Ein Prüfungsbeispiel

Wende den Gosper-Algorithmus auf $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)(k+2)}$ *an.*

$t_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)}$. Daher

$$\frac{t_{k+1}}{t_k} = \frac{k+1}{k+3}.$$

Wähle $a(k) = k+1$, $b(k) = k+3$ und $c(k) = 1$. Wir sind im Fall 2 der Gradbestimmung. Es ist

$$d = \deg c(k) - \deg a(k) + 1 = 0$$

oder

$$d = \frac{2-1}{1} = 1.$$

($B = 2$ weil $b(k-1) = k+2$.) Daher $x(k) = x_0 + x_1 k$. Wir setzen

$$a(k)x(k+1) - b(k-1)x(k) = c(k)$$

an, d.h.

$$(k+1)(x_0 + x_1 k + x_1) - (k+2)(x_0 + x_1 k) = 1.$$

Man sieht, dass $x_0 = -1$ und $x_1 = 0$ eine Lösung ist. Daher ist

$$s_k = \frac{b(k-1)}{c(k)} x(k) t_k = -\frac{1}{k+1}$$

und

$$t_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)} = -\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+1}.$$

Folglich ist

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(-\frac{1}{k+2} + \frac{1}{k+1} \right) = -\frac{1}{n+1} + 1 = \frac{n}{n+1}.$$