lecture we saw that the number of surjections of an n-element set onto an r-element set is $r! \cdot S_n^{(r)}$, where

$$S_n^{(r)} = \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{r} \binom{r}{i} (-1)^{r-i} i^n$$

is the Stirling number of the second kind. Use this to explain why $S_n^{(r)}$ is the number of partitions of an n-element set into r blocks and give a combinatorial proof (bijective proof) for the recurrence

$$S_n^{(r)} = S_{n-1}^{(r-1)} + r S_{n-1}^{(r)}.$$

Aufgabe 17. We say that a species F has property $(*)$ if $F(z) = \widetilde{F}(z)$.

(a) Explain why the species L of linear orders has property $(*)$.
(b) Explain why different species of plane rooted trees (binary, complete binary, with given vertex degrees, with arbitrary vertex degrees,...) have property $(*)$.
(c) Show that if F has property $(*)$ then any of its "subspecies" has property $(*)$.
(d) Find a species with property $(*)$ which is not as in (a)–(c).
(e) Give a general criterion when a species has property $(*)$.

Aufgabe 18. In a country there are coins with values $1, 2, 5, 10, 20$. Show that the number of possibilities of forming the value n with such coins is

$$\langle z^n \rangle \, \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^5)(1-z^{10})(1-z^{20})}.$$

Identify the possible coin arrangements with a species of certain set partitions. Write this species as product of more elementary species and derive the identity above.

Aufgabe 19. Find two non-isomorphic species F, G with $F(z) = G(z)$ and $\widetilde{F}(z) = \widetilde{G}(z)$.

Hint: Let T be a set of cycle types and denote by $\mathcal{S}^T$ the species of permutations whose cycle types are included in T. Find appropriate sets T_1, T_2 such that the requirements are fulfilled for $F = \mathcal{S}^{T_1}$ and $G = \mathcal{S}^{T_2}$.

Aufgabe 20.

(a) Compute the number of (unlabeled) plane rooted trees such that each node has either 0, 1 or 2 branches.
(b) Compute the number of possibilities to draw any number of non-intersecting chords joining n labeled points on a circle.

Aufgabe 21. An involution is a permutation π such that $\pi \circ \pi$ is the identity. Show that the number involutions on an n-element set is

$$\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{(n-2k)! \cdot 2^k \cdot k!} =: a_n.$$

Then give a bijective proof of the recurrence $a_n = a_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$.

Hint: Write the species of involutions as product and composition of other known species.

Aufgabe 22. Compute the generating function of the species of derangements (= permutations without fixed point) and use it to derive a formula for the number of derangements of n elements.

Aufgabe 23. We have seen that the n-th Catalan number C_n is

(a) the number of unlabeled, plane rooted trees with $n+1$ nodes,
(b) the number of triangulations of a convex labeled $(n+2)$-gon as well as
(c) the number of unlabeled, complete binary, plane rooted trees with $n+1$ leaves (Why does such a tree have $2n+1$ nodes?).

Construct a bijection between the first and the third set and between the second and the third set.

Aufgabe 24. For which sequence $\mathbf{k} = [k_1, \dots, k_n] \in \mathbb{N}^n$ with $\sum_{i=1}^{n} ik_i = n$ do we have the maximal number of permutations in $\mathcal{S}_n$ of cycle type $\mathbf{k}$?

Aufgabe 25. Recall that the species Bal of ballots is characterized by the combinatorial equation $\mathrm{Bal} = L(E_+)$. Show that the derivation of this species satisfies

$$\mathrm{Bal}' = \mathrm{Bal}^2 \cdot E$$

by graphical arguments as well as in a purely formal fashion, i.e. by using rules of combinatorial differential calculus, associativity, etc.

Aufgabe 26. Calculate the successive derivatives of

(a) the species $\mathcal{P} = E^2$ of subsets of a set,
(b) the species L of linear orderings.

Aufgabe 27. Compute the number of labeled rooted trees (not plane) with n vertices and where the root has k neighbors.

Aufgabe 28.

(a) Let $b(n)$ denote the number of permutations of $[n]$ whose cycles are all of odd length. Show that $b(2n) = (1 \cdot 3 \cdots (2n-1))^2$ and $b(2n+1) = (2n+1)b(2n)$. (Hint: Show that $b(n+1) = b(n) + n(n-1)b(n-1)$.)

(b) Compute the number of permutations of $[n]$ whose cycles are all of even length.

Aufgabe 29. Give a bijection between the number of labeled rooted trees (not plane) with n vertices and sequences $(k_1, k_2, \ldots, k_{n-1})$ with $k_i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. (Prüfer Correspondence)

Aufgabe 30. For the Platonic solids let e be the number of edges of a face and let d be the number of faces in each vertex. Note that d is also the number of edges in each vertex. There are five Platonic solids, the Tetrahedron ($e = d = 3$), the Cube ($e = 4$, $d = 3$), the Octahedron ($e = 3$, $d = 4$), the Dodecahedron ($e = 5$, $d = 3$) and the Icosahedron ($e = 3$, $d = 5$). Set $G = \langle a, b \mid a^2 = b^d = (ab)^e = 1 \rangle$ and $S = \{a, b\}$. These five polyhedrons correspond to regular graphs whose vertices have degree d. A Platonic solid with parameters e_1 and f_1 is said to be *dual* to the Platonic solid with parameters e_2 and f_2 if $e_1 = f_2$ and $f_1 = e_2$.

(a) Draw the Cayley graphs $\mathrm{Cay}(G, S)$ for the parameters of the five Platonic solids. These graphs are Platonic solids with "chopped off" vertices.

(b) What happens if we consider other values for the parameters e and d? If the resulting group is infinite then draw a finite part of the Cayley graph.

Without proof: Which of these graphs can you use as a model for tiling your bathroom? Which of them are dual to each other?

Aufgabe 31. Let $X = (VX, EX)$ be the graph with

$$VX = \{1, 2, 3, 4, 5\} \quad \text{and} \quad EX = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}.$$

(a) Determine a presentation of the group of automorphisms of X which uses the least possible number of generators and draw the corresponding Cayley-Graph.

(b) How many actions of the infinite cyclic group $(\mathbb{Z}, +) = \langle a \mid \emptyset \rangle = F_1$ are there on this graph? How many different kernels are there?

Aufgabe 32.

(a) Zeigen Sie, dass jede Gruppe auf ihren Cayleygraphen durch Multiplikation von links wirkt.
(b) Finden Sie einen Cayleygraphen, auf dem seine Gruppe nicht durch Multiplikation von rechts wirkt.

Aufgabe 33. Let $X = (\{1, 2, 3\}, \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\})$ be the triangle graph.

(a) Find a presentation of a group G with the following properties:
  (i) The group G has order 12.
  (ii) The group is generated by three independent elements a, b, c (i.e, the cyclic subgroups generated by these elements are disjoint except for the neutral element).

(iii) There is an action $\alpha : G \to \mathrm{Aut}(X)$ such that $\alpha(b)$ is the cyclic permutation $(1\,2\,3)$ and $\alpha(c)$ is the transposition $(2\,3)$.

(b) Determine the kernel of this action.

(c) Draw the Cayley graph $\mathrm{Cay}(G, \{a, b, c\})$.

(d) Confirm Burnside's Lemma for this action of G on X (i.e. on VX).

Aufgabe 34. Die Bewohner des Mars erhalten quadratische Lochkarten aus Metall als Personalausweise. Diese Lochkarten sind in neun Quadrate unterteilt. Manche dieser neun Quarate haben in der Mitte ein rundes Loch eingestanzt. Die Löcher können verschiedene Größen haben. Die marsiansche Verwaltungsbhörde will nun wissen, wieviele veschiedene Lochgrößen es geben muss, um eine bestimmte Anzahl unterscheidbarer Lochkarten zu erhalten. Können Sie dabei helfen?

Hinweis: Die Symmetriegruppe einer quadratischen Scheibe ist die D_4. Diese agiert auf den neun Quadraten. Die Zyklen dieser Aktion entsprechen den Zyklen der Elemente eine Untergruppe der S_9, welche isomorph zur D_4 ist.

Aufgabe 35. Am Saturn herrscht ein totalitäres Regime. Dort bekommen die Bewohner statt Personalausweisen torusförmige Gummihalsbänder umgehängt, die sie selbst nicht entfernen können. Die Oberfläche der Bänder ist schachbrettartig in $m \times n$ farbige Quadrate aufgeteilt. Die Verwaltungsbehörde des Saturns will nun wissen, wieviele Saturnianer sie mit b Farben unterscheidbar machen kann.

Hinweis: Die Symmetrien sind die Rotation des Bandes um den Hals, und die Rotationen des Bandes um sich selbst. Spiegelungen werden nicht berücksichtigt. Das heißt, man kann mit den meisten Halsbändern zwei Saturnianer kennzeichnen, je nachdem, wie man sie ihnen um den Hals legt. Auf den Halsbändern agiert also die Gruppe $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n$. Der entsprechende Zyklenzeiger ist der zweidimensionale Bruder des Zyklenzeigers der zyklischen Gruppe.

Aufgabe 36. Der q-Binomialkoeffizient ist durch

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})\cdots(1-q^{n-k+1})}{(1-q^k)(1-q^{k-1})\cdots(1-q)}$$

definiert. Es gilt $\lim_{q\to 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k}$ (warum?), und es gelten die Rekursionsformeln

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q$$

und

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k+1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_q .$$

Man zeige folgende "q-Identitäten":

(a)

$$(1+z)(1+qz)\cdots(1+q^{n-1}z) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}} z^k$$

(b)

$$(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k q^{\binom{k+1}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$$

(Anleitung: Man verwende (a) und den Grenzübergang $n \to \infty$.)

(c)

$$\frac{1}{(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^n z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix}_q z^k$$

(d)

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^k}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^k)}$$

(e)

$$z^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (z-1)(z-q)\cdots(z-q^{k-1})$$

Aufgabe 37. Man zeige die q-Vandermonde-Identität

$$\begin{bmatrix} n+m \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{j=0}^{k} q^{(n-j)(k-j)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_q \begin{bmatrix} m \\ k-j \end{bmatrix}_q .$$

(Anleitung: Wie wird die gewöhnliche Vandermonde-Identität gezeigt? Was ist das q-Analogon des Binomischen Lehrsatzes?)

Aufgabe 38. Aus dem vorigen Beispiel folgt $\left[\begin{smallmatrix} 2n \\ n \end{smallmatrix}\right]_q = \sum_{k=0}^{n} q^{k^2} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]_q^2$ (wie?). Daraus leite man die Identität

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)\cdots} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2}}{(1-q)^2(1-q^2)^2\cdots(1-q^k)^2}$$

ab.

Aufgabe 39. Man zeige:

(a)

$$\frac{1}{1-q} = (1+q)(1+q^2)(1+q^4)(1+q^8)\cdots$$

(b)

$$(1+q)(1+q^2)(1+q^3)\cdots = \frac{1}{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\cdots}$$

Aufgabe 40. Der q-Binomialkoeffizient $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ ist ein Polynom vom Grad $k(n-k)$ in q, i.e.

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \sum_{l=0}^{k(n-k)} A_{n,k,l} q^l.$$

Man zeige, dass $A_{n,k,l}$ die Anzahl der Gitterpunktwege von $(0,0)$ nach $(k, n-k)$, bestehend aus Schritten der Form $(1,0)$ und $(0,1)$, ist, wo die Fläche des Flächenstücks, das von den Geraden $y = 0$ und $x = k$ und dem Gitterpunktweg eingeschlossen ist, gerade l ist.

Aufgabe 41. How many necklaces are there with 5 blue and 6 red pearls.

Aufgabe 42. Let there be k_i stones of color i such that $k_1 + \ldots + k_b = n$ and suppose that n is prime. How many bracelets can you form with these stones? Check your formula for $n = 5$, $k_1 = 2$, $k_2 = 2$, $k_3 = 1$. Recall that for bracelets, the only symmetries we consider are rotations.

Aufgabe 43. Consider a solid which consists of two similar pyramids with a square base such that the squares are glued together. This solid has 6 vertices, 8 triangular faces and 12 edges.

(a) Find a presentation of the group G of symmetries and draw a Cayley-graph.
(b) Determine the cycle indicator series for the action of G on (i) the faces, (ii) the vertices, (iii) the edges.
(c) How many ways are there to color the faces with b colors.
(d) How many ways are there to color the solid with four white and four black faces.

Aufgabe 44. Es sei P ein Poset, in dem alle Ketten endlich sind. Eine Funktion r von P nach $\mathbb{Z}$ heißt *Rangfunktion*, wenn für alle vergleichbaren Punkte x und y in P gilt

$$x \lessdot y \iff r(x) + 1 = r(y).$$

(a) Zeigen Sie, dass wenn P ein Minimum hat, die Jordan-Dedekind Eigenschaft genau dann erfüllt ist, wenn P eine Rangfunktion hat.
(b) Gilt dies auch, wenn P ein $\wedge$-Halbverband ist? (Anm.: Das heißt, dass jedes Punktepaar ein Infimum hat.)
(c) Charakterisieren Sie jene Posets mit Rangfunktion, deren Rangfunktion durch die Wahl eines einzigen Werts $r(x)$, für ein $x \in P$, eindeutig bestimmt ist.

Hinweis zu (c): Nennen Sie zwei Elemenete x und y von P äquivalent, wenn es eine endliche Folge $x = z_0, \ldots, z_n = y$ gibt, sodass es von x_i nach x_{i+1} oder von x_{i+1} nach x_i eine Kette gibt. Interpretieren Sie die Äquivalenzklassen im Hasse-Diagramm geometrisch.

Aufgabe 45. Wieviele Antiketten hat der Teilmengenverband $([n], \subset)$ für $n = 2$ und $n = 3$?

Aufgabe 46. A lattice $(P, \leq)$ is called *distributive* if $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, for all $x, y, z \in P$.

(a) Show that a lattice is distrutive if and only if $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, for all $x, y, z \in P$.
(b) For which $n \in \mathbb{N}$ is the divisor lattice $(T_n, |\,)$ distributive?
(c) For which $n \in \mathbb{N}$ is the subset lattice $(\mathcal{P}([n]), \subset)$ distributive?

Aufgabe 47. Zeigen Sie, dass jeder Verband mit höchstens vier Elementen distributiv ist.

Aufgabe 48. Zeigen Sie, dass es fünf Isomorphieklassen von fünfelementigen Verbänden gibt, von denen drei distributiv und zwei nicht distributiv sind. Zeichnen Sie die entsprechenden Hasse-Diagramme.

Aufgabe 49.

(a) Sei P ein endliches Poset und $f : P \to P$ eine ordnungserhaltende Bijektion. Zeigen Sie, daß dann auch f^{-1} ordnungserhaltend ist.
(b) Zeigen Sie, daß (a) nicht auch für unendliche Posets gilt.

Aufgabe 50. Eine Kette heißt *maximal*, wenn sie in keiner anderen Kette enthalten ist. Es bezeichne $\ell(P)$ die Länge einer längsten Kette eines Posets $(P, \leq)$. Im folgenden nehmen wir an, dass das Poset $(P, \leq)$ keine isolierte Element hat.

(a) Man finde ein Poset mit den folgenden Eigenschaften.
  (i) Jedes Element liegt in einer Kette der Länge $\ell(P)$.
  (ii) Es gibt eine maximale Kette, die kürzer als $\ell(P)$ ist.
(b) Es sei P ein Poset, in dem alle $x, y \in P$ mit $x \lessdot y$ in einer Kette der Länge $\ell(P)$ liegen. Zeigen Sie, dass dann bereits *alle* maximalen Ketten Länge $\ell(P)$ haben.

Aufgabe 51. Es seien h und n natürliche Zahlen mit $2h \leq n$. Sei $\mathcal{A}$ eine Antikette in $([n], \subset)$, deren Elemente höchstens h-elementig sind. Zeigen Sie, dass $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{h}$.

Aufgabe 52. (Erdös 1945) Es sei I ein abgeschlossenes reelles Einheitsintervall und $x_1, \ldots, x_n$ eine Folge von reellen Zahlen, die alle größer als 1 sind. Zeigen Sie, dass es höchstens

$$\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} \quad \text{Linearkombinationen} \quad \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i$$

gibt, die in I liegen, und deren Koeffizienten ϵ_i entweder gleich 0 oder 1 sind.

Hinweis: Betrachten Sie die Menge der Indizes i, für die $\epsilon_i = 1$ ist.

Aufgabe 53. Finden Sie eine symmetrische Kettenzerlegung des Teilerverbandes $(T_{1830125}, |\,)$.

Anmerkung: Es reicht, wenn Sie im Ergebnis Primzahlpotenzen angeben. Dazu braucht man weder Taschenrechner noch Computer.

Aufgabe 54. Ein *algebraischer Verband* $(P, \vee, \wedge)$ ist eine Menge P mit zwei Verknüpfungen $\vee : P \times P \to P$ und $\wedge : P \times P \to P$, welche für alle x, y und z in P folgende Eigenschaften erfüllen:

- $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ und $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (Assoziativität)
- $x \vee y = y \vee x$ und $x \wedge y = y \wedge x$ (Kommutativität)
- $x \vee (x \wedge y) = x$ und $x \wedge (x \vee y) = x$ (Absorbtionsgesetze)

(i) Zeigen Sie, dass daraus die *Idempotenz* der Verknüpfungen folgt. Das heißt,

$$x \vee x = x \quad \text{und} \quad x \wedge x = x.$$

(ii) Zeigen Sie, dass jeder Ordnungsverband bezüglich Supremum $\vee$ und Infimum $\wedge$ ein algebraischer Verband ist.
(iii) Definieren Sie auf einem algebraischen Verband $(P, \vee, \wedge)$ eine Halbordnung, die den algebraischen Verband zu einem Ordnungsverband macht, und zwar so, dass $\vee$ und $\wedge$ im Sinne des Ordnungsverbandes und im Sinne des algebraischen Verbandes die gleichen Funktionen $P \times P \to P$ sind. Kurz und umgangssprachlich: algebraische Verbände und Ordnungsverbände sind das selbe.

Aufgabe 55. Zeigen Sie, dass jede Halbordnung zu einer totalen Ordnung erweitert werden kann.

Hinweis: Die Menge der Halbordnungsrelationen auf P wird durch die Enthaltensrelation selbst zu einem Poset. Zeigen Sie, dass dieses Poset das Lemma von Zorn erfüllt und zeigen Sie, dass alle maximalen Elemente totale Ordnungen sind. Ist dieses Poset ein Verband?

Aufgabe 56. Es sei $P = [9]$, ein Poset dessen Ordnungsrelation definiert ist durch folgende saturierte Ketten

$$5 \lessdot 7 \lessdot 2 \lessdot 3 \lessdot 4, \quad 5 \lessdot 6 \lessdot 9 \lessdot 4, \quad 5 \lessdot 6 \lessdot 2 \lessdot 8 \quad \text{und} \quad 5 \lessdot 1 \lessdot 2.$$

Ist dieses Poset ein Verband? Gibt es ein Maximum oder ein Minimum? Wieviele maximale bzw. minimale Elemente gibt es? Zeichnen Sie das Hasse-Diagramm und bestimmen Sie Zetafunktion und Möbiusfunktion in Form von oberen Dreiecksmatrizen.

Aufgabe 57. Ein Poset P ist die Vereinigung von fünf disjunkten endlichen Mengen A_i, $1 \leq i \leq 5$. Jedes Element aus A_i, $1 \leq i \leq 4$, wird von jedem Element aus A_{i+1} bedeckt. Sonst bedeckt kein Element ein anderes. Drücken Sie die Werte der Möbiusfunktion durch die Kardinalitäten der Mengen A_i aus.