Proseminar zur Diskreten Mathematik

Ilse Fischer[1], WS 06/07

(1) In einer Schachtel sind 4 rote, 2 blaue, 5 gelbe und 3 grüne Stifte. Wenn man die Stifte mit geschlossenen Augen zieht, wieviele muss man nehmen, um sicher von jeder Farbe einen zu haben?

(2) In einer Lade sind 4 rote, 2 blaue, 5 gelbe und 3 grüne Socken. Wenn man nun die Socken mit geschlossenen Augen zieht, wieviele muss man nehmen, um sicher zwei gleichfarbige Socken zu haben?

(3) (a) Von 6 Personen sind manche miteinander befreundet und manche nicht. Zeige, dass zwei von ihnen gleichviele Freunde in dieser Gruppe haben. (Hinweis: In diesem Beispiel gibt es keine "einseitigen" Freundschaften. Betrachte die Fälle, dass jemand gar keine Freunde hat und dass alle mindestens einen Freund haben, getrennt.)
(b) Zeige, dass es in Wien zwei Personen gibt, die mit der gleichen Anzahl von Wienern befreundet sind.

(4) Eine Maus findet einen großen Würfel Käse, der aus 27 kleinen gleichgroßen Würfeln besteht. Ist es möglich, dass die Maus die 26 äußeren Würfel so frisst, dass immer nur direkt benachbarte Würfel nacheinander drankommen?

(5) Es sind einige Münzen gegeben, von denen eine leichter ist, die anderen alle gleich schwer. Was ist die größte Anzahl von Münzen, unter denen man mit zwei Wägungen mit einer Balkenwaage sicher die leichtere herausfinden kann?

(6) Beim Lotto "6 aus 45" werden aus den Zahlen $1 - 45$ zufällig sechs gezogen. Dann wird noch eine siebente als Zusatzzahl bestimmt. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit für einen Sechser, wie hoch für einen Fünfer und wie hoch für einen Fünfer mit Zusatzzahl?

(7) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit bei "6 aus 45", dass unter den 6 gezogenen Zahlen zwei aufeinanderfolgende Zahlen sind?

(8) (a) 6 Personen spielen bei einem (kleinen) Tennisturnier mit. Auf wieviele Arten kann man sie in drei Paare für die erste Runde einteilen?
(b) Löse dieselbe Aufgabe für $2n$ Personen.

(9) Zeige, dass folgendes gilt:

$$\binom{n}{0} < \binom{n}{1} < \cdots < \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor} = \binom{n}{\lceil n/2 \rceil} > \dots \binom{n}{n}$$

(Diese Eigenschaft heisst Unimodalität des Binomialkoeffizienten.)

[1]inspiriert durch Übungsbeispiele von Johann Cigler, Theresia Eisenkölbl und Christian Krattenthaler

(10) Man gebe kombinatorische Beweise für die folgenden Binomialidentitäten:
  (a) $n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$. (Anleitung: Wieviele Möglichkeiten gibt es, aus einer n-elementigen Menge eine k-elementige Teilmenge auszuwählen und in dieser ein Element rot, die restlichen Elemente gelb zu färben?)
  (b) $\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i} = n2^{n-1}$.

(11) Man gebe kombinatorische Beweise für die folgenden Binomialidentitäten:
  (a) $\binom{n+1}{k+1} = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k}$.
  (b) $\binom{n}{k}\binom{k}{m} = \binom{n}{m}\binom{n-m}{k-m}$.

(12) Es sei S eine n-elementige Menge. Wieviele Folgen $(T_1, T_2, \ldots, T_k)$ von Teilmengen von S gibt es, sodass

$$T_1 \subseteq T_2 \subseteq \cdots \subseteq T_k?$$

(13) Im Parlament eines Landes gibt es 151 Sitze und drei Parteien. Wieviele Möglichkeiten der Sitzverteilung gibt es, sodass keine Partei eine absolute Mehrheit hat?

(14) Welche Identität für Binomialkoeffizienten ergibt sich durch Ablesen des Koeffizienten von z^{2k} auf beiden Seiten der Gleichung

$$(1 - z^2)^n = (1 - z)^n(1 + z)^n?$$

(15) Wieviele Kompositionen von n in lauter ungerade Summanden gibt es? (Drücke die Antwort durch Fibonaccizahlen aus.)
(Hinweis: Fallunterscheidung letzter Summand ist 1 oder grösser.)

(16) Verwende erzeugende Funktionen, um geschlossene Ausdrücke für die folgenden Folgen zu berechnen:
  (a) $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ und $a_0 = 1, a_1 = 2$
  (b) $a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$ und $a_0 = 2, a_1 = 5$

(17) Zeige, dass die Multiplikation von formalen Potenzreihen assoziativ und kommutativ ist.

(18) Wieviele Möglichkeiten gibt es, ein $2 \times n$ – Rechteck mit 2×1 – Dominos und 2×2 – Quadraten zu überdecken?

(19) Es sei $f(m, n)$ die Anzahl der Wege von $(0, 0)$ nach (m, n) in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, wobei die einzelnen Schritte von der Form $(1, 0)$ (Schritt in die x-Richtung), $(0, 1)$ (Schritt in die y-Richtung) oder $(1, 1)$ (diagonaler Schritt) sind. Man zeige, dass für die erzeugende Funktion dieser Zahlen

$$\sum_{m,n \geq 0} f(m, n)x^m y^n = \frac{1}{1 - x - y - xy}$$

gilt.

(20) Für ein Fest ist ein runder Tisch mit 7 Sesseln und 7 Namensschildern vorbereitet. Die Gäste übersehen die Namensschilder und setzen sich zufällig so hin, dass niemand am richtigen Platz sitzt. Zeige, dass man den Tisch so drehen kann, dass mindestens zwei der Gäste vor dem richtigen Namensschild sitzen.

(21) Zeige, dass die Zusammensetzung von Potenzreihen assoziativ ist, d.h. präsentiere den Beweis von Satz 2.2.

(22) Es seien $a(z), b(z)$ Potenzreihen und $n \in \mathbb{Z}$. Beweise folgende Rechenregeln für den Differentiationsoperator.
(a) $D(a \cdot b) = (D\,a) \cdot b + a \cdot (D\,b)$
(b) $D(a^n) = na^{n-1} \cdot (D\,a)$ (Für $n < 0$ muss man $a_0 \neq 0$ voraussetzen.)
(c) Ist $b_0 \neq 0$, dann ist

$$D\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{(D\,a) \cdot b - a \cdot (D\,b)}{b^2}.$$

(23) Es seien $a(z), b(z)$ Potenzreihen mit $b_0 = 0$ und $b_1 \neq 0$. Dann ist

$$D(a \circ b) = ((D\,a) \circ b) \cdot (D\,b).$$

(24) Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir definieren die Binomialreihe

$$B(\alpha)(z) := \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n,$$

wobei

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Zeige, dass
(a) $B(\alpha)(z) = (1+z)^\alpha$, wenn $\alpha \in \mathbb{Z}$, und
(b) $B(\alpha)(z) \cdot B(\beta)(z) = B(\alpha+\beta)(z)$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(25) Wieviele Möglichkeiten gibt es für n Personen einen Kreis zu bilden, wobei zwei Anordnungen als gleich betrachtet werden sollen, wenn jede Person in beiden dieselben NachbarInnen hat (nicht unbedingt auf denselben Seiten)?

(26) Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Glieder der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, die der Rekursion $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2} + (-1)^n$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = a_1 = 1$ genügt.

(27) Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Glieder der Folge $(a_n)_{n\geq 0}$, die der Rekursion $a_n = -a_{n-1} + 5a_{n-2} - 3a_{n-3}$ mit den Anfangsbedingungen $a_0 = 7, a_1 = -12, a_2 = 49$ genügt.

(28) Auf wieviele Arten kann ein $3 \times 2n$-Rechteck mit Dominios überdeckt werden? (Hinweis: Bezeichne mit a_n diese Anzahl und mit b_n die Überdeckungen eines solchen Rechtecks, bei dem in der letzten Spalte ein Domino fehlt. Zeige, dass $a_n = a_{n-1} + 2b_n$ und $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$. Leite daraus Gleichungen für die erzeugenden Funktionen a und b her, aus denen sich a und b berechnen lässt.)

(29) Finde einen geschlossenen Ausdruck für die Folge mit $a_0 = 1$ und

$$\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k} = 1.$$

(30) Finde kombinatorische Beweise für die folgenden beiden Identitäten:

(a) $S(n+1, m+1) = \sum\limits_{k=m}^{n} \binom{n}{k} S(k, m)$

(b) $B_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$

(31) Wir definieren $p_m(x) = x(x-1)\dots(x-m+1)$. Zeige, dass $\sum\limits_{k=0}^{n} p_m(k) = p_{m+1}(n+1)/(m+1)$ für $m \geq 1$. (Hinweis: $p_m(x) = \frac{1}{m+1}\left(p_{m+1}(x+1) - p_{m+1}(x)\right)$.) Benütze das und die Stirlingzahlen, um $\sum\limits_{k=0}^{n} k^m$ für $m = 1, 2, \dots, 5$ zu berechnen.

(32) Zeige, dass die Anzahl aller Partitionen einer n-elementigen Menge, wo in keinem Block zwei aufeinanderfolgende Zahlen enthalten sind, gleich der Bellzahl B_{n-1} ist.

(33) Zeige $B_n < n!$ für alle $n > 2$. (Hinweis: Finde eine Permutation zu jeder Partition.)

(34) Für welche Folge $k = [k_1, k_2, \dots, k_n]$ ergibt sich die größte Anzahl an Permutationen in $\mathcal{S}_n$ mit Zyklentyp k.

(35) Finde einen kombinatorischen Beweis für die Gleichung $I_{n+1} = I_n + n\, I_{n-1}$, wobei I_n die Anzahl der Involutionen in $\mathcal{S}_n$ ist.

(36) Berechne die folgenden Summen.

(a) $\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$

(b) $\sum\limits_{k=0}^{n} \sum\limits_{j=k}^{n} \binom{j}{k} \frac{3^k}{2^j}$

(c) $\sum\limits_{k_1=0}^{n} \sum\limits_{k_2=0}^{n} \sum\limits_{k_3=0}^{n} \binom{k_1}{k_2} \binom{k_3}{k_1} x^{k_2}$

(37) Es sei $\varphi(n)$ die Anzahl der zu n relativ primen Zahlen k mit $1 \leq k \leq n$. Beweise mit dem Prinzip von Inklusion und Exklusion, dass

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

(38) Es sei $f(m,n)$ die Anzahl der $m \times n$-Matrizen mit Einträgen 0 und 1, wobei in jeder Zeile und Spalte zumindest ein Einser vorkommen soll. Beweise die Gleichung

$$f(m,n) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (2^{n-k} - 1)^m.$$

(39) Berechne

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2k}{k} 4^{-k}.$$

(40) Berechne

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{k^4 4^k}{\binom{2k}{k}}.$$

(41) Berechne

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \binom{2n-2k}{n+a}.$$

(42) Berechne

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+k}{k} 2^{-k}.$$

(43) Zeige, dass es für n und $q \geq 2$ genau dann einen vollständigen q-Baum mit n Blättern gibt, wenn $q-1$ ein Teiler von $n-1$ ist.

(44) Es seien $m \cdot n$ Leute in einem $m \times n$-Rechteck angeordnet. Wir sollen die unbekannte Person X durch Fragen der Art "Ist X in der i-ten Zeile?", beziehungsweise "Ist X in der j-ten Spalte?" finden. Wieviele Fragen benötigen wir?

(45) Es sei $S = \{1, 2, \ldots, n\}$ gegeben und $x \in S$ ein unbekanntes Element. Zur Verfügung stehen nur die Tests "$x < i$?" für $i = 2, 3, \ldots, n$ mit ja/nein Antworten. Zeige, dass $L = \lceil \log_2 n \rceil$ die optimale Länge eines Suchalgorithmus ist.