Aufgabe 34

Für welche Folge $k = [k_1, \ldots, k_n]$ ergibt sich die größte Anzahl an Permutationen in $\mathcal{S}_n$ mit Zyklentyp k?

Aus der Vorlesung wissen wir, dass

$$\frac{n!}{\prod_{i=1}^{n} k_i! i^{k_i}}$$

die Anzahl der Permutationen mit Zyklentyp k ist. Daher müssen wir $\prod_{i=1}^{n} k_i! i^{k_i} =: z(k_1, \ldots, k_n)$ unter den Nebenbedingungen $(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$, $k_i \geq 0$ und $\sum_{i=1}^{n} i k_i = n$ minimieren. Es sei $m(n)$ dieses Minimum. Wegen $z(1, 0, \ldots, 0, 1, 0) = n-1$ ist $m(n) \leq n-1$ für $n \geq 2$. Wir wollen zeigen, dass Gleichheit gilt.

Dazu genügt es zu zeigen, dass $m(n-1) < m(n)$ für alle $n \geq 3$: Das folgt aus $m(2) = 1$ (was wegen $z(k_1, k_2) \in \{1, 2, \ldots\}$ und $m(2) \leq 1$ der Fall ist) und weil aus der strengen Monotonie und der Ganzzahligkeit von $m(n)$ dann induktiv folgt, dass $m(n) \geq n-1$, was gemeinsam mit $m(n) \leq n-1$ das Gewünschte ergibt.

Um die strenge Monotonie zu zeigen, konstruieren wir zu einem optimalen $(k_1, \ldots, k_n)$ für n ein zulässiges $(l_1, \ldots, l_{n-1})$ für $n-1$, das $z(l_1, \ldots, l_{n-1}) < z(k_1, \ldots, k_n) = m(n)$ erfüllt.

Es sei also $(k_1, \ldots, k_n)$ eine optimale Lösung für die n-te Instanz. Wir nehmen zuerst an, dass es ein i gibt, sodass $k_i < k_{i+1}$. Wir bemerken, dass dann entweder $k_n = 0$ oder $i = n-1$ und $k_n = 1$, und definieren $(l_1, \ldots, l_{n-1}, 0) = (k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i + 1, k_{i+1} - 1, k_{i+2}, \ldots, k_n)$. Es ist dann $\sum_{i=1}^{n-1} i\, l_i = n-1$ und $z(l_1, \ldots, l_{n-1}) < z(k_1, \ldots, k_n)$, weil

$$(k_i + 1)! i^{k_i+1} (k_{i+1} - 1)! (i+1)^{k_{i+1}-1} < k_i! i^{k_i} k_{i+1}! (i+1)^{k_{i+1}}$$

wegen der Voraussetzung, dass $k_i < k_{i+1}$.

Daher können wir ab nun annehmen, dass $(k_1, \ldots, k_n)$ schwach fallend ist. Nun betrachten wir den Fall, dass $k_1 > 1$. Wegen $n \geq 2$ ist dann $k_n = 0$. Wir definieren $(l_1, \ldots, l_{n-1}) = (k_1 - 1, k_2, \ldots, k_{n-1})$. Es ist dann $\sum_{i=1}^{n-1} i\, l_i = n-1$ und $z(l_1, \ldots, l_{n-1}) < z(k_1, \ldots, k_n) = m(n)$, weil $(k_1 - 1)! 1^{k_1 - 1} < k_1! 1^{k_1}$. Daher können wir $k_1 \leq 1$ annehmen.

Es ist daher $(k_1, \ldots, k_n) = (1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots, 0)$. Es sei i maximal, sodass $k_i = 1$. Dann ist $n = 1 + 2 + \ldots + i = i(i+1)/2$ und $m(n) = 1 \cdot 2 \cdots i$. Für $i \geq 3$ ist aber

$$n - 1 = \frac{i(i+1)}{2} - 1 = \frac{i^2 + i - 1}{2} < (i-1)i \leq m(n),$$

ein Widerspruch. Daher ist $i = 1, 2$. Wegen $n \geq 3$ ist $i = 2$ und daher $n = 3$. In diesem Fall verifiziert man $m(2) < m(3)$ direkt.