

# **Kombinatorik**

Markus Fulmek

Sommersemester 2013

Der vorliegende Skriptums-Entwurf basiert auf der Kombinatorik-Vorlesung von Professor Christian Krattenthaler vom Sommersemester 2012. Die einzelnen Kapitel enthalten ausgewähltes Material aus den folgenden Lehrbüchern:

- Spezies: *Combinatorial Species and tree-like Structures* von F. Bergeron, G. Labelle und P. Leroux [1],
- Teilweise geordnete Mengen: *Enumerative Combinatorics I* von R. Stanley [7],
- Asymptotische Abzählung: *Analytic Combinatorics* von P. Flajolet und R. Sedgewick [3].

In diesem Skriptum werden Grundkenntnisse aus Diskreter Mathematik vorausgesetzt, etwa im Ausmaß des Skriptums [4], von wo auch die Notation teils übernommen wurde. Weiters sind Vorkenntnisse aus Analysis (insbesondere Potenzreihen), Linearer Algebra, Algebra (insbesondere Gruppentheorie) und Komplexer Analysis (insbesondere Kurvenintegrale) für das Verständnis des Stoffes wesentlich.

Dieser Entwurf entstand während meiner Vorlesung im Sommersemester 2013: Er enthält sicher noch einige Fehler und Ungereimtheiten — für diesbezügliche Hinweise bin ich sehr dankbar.

Universität Wien, Sommersemester 2013

Markus Fulmek

## Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1. Spezies: Abzählung von kombinatorischen Objekten	1
1.1. Motivierende Beispiele	1
1.2. Spezies, bezeichnet und unbezeichnet	4
1.3. Unbezeichnete Spezies und die Abzählung von Bäumen	5
1.3.1. Abzählung von binären Bäumen	11
1.4. Bijektive Kombinatorik auf Wurzelbäumen	13
1.4.1. Dyck-Pfade der Länge $2n$	13
1.4.1.1. Ebene Bäume $\leftrightarrow$ Dyck-Pfade	14
1.4.1.2. Ebene binäre Bäume $\leftrightarrow$ Ebene Bäume	14
1.5. Ungeordnete Wurzelbäume	14
1.6. Bezeichnete Spezies	15
1.6.1. Kombinatorischer Beweis des Satzes von Cayley	20
1.7. Der Satz von Pólya	21
1.8. Eine Verallgemeinerung	26
1.9. Zykelindikatorreihe	27
Kapitel 2. Teilweise geordnete Mengen	37
2.1. Konstruktion von Posets	42
2.2. Verbände	44
2.2.1. Distributive Verbände	47
2.3. Inzidenzalgebra und Möbiusinversion	50
2.3.1. Die Inzidenzalgebra eines lokal-endlichen Posets	51
2.3.2. Die Zeta-Funktion eines lokal-endlichen Posets	53
2.3.3. Die Möbiusinversion	54
2.3.4. Konkrete Berechnung der Möbiusfunktion	57
2.3.5. Möbiusalgebra eines lokal-endlichen Verbands	61
Kapitel 3. Asymptotische Abzählung	67
3.1. Die <i>Landau-Notation</i>	67
3.2. Wiederholung: Komplexe Analysis	70
3.3. Singularitätenanalyse	74
3.3.1. Die Exponential Growth Formula	75
3.3.2. Rationale Funktionen	78
3.3.3. Meromorphe Funktionen	79
3.3.4. Mehrfache Singularitäten	83
3.3.5. “Standardisierte” Singularitätenanalyse	84
3.3.5.1. Die Gammafunktion	85
3.3.5.2. Asymptotik für “Standardfunktionen”	88

3.3.5.3. Transfer–Theoreme	95
3.4. Sattelpunktmethode	100
3.4.1. Heuristik: Kurve durch Sattelpunkt	101
3.4.2. Der Satz von Hayman	110
3.4.3. Ein Sattelpunktsatz über große Potenzen	115
3.5. Asymptotik von kombinatorischen Summen	120
Literaturverzeichnis	123

## KAPITEL 1

# Spezies: Abzählung von kombinatorischen Objekten

Die Theorie der *Spezies* liefert einen allgemeinen Rahmen für bezeichnete und unbezeichnete kombinatorische Objekte und ihre erzeugenden Funktionen. Man kann diese Theorie sehr abstrakt angehen; wir wollen uns dem Thema hier aber mithilfe von ein paar illustrativen Beispielen nähern. (Sehr viel mehr Material als wir hier behandeln findet man im Lehrbuch [1].)

### 1.1. Motivierende Beispiele

BEISPIEL 1.1. *Die Anzahlen*

$$B_n := \# (\text{Partitionen von } [n])$$

heißen Bell-Zahlen. Aus der Betrachtung jenes Blocks, der das größte Element  $n$  enthält, erhält man sofort die Rekursion

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} \cdot B_k \text{ für } n \geq 0, \quad (1.1)$$

mit der Anfangsbedingung  $B_0 = 1$ . Die Folge  $(B_n)_{n \geq 0}$  beginnt so:

$$1, 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877, 4140, 21147, 115975 \dots$$

Wir betrachten die exponentiell erzeugende Funktion (siehe z.B. [4, Abschnitt 2.2]) dieser Zahlen

$$B(z) := \sum_{n \geq 0} B_n \cdot \frac{z^n}{n!}.$$

Wenn wir (1.1) mit  $\frac{z^n}{n!}$  multiplizieren und (formal) über alle  $n \geq 0$  summieren, dann erhalten wir

$$\underbrace{\sum_{n \geq 0} B_{n+1} \cdot \frac{z^n}{n!}}_{=\frac{dB(z)}{dz}} = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{n-k} B_k \right) \frac{z^n}{n!} = \underbrace{\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \frac{B_k}{k!} \frac{1}{(n-k)!} z^n}_{=B(z) \cdot e^z}.$$

Die Differentialgleichung

$$\frac{dB}{B dz} = \frac{d \log B}{dz} = e^z$$

können wir ganz leicht lösen:

$$\log(B) = e^z + C \implies B(z) = e^{e^z + C},$$

und aus  $B(0) = B_0 = 1$  bekommen wir sofort  $C = -1$ , also insgesamt

$$B(z) = e^{e^z - 1}. \quad (1.2)$$

An dieser Stelle kann man folgende Beobachtung machen: Die Exponentialfunktion  $e^z$  erscheint als die exponentiell erzeugende Funktion  $\text{egf}_{\text{Mengen}}$  der Anzahl aller Teilmengen von  $[n]$  mit  $n$  Elementen. Diese Anzahl ist zwar kombinatorisch wenig interessant (sie ist nämlich konstant gleich 1 für alle  $n \geq 0$ ), aber natürlich können wir dann auch  $e^z - 1$  als die exponentiell erzeugende Funktion  $\text{egf}_{\text{Mengen}_1}$  der Anzahl aller nichtleeren Teilmengen von  $[n]$  mit  $n$  Elementen auffassen (diese Anzahl ist nur unwesentlich komplizierter: 1 für  $n > 0$  und 0 für  $n = 0$ , oder kürzer mit Iversons Notation:  $[n > 0]$ ). Für die exponentiell erzeugende Funktion  $\text{egf}_{\text{Partitionen}}$  gilt also

$$\text{egf}_{\text{Partitionen}} = \text{egf}_{\text{Mengen}}(\text{egf}_{\text{Mengen}_1})$$

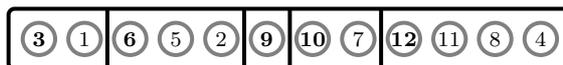
Und tatsächlich sind ja auch Partitionen “Mengen von nichtleeren Mengen”! Das könnte natürlich nur eine zufällige Analogie sein — aber wir werden sehen, daß hier ein “System” dahintersteckt.

Es kommt bei den Blöcken einer Partition von  $[n]$  nicht auf die Ordnung an — wir können also annehmen, daß die Blöcke

- mit ihrem größten Elemente “markiert” sind,
- und entsprechend ihren “Markierungen” geordnet sind.

Zum Beispiel erscheinen die Blöcke der folgenden Partition in dieser “kanonischen” Ordnung so:

$$\{1,3\} \cup \{2,5,6\} \cup \{9\} \cup \{7,10\} \cup \{4,8,11,12\}$$



Hier könnte man auf die Idee kommen, auf die “Numerierung zu verzichten”. Graphisch könnte man sich das für das obige Beispiel so vorstellen:

$$2 + 3 + 1 + 2 + 4$$



Ohne die Numerierung kommt es bei diesen “Blöcken ununterscheidbarer Elemente” nur noch

- auf die *Kardinalität* der einzelnen Blöcke
- und auf die *Ordnung* der Blöcke *verschiedener Größe*

an: Ganz offensichtlich können wir das als *Kompositionen* der natürlichen Zahl  $n$  interpretieren.

BEISPIEL 1.2. *Dieselbe Idee wie in Beispiel 1.1 führt sofort auf die Rekursion für die Anzahl  $K_n$  der Kompositionen von  $n$ :*

$$K_{n+1} = \sum_{k=0}^n 1 \cdot K_k \text{ für } n \geq 0, \quad (1.3)$$

wieder mit der Anfangsbedingung  $K_0 = 1$ . Wir betrachten nun die (gewöhnliche) erzeugende Funktion dieser Zahlen

$$K(z) := \sum_{n \geq 0} K_n \cdot z^n.$$

Wenn wir (1.3) mit  $z^n$  multiplizieren und (formal) über alle  $n \geq 0$  summieren, dann erhalten wir

$$\underbrace{\sum_{n \geq 0} K_{n+1} \cdot z^n}_{= \frac{K(z) - K_0}{z}} = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n 1 \cdot K_k \right) z^n = K(z) \cdot \frac{1}{1-z},$$

was sichtlich auf die Gleichung

$$K - 1 = K \frac{z}{1-z}$$

für  $K(z)$  führt; mit der Lösung

$$K(z) = \frac{1-z}{1-2z} = 1 + \frac{z}{1-2z}.$$

Die letzte Gleichung führt sofort auf die explizite (und wohl bekannte) Darstellung

$$K_n = 2^{n-1} \text{ für } n > 0.$$

Auch hier kann man die analoge Beobachtung zu Beispiel 1.1 machen: Die geometrische Reihe  $\frac{1}{1-z}$  erscheint als die (gewöhnliche) erzeugende Funktion  $\mathbf{gf}_{\text{Mengen}}$  der Anzahl aller Mengen mit  $n$  Elementen, die alle gleich  $\circ$  sind (diese Anzahl ist wieder konstant gleich 1 für alle  $n \geq 0$ ), und  $\frac{1}{1-z} - 1$  erscheint als die (gewöhnliche) erzeugende Funktion  $\mathbf{gf}_{\text{Mengen}_1}$  der Anzahl aller nichtleeren Mengen mit  $n$  Elementen, die alle gleich  $\circ$  sind (diese Anzahl ist wieder  $[n > 0]$ ).

Da die Elemente hier nicht bezeichnet (und daher "identisch") sind, haben wir es eigentlich nicht mit Mengen, sondern mit (sehr einfachen — es gibt ja nur ein Element, das aber beliebig oft vorkommen kann) Multimengen zu tun: Um die Notation nicht zu kompliziert zu gestalten, bleiben wir aber bei der Bezeichnung Mengen. Da die Elemente alle identisch sind, spielt ihre Reihenfolge keine Rolle: (Multi-) Mengen ununterscheidbarer Elemente sind also dieselben "kombinatorischen Objekte" wie Folgen! Und für die (gewöhnliche) erzeugende Funktion  $\mathbf{gf}_{\text{Kompositionen}}$  gilt tatsächlich wieder

$$\mathbf{gf}_{\text{Kompositionen}} = \mathbf{gf}_{\text{Folgen}}(\mathbf{gf}_{\text{Mengen}_1})$$

Und tatsächlich sind ja auch Kompositionen “Folgen von nichtleeren Mengen” (in dem Sinn, daß es nur eine (Multi-)Menge mit  $k$  ununterscheidbaren Elementen gibt, die wir daher getrost mit der Zahl  $k$  identifizieren können). Wir sehen also wieder dieselbe “Analogie” wie in Beispiel 1.1.

## 1.2. Spezies, bezeichnet und unbezeichnet

Die Sache mit den erzeugenden Funktionen können wir uns ja bekanntlich auch so vorstellen, daß wir für eine Familie  $\mathcal{F}$  kombinatorischer Objekte eine Gewichtsfunktion  $\omega : \mathcal{F} \rightarrow R$  ( $R$  ein Ring,  $\omega(O)$  nimmt typischerweise Werte  $z^n$  an, wobei  $n$  eine “charakteristische Kennzahl” von  $O$ , wie Größe, Länge, Anzahl der Teile, etc., ist) angeben und die formale Summe

$$\sum_{O \in \mathcal{F}} \omega(O)$$

bilden, die wir (ebenso formal) auch so anschreiben können:

$$\sum_{x \in R} c_x \cdot x,$$

wobei  $c_x$  die Anzahl der Objekte in  $\mathcal{F}$  ist, denen das Gewicht  $x$  zugeordnet ist: Natürlich sollte die Anzahl  $c_x$  für jedes feste  $x$  endlich sein, damit das einen Sinn ergibt. Diese Betrachtung führt sofort auf die folgende Definition:

**DEFINITION 1.1.** *Wir bezeichnen eine Familie  $\mathcal{A}$  von kombinatorischen Objekten, von denen jedes einzelne Objekt aus einer endlichen Zahl  $n$  von “Atomen” besteht (und das darüber hinaus eine mehr oder weniger komplizierte “Struktur” haben kann), wobei die Atome*

- *entweder mit den ersten  $n$  natürlichen Zahlen bezeichnet sein können (siehe Beispiel 1.1),*
- *oder vollständig ununterscheidbar (“unbezeichnet”) sein können (siehe Beispiel 1.2),*

*als bezeichnete Spezies bzw. als unbezeichnete Spezies (allgemein: Spezies). Die Anzahl  $n$  von Atomen, aus denen ein Objekt  $A$  einer Spezies besteht, heißt die Größe von  $A$ :  $\|A\| = n$ .*

*Etwas abstrakter kann man das so ausdrücken: Zu einer Spezies  $\mathcal{A}$  gehört eine Größenfunktion  $\#_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}_0$ , die durch  $\#_{\mathcal{A}}(A) = \|A\|$  gegeben ist.*

*Für eine Spezies setzen wir immer voraus, daß die Teilfamilien*

$$\mathcal{A}_n := \{A \in \mathcal{A} : \|A\| = n\}$$

*für alle  $n \in \mathbb{N}$  endlich sind, d.h.,*

$$a_n := |\mathcal{A}_n| < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

*Insbesondere ist also eine Spezies  $\mathcal{A}$  immer abzählbar.*

Die Größenfunktion liefert natürlich eine Gewichtsfunktion

$$\omega_{\mathcal{A}}(A) := z^{\|A\|} \text{ für unbezeichnete Spezies,}$$

$$\omega_{\mathcal{A}}(A) := \frac{z^{\|A\|}}{\|A\|!} \text{ für bezeichnete Spezies.}$$

Die erzeugende Funktion einer (unbezeichneten oder bezeichneten) Spezies  $\mathcal{A}$  ist dann die formale Potenzreihe

$$\mathbf{gf}_{\mathcal{A}}(z) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \omega_{\mathcal{A}}(A) = \sum_{A \in \mathcal{A}} z^{\|A\|} = \sum_{n \geq 0} a_n z^n,$$

$$\mathbf{egf}_{\mathcal{A}}(z) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \omega_{\mathcal{A}}(A) = \sum_{A \in \mathcal{A}} \frac{z^{\|A\|}}{(\|A\|)!} = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$$

### 1.3. Unbezeichnete Spezies und die Abzählung von Bäumen

BEISPIEL 1.3. Eine ganz einfache Spezies besteht nur aus einem einzigen Objekt, das wiederum aus einem einzigen Atom besteht:

$$\mathbf{Atom} = \{\circ\}$$

die erzeugende Funktion ist

$$\mathbf{gf}_{\mathbf{Atom}}(z) = z.$$

BEISPIEL 1.4. Eine weitere einfache Spezies ist (Multi-)Mengen (von Atomen, die als unbezeichnete Objekte ununterscheidbar sind):

$$\mathbf{Mengen} = \{\emptyset, \{\circ\}, \{\circ, \circ\}, \dots\}$$

die erzeugende Funktion ist

$$\mathbf{gf}_{\mathbf{Mengen}}(z) = 1 + z + z^2 + \dots = \frac{1}{1 - z}.$$

Eine einfache “Modifikation” wäre die Spezies  $\mathbf{Mengen}_1$  der nichtleeren Mengen (von Atomen); die erzeugende Funktion ist dann

$$\mathbf{gf}_{\mathbf{Mengen}_1}(z) = z + z^2 + z^3 + \dots = \frac{z}{1 - z} = \frac{1}{1 - z} - 1.$$

BEMERKUNG 1.1. Da die Atome hier unbezeichnet (also nicht unterscheidbar) sind, kann ihre Reihenfolge auch keine Rolle spielen: Daher ist die Spezies  $\mathbf{Mengen}$  (von Atomen) gleich der Spezies  $\mathbf{Folgen}$  (von Atomen). Das hängt aber mit der Ununterscheidbarkeit der Elemente (Atome) zusammen: Folgen von unterscheidbaren Elementen sind natürlich nicht dieselben kombinatorischen Objekte wie (Multi-)Mengen dieser Elemente!

DEFINITION 1.2. Ein Baum ist ein einfacher zusammenhängender Graph ohne Kreise.

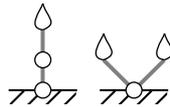
Ein Wurzelbaum ist ein Baum mit einem ausgezeichneten Knoten, der als Wurzel bezeichnet wird. Ein Wurzelbaum hat immer eine “natürliche

*Orientierung* (“von der Wurzel weg”), er erscheint also als gerichteter Graph: Knoten mit Ausgangsgrad 0 heißen Blätter, alle anderen Knoten heißen innere Knoten.

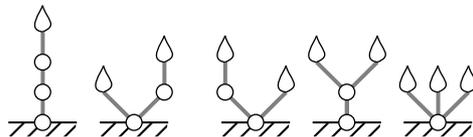
Jeder Baum ist natürlich planar (in die Ebene einbettbar, sodaß zwei beliebige eingebettete Kanten einander höchstens in einem Knoten schneiden): Ein Wurzelbaum in einer festen Einbettung in die Ebene, wobei die Reihenfolge der Unterbäume relevant ist, heißt ebener oder geordneter Wurzelbaum.

Als Größe eines Baumes (im Sinne von Definition 1.1) sehen wir die Anzahl seiner Knoten an: Bäume sind also ein weiteres Beispiel für Spezies.

Zum Beispiel gibt es die folgenden 2 ebenen Wurzelbäume mit 3 Knoten:



Auf 4 Knoten gibt es die folgenden 5 ebenen Wurzelbäume von denen der 2. und der 3. aber als ein einziger “normaler” (also “nicht-ebener”) Wurzelbaum angesehen würden:



**BEMERKUNG 1.2** (Hier immer: Wurzelbäume!). *Insbesondere für die Computerwissenschaften sind Algorithmen (z.B. Suchalgorithmen) und Datenstrukturen, die man aus Bäumen “zusammensetzen” kann, interessante Objekte. Da diese Bäume meistens einen “ausgezeichneten Knoten” (eine Wurzel) haben, werden wir im folgenden immer Wurzelbäume betrachten (wenn nicht ausdrücklich anders angegeben), aber der Einfachheit halber von Bäumen sprechen.*

Wie wir im einleitenden Beispiel 1.2 gesehen haben, überträgt sich die kombinatorische Konstruktion “bilde endliche Folgen von Objekten” in die algebraische Konstruktion “setze die erzeugenden Funktion der Objekte in die geometrische Reihe ein”. Diese “Übertragung”

kombinatorische Konstruktion  $\rightarrow$  algebraische Konstruktion

wollen wir nun in weiteren Beispielen betrachten:

BEISPIEL 1.5 (Disjunkte Vereinigung). Wenn zwei Spezies  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  gegeben sind, können wir ihre disjunkte Vereinigung  $\mathcal{C} = \mathcal{A} \dot{\cup} \mathcal{B}$  betrachten; mit der Größenfunktion

$$\#_{\mathcal{C}}(x) := \begin{cases} \#_{\mathcal{A}}(x) & x \in \mathcal{A}, \\ \#_{\mathcal{B}}(x) & x \in \mathcal{B}. \end{cases}$$

Offensichtlich überträgt sich diese Konstruktion wie folgt auf die erzeugenden Funktionen:

$$\mathbf{gf}_{\mathcal{C}} = \mathbf{gf}_{\mathcal{A}} + \mathbf{gf}_{\mathcal{B}}.$$

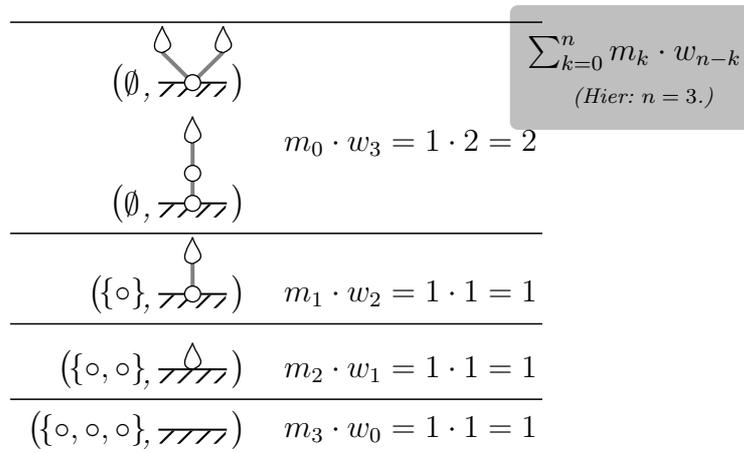
BEISPIEL 1.6 (Cartesisches Produkt). Wenn zwei Spezies  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  gegeben sind, können wir ihr cartesisches Produkt  $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  betrachten; mit der Größenfunktion

$$\#_{\mathcal{C}}((x, y)) := \#_{\mathcal{A}}(x) + \#_{\mathcal{B}}(y).$$

Offensichtlich überträgt sich diese Konstruktion wie folgt auf die erzeugenden Funktionen:

$$\mathbf{gf}_{\mathcal{C}} = \mathbf{gf}_{\mathcal{A}} \cdot \mathbf{gf}_{\mathcal{B}}.$$

Wir führen uns das anschaulich vor Augen anhand der Objekte der Größe 3 im Produkt Mengen  $\times$  ebeneWurzelBaeume:



Ein Spezialfall ist das  $k$ -fache cartesische Produkt einer Spezies  $\mathcal{A}$ , deren Objekte Folgen der Länge  $k$  von Objekten aus  $\mathcal{A}$  sind:

$$\mathcal{A}^k = \underbrace{\mathcal{A} \times \mathcal{A} \times \dots \times \mathcal{A}}_{k \text{ mal}} : \mathbf{gf}_{\mathcal{A}^k} = (\mathbf{gf}_{\mathcal{A}})^k.$$

Falls  $k = 0$ , erhalten wir die einelementige Spezies  $\mathcal{A}^0 = \{\epsilon\}$ , die nur die leere Folge  $\epsilon = ()$  enthält mit  $\|\epsilon\| = 0$ .

Zum Beispiel können wir die kombinatorischen Objekte "Kompositionen einer Zahl  $n$  mit genau  $k$  Teilen" als Spezies  $\mathcal{K}$  (mit Größenfunktion  $n$ ) auffassen: Diese entspricht offensichtlich

$$\mathcal{K} = \text{Mengen}_1^k, \text{ also } \mathbf{gf}_{\mathcal{K}} = (\mathbf{gf}_{\text{Mengen}_1})^k = \left( \frac{z}{1-z} \right)^k.$$

BEISPIEL 1.7 (Folgen). Wenn eine Spezies  $\mathcal{A}$  gegeben ist, die kein Objekt der Größe 0 enthält, können wir beliebig lange endliche Folgen von Objekten aus  $\mathcal{A}$  betrachten, also die Spezies  $\mathcal{A}^*$

$$\mathcal{A}^* := \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{A}^k$$

Gemäß den vorigen Beispielen überträgt sich dies wie folgt auf die erzeugenden Funktionen:

$$\mathbf{gf}_{\mathcal{A}^*} = \sum_{k \geq 0} (\mathbf{gf}_{\mathcal{A}})^k = \frac{1}{1 - \mathbf{gf}_{\mathcal{A}}}.$$

Ein konkretes Beispiel dafür haben wir in Beispiel 1.2 bereits gesehen:

$$\text{Kompositionen} = \text{Mengen}_1^*.$$

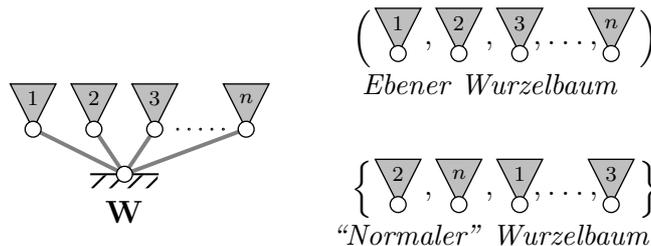
BEMERKUNG 1.3. Warum mußten wir hier voraussetzen, daß  $\mathcal{A}$  keine Objekte der Größe 0 enthält? Weil es in  $\mathcal{A}^*$  sonst unendlich viele Objekte der Größe 0 geben würde, im Widerspruch zu unserer Voraussetzung für Spezies:

$$\| () \| = \| (\epsilon) \| = \| (\epsilon, \epsilon) \| = \| (\epsilon, \epsilon, \epsilon) \| = \dots = 0.$$

ANWENDUNG 1.1. Wenn man in einem nichtleeren Wurzelbaum  $\mathbf{W}$  die Wurzel entfernt, entsteht eine (möglicherweise leere) "Liste" von Zusammenhangskomponenten, die ihrerseits aus nichtleeren Wurzelbäumen besteht: Wenn der Wurzelbaum  $\mathbf{W}$

- geordnet ist, dann sollte man auch die "Liste" als geordnet betrachten (also als Folge) — dann kann man aus der (geordneten) Folge natürlich wieder den ursprünglichen (geordneten) Wurzelbaum  $\mathbf{W}$  eindeutig rekonstruieren,
- ungeordnet ist, dann sollte man auch die "Liste" als ungeordnet betrachten (also als Multimenge) — dann kann man aus der (ungeordneten) Multimenge natürlich wieder den ursprünglichen (ungeordneten) Wurzelbaum  $\mathbf{W}$  eindeutig rekonstruieren.

Die folgende Graphik illustriert diesen einfachen Gedanken:



Wenn wir die Anzahl der ebenen Wurzelbäume auf  $n$  Knoten mit  $f_n$  bezeichnen, dann erhalten wir definitionsgemäß die erzeugende Funktion der Spezies der ebenen Wurzelbäume mit mindestens einem Knoten:

$$f(z) = \sum_{n \geq 1} f_n \cdot z^n = z + z^2 + 2z^3 + 5z^4 + \dots$$

Aus der Beobachtung 1.1 ergibt sich zunächst

$$\text{ebeneWurzelBaeume}_1 = \text{Atom} \times \text{ebeneWurzelBaeume}_1^*$$

und damit dann folgende Funktionalgleichung:

$$f = z \cdot (f^0 + f^1 + f^2 + \dots) = \frac{z}{1 - f}.$$

Diese quadratische Gleichung für  $f$  hat zwei Lösungen, von denen die folgende die richtigen (positiven) Koeffizienten hat:

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^{n+1}. \quad (1.4)$$

Bevor wir die nächste kühne Rechnung beginnen, erinnern wir uns an das ...

### Übertragungsprinzip für formale Potenzreihen

Wenn eine Identität für analytische Funktionen auch für die entsprechenden formalen Potenzreihen sinnvoll ist, dann ist sie automatisch auch eine Identität für formale Potenzreihen.

Umgekehrt: Wenn eine Identität für formale Potenzreihen auch für die entsprechenden analytischen Funktionen sinnvoll ist (das heißt, daß es einen nichttrivialen gemeinsamen Konvergenzradius für alle involvierten Reihen gibt), dann ist sie automatisch auch eine Identität für analytische Funktionen.

BEISPIEL 1.8 (Mengen). Sei  $\mathcal{A}$  eine Spezies, die kein Objekt der Größe 0 enthält. Wenn wir bei Folgen von  $\mathcal{A}$  "auf die Reihenfolge vergessen", erhalten wir die Spezies  $\mathcal{C} = \text{Mengen}(\mathcal{A})$  (wie gesagt: Eigentlich Multimengen — Elemente können wiederholt auftreten): Die Größenfunktion für ein Objekt

$$\{A_1, A_2, \dots, A_k\} \in \mathcal{C}$$

ist (genau wie bei den Folgen) gegeben durch

$$\#_{\mathcal{C}}(\{A_1, A_2, \dots, A_k\}) = \sum_{i=1}^k \#_{\mathcal{A}}(A_i).$$

Also erhalten wir für die erzeugende Funktion

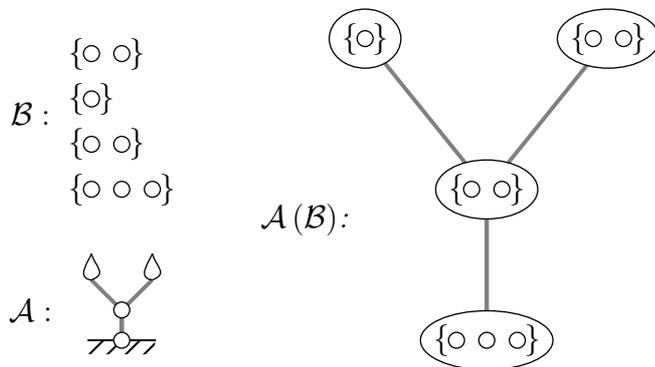
$$\begin{aligned}
 \mathbf{gf}_C(z) &= \sum_{C \in \mathcal{C}} z^{\#C} \leftarrow C = \left\{ \underbrace{A_1, \dots, A_1}_{k_1}, \underbrace{A_2, \dots, A_2}_{k_2}, \dots \right\} \\
 &= \left( \sum_{k_1 \geq 0} (z^{\|A_1\|})^{k_1} \right) \cdot \left( \sum_{k_2 \geq 0} (z^{\|A_2\|})^{k_2} \right) \dots \\
 &= \prod_{A \in \mathcal{A}} \sum_{k \geq 0} (z^{\|A\|})^k \\
 &= \prod_{i \geq 1} \left( \frac{1}{1 - z^i} \right)^{a_i} \leftarrow a_i := |\{A \in \mathcal{A} : \|A\| = i\}| < \infty \\
 &= e^{a_1(z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots) + a_2(z^2 + \frac{z^4}{2} + \frac{z^6}{3} + \dots) + \dots} \leftarrow \log \frac{1}{1-z} = \sum \frac{z^n}{n} \\
 &= \exp \left( \mathbf{gf}_{\mathcal{A}}(z) + \frac{\mathbf{gf}_{\mathcal{A}}(z^2)}{2} + \frac{\mathbf{gf}_{\mathcal{A}}(z^3)}{3} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Zum Beispiel erhalten wir die Spezies Zahlpartitionen (also “ungeordnete” Kompositionen) als Mengen ( $\text{Mengen}_1$ ).

BEISPIEL 1.9 (Zusammensetzung). Seien zwei Spezies  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  gegeben, sodaß  $\mathcal{B}$  kein leeres Objekt (mit Größe Null; vergleiche Bemerkung 1.3) enthält:

$$\nexists B \in \mathcal{B} : \#_{\mathcal{B}}(B) = 0.$$

Dann konstruieren wir die Zusammensetzung von Spezies  $\mathcal{A}(\mathcal{B})$  wie folgt: Wir denken uns alle Atome eines Objektes aus  $\mathcal{A}$  “aufgeblasen” und setzen in jedes solche Atom je ein Objekt aus  $\mathcal{B}$  hinein. Die folgende Graphik veranschaulicht die Konstruktion für  $\mathcal{A} = \text{Wurzelbaeume}$  und  $\mathcal{B} = \text{Mengen}_1$ :



Leider übersetzt sich diese Konstruktion aber nicht in die Zusammensetzung der erzeugenden Funktionen! Zum Beispiel haben wir ja:

$$\text{Mengen}(\text{Mengen}_1) = \text{Zahlpartitionen},$$

aber

$$\frac{1}{1 - \frac{z}{1-z}} \neq \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^i}.$$

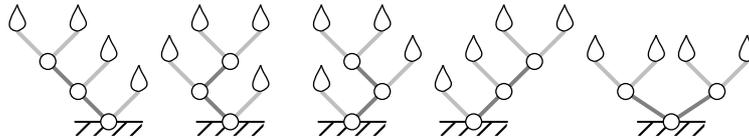
(Das Problem ist offenbar: Die Konstruktion ist ja so nicht eindeutig — in der obigen Veranschaulichung hätten wir die Objekte aus  $\mathcal{B}$  ja auch anders auf die Atome des Objekts aus  $\mathcal{A}$  verteilen können. Wir müssten also sozusagen zuerst alle möglichen “Einsetzungen von Objekten in Atome” konstruieren, und dann herausfinden, wieviele davon eigentlich verschieden sind!)

**1.3.1. Abzählung von binären Bäumen.** Die Nützlichkeit der Betrachtung als Spezies wollen wir nun an typischen Abzählproblemen zeigen.

**DEFINITION 1.3.** Ein Wurzelbaum mit der Eigenschaft, daß jeder Knoten Ausgangsgrad  $\leq 2$  hat, heißt binärer Baum. Anders ausgedrückt: An jedem Knoten eines binären Baumes hängen zwei Teilbäume, die aber auch leer sein können. Ein geordneter binärer Baum ist ein binärer Baum, in dem es auf die Reihenfolge dieser Teilbäume ankommt (es gibt also immer einen linken und einen rechten Teilbaum — selbst dann, wenn einer der Teilbäume leer ist!)

Ein binärer Baum mit der Eigenschaft, daß jeder innere Knoten Ausgangsgrad = 2 hat, heißt vollständiger binärer Baum. (Allgemeiner heißt ein Wurzelbaum mit der Eigenschaft, daß jeder innere Knoten Ausgangsgrad  $m$  hat, vollständiger  $m$ -ärer Baum.)

Wir wollen die Anzahl der vollständigen binären *geordneten* Bäume mit  $n$  inneren Knoten bestimmen: Das ist dasselbe wie die Anzahl der *geordneten* binären Bäume mit  $n$  Knoten. Die folgende Graphik zeigt die Objekte dieser Spezies  $\mathcal{B}$  mit Größe (Knotenanzahl)  $n = 3$ :



Die “kombinatorische Zerlegung” dieser Spezies ist einfach: Ein geordneter binärer Baum ist

- entweder *leer*
- oder er besteht aus einer *Wurzel* (einem Atom) und einem *Paar von Teilbäumen*.

Formal also:

$$\mathcal{B} = \{\epsilon\} \dot{\cup} (\text{Atom} \times \mathcal{B}^2).$$

Dies übersetzt sich in folgende Gleichung für die erzeugende Funktion:

$$\mathbf{gf}_{\mathcal{B}} = 1 + z \cdot (\mathbf{gf}_{\mathcal{B}})^2.$$

Diese quadratische Gleichung für  $\mathbf{gf}_B$  hat wieder zwei Lösungen, von denen

$$\mathbf{gf}_B = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^n \quad (1.5)$$

die “richtige” ist.

Diese einfache Idee funktioniert natürlich auch allgemein für die Spezies der geordneten  $m$ -ären Bäume  $\mathcal{T}_m$ :

$$\mathbf{gf}_{\mathcal{T}_m} = 1 + z \cdot (\mathbf{gf}_{\mathcal{T}_m})^m. \quad (1.6)$$

Für  $m > 2$  ist es aber einfacher, die Koeffizienten der erzeugenden Funktion mit der Lagrangeschen Inversionsformel zu bestimmen:

**SATZ 1.1** (Lagrange–Inversionsformel). *Sei  $g(z)$  eine formale Laurentreihe und  $f(z)$  eine formale Potenzreihe mit verschwindendem konstanten Term. Angenommen, wir entwickeln  $g(z)$  in Potenzen von  $f(z)$ , also*

$$g(z) = \sum_k c_k \cdot f^k(z).$$

Dann berechnen sich die Koeffizienten  $c_n$  durch

$$c_n = \frac{1}{n} \langle z^{-1} \rangle g'(z) f^{-n}(z) \quad \text{für } n \neq 0, \quad (1.7)$$

oder alternativ

$$c_n = \langle z^{-1} \rangle g(z) f'(z) f^{-n-1}(z). \quad (1.8)$$

(Beweis siehe z.B. [4, Anhang A.3].)

**KOROLLAR 1.1** (Lagrange–Inversionsformel). *Sei  $f(z)$  eine formale Potenzreihe mit verschwindendem konstanten Term und  $F(z)$  die bezüglich der Zusammensetzung inverse Reihe (i.e.,  $F(f(z)) = f(F(z)) = z$ ). Dann gilt*

$$\langle z^n \rangle F^k(z) = \frac{k}{n} \langle z^{-k} \rangle f^{-n}(z) \quad \text{für } n \neq 0, \quad (1.9)$$

oder

$$\langle z^n \rangle F^k(z) = \langle z^{-k-1} \rangle f'(z) f^{-n-1}(z). \quad (1.10)$$

Denn (1.6) bedeutet ja nichts anderes, als daß  $(\mathbf{gf}_{\mathcal{T}_m} - 1)$  die Kompositionsinverse zu

$$\frac{z}{(1+z)^m}$$

ist! Gemäß (1.9) ist also für  $n > 0$

$$\begin{aligned} \langle z^n \rangle \mathbf{gf}_{\mathcal{T}_m} &= \frac{1}{n} \langle z^{-1} \rangle \left( \frac{(1+z)^{m \cdot n}}{z^n} \right) \leftarrow \text{Binomischer Lehrsatz!} \\ &= \frac{1}{n} \binom{m \cdot n}{n-1} \leftarrow = \frac{(m \cdot n)(m \cdot n - 1) \cdots (m \cdot n - n + 2)}{n \cdot (n-1)!} \\ &= \frac{1}{n \cdot (m-1) + 1} \binom{m \cdot n}{n}. \end{aligned}$$

### 1.4. Bijektive Kombinatorik auf Wurzelbäumen

Es fällt auf, daß die erzeugenden Funktionen für nichtleere ebene Wurzelbäume (1.4) und geordnete binäre Bäume (1.5) bis auf den Faktor  $z$  gleich sind, und die Anzahlen dieser Objekte mit fester Größe (Knotenzahl) ist im wesentlichen eine *Catalan-Zahl*  $C_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$ : Das läßt sich auch durch *Bijektionen* zeigen.

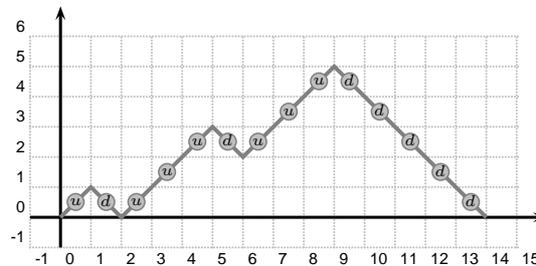
#### 1.4.1. Dyck-Pfade der Länge $2n$ .

DEFINITION 1.4. *Das ganzzahlige Gitter ist der unendliche gerichtete Graph mit Knotenmenge  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  und Kantenmenge*

$$\begin{aligned} &\{((x, y), (x+1, y+1)) : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\} \\ &\cup \{((x, y), (x+1, y-1)) : (x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}. \end{aligned}$$

(Die gerichteten Kanten gehen also immer entweder “einen Schritt nach rechts oben”:  $u$  oder “einen Schritt nach rechts unten”:  $d$ .)

Ein Pfad im ganzzahligen Gitter, der in  $(0, 0)$  beginnt und in  $(2n, 0)$  endet, und der niemals unter die  $x$ -Achse gerät, heißt *Dyck-Pfad* der Länge  $2n$ .



Es ist eine bekannte Tatsache, daß die Anzahl der Dyck-Pfade der Länge  $2n$  gleich der Catalan-Zahl  $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$  ist (siehe z.B. [4, Anhang A.2.2]).

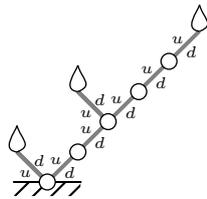
1.4.1.1. *Ebene Bäume*  $\leftrightarrow$  *Dyck-Pfade*. Aus der Graphik wird offensichtlich, daß ein Dyck-Pfad als Wort der Länge  $2n$  über dem Alphabet  $\{u, d\}$  codiert werden kann, wobei

- die Anzahl der  $u$ 's gleich der Anzahl der  $d$ 's gleich  $n$  ist,
- und in jedem "Anfangsabschnitt" des Wortes immer mindestens soviel  $u$ 's vorkommen müssen wie  $d$ 's.

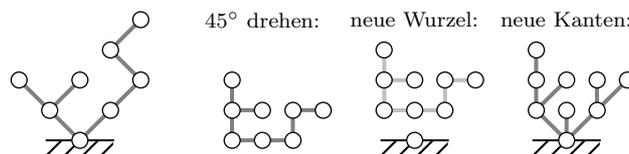
Für die obige Graphik lautet dieses "Codierungswort":

$uduuduuuddddd$ .

Das übersetzt sich sofort in eine Codierung für geordnete Bäume (*Blattlaus-Codierung*). Jeder Baum auf  $n + 1$  Knoten hat genau  $n$  Kanten: Wir stellen uns eine "Blattlaus" vor, die die Kanten des geordneten Wurzelbaums der Reihe nach (immer mit dem linken Teilbaum beginnend) entlangwandert.

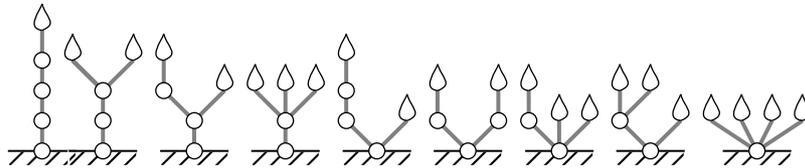


1.4.1.2. *Ebene binäre Bäume*  $\leftrightarrow$  *Ebene Bäume*. Die entsprechende *Rotationskorrespondenz* wird am besten in einer Graphik deutlich:



## 1.5. Ungeordnete Wurzelbäume

Es gibt die folgenden 9 ungeordneten Wurzelbäume mit 5 Knoten:



Gemäß Beobachtung 1.1 entsteht durch "Ausreißen der Wurzel" aus einem ungeordneten, nicht-leeren Wurzelbaum eine (Multi-)Menge von Wurzelbäumen, d.h., für die Spezies der ungeordneten Wurzelbäume  $\mathcal{T}$  gilt:

$$\mathcal{T} = \{\circ\} \times \text{Mengen}(\mathcal{T}). \quad (1.11)$$

Dies überträgt sich wie folgt auf die erzeugende Funktion (siehe Beispiel 1.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{gf}_{\mathcal{T}}(z) &= z \left( \frac{1}{1-z} \right)^{t_1} \cdot \left( \frac{1}{1-z^2} \right)^{t_2} \cdot \left( \frac{1}{1-z^3} \right)^{t_3} \cdots \quad (\text{Cayley}) \\ &= z \cdot \exp \left( \mathbf{gf}_{\mathcal{T}}(z) + \frac{1}{2} \mathbf{gf}_{\mathcal{T}}(z^2) + \frac{1}{3} \mathbf{gf}_{\mathcal{T}}(z^3) + \cdots \right) \quad (\text{Polya}). \end{aligned}$$

Aus der Formel von Cayley lassen sich die Koeffizienten  $t_i$  rekursiv berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{gf}_{\mathcal{T}}(z) &= t_1 z + t_2 z^2 + t_3 z^3 + \cdots \leftarrow \binom{-t}{n} = (-1)^n \binom{t+n-1}{n} \\ &= z \left( 1 + t_1 z + \binom{t_1+1}{2} z^2 + \cdots \right) \cdot \left( 1 + t_2 z^2 + \binom{t_2+1}{2} z^4 + \cdots \right) \cdots \\ &= z + t_1 z^2 + \left( \binom{t_1+1}{2} + t_2 \right) z^3 + \left( \binom{t_1+2}{3} + t_1 t_2 + t_3 \right) z^4 + \cdots \end{aligned}$$

Konkret erhält man:

$$\begin{aligned} \mathbf{gf}_{\mathcal{T}}(z) &= z + z^2 + 2z^3 + 4z^4 + 9z^5 + 20z^6 + 48z^7 + 115z^8 \\ &\quad + 286z^9 + 719z^{10} + 1842z^{11} + \cdots \end{aligned}$$

## 1.6. Bezeichnete Spezies

BEISPIEL 1.10. Die bezeichnete Spezies **Atom** besteht wieder nur aus einem einzigen Element, für das es klarerweise nur eine Numerierung gibt: “ $\circ$  wird mit 1 numeriert”. Die erzeugende Funktion ist daher wieder

$$\mathbf{egf}_{\text{Atom}}(z) = \frac{z}{1!} = z.$$

BEISPIEL 1.11. Eine weitere Spezies ist **Mengen** (von Atomen): In den bezeichneten Objekte sind die Atome zwar unterscheidbar, aber da es in einer Menge nicht auf die Reihenfolge ankommt, gibt es genau eine bezeichnete Menge mit  $n$  Elementen:

$$\text{Mengen} = \{\emptyset, \{1\}, \{1, 2\}, \dots\},$$

die (exponentiell) erzeugende Funktion ist daher

$$\mathbf{egf}_{\text{Mengen}}(z) = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \cdots = \exp(z).$$

Die (exponentiell) erzeugende Funktion von **Mengen**<sub>1</sub> ist dann

$$\frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots = \exp(z) - 1.$$

BEISPIEL 1.12. *Da die Atome hier bezeichnet sind, ist die (bezeichnete) Spezies Mengen (von Atomen) nicht mehr gleich der (bezeichneten) Spezies Folgen (von Atomen): Letztere ist einfach gleich der (bezeichneten) Spezies Permutationen mit der erzeugenden Funktion*

$$\text{egf}_{\text{Permutationen}}(z) = 1 + \frac{1!}{1!}z + \frac{2!}{2!}z^2 + \cdots = \frac{1}{1-z}.$$

*Wenn wir in der Spezies Folgen<sub>1</sub> der nicht-leeren Folgen zwei bezeichnete Objekte, die sich nur durch eine zyklische Permutation voneinander unterscheiden, als identisch ansehen, dann erhalten wir die Spezies Zyklen mit der erzeugenden Funktion*

$$\text{egf}_{\text{Zyklen}}(z) = \frac{0!}{1!}z + \frac{1!}{2!}z^2 + \frac{2!}{3!}z^3 + \cdots = \log \frac{1}{1-z}.$$

Wie bei den unbezeichneten Spezies gibt es auch hier eine “Übertragung”

kombinatorische Konstruktion  $\rightarrow$  algebraische Konstruktion.

BEISPIEL 1.13 (Disjunkte Vereinigung). *Wenn zwei bezeichnete Spezies  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  gegeben sind, können wir (genau wie bei den unbezeichneten Spezies) ihre disjunkte Vereinigung  $\mathcal{C} = \mathcal{A} \dot{\cup} \mathcal{B}$  betrachten, und es gilt auch hier für die erzeugenden Funktionen:*

$$\text{egf}_{\mathcal{C}} = \text{egf}_{\mathcal{A}} + \text{egf}_{\mathcal{B}}.$$

BEISPIEL 1.14 (Produkt). *Wenn zwei bezeichnete Spezies  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  gegeben sind, definieren wir ihr Produkt  $\mathcal{C} = \mathcal{A} \star \mathcal{B}$  wie folgt: Betrachten wir zunächst das cartesische Produkt  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ . Aus einem Paar von Objekten  $(A, B) \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  (wobei  $\|A\| = m$  und  $\|B\| = n$ ) konstruieren wir  $\binom{m+n}{n}$  verschiedene bezeichnete Objekte gemäß folgender Vorschrift:*

- *Betrachte alle Zerlegungen der Menge  $[m+n]$  in zwei disjunkte Teile*

$$[m+n] = X \dot{\cup} Y \text{ mit } |X| = m, |Y| = n,$$

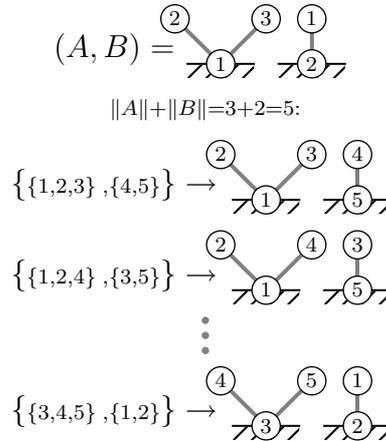
- *Für jede solche Zerlegung ersetze die Nummern von  $A$  bzw.  $B$  entsprechend den ordnungserhaltenden Bijektionen<sup>1</sup>*

$$[m] \rightarrow X$$

$$[n] \rightarrow Y$$

*Anhand eines Beispiels:*

<sup>1</sup>Zwischen je zwei endlichen geordneten Mengen  $X$  und  $Y$  mit  $|X| = |Y|$  gibt es natürlich genau eine *ordnungserhaltende* Bijektion.



Die Größenfunktion ist natürlich wieder gegeben als

$$\#_c((A, B)) := \#_A(A) + \#_B(B).$$

Tatsächlich überträgt sich diese Konstruktion wieder auf die erzeugenden Funktionen:

$$\text{egf}_A \cdot \text{egf}_B = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n \frac{n!}{n!} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!} \right) z^n = \sum_{n \geq 0} \frac{c_n}{n!} z^n = \text{egf}_c,$$

denn  $c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot a_k \cdot b_{n-k}$  nach Konstruktion.

Zum Beispiel:

- Mengen  $\star$  Mengen = Potenzmengen, was man auch als “Funktionen nach  $\{0, 1\}$ ” deuten könnte. Daß die Mächtigkeit der Potenzmenge einer  $n$ -elementigen Menge gleich  $2^n$  ist, sieht man nun auch sofort aus der erzeugenden Funktion:

$$(\text{egf}_{\text{Mengen}}(z))^2 = (e^z)^2 = e^{2z} = \sum_{n \geq 0} \frac{2^n}{n!} z^n.$$

- Mengen<sub>1</sub>  $\star$  Mengen<sub>1</sub> sind demzufolge als “surjektive Funktionen nach  $\{0, 1\}$ ” aufzufassen.

Ein Spezialfall ist wieder das  $k$ -fache Produkt einer (bezeichneten) Spezies  $\mathcal{A}$ :

$$\mathcal{A}^k := \underbrace{\mathcal{A} \star \mathcal{A} \star \dots \star \mathcal{A}}_{k \text{ mal}} : \text{egf}_{\mathcal{A}^k} = (\text{egf}_{\mathcal{A}})^k.$$

Zum Beispiel:

- Mengen <sup>$k$</sup>  = Geordnete\_Zerlegung\_in\_k\_Bloেকে, was man auch als “Funktionen nach  $[k]$ ” deuten könnte.
- Mengen<sub>1</sub> <sup>$k$</sup>  sind demzufolge als “surjektive Funktionen nach  $[k]$ ” aufzufassen.

BEISPIEL 1.15 (Folgen). Auch für eine bezeichnete Spezies  $\mathcal{A}$ , die kein Objekt der Größe 0 enthält, können wir beliebige endliche Folgen von Objekten aus  $\mathcal{A}$  betrachten, also die Spezies  $\mathcal{A}^*$

$$\mathcal{A}^* := \bigcup_{k \geq 0} \mathcal{A}^k$$

Wieder überträgt sich dies wie folgt auf die erzeugenden Funktionen:

$$\text{egf}_{\mathcal{A}^*} = \sum_{k \geq 0} (\text{egf}_{\mathcal{A}})^k = \frac{1}{1 - \text{egf}_{\mathcal{A}}}.$$

Zum Beispiel erhalten wir für die Spezies der Surjektionen  $\tau : [n] \rightarrow [k]$  (mit  $\|\tau\| = n$ )

$$\text{Surjektionen} = \text{Mengen}_1^*.$$

Daraus folgt sofort: Die exponentiell erzeugende Funktion der Zahlen

$$\sum_{k=0}^n S_{n,k} \cdot k!$$

(wobei  $S_{n,k}$  die Stirling-Zahlen zweiter Art bezeichnet) ist also

$$\frac{1}{1 - (e^z - 1)} = \frac{1}{2 - e^z}.$$

BEISPIEL 1.16 (Mengen). Wenn wir in einem Objekt aus  $\mathcal{A}^*$  “auf die Reihenfolge vergessen”, erhalten wir die Spezies

$$\mathcal{C} = \text{Mengen}(\mathcal{A}).$$

Durch die Numerierung sind die  $k$   $\mathcal{A}$ -Objekte eines Objekts aus  $\mathcal{A}^k$  ja jedenfalls unterscheidbar (d.h.: Eine Multimenge von bezeichneten Objekten ist immer eine Menge); zu jeder Menge mit  $k$   $\mathcal{A}$ -Objekten gibt es also  $k!$  geordnete  $k$ -Tupel dieser Objekte in  $\mathcal{A}^k$ . Also erhalten wir für die erzeugende Funktion

$$\text{egf}_{\mathcal{C}}(z) = \sum_{k \geq 0} \frac{(\text{egf}_{\mathcal{A}}(z))^k}{k!} = e^{\text{egf}_{\mathcal{A}}(z)}$$

Zum Beispiel erhalten wir die Spezies

$$\text{Mengenpartitionen} = \text{Mengen}(\text{Mengen}_1);$$

die exponentiell erzeugende Funktion der Bell-Zahlen ist also

$$e^{e^z - 1}$$

(siehe auch das einleitende Beispiel 1.1).

BEMERKUNG 1.4. Wie wir gesehen haben, besteht in vielen Fällen ein klarer Unterschied zwischen bezeichneten und unbezeichneten Spezies. Aber bei geordneten Bäumen ergibt sich durch die Bezeichnung nichts Neues, denn die Knoten von geordneten Bäumen haben ja jedenfalls eine “natürliche Ordnung” (Wurzel, Nachfolger der Wurzel

von links nach rechts, Nachfolger der Nachfolger der Wurzel von links nach rechts, ...), sodaß also gilt:

$\#(\text{unbezeichnete geordnete Bäume}) \cdot n! = \#(\text{bezeichnete geordnete Bäume})$ ,  
d.h., die erzeugenden Funktionen für unbezeichnete und bezeichnete geordnete Bäume sind gleich.

BEISPIEL 1.17 (Zusammensetzung). Seien zwei Spezies  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  gegeben, sodaß  $\mathcal{B}$  kein "leeres Objekt" (mit Größe Null) enthält:

$$\nexists B \in \mathcal{B} : \#_{\mathcal{B}}(B) = 0.$$

Dann können wir die Zusammensetzung von Spezies  $\mathcal{A}(\mathcal{B})$  wie folgt konstruieren:

- Nimm ein  $k$ -Tupel  $(B_1, B_2, \dots, B_k)$  von Objekten aus  $\mathcal{B}^k$ .
- Ordne das  $k$ -Tupel nach der jeweils kleinsten Nummer in jeder Komponente  $B_i$ : De facto betrachten wir also  $k$ -elementige Mengen (vergleiche Beispiel 1.16)

$$\{B_{j_1} < B_{j_2} < \dots < B_{j_k}\},$$

also eine Spezies mit der erzeugenden Funktion

$$\frac{(\text{egf}_{\mathcal{B}}(z))^k}{k!}.$$

- Nimm ein  $\mathcal{A}$ -Objekt  $A$  der Größe  $\#_{\mathcal{A}}(A) = k$  und denke die Atome von  $A$  "aufgeblasen": In die numerierten Atome setze jetzt in der "kanonischen Ordnung" die Objekte  $B_{j_1}, \dots, B_{j_k}$  ein (d.h., in das  $A$ -Atom mit Nummer 1 wird  $B_{j_1}$  eingesetzt, in das  $A$ -Atom mit Nummer 2 wird  $B_{j_2}$  eingesetzt, u.s.w).
- Die Größe des so entstandenen Objekts aus  $C \in \mathcal{C} := \mathcal{A}(\mathcal{B})$  ist dann natürlich gegeben als

$$\#_{\mathcal{C}}(C) = \#_{\mathcal{B}}(B_1) + \dots + \#_{\mathcal{B}}(B_k).$$

Hier übersetzt sich die Konstruktion tatsächlich in die Zusammensetzung der erzeugenden Funktionen:

$$\begin{aligned} \text{gf}_{\mathcal{C}}(z) &= \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \|A\| = k}} \frac{1}{k!} \sum_{\{B_{j_1}, \dots, B_{j_k}\} \in \mathcal{B}^k} \frac{z^{\|B_{j_1}\| + \dots + \|B_{j_k}\|}}{(\|B_{j_1}\| + \dots + \|B_{j_k}\|)!} \\ &= \sum_{k \geq 0} a_k \frac{(\text{gf}_{\mathcal{B}}(z))^k}{k!} = \text{gf}_{\mathcal{A}}(\text{gf}_{\mathcal{B}}(z)). \end{aligned}$$

BEISPIEL 1.18 (Satz von Cayley). Bezeichne  $\mathcal{T}$  die Spezies der nichtleeren ungeordneten bezeichneten Wurzelbäume. Mit derselben Überlegung wie in Abschnitt 1.5 erhalten wir dieselbe "Spezies-Gleichung" (1.11) auch für die bezeichneten Wurzelbäume, also

$$\mathcal{T} = \{\circ\} \times \text{Mengen}(\mathcal{T}).$$

Diese übersetzt sich hier gemäß Beispiel 1.16 bzw. 1.17 in

$$\mathbf{gf}_{\mathcal{T}}(z) = z \cdot \mathbf{e}^{\mathbf{gf}_{\mathcal{T}}(z)},$$

also ist  $\mathbf{gf}_{\mathcal{T}}(z)$  die Kompositionsinverse zu  $z \cdot \mathbf{e}^{-z}$ . Deren Koeffizienten können wir nun ganz leicht mit der Lagrange'schen Inversionsformel (Korollar 1.1: (1.9) für  $k = 1$ ) bestimmen:

$$\begin{aligned} \langle z^n \rangle \mathbf{gf}_{\mathcal{T}}(z) &= \frac{1}{n} \langle z^{-1} \rangle (z \cdot \mathbf{e}^{-z})^{-n} \\ &= \frac{1}{n} \langle z^{-1} \rangle z^{-n} \mathbf{e}^{nz} \\ &= \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle \mathbf{e}^{nz} \\ &= \frac{1}{n} \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \end{aligned}$$

für  $n > 0$ . Das heißt, die Anzahl der bezeichneten ungeordneten Wurzelbäume auf  $n > 0$  Knoten ist

$$t_n = n^{n-1}.$$

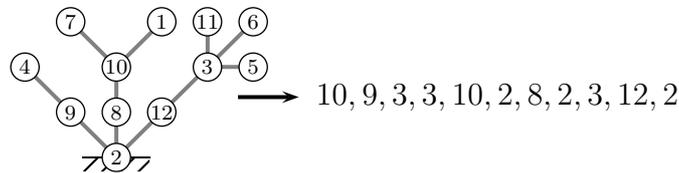
Wenn wir auf die Wurzel "vergessen", dann erhalten wir die Cayley'sche Formel für die Anzahl aller bezeichneten Bäume (nicht Wurzelbäume!):

$$\#(\text{bezeichnete Bäume auf } n \text{ Knoten}) = n^{n-2}. \quad (1.12)$$

**1.6.1. Kombinatorischer Beweis des Satzes von Cayley.** Die Prüfer-Korrespondenz liefert eine Bijektion zwischen

- ungeordneten, bezeichneten Wurzelbäumen mit  $n$  Knoten,
- und Zahlenfolgen der Länge  $n - 1$  aus  $[n]$ .

Für einen gegebenen Wurzelbaum funktioniert das so: Suche das Blatt mit der kleinsten Nummer (Bezeichnung), notiere die Nummer des inneren Knotens, an dem dieses Blatt hängt, und entferne das Blatt: Das macht man so lange, bis die Wurzel übrigbleibt. In einem kleinen Beispiel:



Umgekehrt gewinnt man aus dem Prüfer-Code

$$(p(v_1), p(v_2), \dots, p(v_{n-1}))$$

wieder den zugehörigen Wurzelbaum, indem man wie folgt vorgeht: Sei  $v_1$  die kleinste Zahl aus  $[n]$ , die nicht im Prüfer-Code vorkommt. Die Nummern, die nicht im Prüfer-Code vorkommen, entsprechen den Blättern im ursprünglichen Wurzelbaum;  $v_1$  ist also die Nummer des

1. entfernten Blattes. Dieses Blatt hing nach Konstruktion an dem Knoten mit der Nummer  $p(v_1)$ , wir notieren also

$$(v_1, p(v_1)) \text{ (} v_1 \text{ hängt an } p(v_1)\text{)}$$

und fahren rekursiv mit dem verbleibenden Prüfercode

$$(p(v_2), p(v_3), \dots, p(v_{n-1}))$$

fort: Sei  $v_2$  die kleinste Zahl in  $[n] \setminus \{v_1\}$ , die im verbleibenden Prüfercode nicht vorkommt; wir notieren also

$$(v_2, p(v_2)) \text{ (} v_2 \text{ hängt an } p(v_2)\text{)},$$

usw. Für das obige Beispiel entsteht so die Folge von Notierungen:

$$((1,10),(4,9),(5,3),(6,3),(7,10),(9,2),(10,8),(8,2),(11,3),(3,12),(12,2)),$$

und es ist klar, daß die Wurzel die Nummer 2 hat: Damit kann man den Wurzelbaum eindeutig rekonstruieren.

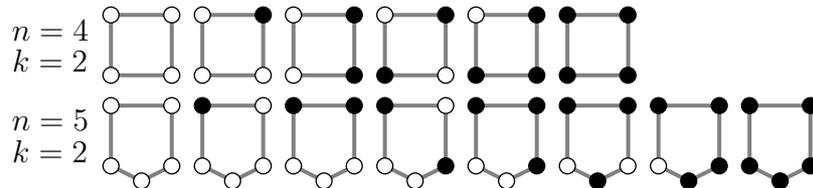
### 1.7. Der Satz von Pólya

Wir beginnen mit 2 motivierenden Beispielen.

BEISPIEL 1.19. *Gegeben sei ein Würfel. Wie viele wesentlich verschiedene Möglichkeiten gibt es, seine Seitenflächen mit den Farben rot und blau zu färben? (“Wesentlich verschieden” soll hier bedeuten: Zwei Färbungen, die durch eine Rotation ineinander übergehen, sehen wir als gleich an.)*

*Es gibt insgesamt 10 Möglichkeiten: Alle Seiten rot, alle Seiten blau, eine Seite rot, eine Seite blau, 2 gegenüberliegende Seiten rot, 2 gegenüberliegende Seiten blau, 2 aneinander grenzende Flächen blau, 2 aneinander grenzende Flächen rot, 3 in einer Ecke zusammenstoßende Flächen blau, 3 “bandartig zusammenhängende” Flächen blau.*

BEISPIEL 1.20. *Gegeben seien Perlen in  $k$  Farben. Wie viele Möglichkeiten gibt es, daraus eine Kette der Länge  $n$  zu bilden, wobei wir 2 Ketten dann als gleich ansehen, wenn sie durch eine Rotation (aber nicht durch eine Spiegelung!) ineinander übergehen?*

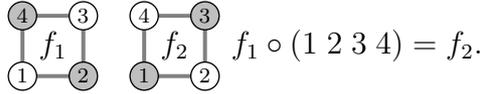


Wenn wir Beispiel 1.20 “abstrakt” beschreiben wollen, dann können wir das so tun: Gegeben sei ein Objekt auf  $n$  (numerierten) Atomen. Diese Atome werden in eine Wertemenge  $R = [k]$  von  $k$  Farben abgebildet (im Beispiel:  $k = 2$ ). Wir fragen nach der Anzahl solcher Abbildungen,

wobei wir aber 2 Abbildungen  $f_1, f_2$  als äquivalent betrachten, wenn es eine *zyklische* Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  der bezeichneten Atome gibt, sodaß

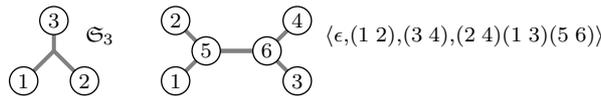
$$f_1 \circ \sigma = f_2.$$

Zum Beispiel:



Diese Problemstellung lässt sich wie folgt verallgemeinern:

**DEFINITION 1.5.** *Gegeben sei die endliche Menge  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$  und eine Gruppe  $G \subseteq \mathfrak{S}_n$  von Permutationen. Die Vorstellung dazu ist: Wir haben ein (bezeichnetes) Objekt  $O$  auf  $n$  Atomen, die wir mit den Elementen aus  $[n]$  identifizieren, und  $G$  ist die Gruppe der Symmetriabbildungen, d.h., die Gruppe der Permutationen der Atome von  $O$ , die  $O$  invariant lassen; zum Beispiel:*



Weiters sei eine Menge  $R = [k]$  von  $k$  Farben gegeben. Wir interessieren uns für die Anzahl aller nicht-äquivalenten Abbildungen  $f : [n] \rightarrow R$ , wobei  $f_1 \sim f_2$  wenn  $f_1 \circ g = f_2$  für irgendein  $g \in G$ . Anders ausgedrückt: Wir suchen die Anzahl aller Äquivalenzklassen von Abbildungen unter der Äquivalenzrelation

$$f_1 \sim f_2 :\iff \exists g \in G : f_1 \circ g = f_2.$$

Diese Äquivalenzklassen von “Färbungen” nennen wir Muster.

Jedem Element  $r \in R$  sei ein Gewicht  $\omega(r)$  (meistens ein Monom, z.B. einfach  $z^r$ ) zugeordnet, das Gewicht einer Funktion sei  $\omega(f) := \prod_{i=1}^n \omega(f(i))$ . Es ist klar:  $f_1 \sim f_2 \implies \omega(f_1) = \omega(f_2)$ ; das Gewicht eines Musters sei also  $\omega(f)$ , wo  $f$  irgendein Repräsentant des Musters (also der Äquivalenzklasse) ist.

**BEISPIEL 1.21.** *Wir betrachten das Beispiel des Würfels mit  $\omega(\text{rot}) = x$ ,  $\omega(\text{blau}) = 1$ : Das Gewicht eines Musters ist also  $x^{\#(\text{rote Flächen})}$ . Die erzeugende Funktion ist dann:*

$$x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1.$$

**LEMMA 1.1** (Burnside’s Lemma, Satz von Cauchy–Frobenius). *Beachte die Problemstellung aus Definition 1.5. Sei  $\psi_\alpha(g)$  die Anzahl aller Funktionen  $f$  mit Gewicht  $\omega(f) = \alpha$  und  $f \circ g = f$ . Dann ist die Anzahl aller Muster mit Gewicht  $\alpha$  gleich*

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_\alpha(g).$$

BEWEIS. Betrachte alle Paare  $(g, f)$  mit  $f \circ g = f$ ,  $\omega(f) = \alpha$ : Durch *doppelte Abzählung* ergibt sich sofort

$$\sum_{g \in G} \psi_\alpha(g) = \sum_{f: \omega(f)=\alpha} \eta(f),$$

wobei  $\eta(f)$  die Anzahl aller  $g$  mit  $f \circ g = f$  bezeichnet.

Für festes  $f$  ist  $G_f := \{g \in G : f \circ g = f\}$  eine Untergruppe von  $G$ .

Betrachte nun alle  $f \circ h$  mit  $h \in G$ : Als *Menge* betrachtet ist das einfach die Äquivalenzklasse  $[f]$  von  $f$ : Wie oft kommt jedes Element vor?

$$\begin{aligned} f \circ h_1 = f \circ h_2 &\iff f \circ (h_1 \circ h_2^{-1}) = f \\ &\iff h_1 \circ h_2^{-1} \in G_f \iff h_1 \in G_f \circ h_2. \end{aligned}$$

D.h., für die Elemente einer festen Rechtsnebenklasse von  $G_f$  kommen immer dieselben Funktionen heraus. Es gilt daher:

$$|G| = |[f]| \cdot |G_f| \implies \eta(f) = |G_f| = |G| / |[f]|.$$

Wir erhalten also:

$$\begin{aligned} \sum_{f: \omega(f)=\alpha} \eta(f) &= \sum_{f: \omega(f)=\alpha} \frac{|G|}{|[f]|} = |G| \cdot \sum_{f: \omega(f)=\alpha} \frac{1}{|[f]|} \\ &= |G| \cdot \sum_{[f]: \omega([f])=\alpha} \sum_{f \in [f]} \frac{1}{|[f]|} = |G| \cdot \sum_{[f]: \omega([f])=\alpha} 1 \\ &= \#(\text{Muster mit Gewicht } \alpha) \cdot |G|. \end{aligned}$$

□

DEFINITION 1.6. Der Zykelindex einer Gruppe  $G \subseteq \mathfrak{S}_n$  ist

$$P_G(x_1, x_2, \dots) := \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (x_1^{c_1} \cdot x_2^{c_2} \cdots) = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} (x_{|z_1|} \cdot x_{|z_2|} \cdots),$$

wobei  $z_1 \cdot z_2 \cdots = g$  die disjunkte Zyklenerlegung der Permutation  $g$  bedeutet und  $|z_i|$  die Länge von Zyklus  $z_i$ ; bzw.  $(c_1, c_2, \dots)$  den Zykeltyp von  $g$  bezeichnet (also  $c_i$  gleich Anzahl der Zyklen der Länge  $i$  in  $g$ ).

BEISPIEL 1.22. Die Rotationsgruppe des Würfels läßt sich durch Permutationen seiner Flächen beschreiben:

- Die Identität liefert  $x_1^6$ ,
- Drehung um Achse, die durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Flächen bestimmt ist, liefert  $3 \cdot x_2^2 \cdot x_1^2$  (für  $180^\circ$ ) und  $6 \cdot x_4 \cdot x_1^2$  (für  $\pm 90^\circ$ ),
- Drehung um Achse, die durch die Mittelpunkte zweier diagonal gegenüberliegender (paralleler) Kanten bestimmt ist, liefert (für  $180^\circ$ )  $6 \cdot x_2^3$ ,
- Drehung um die Raumdiagonalen (für  $\pm 120^\circ$ ) liefert  $8 \cdot x_3^2$ .

Insgesamt also:

$$P_G = \frac{1}{24} (x_1^6 + 3x_1^2x_2^2 + 6x_1^2x_4 + 6x_2^3 + 8x_3^2).$$

BEISPIEL 1.23. Eine Rotation einer Kette der Länge  $n$  entspricht einer Permutation  $\pi$  mit

$$\pi(i) = i + m \pmod{n}.$$

Ein Zyklus der Länge  $d$  von  $\pi$  ist eine (minimale) Folge

$$l = (i, i + m, \dots, i + (d - 1)m),$$

sodaß  $i + d \cdot m \equiv i \pmod{n}$ , d.h.,  $d \cdot m \equiv 0 \pmod{n}$  und wegen der Minimalität von  $l$  ist  $d = \frac{n}{\text{ggT}(m,n)}$ .

Es gibt in  $\pi$  also nur Zyklen der Länge  $d$ , und zwar genau  $\frac{n}{d}$  viele: Das Gewicht ist  $\omega(\pi) = x_d^{n/d}$ . Die Frage ist nur mehr: Wie viele  $m$  gibt es mit  $\text{ggT}(m, n) = n/d$ ,  $0 \leq m < n$ ? Das sind von den Zahlen  $i \cdot \frac{n}{d}$

$$\left(0, 1 \cdot \frac{n}{d}, 2 \cdot \frac{n}{d}, \dots, (d - 1) \cdot \frac{n}{d}\right)$$

jene, wo  $i$  und  $d$  teilerfremd sind:

$$\text{ggT}\left(n, i \cdot \frac{n}{d}\right) = \frac{n}{d} \iff \text{ggT}(d, i) = 1.$$

Deren Anzahl ist  $\Phi(d)$ , die Eulersche  $\Phi$ -Funktion:

$$d = p_1^{k_1} \cdots p_l^{k_l} : \Phi(d) = d \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{p_l}\right).$$

Daher:

$$P_G = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi(d) x_d^{\frac{n}{d}}. \quad (1.13)$$

SATZ 1.2 (Satz von Pólya). Sei  $G \subseteq \mathfrak{S}_n$ . Die erzeugende Funktion für alle Muster  $[f]$ ,  $f : [n] \rightarrow R$ , ist

$$\sum_{m \text{ Muster}} \omega(m) = P_G \left( \sum_{r \in R} \omega(r), \sum_{r \in R} \omega(r)^2, \sum_{r \in R} \omega(r)^3, \dots \right)$$

BEWEIS. Betrachte  $\alpha = \omega(f)$  für eine Funktion  $f : [n] \rightarrow R$ . Nach Lemma 1.1 ist die Anzahl aller Muster mit Gewicht  $\alpha$  gleich

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_\alpha(g),$$

wobei  $\psi_\alpha(g) = \#(\{f : \omega(f) = \alpha \text{ und } f \circ g = f\})$ .

Das multiplizieren wir mit  $\alpha$  und summieren über alle  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \sum_{m \text{ Muster}} \omega(m) &= \sum_{\alpha} \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \psi_{\alpha}(g) \alpha \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(g) \alpha \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f: f \circ g = f} \omega(f) \\ &= \dots \end{aligned}$$

Überlege: Wenn  $g = z_1 \circ z_2 \circ \dots \circ z_l$  die disjunkte Zyklenzerlegung von  $g$  bezeichnet, dann ist  $f \circ g = f$  genau dann, wenn die Funktion  $f$  auf allen Zyklen  $z_1, z_2, \dots, z_l$  konstant ist. Also:

$$\begin{aligned} \dots &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \sum_{f: [l] \rightarrow R} f(1)^{|z_1|} \cdot f(2)^{|z_2|} \dots \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \left( \sum_{r \in R} \omega(r)^{|z_1|} \right) \cdot \left( \sum_{r \in R} \omega(r)^{|z_2|} \right) \dots \\ &= P_G \left( \sum_{r \in R} \omega(r)^1, \sum_{r \in R} \omega(r)^2, \dots \right). \end{aligned}$$

□

**BEMERKUNG 1.5.** Wenn die Menge  $R$  von Farben nur ein Element enthält, dem einfach das Gewicht  $z$  zugeordnet ist, dann gibt es natürlich nur ein Muster, und die erzeugende Funktion dieses einzigen Musters ist einfach  $z^n$ , wo  $n$  die Größe des Objekts ist — und tatsächlich ist auch

$$P_G(z, z^2, \dots) = z^n.$$

**BEISPIEL 1.24.** Für den Würfel erhalten wir tatsächlich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} \left( 6(x^4 + 1)(x + 1)^2 + 8(x^3 + 1)^2 + 3(x^2 + 1)^2(x + 1)^2 + \right. \\ \left. 6(x^2 + 1)^3 + (x + 1)^6 \right) = x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 1. \end{aligned}$$

**BEISPIEL 1.25.** Für eine Kette der Länge  $n$ , die mit  $k$  Farben gefärbt wird, geben wir der Farbe  $i$  das Gewicht  $x_i$  und erhalten:

$$\frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi(d) (x_1^d + x_2^d + \dots + x_k^d)^{n/d}.$$

Für den Spezialfall  $k = 2$  ergibt das:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi(d) (x_1^d + x_2^d)^{n/d} &= \frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi(d) \sum_l \binom{n/d}{l} x_1^{d \cdot l} x_2^{(n/d-l) \cdot d} \leftarrow{m:=d \cdot l} \\ &= \frac{1}{n} \sum_m x_1^m x_2^{n-m} \sum_{d|\text{ggT}(n,m)} \Phi(d) \binom{n/d}{m/d}. \end{aligned}$$

Für  $k$  Farben ergibt sich allgemeiner:

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi(d) \sum_{l_1+\dots+l_k=n/d} \binom{n/d}{l_1, \dots, l_k} x_1^{d \cdot l_1} \dots x_k^{d \cdot l_k} &= \leftarrow{m_i:=d \cdot l_i} \\ \frac{1}{n} \sum_{m_1+\dots+m_k=n} x_1^{m_1} \dots x_k^{m_k} \sum_{d|\text{ggT}(n,m_1, \dots, m_k)} \Phi(d) \binom{n/d}{m_1/d, \dots, m_k/d}. \end{aligned}$$

### 1.8. Eine Verallgemeinerung

Wir können Definition 1.5 offenbar verallgemeinern, indem wir *auch auf der Menge der Farben*  $R$  eine Permutationsgruppe  $H$  betrachten, die auf  $R$  wirkt: Wieviele Muster gibt es, die *unter der Wirkung* von  $H$  auch noch verschieden sind? D.h., wir betrachten nun zwei Muster  $f_1, f_2$  als äquivalent, wenn es ein  $g \in G$  ( $G$  ist die Permutationsgruppe auf den Atomen) und ein  $h \in H$  ( $H$  ist die Permutationsgruppe auf den Farben) gibt, sodaß

$$f_1 \sim f_2 :\iff f_1 \circ g = h \circ f_2$$

BEISPIEL 1.26. Sei im Beispiel 1.19 (Färbungen der Würfel­flächen mit Farben  $R = \{\text{blau, rot}\}$ ) die Gruppe  $H = \mathfrak{S}_R$ : D.h., es gibt nun nur mehr 6 Möglichkeiten für “wesentlich verschiedene” Muster:

- 6 Flächen haben dieselbe Farbe,
- genau 5 Flächen haben dieselbe Farbe,
- genau 2 gegenüberliegende Flächen haben dieselbe Farbe,
- genau 2 aneinander grenzende Flächen haben dieselbe Farbe,
- genau 3 in einer Ecke zusammenstoßende Flächen haben dieselbe Farbe,
- genau 3 “bandartig zusammenhängende” Flächen haben dieselbe Farbe.

Wenn wir das Gewicht eines Musters als  $x^{\max(\#(\text{rot}), \#(\text{blau}))}$  definieren, dann ist die erzeugende Funktion:

$$x^6 + x^5 + 2x^4 + 2x^3.$$

SATZ 1.3.

$$\sum_{m \text{ Muster}} \omega(m) = \frac{1}{|G| \cdot |H|} \sum_{g \in G} \sum_{\substack{f: f \circ g = h \circ f \\ h \in H}} \omega(f). \quad (1.14)$$

BEWEIS. Es gilt sichtlich:

$$\begin{aligned}
 f \circ g_1 = f \circ g_2 &\implies g_1 \in G_f \cdot g_2, \\
 h_1 \circ f = h_2 \circ f &\implies h_1 \in h_2 \cdot H_f. \\
 \\
 \sum_{\substack{f,g,h \\ f \circ g = h \circ f}} \omega(f) &= \sum_f \omega(f) \frac{|G| \cdot |H|}{|G_f| \cdot |H_f|} \\
 &= |G| \cdot |H| \cdot \sum_{w \text{ Muster}} \omega(m).
 \end{aligned}$$

□

### 1.9. Zykelindikatorreihe

Wir wollen diese Überlegungen nun auf bezeichnete Spezies anwenden: Dazu “summieren” wir (im wesentlichen) die Zykelindices für alle Objekte.

DEFINITION 1.7. Sei  $\mathcal{F}$  eine bezeichnete Spezies: Dann wirkt die symmetrische Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  auf den Teilfamilien

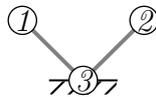
$$\mathcal{F}_n := \{F \in \mathcal{F} : \|F\| = n\}$$

“durch Permutation der Numerierung (Bezeichnung) der Atome”. Die Wirkung einer solchen Permutation  $\sigma$  auf  $F$  bezeichnen wir mit  $\sigma(F)$ ; wenn eine solche Permutation  $\sigma$  ein Objekt  $F$  fixiert (invariant läßt), dann schreiben wir dafür also:  $\sigma(F) = F$ . Es ist klar: Für jedes Objekt  $F \in \mathcal{F}_n$  ist

$$\text{sym}_{\mathcal{F}}(F) := \{\sigma \in \mathfrak{S}_n : \sigma(F) = F\}$$

eine Untergruppe der  $\mathfrak{S}_n$ : Wir bezeichnen sie als Symmetriegruppe des Objekts  $F$ .

BEISPIEL 1.27. Die Permutation  $\sigma = (12)(3)$  (in Zykelschreibweise) fixiert sichtlich den folgenden ungeordneten Wurzelbaum:



Dasselbe Objekt, aufgefaßt als geordneter Wurzelbaum, würde aber nur von der Identität fixiert (vergleiche auch Bemerkung 1.4).

DEFINITION 1.8 (Zykelindikatorreihe). Sei  $\mathcal{F}$  eine bezeichnete Spezies. Für eine Permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  definieren wir:

$$\text{fix}_{\mathcal{F}}(\sigma) := \{F \in \mathcal{F}_n : \sigma(F) = F\}.$$

$|\text{fix}_{\mathcal{F}}(\sigma)|$  ist also die Anzahl der Objekte  $F$  in  $\mathcal{F}$ , für die  $\sigma$  zur Symmetriegruppe von  $F$  gehört.

Den Zykeltyp einer Permutation  $\sigma$  bezeichnen wir mit

$$c(\sigma) := (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

(D.h.,  $c_i$  ist die Anzahl der Zyklen der Länge  $i$  in  $\sigma$ .)

Weiters definieren wir für eine Folge  $\mathbf{x} := (x_1, x_2, \dots)$  von unendlich vielen Variablen:

$$\mathbf{x}^{c(\sigma)} := x_1^{c_1} \cdot x_2^{c_2} \cdots x_n^{c_n}.$$

Die Zykelindikatorreihe einer Spezies  $\mathcal{F}$  ist dann die formale Potenzreihe (in unendlich vielen Variablen)

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{F}}(\mathbf{x}) &= \sum_{\substack{\sigma, F \\ \sigma(F)=F}} \frac{\mathbf{x}^{c(\sigma)}}{\|F\|!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\text{fix}_{\mathcal{F}}(\sigma)| \cdot \mathbf{x}^{c(\sigma)} \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\substack{F \in \mathcal{F}_n: \\ \sigma(F)=F}} \mathbf{x}^{c(\sigma)} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{F \in \mathcal{F}_n} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n: \\ \sigma(F)=F}} \mathbf{x}^{c(\sigma)}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

**BEMERKUNG 1.6.** *Ungeordnete bezeichnete Wurzelbäume unterscheiden sich von geordneten bezeichneten Wurzelbäumen “nur” dadurch, daß erstere eine nichttriviale (d.h.: nicht nur aus der Identität bestehende) Symmetriegruppe haben (vergleiche Beispiel 1.27). Anders gesagt: Für die Spezies der geordneten bezeichneten Wurzelbäume ist*

$$W_1 \sim W_2 :\iff “W_1 \text{ und } W_2 \text{ sind als ungeordnete Objekte identisch}”$$

*klarerweise eine Äquivalenzrelation, deren Äquivalenzklassen in natürlicher Weise mit den ungeordneten bezeichneten Wurzelbäumen identifiziert werden können. “Aus Sicht der ungeordneten Bäume” ist diese Äquivalenzrelation gegeben durch ihre Symmetriegruppe  $G$  (die aus den “Umordnungen” von Teilbäumen besteht):*

$$W_1 \sim W_2 :\iff \exists \sigma \in G : \sigma(W_1) = W_2.$$

*Dies kann man verallgemeinern: Sei  $\mathcal{F}$  eine Spezies, die nur die triviale Symmetriegruppe besitzt (d.h., alle  $n!$  Umnumerierungen eines Objektes  $F \in \mathcal{F}$  werden als verschieden angesehen), und sei  $G$  eine “größere” (salopp gesprochen) Symmetriegruppe für die Objekte aus  $\mathcal{F}$ . Dann kann man die Spezies  $[\mathcal{F}]$  der Äquivalenzklassen von  $\mathcal{F}$  in bezug auf diese Symmetriegruppe  $G$  betrachten, deren Objekte  $[F] \in [\mathcal{F}]$  dadurch bestimmt sind, daß für je zwei Repräsentanten  $F_1, F_2 \in [F] \subseteq \mathcal{F}$*

$$F_1 \sim F_2 :\iff \exists \sigma \in G : \sigma(F_1) = F_2 \quad (1.17)$$

gilt<sup>2</sup>. Für ein  $F \in \mathcal{F}_n$  sei  $\mathfrak{S}_n(F) := \{[\sigma(F)] : \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$  (das ist die Menge der verschiedenen Äquivalenzklassen bezüglich (1.17), die sich durch beliebige “Umnumerierungen” von  $F$  ergeben). Dann gilt (siehe den Beweis von Lemma 1.1):

$$|\mathfrak{S}_n(F)| = \frac{n!}{\text{sym}_{[\mathcal{F}]}([F])}.$$

Für  $F_1, F_2 \in \mathfrak{S}_n(F)$  gilt natürlich  $F_2 = \tau(F_1)$  für ein  $\tau \in \mathfrak{S}_n$ ; es gelte dann auch für jedes solche  $\tau \in \mathfrak{S}_n$ :

$$\tau(\text{sym}_{[\mathcal{F}]}([F_1])) \tau^{-1} = \text{sym}_{[\mathcal{F}]}([F_2]).$$

(D.h., die Symmetrien hängen nur von der “unbezeichneten Struktur” ab, nicht von der konkreten Numerierung der Atome: Für die uns interessierenden Beispiele wie Bäume etc. ist das natürlich der Fall.)

Dann können wir auch die Spezies  $\tilde{\mathcal{F}}$  der “unbezeichneten Strukturen” betrachten, deren Objekte die Äquivalenzklassen  $\mathfrak{S}_n(F) \subset [F]$  (unter der Äquivalenzrelation “ergibt sich durch Umnumerierung von”) sind; mit “denselben Symmetrien” wie die Objekte aus  $[\mathcal{F}]$ . Wenn wir nun noch für  $\text{sym}_{[\mathcal{F}]}([F])$  abkürzend  $G_F$  schreiben, dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} \sum_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} P_{G_F}(\mathbf{x}) &= \sum_{F \in \tilde{\mathcal{F}}} \frac{1}{|G_F|} \sum_{\gamma \in G_F} \mathbf{x}^{c(\gamma)} \quad \leftarrow \text{Definition 1.6} \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_{\gamma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\substack{F \in \tilde{\mathcal{F}}_n \\ \gamma(F)=F}} \frac{1}{|G_F|} \cdot \mathbf{x}^{c(\gamma)} \quad \leftarrow \text{“Umgruppieren der Terme”} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\gamma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\substack{F \in \tilde{\mathcal{F}}_n: \\ \gamma(F)=F}} \frac{n!}{|G_F|} \cdot \mathbf{x}^{c(\gamma)} \quad \leftarrow \text{Definition } G_F = \text{sym}_{[\mathcal{F}]}([F]) \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\gamma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{\substack{F \in [\mathcal{F}]_n: \\ \gamma(F)=F}} \mathbf{x}^{c(\gamma)} \quad \leftarrow \frac{n!}{|G_F|} = |\mathfrak{S}_n(F)| \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\gamma \in \mathfrak{S}_n} |\text{fix}_{[\mathcal{F}]}(\gamma)| \cdot \mathbf{x}^{c(\gamma)} \\ &= Z_{[\mathcal{F}]}. \end{aligned}$$

Das heißt: Die Zykelindikatorreihe einer bezeichneten Spezies ist die Summe über die Zykelindices aller Objekte der entsprechenden unbezeichneten Spezies (mit denselben Symmetrien).

<sup>2</sup>Natürlich müßte man das genauer fassen:  $\text{sym}_{[\mathcal{F}]}([F]) = \text{sym}_{[\mathcal{F}]}(F_1) = \text{sym}_{[\mathcal{F}]}(F_2)$  ist wohldefiniert, etc.

SATZ 1.4. *Es gilt:*

$$Z_{\mathcal{F}}(z, 0, 0, \dots) = \mathbf{egf}_{\mathcal{F}}(z), \quad (1.18)$$

$$Z_{\mathcal{F}}(z, z^2, z^3, \dots) = \mathbf{gf}_{\tilde{\mathcal{F}}}(z), \quad (1.19)$$

wobei  $\tilde{\mathcal{F}}$  die  $\mathcal{F}$  entsprechende unbezeichnete Spezies (mit denselben Symmetrien) ist.

BEWEIS. Gleichung (1.18) ergibt sich durch einfache Rechnung aus der Definition (1.15):

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{F}}(z, 0, 0, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\mathrm{fix}_{\mathcal{F}}(\sigma)| \cdot z^{c_1} \cdot 0^{c_2} \cdot 0^{c_3} \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} |\mathrm{fix}_{\mathcal{F}}(\mathrm{id}_n)| \cdot z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \cdot f_n \cdot z^n = \mathbf{egf}_{\mathcal{F}}(z). \end{aligned}$$

Gleichung (1.19) ergibt sich aus Lemma 1.1: Wenn wir für jedes (bezeichnete) Objekt in  $\mathcal{F}$  eine einzige Farbe betrachten und der einzigen dann möglichen Färbung das Gewicht 1 zuordnen, dann gilt für die in Lemma 1.1 definierte Größe  $\psi_{\alpha}(\sigma)$ :

$$\psi_1(\sigma) = \#(f : \omega(f) = 1 \text{ und } f \circ \sigma = f) = |\mathrm{fix}_{\mathcal{F}}(\sigma)|, \quad (1.20)$$

und nach Lemma 1.1 ist

$$\frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \psi_1(\sigma) = \tilde{f}_n, \quad (1.21)$$

wobei  $\tilde{f}_n$  die Anzahl der Muster auf bezeichneten  $\mathcal{F}$ -Objekten ist — und zwar unter der Wirkung der vollen Symmetriegruppe: Das entspricht also der Anzahl der *unbezeichneten* Objekte.

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{F}}(z, z^2, z^3, \dots) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\mathrm{fix}_{\mathcal{F}}(\sigma)| \cdot z^{c_1} \cdot z^{2 \cdot c_2} \cdot z^{3 \cdot c_3} \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\mathrm{fix}_{\mathcal{F}}(\sigma)| \cdot z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} z^n \cdot \frac{1}{|\mathfrak{S}_n|} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \psi_1(\sigma) \quad \leftarrow (1.20) \\ &= \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_n \cdot z^n \quad \leftarrow (1.21) \\ &= \mathbf{gf}_{\tilde{\mathcal{F}}}(z). \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 1.28. Für die Spezies  $\mathbf{Atom}$  erhalten wir  $Z_{\mathbf{Atom}} = x_1$ .

Für die Spezies  $\mathbf{Mengen}$  erhalten wir gemäß (1.15)

$$Z_{\mathbf{Mengen}} = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \mathbf{x}^{c(\sigma)},$$

weil es genau eine Menge auf  $n$  Elementen gibt, die (natürlich) von jeder Permutation  $\sigma$  ihrer Atome fixiert wird:

$$\text{fix}_{\mathbf{Mengen}}(\sigma) = 1.$$

Bekanntlich ist die Anzahl aller Permutationen der  $\mathfrak{S}_n$  vom Zyklentyp  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$  genau<sup>3</sup>

$$\frac{n!}{1^{c_1} \cdot c_1! \cdot 2^{c_2} \cdot c_2! \cdot \dots \cdot n^{c_n} \cdot c_n!}. \quad (1.22)$$

Daher erhalten wir weiter:

$$\begin{aligned} Z_{\mathbf{Mengen}} &= \sum_{n \geq 0} \sum_{1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + \dots + n \cdot c_n = n} \frac{x_1^{c_1} \cdot x_2^{c_2} \cdot \dots \cdot x_n^{c_n}}{1^{c_1} \cdot c_1! \cdot 2^{c_2} \cdot c_2! \cdot \dots \cdot n^{c_n} \cdot c_n!} \\ &= \sum_{1 \cdot c_1 + 2 \cdot c_2 + \dots < \infty} \frac{\left(\frac{x_1}{1}\right)^{c_1}}{c_1!} \cdot \frac{\left(\frac{x_2}{2}\right)^{c_2}}{c_2!} \cdot \dots \\ &= \mathbf{e}^{x_1 + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{3} + \dots}. \end{aligned}$$

Kombiniert mit (1.19) ergibt dies wieder die (gewöhnliche) erzeugende Funktion der (unbezeichneten) Spezies  $\mathbf{Mengen}$ :

$$Z_{\mathbf{Mengen}}(z, z^2, \dots) = \frac{1}{1-x} = \mathbf{gf}_{\mathbf{Mengen}}(z).$$

---

<sup>3</sup>Einfaches Abzählargument: Betrachte eine beliebige Permutation  $\tau$  als Zyklenerlegung (die ersten  $c_1$  Elemente sind die Fixpunkte, die folgenden  $2 \cdot c_2$  Elemente sind die Zweierzyklen, usw.): Auf wieviele Arten wird ein und dieselbe Permutation  $\sigma$  vom Zyklentyp  $(c_1, \dots, c_k)$  so erhalten?

Für die Spezies **Zyklen** erhalten wir (vergleiche Bemerkung 1.6):

$$\begin{aligned}
Z_{\text{Zyklen}} &= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \sum_{A \in \text{Zyklen}_n} \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n: \\ \sigma(A)=A}} \mathbf{x}^{c(\sigma)} \quad \leftarrow (1.16) \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (n-1)! \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n: \\ \sigma(A)=A}} \mathbf{x}^{c(\sigma)} \quad \leftarrow \text{Def. Zykelzeiger} \\
&= \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \sum_{d|n} \Phi(d) x_d^{n/d} \quad \leftarrow (1.13) \\
&= \sum_{d \geq 1} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k \cdot d} \Phi(d) x_d^k \quad \leftarrow n=k \cdot d \\
&= \sum_{d \geq 1} \frac{\Phi(d)}{d} \log \frac{1}{1-x_d}.
\end{aligned}$$

Für die Spezies **Permutationen** überlegen wir: Sei  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  vom Zyklentyp  $(c_1, c_2, \dots, c_n)$ . Wie sieht eine Permutation  $\pi$  aus, die von  $\sigma$  fixiert wird?

$$\begin{array}{ccc}
i & \xrightarrow{\sigma} & \sigma(i) \\
\pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
\pi(i) & \xrightarrow{\sigma} & \sigma(\pi(i)) = \pi(\sigma(i))
\end{array}$$

Das heißt:  $\pi$  wird von  $\sigma$  fixiert, genau dann wenn

$$\pi = \sigma^{-1} \circ \pi \circ \sigma \iff \pi^{-1} = \sigma^{-1} \circ \pi^{-1} \circ \sigma \iff \pi \circ \sigma = \sigma \circ \pi.$$

Angenommen,  $i$  und  $\pi(i) = j$  gehören in  $\sigma$  zu verschiedenen langen Zyklen: O.B.d.A. ist der  $\sigma$ -Zyklus von  $i$  der kürzere (sonst betrachte statt  $\pi$  eben  $\pi^{-1}$ ); sei  $k$  seine Länge:

$$\begin{array}{ccccccc}
i & \xrightarrow{\sigma} & \sigma(i) & \xrightarrow{\sigma} & \dots & \xrightarrow{\sigma} & \sigma^k(i) = i \\
\pi \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow & & \pi \downarrow \\
j & \xrightarrow{\sigma} & \sigma(j) & \xrightarrow{\sigma} & \dots & \xrightarrow{\sigma} & \sigma^k(j) \neq j
\end{array}$$

Also werden in  $\pi$  immer nur jene Zahlen untereinander permutiert, die in  $\sigma$  zu Zyklen gleicher Länge gehören! Wie viele Möglichkeiten gibt es? Betrachten wir die  $c_k$  Zyklen der Länge  $k$  von  $\sigma$ :

$$\underbrace{(i_1 \dots)}_k \underbrace{(i_2 \dots)}_k \dots \underbrace{(i_{c_k} \dots)}_k.$$

Sei  $i$  die kleinste Zahl in diesen  $c_k$   $k$ -Zyklen: Die Permutation  $\pi$  kann  $i$  auf  $c_k \cdot k$  Zahlen abbilden: Damit sind aber zugleich auch die Bilder

$$\pi(i), \pi(\sigma(i)), \dots, \pi(\sigma^{k-1}(i))$$

schon festgelegt! Für die nächstkleinere Zahl  $j$  gibt es also nur mehr  $(c_k - 1) \cdot k$  Möglichkeiten, usw.: Es ist klar, daß auf diese Weise alle

Permutationen  $\pi$ , die von  $\sigma$  fixiert werden, richtig abgezählt werden; die Anzahl dieser Permutationen ist also insgesamt

$$c_1! \cdot 1^{c_1} \cdot c_2! \cdot 2^{c_2} \dots$$

Andrerseits gibt ja genau

$$\frac{n!}{1^{c_1} \cdot c_1! \cdot 2^{c_2} \cdot 2! \dots}$$

Permutationen  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  vom Zyklentyp  $(c_1, c_2, \dots)$  (siehe (1.22)). Daher erhalten wir:

$$\begin{aligned} Z_{\text{Permutationen}} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |\text{fix}_{\text{Permutationen}}(\sigma)| \cdot \mathbf{x}^{c(\sigma)} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{(c_1, \dots, c_n)} \frac{n! \cdot (c_1! \cdot 1^{c_1} \dots c_n! \cdot n^{c_n})}{1^{c_1} \cdot c_1! \dots c_n! \cdot n^{c_n}} \cdot x_1^{c_1} \dots x_n^{c_n} \\ &= \sum_{(c_1, c_2, \dots)} x_1^{c_1} \cdot x_2^{c_2} \dots = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i}. \end{aligned}$$

Die folgenden Sätze beziehen sich auf Produkt und Zusammensetzung von Spezies mit Symmetrien: Eigentlich müßten wir zuerst die Symmetrien für diese Konstruktionen *definieren* — aber wie diese Symmetrien *gemeint*<sup>4</sup> sind, wird in den Beweisen klar werden.

SATZ 1.5. Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei Spezies. Dann gilt:

$$Z_{\mathcal{A} \cup \mathcal{B}} = Z_{\mathcal{A}} + Z_{\mathcal{B}}, \quad (1.23)$$

$$Z_{\mathcal{A} \star \mathcal{B}} = Z_{\mathcal{A}} \cdot Z_{\mathcal{B}}. \quad (1.24)$$

Falls  $\mathcal{A}$  kein Objekt der Größe Null enthält, dann gilt auch:

$$Z_{\mathcal{A}^\star} = \frac{1}{1 - Z_{\mathcal{A}}}. \quad (1.25)$$

BEWEIS. (1.23) folgt sofort aus der Definition (1.15).

Für (1.24) betrachten wir ein Element  $C = (A, B) \in \binom{n}{k} \cdot (\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ , wobei  $n = \|A\| + \|B\|$  und  $k = \|A\|$  ist. Eine Permutation  $\sigma$ , die so ein Paar invariant läßt, zerfällt<sup>5</sup> in  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$  mit

$$\sigma((A, B)) = (\sigma_1(A), \sigma_2(B)).$$

Daher ist

$$|\text{fix}_C(\sigma)| = \binom{n}{k} \cdot |\text{fix}_{\mathcal{A}}(\sigma_1)| \cdot |\text{fix}_{\mathcal{B}}(\sigma_2)|,$$

und für den Zyklentyp von  $\sigma$  gilt natürlich

$$c(\sigma) = c(\sigma_1) + c(\sigma_2).$$

<sup>4</sup>Es handelt sich ohnedies um die nächstliegenden Interpretationen.

<sup>5</sup>D.h.: So ist die Wirkung auf dem Produkt *gemeint*!

Für (1.25) müssen wir uns ja nur erinnern, daß

$$\mathcal{A}^* = \dot{\bigcup}_{k \geq 0} \mathcal{A}^k$$

ist: Die Behauptung folgt dann aus (1.23) und (1.24).  $\square$

SATZ 1.6. *Seien  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  zwei Spezies;  $\mathcal{B}$  enthalte kein Objekt der Größe 0. Mit der abkürzenden Schreibweise*

$$\mathbf{x}_m := (x_m, x_{2m}, x_{3m}, \dots)$$

*gilt:*

$$Z_{\mathcal{A}(\mathcal{B})}(\mathbf{x}) = Z_{\mathcal{A}}(Z_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_1), Z_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_2), Z_{\mathcal{B}}(\mathbf{x}_3), \dots)$$

BEWEIS. Nach Definition (1.16) gilt:

$$Z_{\mathcal{A}(\mathcal{B})}(x_1, x_2, x_3, \dots) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(C, \sigma): \\ C \in \mathcal{A}(\mathcal{B}): \|C\|=n \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n: \sigma(C)=C}} \mathbf{x}^{c(\sigma)}.$$

Jedes Objekt  $C \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$  “besteht” ja konstruktionsgemäß

- aus einem  $\mathcal{A}$ -Objekt  $A$  der Größe  $k$
- und aus  $k$   $\mathcal{B}$ -Objekten  $B_1, \dots, B_k$ ;

ist also sozusagen “von der Gestalt”

$$C = (A; B_1, B_2, \dots, B_k).$$

Eine Permutation  $\sigma$ , die dieses Objekt fixiert, kann man so beschreiben:

- $\sigma$  entspricht “makroskopisch” einer Permutation  $\rho \in \mathfrak{S}_k$ , die  $A$  fixiert (Notation:  $\sigma : \rho$ ),
- Jeder Zyklus  $(i_1, \dots, i_l)$  von  $\rho$  induziert einen Zyklus von  $\sigma$ , der die Atome von  $B_{i_m}$  auf die Atome von  $B_{i_{m+1}}$  abbildet (die Sub-Indices werden natürlich modulo der Zykluslänge  $l$  betrachtet): Insbesondere sind die Objekte  $(B_{i_1}, \dots, B_{i_l})$ , die diesem Zyklus entsprechen, als *unbezeichnete* Objekte (“Strukturen”, vergleiche die Überlegungen in Bemerkung 1.6) identisch.

Jedes solche  $C \in \mathcal{A}(\mathcal{B})$  kommt

$$\frac{n!}{\|B_1\|! \cdots \|B_k\|!} \frac{1}{k!}$$

mal vor: Denn das ist die Anzahl aller *ungeordneten Mengenpartitionen* von  $[n]$  in  $k$  Blöcke, deren Größe den Objekten  $B_1, \dots, B_k$  entspricht. Die “Verteilung” der Blöcke auf die Objekte ergibt sich eindeutig

- aus der Größe der Blöcke
- und aus der Ordnung gleich großer Blöcke nach ihrem kleinsten Element.

Von diesen — bis auf die Ummumerierung — identischen Objekten brauchen wir natürlich immer nur eines zu betrachten; z.B. das entsprechend der “kanonischen” Mengenpartition

$$\{\{1, 2, \dots, \|B_1\|\}, \{\|B_1\| + 1, \dots, \|B_1\| + \|B_2\|\}, \dots\}$$

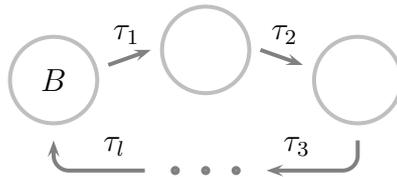
Daher erhalten wir zunächst:

$$\begin{aligned} Z_{\mathcal{A}(B)}(\mathbf{x}) &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\substack{(C, \sigma): \\ C=(A; B_1, B_2, \dots, B_k) \\ (B_1, \dots, B_k) \text{ "kanonisch"} \\ \sigma \in \mathfrak{S}_n: \sigma(C)=C}} \frac{n!}{\|B_k\|! \cdots \|B_l\|!} \cdot \frac{1}{k!} \cdot \mathbf{x}^{c(\sigma)} \\ &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \rho(A)=A \\ \rho = \zeta_1 \circ \zeta_2 \cdots \zeta_m}} \sum_{\sigma: \rho} \sum_{B_1: \zeta_1} \frac{1}{\|B_1\|!^{\ell(\zeta_1)}} \cdots \sum_{B_m: \zeta_m} \frac{1}{\|B_m\|!^{\ell(\zeta_m)}} \cdot \mathbf{x}^{c(\sigma)}. \end{aligned}$$

Zu klären sind zwei Dinge:

- Wieviele “vervollständigte” Permutationen  $\sigma$  gehören zu einem festen  $\rho$ ?
- Wie ergibt sich der Zyklentyp  $c(\sigma)$  der “vervollständigten” Permutation  $\sigma$  aus der Permutation  $\rho$  und den “Unter-Permutationen”?

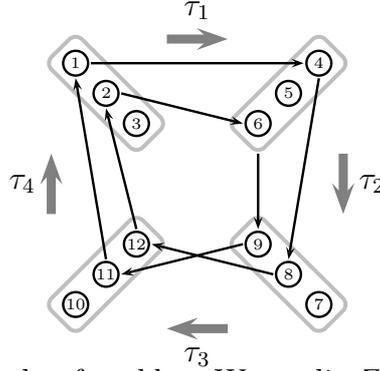
Dazu betrachten wir einen festen Zyklus  $\zeta$  von  $\rho$  mit  $\ell(\zeta) = l$ , der das  $\mathcal{B}$ -Objekt  $B$  “im Kreis herumschickt”:



Dieser Zyklus wird durch Abbildungen (“Ummumerierungen des ursprünglichen Objektes  $B$ ”)  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l$  zu Zyklen der “vollen” Permutation  $\sigma$  “vervollständigt”. Dabei ist zu beachten, daß

$$\tau := \tau_1 \circ \tau_2 \cdots \tau_l \tag{1.26}$$

eine Permutation ergibt, die  $B$  *fixiert*. Zum Beispiel ist in der folgenden schematischen Graphik die Zykluslänge  $l = 4$  und die Permutation (in Zykelschreibweise)  $\tau = (12)(3)$ :



Aus der Graphik wird sofort klar: Wenn die Zyklenzerlegung von  $\tau$  durch

$$\tau = \xi_1 \circ \xi_2 \cdots \xi_s$$

gegeben ist, dann haben die entsprechenden Zyklen der “zusammengesetzten Permutation”  $\sigma$  die Längen  $(\ell(\xi_1) \cdot l, \ell(\xi_2) \cdot l, \dots)$ .

Weiters folgt: Für eine feste Permutation  $\tau$ , die  $B$  fixiert, gibt es

$$(\|B\|!)^{l-1}$$

“Vervollständigungen”  $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_l)$ . Denn die ersten  $(l-1)$   $\tau_i$ 's können wir beliebig wählen;  $\tau_l$  ist dann durch (1.26) eindeutig bestimmt.

Insgesamt können wir die Rechnung also so fortsetzen:

$$\begin{aligned} Z_{A(B)} &= \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{A \in \mathcal{A} \\ \rho(A) = A \\ \rho = \zeta_1 \circ \zeta_2 \cdots \zeta_m}} \sum_{\substack{B_1 \in \zeta_1 \\ \ell(\zeta_1) = l_1 \\ \tau_1(B_1) = B_1}} \frac{(x_{l_1}, x_{2l_1}, \dots)^{c(\tau_1)}}{\|B_1\|!} \cdots \sum_{\substack{B_m \in \zeta_m \\ \ell(\zeta_m) = l_m \\ \tau_m(B_m) = B_m}} \frac{(x_{l_m}, x_{2l_m}, \dots)^{c(\tau_m)}}{\|B_m\|!} \\ &= Z_A(Z_B(x_1, x_2, \dots), Z_B(x_2, x_4, \dots), \dots). \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 1.29. *Wir haben*

$$\begin{aligned} Z_{\text{Permutationen}} &= Z_{\text{Mengen}}(Z_{\text{Zyklen}}(x_1, x_2, \dots), Z_{\text{Zyklen}}(x_2, x_4, \dots), \dots) \\ &= e^{\sum_{n \geq 1} \frac{\Phi(n)}{n} \log \frac{1}{1-x_n} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 1} \frac{\Phi(n)}{n} \log \frac{1}{1-x_{2n}} + \dots} \\ &= e^{\sum_{n \geq 1} \log \frac{1}{1-x_n} \sum_{d|n} \frac{\Phi(d)}{n}} \leftarrow \sum_{d|n} \frac{\Phi(d)}{n} = 1 \\ &= \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1-x_n}. \end{aligned}$$

## KAPITEL 2

### Teilweise geordnete Mengen

DEFINITION 2.1. Eine teilweise geordnete Menge (auf Englisch: partial ordered set oder kurz Poset) ist eine Menge  $P$  mit einer Relation  $\leq$  (“kleinergleich”), die folgende Bedingungen erfüllt:

- (1)  $\forall x \in P : x \leq x$  (Reflexivität)
- (2)  $\forall x, y \in P : x \leq y$  und  $y \leq x \implies x = y$  (Antisymmetrie)
- (3)  $\forall x, y, z \in P : x \leq y$  und  $y \leq z \implies x \leq z$  (Transitivität)

Wir verwenden (wie üblich) folgende abkürzende Schreibweise (“echt kleiner”):

$$x < y :\iff x \leq y \text{ und } x \neq y.$$

Weiters verwenden wir die abkürzende Schreibweise:

$$x > y :\iff x > y \text{ und } \exists z : x > z > y,$$

in Worten: “ $x$  bedeckt  $y$ ”.

Zwei Elemente  $x$  und  $y$  heißen vergleichbar, wenn  $x \leq y$  oder  $y \leq x$  gilt, ansonsten unvergleichbar.

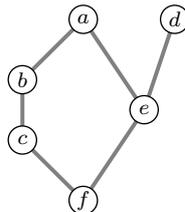
Falls wir zwei Posets  $P, Q$  betrachten, so bezeichnen wir

- die Ordnungsrelation auf  $P$  mit  $\leq_P$
- und die Ordnungsrelation auf  $Q$  mit  $\leq_Q$ ,

um Mißverständnisse zu vermeiden. (Daneben verwenden wir für die “übliche” Ordnung auf  $\mathbb{N}$  weiter unbekümmert das übliche Symbol  $\leq$ .)

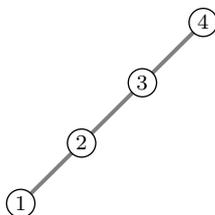
Wenn ein Poset  $P$  endlich ist (genauer gesagt: nicht zu groß ☺), dann kann man es sehr gut mit dem so genannten *Hasse-Diagramm* visualisieren, das die Bedeckungsrelationen in  $P$  zeigt. Die folgende Graphik illustriert dies für  $P = \{a, b, c, d, e, f\}$  mit den Bedeckungsrelationen (die ein endliches Poset natürlich eindeutig festlegen!)

$$b \lessdot a, c \lessdot b, e \lessdot a, e \lessdot d, f \lessdot c, f \lessdot e.$$

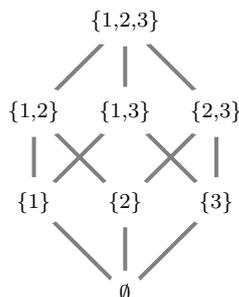


BEISPIEL 2.1. Beispiele für Posets sind:

- (1)  $P = [n]$  linear geordnet: *Eine Ordnungsrelation heißt linear, wenn je zwei Elemente  $x, y$  vergleichbar sind (das Hasse-Diagramm gleicht also einer Linie):*



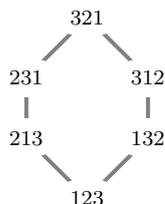
- (2)  $P = 2^{[n]}$  (Potenzmenge von  $[n]$ ) geordnet durch Mengeneinklusion: *Dieses spezielle Poset nennt man auch die Boolesche Algebra  $B_n$ . Z.B. für  $n = 3$ :*



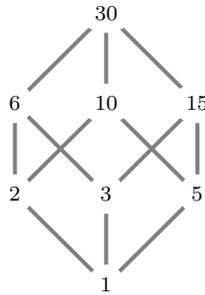
- (3)  $P = \mathfrak{S}_n$  mit der Bruhat-Ordnung:  $\sigma \leq \pi$  genau dann, wenn die Permutation  $\pi$  aus der Permutation  $\sigma$  dadurch hervorgeht, daß zwei nebeneinanderliegende Elemente miteinander vertauscht werden und sich dadurch die Anzahl der Inversionen erhöht.

$$\sigma = \cdots \pi_i < \pi_{i+1} \cdots$$

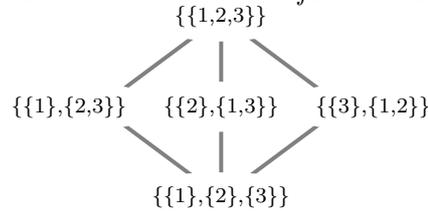
$$\pi = \cdots \pi_{i+1} > \pi_i \cdots$$



- (4)  $P = T_n := \{d \in \mathbb{N} : d|n\}$ , geordnet durch  $a \leq b : \iff a|b$ . *Dieses spezielle Poset heißt auch Teilerverband. Z.B.  $n = 30$ :*



- (5)  $P = \mathbb{P}_n$ , die Familie aller (Mengen-)Partitionen von  $[n]$ , geordnet durch “Verfeinerung”: Für zwei Partition  $\pi, \tau$  gilt  $\pi \leq \tau$ , wenn jeder Block von  $\pi$  in einem Block von  $\tau$  enthalten ist (d.h., “ $\pi$  entsteht aus  $\tau$  durch “Unterteilung” von Blöcken: “Die feinere ist die kleinere”<sup>1)</sup> z. B. für  $n = 3$ :



- (6)  $P = V_{n,q}$ , die Familie der Teilräume eines endlichen Vektorraumes  $(GF(q))^n$  über einem endlichen Körper  $GF(q)$ , geordnet durch “Teilraum-Relation” (also Mengen-Inklusion).

DEFINITION 2.2. Gegeben seien zwei Posets  $P, Q$  mit Ordnungsrelationen  $\leq_P$  (für  $P$ ) und  $\leq_Q$  (für  $Q$ ). Eine Abbildung  $\phi : P \rightarrow Q$  heißt ordnungserhaltend, wenn für alle  $x, y \in P$  gilt:

$$x \leq_P y \implies \phi(x) \leq_Q \phi(y).$$

$P$  und  $Q$  heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung  $\phi : P \rightarrow Q$  gibt, sodaß  $\phi$  und  $\phi^{-1}$  beide ordnungserhaltend (eine solche Funktion  $\phi$  heißt auch Ordnungsisomorphismus) sind, d.h. also:

$$x \leq_P y \iff \phi(x) \leq_Q \phi(y).$$

BEISPIEL 2.2. Sei  $P = \{0, 1\}^n$  die Menge aller  $\{0, 1\}$ -Vektoren der Länge  $n$ , geordnet durch

$$(v_1, \dots, v_n) \leq (w_1, \dots, w_n) \iff v_i \leq w_i \text{ für } i = 1, 2, \dots, n.$$

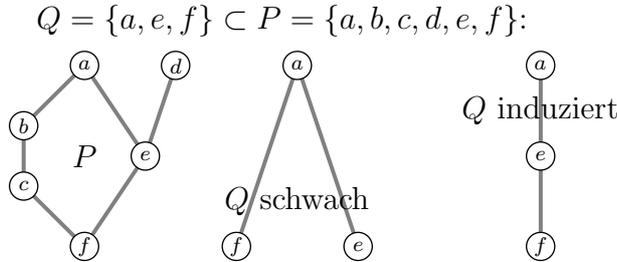
Die Deutung dieser Vektoren als charakteristische Funktion von Teilmengen ergibt eine ordnungserhaltende Bijektion  $P \rightarrow B_n$  auf die Boolesche Algebra  $B_n$  (siehe Beispiel 2.1).

DEFINITION 2.3. Sei  $P$  ein Poset: Eine teilweise geordnete Teilmenge  $Q \subseteq P$  heißt

- schwaches Teilposet von  $P$ , wenn  $x \leq_Q y \implies x \leq_P y$  für alle  $x, y \in Q$ ,

- induziertes Teilposet von  $P$ , wenn  $x \leq_Q y \iff x \leq_P y$  für alle  $x, y \in Q$ .

Dies ist analog zum Unterschied von *Teilgraphen* und *induzierten Teilgraphen*; die folgende Graphik verdeutlicht den Unterschied:



DEFINITION 2.4. Sei  $P$  ein Poset und  $x, y \in P$  mit  $x \leq y$ : Das induzierte Teilposet

$$[x, y] := \{z : x \leq z \leq y\}$$

nennen wir ein Intervall (speziell gilt:  $[x, x] = \{x\}$ ).

Ein Poset, in dem jedes Intervall endlich ist, heißt lokal endlich.

DEFINITION 2.5 (Ketten, Antiketten). Sei  $P$  ein Poset: Ein Element  $x \in P$  mit der Eigenschaft

$$\nexists y \in P : y < x$$

heißt minimales Element von  $P$ , analog heißt ein Element  $x \in P$  mit der Eigenschaft

$$\nexists y \in P : y > x$$

ein maximales Element von  $P$ .

Ein Element  $x \in P$  mit der Eigenschaft  $x \leq y$  (bzw.  $x \geq y$ ) für alle  $y \in P$  heißt Minimum (bzw. Maximum). Wenn  $P$  ein Minimum (Maximum) besitzt, dann natürlich genau eines: Wir bezeichnen es mit  $\hat{0}$  (bzw.  $\hat{1}$ ).

Wenn  $P$  ein Minimum  $\hat{0}$  besitzt, dann bezeichnen wir ein Element, das  $\hat{0}$  bedeckt, als Atom von  $P$ .

Wenn  $P$  ein Maximum  $\hat{1}$  besitzt, dann bezeichnen wir ein Element, das von  $\hat{1}$  bedeckt wird, als Koatom von  $P$ .

Eine Teilmenge  $K$  von  $P$ , die als induziertes Teilposet linear geordnet ist, heißt eine Kette in  $P$ . Eine Teilmenge  $A$  von  $P$ , die keine zwei vergleichbaren Elemente enthält, heißt Antikette (oder Sperner-Familie) in  $P$ .

Wenn eine Kette  $K = \{x_1 < x_2 < \dots < x_m\}$  endlich ist, dann nennen wir  $\ell(K) := |K| - 1$  die Länge von  $K$ .

Eine (endliche) Kette heißt saturiert, wenn "ihre Elemente einander (in  $P$ ) bedecken", also wenn

$$K = \{x_1 \triangleleft x_2 \triangleleft \dots \triangleleft x_m\}.$$

Eine saturierte Kette  $K$  heißt maximal, wenn es keine saturierte Kette  $M$  gibt mit  $K \subseteq M$  und  $\ell(M) > \ell(K)$ .

DEFINITION 2.6 (Ordnungsideal). Eine Teilmenge  $I \subseteq P$  mit der Eigenschaft

$$x \in I \text{ und } y \in P \text{ mit } y \leq x \implies y \in I$$

heißt ein Ordnungsideal von  $P$ . Für eine beliebige Teilmenge  $S \subseteq P$  ist

$$\langle S \rangle := \{y \in P : \exists x \in S : y \leq x\}$$

immer ein Ordnungsideal; man nennt es das von  $S$  erzeugte Ordnungsideal. Besteht  $S$  nur aus einem Element  $x$ , dann nennt man  $\langle S \rangle = \langle \{x\} \rangle$  das (von  $x$  erzeugte) Ordnungsideal.

Eine Teilmenge  $I \subseteq P$  mit der Eigenschaft

$$x \in I \text{ und } y \in P \text{ mit } y \geq x \implies y \in I$$

heißt ein duales Ordnungsideal von  $P$  (und ganz analog zu oben ist auch ein duales Ordnungsideal definiert).

Die Menge aller Ordnungsideale von  $P$ , geordnet durch Inklusion, bildet selbst ein Poset, das wir mit  $\mathcal{J}(P)$  bezeichnen: Dieses Poset hat (natürlich) immer ein Minimum  $\hat{0}$  (nämlich die leere Menge) und ein Maximum  $\hat{1}$  (nämlich ganz  $P$ ).

KOROLLAR 2.1. Sei  $P$  ein Poset, sei  $I \in \mathcal{J}(P)$  ein Ordnungsideal in  $P$ , sei  $x$  ein maximales Element in  $I$ .

Dann ist auch  $I \setminus \{x\}$  ein Ordnungsideal in  $P$ .

Falls  $P$  endlich ist, gibt es eine Bijektion zwischen Ordnungsidealen  $I$  und Antiketten  $A$ :

$$I \mapsto A := \{x : x \text{ maximal in } I\}$$

$$A \mapsto I = \langle A \rangle := \{y : \exists x \in A : y \leq x\}$$

DEFINITION 2.7 (Lineare Erweiterung). Eine ordnungserhaltende Bijektion eines endlichen Posets  $P$  mit  $|P| = n$  auf  $[n]$  heißt lineare Erweiterung von  $P$ .

KOROLLAR 2.2. Die Anzahl der linearen Erweiterungen eines endlichen Posets  $P$  ist gleich der Anzahl der maximalen Ketten in  $\mathcal{J}(P)$ .

BEWEIS. Sei  $\sigma : P \rightarrow [n]$  eine lineare Erweiterung. Setze  $I_0 := \emptyset$  und  $I_k := \sigma^{-1}([k])$  für  $k = 1, 2, \dots, n$ . Dann sind die Teilmengen  $I_k \subseteq P$  immer Ordnungsideale von  $P$  (weil  $\sigma$  ordnungserhaltend ist) mit  $|I_k| = k$  (weil  $\sigma$  bijektiv ist); daher gilt in  $\mathcal{J}(P)$ :

$$\hat{0} = I_0 \triangleleft I_1 \triangleleft \dots \triangleleft I_n = P = \hat{1}.$$

Das heißt aber: Zu jeder linearen Erweiterung  $\sigma$  von  $P$  gehört eine maximale Kette in  $\mathcal{J}(P)$ .

Sei umgekehrt eine maximale Kette  $K$  in  $\mathcal{J}(P)$  gegeben: Es ist klar, daß eine solche Kette immer Länge  $n$  hat; denn algorithmisch kann man jede maximale Kette so gewinnen: Beginne mit  $I_0 = \emptyset$ ; wenn  $I_{k-1} \neq P$  schon konstruiert ist, dann wähle ein *minimales* Element  $x_k$  aus  $P \setminus I_{k-1}$  und setze  $I_k := I_{k-1} \cup \{x_k\}$ . Zu dieser Kette  $K$  definieren wir  $\sigma : P \rightarrow [n]$ :

$$\sigma(x_k) = k;$$

Die Abbildung  $\sigma$  ist natürlich bijektiv; sie ist außerdem ordnungserhaltend, denn

$$x_i \leq_P x_j \implies i \leq j.$$

(Denn  $i > j \implies x_i \not\leq_P x_j$ .)

Insgesamt sehen wir: Es gibt eine Bijektion zwischen linearen Erweiterungen von  $P$  und maximalen Ketten in  $\mathcal{J}(P)$ .  $\square$

**DEFINITION 2.8.** *Ein (endliches) Poset heißt graduiert vom Rang  $n$ , wenn jede maximale Kette dieselbe Länge  $n$  hat. Für ein solches Poset  $P$  existiert eine eindeutig bestimmte Rangfunktion  $\rho : P \rightarrow \{0, 1, \dots, n\}$  sodaß*

- $\rho(x) = 0$ , wenn  $x$  ein minimales Element von  $P$  ist,
- $\rho(y) = \rho(x) + 1$ , wenn  $y \succ x$

Wenn  $\rho(x) = i$ , dann sagen wir:  $x$  hat Rang  $i$ . Für ein solches Poset  $P$  sei  $p_i$  die Anzahl der Elemente vom Rang  $i$ : Dann nennen wir das Polynom

$$F(P, q) := \sum_{i=0}^n p_i q^i$$

die rangerzeugende Funktion von  $P$ .

## 2.1. Konstruktion von Posets

Wenn man zwei Posets gegeben hat, dann kann man daraus auf verschiedene Art und Weise ein neues Poset zusammensetzen. Das einfachste Poset (mal abgesehen vom leeren Poset), das nur aus einem einzigen Element besteht, bezeichnen wir in der Folge mit  $\circ$ .

**DEFINITION 2.9.** *Seien  $P$  und  $Q$  Posets;  $P$  und  $Q$  seien als Mengen disjunkt. Dann bezeichnen wir die direkte Summe von  $P$  und  $Q$  mit  $P + Q$ : Das ist das Poset auf der Vereinigungsmenge  $P \cup Q$ , sodaß  $x \leq y$  (genau dann) gilt, wenn*

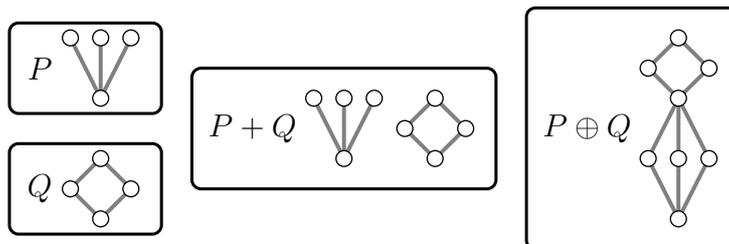
- $x, y \in P$  und  $x \leq_P y$
- oder  $x, y \in Q$  und  $x \leq_Q y$ .

Weiters bezeichnen wir die ordinale Summe von  $P$  und  $Q$  mit  $P \oplus Q$ : Das ist das Poset auf der Vereinigungsmenge  $P \cup Q$ , sodaß  $x \leq y$  (genau dann) gilt, wenn

- $x, y \in P$  und  $x \leq_P y$

- oder  $x, y \in Q$  und  $x \leq_Q y$
- oder  $x \in P$  und  $y \in Q$ .

Mit Hassediagrammen kann man die direkte und die ordinale Summe so veranschaulichen:



Es gilt also sichtlich

$$P + Q \simeq Q + P,$$

aber im allgemeinen

$$P \oplus Q \not\simeq Q \oplus P.$$

Direkte und ordinale Summe sind beide assoziativ.

Eine Antikette mit  $n$  Elementen ist also sichtlich isomorph zur  $n$ -fachen direkten Summe

$$n \cdot \circ := \underbrace{\circ + \circ + \dots + \circ}_{n \text{ mal}},$$

und eine Kette mit  $n$  Elementen ist isomorph zur  $n$ -fachen ordinalen Summe

$$\underbrace{\circ \oplus \circ \oplus \dots \oplus \circ}_{n \text{ mal}}.$$

DEFINITION 2.10. Seien  $P$  und  $Q$  Posets.

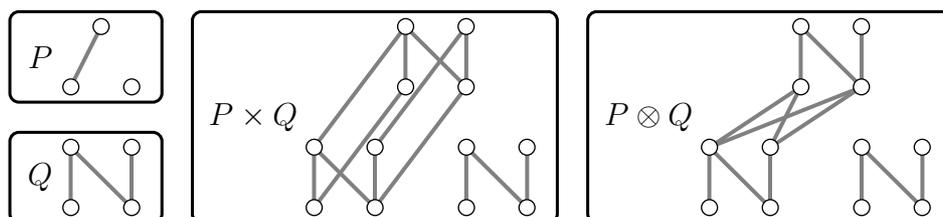
Dann bezeichnen wir das direkte Produkt von  $P$  und  $Q$  mit  $P \times Q$ , das ist das Poset auf der Produktmenge  $P \times Q$ , sodaß  $(x, y) \leq (x', y')$  (genau dann) gilt, wenn

$$x \leq_P x' \text{ und } y \leq_Q y'.$$

Weiters bezeichnen wir das ordinale Produkt von  $P$  und  $Q$  mit  $P \otimes Q$ , das ist das Poset auf der Produktmenge  $P \times Q$ , sodaß  $(x, y) \leq (x', y')$  (genau dann) gilt, wenn

$$x = x' \text{ und } y \leq_Q y', \text{ oder } x <_P x'.$$

Mit Hassediagrammen kann man das direkte und das ordinale Produkt so veranschaulichen:



Es gilt also sichtlich wieder

$$P \times Q \simeq Q \times P,$$

aber im allgemeinen

$$P \otimes Q \not\simeq Q \otimes P.$$

Weiters ist das direkte Produkt assoziativ.

DEFINITION 2.11. Seien  $P$  und  $Q$  Posets.

Dann bezeichnen wir mit  $Q^P$  die Menge aller ordnungserhaltenden Abbildungen  $f : P \rightarrow Q$  mit der Ordnungsrelation

$$f \leq g, \text{ wenn } f(x) \leq_Q g(x) \text{ f\u00fcr alle } x \in P.$$

BEISPIEL 2.3. Der Boolesche Verband l\u00e4\u00dft sich also auch so deuten, vergleiche Beispiel 2.2:

$$B_n \simeq \{0, 1\}^{n \circ}.$$

## 2.2. Verb\u00e4nde

DEFINITION 2.12 (Verband). Sei  $P$  ein Poset, seien  $x, y \in P$ : Ein Element  $z$  mit

$$z \geq x \text{ und } z \geq y$$

he\u00dft obere Schranke von  $x$  und  $y$ ;  $z$  he\u00dft kleinste obere Schranke oder Supremum von  $x$  und  $y$ , wenn f\u00fcr jede obere Schranke  $w$  von  $x$  und  $y$

$$w \geq z$$

gilt. Wenn eine kleinste obere Schranke  $z$  von  $x$  und  $y$  existiert, dann ist sie nat\u00fcrlich eindeutig; wir schreiben  $x \vee y$  und sagen “ $x$  sup  $y$ ”.

Analog definieren wir die gr\u00f6\u00dfte untere Schranke oder Infimum (wenn sie existiert): Wir schreiben  $x \wedge y$  und sagen “ $x$  inf  $y$ ”.

Ein Poset, in dem jedes Paar  $(x, y)$  von Elementen eine kleinste obere Schranke und eine gr\u00f6\u00dfte untere Schranke besitzt, he\u00dft ein Verband (englisch: Lattice).

Ein endlicher Verband hat ein (eindeutiges) Minimum  $\hat{0}$  und ein (eindeutiges) Maximum  $\hat{1}$ .

Ein Element  $x$  in einem Verband, das  $\hat{0}$  bedeckt, he\u00dft ein Atom.

Ein Element  $x$  in einem Verband, das von  $\hat{1}$  bedeckt wird, he\u00dft ein Koatom.

BEISPIEL 2.4. Endliche Verb\u00e4nde sind:

- (1)  $[n]$  mit der (\u00fcblichen) linearen Ordnung.
- (2) die Potenzmenge  $2^{[n]}$ , geordnet durch Mengeninklusion.
- (3)  $\mathfrak{S}_n$  mit der Bruhat-Ordnung,
- (4) Die Menge  $T_n = \{d \in \mathbb{N} : d|n\}$  der (positiven) Teiler einer Zahl  $n \in \mathbb{N}$ , geordnet durch die Teilbarkeitsrelation ( $d_1 \leq d_2 : \iff d_1|d_2$ ).

- (5) Die Menge  $\Pi_n$  der (Mengen-)Partitionen von  $[n]$ , geordnet durch "Verfeinerung von Partitionen"
- (6) Die Menge  $V_{n,q}$  der Teilräume eines  $n$ -dimensionalen Vektorraums über einem endlichen Körper, geordnet durch die "Teilraum-Beziehung" (also wieder Mengeninklusion).

KOROLLAR 2.3. In jedem Verband  $L$  gelten die folgenden Rechenregeln:

- (1)  $\wedge$  und  $\vee$  sind kommutative und assoziative Operationen in  $L$ .
- (2)  $\forall x \in L : x \vee x = x \wedge x = x$  ( $\wedge$  und  $\vee$  sind idempotente Operationen in  $P$ ).
- (3)  $x \wedge y = x \iff x \vee y = y \iff x \leq y$ .
- (4)  $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$  (Absorptionsgesetz).

BEWEIS. (1): Kommutativität ist natürlich klar.

Assoziativität für  $\vee$  sieht man so:  $x \vee (y \vee z)$  ist größer oder gleich

- als  $x$  und  $y \vee z$ ,
- also auch als  $x, y$  und  $z$ ,
- also auch als  $x \vee y$  und  $z$ ,
- also auch als  $(x \vee y) \vee z$ ;

also  $x \vee (y \vee z) \geq (x \vee y) \vee z$ , und dasselbe gilt umgekehrt.

Für  $\wedge$  funktioniert die Argumentation genauso.

(2) Ist trivial.

(3) Aus  $x \leq y$  folgt natürlich  $x \vee y = y$ , und aus  $x \vee y = y$  folgt natürlich  $y \geq x$ . Für  $\wedge$  funktioniert die Argumentation genauso.

(4) Folgt sofort aus (3). □

KOROLLAR 2.4. Sei  $L$  ein Verband, sei  $a' \leq a$  in  $L$ . Dann gilt für alle  $b \in L$

$$a' \wedge b \leq a \wedge b \tag{2.1}$$

$$a' \vee b \leq a \vee b. \tag{2.2}$$

BEWEIS. Aus

$$a' \wedge b \leq \begin{cases} b \\ a' \leq a \end{cases} \quad \text{bzw.} \quad a \vee b \geq \begin{cases} b \\ a \geq a' \end{cases}$$

folgen sofort die Behauptungen. □

Man kann einen Verband auch "axiomatisch" über die Operationen  $\wedge$  und  $\vee$  charakterisieren.

SATZ 2.1. Sei  $P$  eine Menge mit Operationen  $\vee$  und  $\wedge$ , die die Punkte 1, 2 und 4 aus Korollar 2.3 erfüllen. Dann ist  $P$  ein Verband, wobei  $\leq$  durch

$$x \leq y :\iff x \wedge y = x$$

definiert ist.

BEWEIS. Wir zeigen zunächst: Die so definierte Relation ist eine partielle Ordnung.

- Reflexivität folgt aus Punkt 2 in Korollar 2.3:

$$x \wedge x = x \implies x \leq x.$$

- Antisymmetrie folgt direkt aus der Definition (und aus Punkt 1 in Korollar 2.3: Kommutativität):

$$x \leq y \text{ und } y \leq x \iff x \wedge y = x \text{ und } y \wedge x = y \implies x = y.$$

- Transitivität: Aus

$$x \leq y \text{ und } y \leq z \iff x \wedge y = x \text{ und } y \wedge z = y$$

folgt (verwende Punkt 1 in Korollar 2.3: Assoziativität)

$$x \wedge z = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = x \wedge y = x,$$

also  $x \leq z$ .

Als nächstes zeigen wir: Für je zwei  $x, y \in P$  gibt es ein Infimum. Die Notation legt schon die richtige Behauptung nahe:  $x \wedge y$  ist das Infimum, denn

- $x \wedge y \leq x$ : Das ergibt sich sofort aus Korollar 2.3 Punkt 1+2:

$$x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y.$$

- Für  $z$  mit  $z \leq x$  und  $z \leq y$  gilt (Korollar 2.3: Assoziativität):

$$z \wedge (x \wedge y) = (z \wedge x) \wedge y = z \wedge y = z \implies z \leq x \wedge y.$$

Schließlich zeigen wir noch die Symmetriebeziehung

$$x \wedge y = x \iff x \vee y = y.$$

Beide Richtungen folgen aus Punkt 4 in Korollar 2.3:

- $x \vee y = (x \wedge y) \vee y = y,$
- $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) = x.$

Mit dieser Symmetriebeziehung wird klar, daß (wie zu erwarten) auch  $x \vee y$  das Supremum ist. Damit ist alles gezeigt.  $\square$

PROPOSITION 2.1. Sei  $P$  ein endliches Poset mit  $\hat{1}$ , sodaß für alle  $x, y \in P$  das Infimum  $x \wedge y$  existiert. Dann ist  $P$  bereits ein Verband.

BEWEIS. Zu zeigen ist ja nur mehr, daß für alle  $x, y \in P$  auch das Supremum  $x \vee y$  existiert. Dazu definieren wir naheliegender

$$x \vee y := \bigwedge_{z \geq x, y} z.$$

Die Menge, über die das Infimum gebildet wird, ist nicht leer (wegen  $\hat{1} \geq x, y$ ) und endlich, also ist  $x \vee y$  wohldefiniert: Daß es die Eigenschaft eines Supremums erfüllt, ist klar: Denn  $a, b \geq x, y \implies x, y \leq a \wedge b$ , also gilt (Induktion) auch  $x, y \leq \bigwedge_{z \geq x, y} z$ , und für jede obere Schranke  $a \geq x, y$  gilt natürlich  $a \leq \bigwedge_{z \geq x, y} z$ .  $\square$

BEMERKUNG 2.1. Seien  $P$  und  $Q$  zwei Verbände. Dann ist auch das direkte Produkt  $P \times Q$  ein Verband, mit

$$\begin{aligned}(x_1, y_1) \vee (x_2, y_2) &= (x_1 \vee x_2, y_1 \vee y_2), \\ (x_1, y_1) \wedge (x_2, y_2) &= (x_1 \wedge x_2, y_1 \wedge y_2).\end{aligned}$$

Ebenso ist  $Q^P$  ein Verband, mit

$$\begin{aligned}(f \vee g)(x) &= f(x) \vee g(x), \\ (f \wedge g)(x) &= f(x) \wedge g(x).\end{aligned}$$

**2.2.1. Distributive Verbände.** Eine besonders wichtige Klasse von Verbänden sind die distributiven Verbände.

DEFINITION 2.13. Ein Verband  $L$  heißt distributiv, wenn für alle  $a, b, c \in L$  die folgenden Distributivgesetze gelten:

$$\begin{aligned}a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c).\end{aligned}$$

BEMERKUNG 2.2. Es genügt, nur ein Distributivgesetz zu fordern — das andere folgt automatisch. Z.B. können wir das erste verwenden, um das zweite abzuleiten:

$$\begin{aligned}(a \vee b) \wedge (a \vee c) &= ((a \vee b) \wedge a) \vee ((a \vee b) \wedge c) \leftarrow 1. \text{ Dist.G.} \\ &= a \vee ((a \vee b) \wedge c) \leftarrow \text{Absorption} \\ &= a \vee ((a \wedge c) \vee (b \wedge c)) \leftarrow 1. \text{ Dist.G.} \\ &= a \vee (b \wedge c) \leftarrow \text{Ass.G. und Absorption}\end{aligned}$$

BEMERKUNG 2.3. Seien  $L_1$  und  $L_2$  zwei distributive Verbände: Dann ist auch das direkte Produkt  $L_1 \times L_2$  wieder ein distributiver Verband.

BEISPIEL 2.5. Beispiele für distributive Verbände sind:

- (1) Lineare Ordnung
- (2) Boolescher Verband  $B_n$ : Hier ist ja  $A \vee B = A \cup B$  und  $A \wedge B = A \cap B$ ; die Distributivgesetze entsprechen also den mengentheoretischen Identitäten

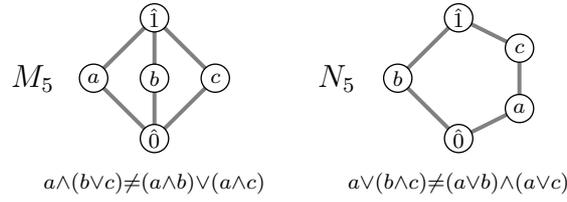
$$\begin{aligned}A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C)\end{aligned}$$

- (3) Teilerverband  $T_n = \{d \in \mathbb{N} : d|n\}$ : Denn sei  $n = p_1^{k_1} \cdots p_r^{k_r}$  die eindeutige Primfaktorzerlegung von  $n$ , dann ist

$$T_n \simeq [0, k_1] \times \cdots \times [0, k_r].$$

- (4) Für ein beliebiges Poset  $P$  ist der Verband der Ordnungsideale  $\mathcal{J}(P)$  immer distributiv.

Einfache Beispiele für nicht distributive Verbände sind hingegen die folgenden (dargestellt durch Hasse-Diagramme):



SATZ 2.2 (Struktursatz für endliche distributive Verbände, Satz von Birkhoff). *Sei  $L$  ein endlicher distributiver Verband. Dann gibt es ein Poset  $P$  (eindeutig bis auf Isomorphismus), sodaß*

$$L \simeq \mathcal{J}(P).$$

DEFINITION 2.14. *Sei  $L$  ein Verband. Ein Element  $x \neq \hat{0} \in L$  heißt supremum-irreduzibel, wenn  $x$  nicht dargestellt werden kann als*

$$x = y \vee z,$$

wobei  $y < x$  und  $z < x$ .

LEMMA 2.1. *Sei  $L$  ein distributiver Verband, sei  $a \in L$  supremum-irreduzibel. Dann gilt:*

$$a \leq x \vee y \implies (a \leq x \text{ oder } a \leq y).$$

BEWEIS. Aus  $a = a \wedge (x \vee y) = (a \wedge x) \vee (a \wedge y)$  folgt nach Voraussetzung

$$a \wedge x = a \text{ oder } a \wedge y = a,$$

das heißt also  $a \leq x$  oder  $a \leq y$ . □

BEWEIS VON SATZ 2.2. Sei  $P$  die Menge der supremum-irreduziblen Elemente von  $L$ , aufgefaßt als ein Poset mit der “von  $L$  geerbten Ordnungsrelation”.

Wir definieren eine Abbildung  $\varphi : L \rightarrow \mathcal{J}(P)$  durch

$$\varphi(\hat{0}) = \emptyset; \quad \varphi(x) := I(x) := \{x' \in P : x' \leq x\} \text{ für } x \neq \hat{0}. \quad (2.3)$$

**Behauptung:**  $\varphi$  ist *bijektiv* mit Umkehrabbildung

$$\psi : I \mapsto \bigvee_{y \in I} y$$

für  $I \neq \emptyset \in \mathcal{J}(P)$  (Sonderfall:  $\psi(\emptyset) = \hat{0}$ ).

Für den Sonderfall  $x = \hat{0}$  bzw.  $y = \emptyset$  gilt  $\varphi(x) = y$  und  $\psi(y) = x$ . Zu zeigen ist also noch:

$$\forall x \in L, x \neq \hat{0} : (\psi \circ \varphi)(x) = x, \quad (2.4)$$

$$\forall y \in \mathcal{J}(P), y \neq \emptyset : (\varphi \circ \psi)(y) = y. \quad (2.5)$$

Wir zeigen zuerst (2.4). Dazu beobachten wir, daß  $x \neq \hat{0}$  immer als Supremum von supremum-irreduziblen Elementen darstellbar ist: Falls  $x$  selbst supremum-irreduzibel ist, ist das natürlich klar:

$$x = \bigvee_{y=x} y.$$

Sei also  $x$  nicht supremum-irreduzibel, dann gibt es definitionsgemäß Elemente  $x' < x$  und  $x'' < x$  mit  $x = x' \vee x''$ . Dieselbe Überlegung können wir aber auch auf  $x'$  und  $x''$  anwenden, usw.: Da  $L$  endlich ist, muß dieser Algorithmus irgendwann stoppen, wir erhalten also die behauptete Zerlegung in supremum-irreduzible Elemente

$$x = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k \text{ mit } x_i < x \text{ für } i = 1, \dots, k.$$

Es ist dann aber

$$\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \varphi(x) = I(x),$$

d.h.,

$$x = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k \leq \bigvee_{y \in I(x)} y \leq x,$$

daraus folgt aber  $\bigvee_{y \in I(x)} y = x$  und damit ist (2.4) gezeigt.

Wir zeigen nun (2.5): Sei  $y = \{x_1, x_2, \dots, x_k\} \in \mathcal{J}(P)$ . Sei  $x = \psi(y) = x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k$ . Natürlich ist  $y \subseteq \varphi(x)$ ; zu zeigen ist also noch  $\varphi(x) \subseteq y$ , daß also jedes supremum-irreduzible Element  $x'$  mit  $x' \leq x$  in  $y$  enthalten ist:

$$x' = x' \wedge x = (x' \wedge x_1) \vee \cdots \vee (x' \wedge x_k),$$

und da  $x'$  supremum-irreduzibel ist, gibt es ein  $i$  mit  $x' = x' \wedge x_i$ : Das heißt aber  $x' \leq x_i$ , und damit ist (2.5) gezeigt.

**Behauptung:**  $\varphi$  ist ordnungserhaltend, d.h.:

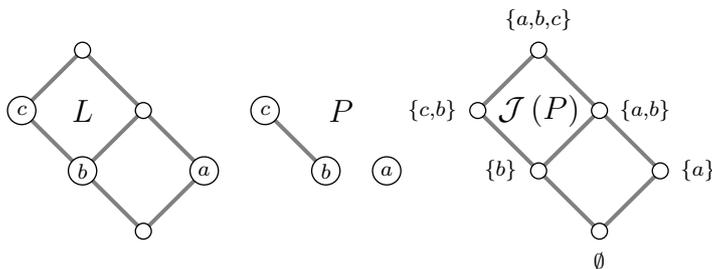
$$x_1 \leq x_2 \iff I(x_1) \subseteq I(x_2).$$

Betrachte also für  $x_1 \leq x_2$  ein beliebiges Element  $x' \in I(x_1)$ :  $x' \leq x_1 \implies x' \leq x_2 \implies x' \in I(x_2)$ , also  $I(x_1) \subseteq I(x_2)$ . Umgekehrt folgt aus  $I(x_1) \subseteq I(x_2)$

$$\bigvee_{y \in I(x_1)} y \leq \left( \bigvee_{y \in I(x_1)} y \right) \vee \left( \bigvee_{y \in I(x_2) \setminus I(x_1)} y \right) = \bigvee_{y \in I(x_2)} y.$$

Aus den beiden Behauptungen folgt Satz 2.2. □

**BEISPIEL 2.6.** Das folgende Beispiel illustriert den Sachverhalt:



SATZ 2.3. Sei  $L$  ein endlicher distributiver Verband. Dann hat  $L$  eine Rangfunktion  $\mathbf{rg}$ ; diese ist gegeben durch

$$\mathbf{rg}(x) = |I(x)|,$$

wobei  $I(x)$  das in (2.3) definierte Ideal (im Poset der supremum-irreduziblen Elemente von  $L$ ) ist. Insbesondere ist der Rang  $\mathbf{rg}(L)$  von  $L$  gleich der Anzahl der supremum-irreduziblen Elemente von  $L$ .

BEWEIS. Nach dem Satz von Birkhoff (Satz 2.2) gilt

$$L \simeq \mathcal{J}(P),$$

wo  $P$  das Poset der supremum-irreduziblen Elemente in  $L$  ist. Daher genügt es zu zeigen, daß in  $\mathcal{J}(P)$  alle maximalen Ketten dieselbe Länge haben.

Sei also

$$\hat{0} = \emptyset = I_0 \triangleleft I_1 \triangleleft \cdots \triangleleft I_r = \hat{1} = P$$

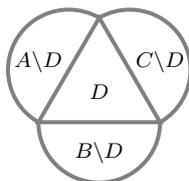
eine maximale Kette in  $\mathcal{J}(P)$ .

Wir behaupten:  $|I_k| = |I_{k-1}| + 1$ . Denn sei  $S := I_k \setminus I_{k-1} = \{x_1, \dots, x_m\}$ , dann gibt es wegen  $S \neq \emptyset$  natürlich ein maximales Element  $x_i$  (in bezug auf die Ordnung von  $P$ ) in  $S$ . Dann ist  $I_k \setminus \{x_i\}$  aber auch ein Ordnungsideal von  $P$  (vgl. Korollar 2.1), und da  $I_k \triangleright I_{k-1}$  gilt  $I_{k-1} = I_k \setminus \{x_i\}$ . Alle maximalen Ketten in  $\mathcal{J}(P)$  haben also dieselbe Länge  $|P|$ .  $\square$

### 2.3. Inzidenzalgebra und Möbiusinversion

Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  drei Mengen mit

$$A \cap B = A \cap C = B \cap C = A \cap B \cap C =: D.$$



Offensichtlich (wenn man will: Gemäß dem *Prinzip der Inklusion–Exklusion*) gilt:

$$|A \cup B \cup C| = 1 \cdot |A| + 1 \cdot |B| + 1 \cdot |C| + (-2) \cdot |D|.$$

Klarerweise hängen die auftretenden Koeffizienten (hier: 1, 1, 1, –2) nur von der Ordnungsrelation (Mengeninklusion) der beteiligten Mengen  $A \cup B \cup C$ ,  $A$ ,  $B$ ,  $C$  und  $D$  ab: Tatsächlich kann man diese Koeffizienten aus der Ordnungsrelation recht elegant ausrechnen, wie die folgenden Überlegungen zeigen werden.

### 2.3.1. Die Inzidenzalgebra eines lokal–endlichen Posets.

DEFINITION 2.15. *Sei  $P$  ein lokal–endliches Poset (zur Erinnerung: D.h., daß für alle  $x, y \in P$  mit  $x \leq y$  das Intervall  $[x, y]$  endlich ist). Wir betrachten die Menge  $\mathcal{I}(P)$  aller Funktionen*

$$f : P \times P \rightarrow \mathbb{C}$$

mit der Eigenschaft

$$f(x, y) \equiv 0 \text{ falls } x \not\leq y$$

(die Funktionen  $f$  sind also sozusagen “nur auf Intervallen” definiert) mit der “üblichen” Addition und Skalarmultiplikation von Funktionen

$$\begin{aligned} f, g \in \mathcal{I}(P) : (f + g)(x, y) &:= f(x, y) + g(x, y), \\ f \in \mathcal{I}(P), \lambda \in \mathbb{C} : (\lambda \cdot f)(x, y) &:= \lambda \cdot (f(x, y)) \end{aligned}$$

und der folgenden nicht kommutativen Multiplikation (Konvolution):

$$(f \star g)(x, y) := \sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) g(z, y).$$

(Der Summationsbereich ist endlich, da  $P$  als lokal–endlich angenommen wurde!)

$\mathcal{I}(P)$  ist in bezug auf Addition und Skalarmultiplikation klarerweise ein Vektorraum über  $\mathbb{C}$ . Für die Multiplikation (Konvolution) gilt das Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} ((f \star g) \star h)(x, y) &= \sum_{x \leq z \leq y} (f \star g)(x, z) h(z, y) \\ &= \sum_{x \leq z \leq y} \left( \sum_{x \leq u \leq z} f(x, u) g(u, z) \right) h(z, y) \quad \leftarrow \text{siehe Bem. unten!!} \\ &= \sum_{x \leq u \leq y} \sum_{u \leq z \leq y} f(x, u) g(u, z) h(z, y) \\ &= \sum_{x \leq u \leq y} f(x, u) (g \star h)(u, y) \\ &= (f \star (g \star h))(x, y). \end{aligned}$$

*Bemerke: Eigentlich ist der Summationsbereich in der inneren Summe der zweiten Zeile  $x \leq u \leq z$  — aber weil  $g(u, z) \equiv 0$  für  $u \not\leq z$ , können wir den Summationsbereich auf  $x \leq u \leq y$  erweitern ( $z \leq y$ ), ohne die Summe zu verändern, denn alle mit der Erweiterung hinzugekommenen Summanden sind Null!*

Weiters gelten die Distributivgesetze

$$\begin{aligned} f \star (g + h) &= f \star g + f \star h, \\ (f + g) \star h &= f \star h + g \star h \end{aligned}$$

(wie man sofort sieht). Außerdem gilt für

$$\delta \in \mathcal{I}(P) : \delta(x, y) = \begin{cases} 1 & : x = y, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

sichtlich

$$\delta \star f = f \star \delta = f,$$

d.h.,  $\mathcal{I}(P)$  ist eine (nicht kommutative) Algebra mit Einselement  $\delta$ : Wir bezeichnen sie als die Inzidenzalgebra von  $P$ .

**BEISPIEL 2.7.** Für  $P = [n]$  ist  $\mathcal{I}(P)$  identisch mit der Algebra der oberen Dreiecksmatrizen der Dimension  $n \times n$  über  $\mathbb{C}$ : Denn jeden Funktionswert  $f(x, y)$  eines Elements  $f \in \mathcal{I}(P)$  können wir ja als Eintragung in Zeile  $x$ , Spalte  $y$  einer entsprechenden Dreiecksmatrix  $M$  deuten, und jede solche Matrix legt umgekehrt eindeutig eine Funktion  $f \in \mathcal{I}(P)$  fest. Wie man sofort sieht, entspricht auch die Multiplikation in  $\mathcal{I}(P)$  genau der entsprechenden Matrixmultiplikation.

**SATZ 2.4.** Sei  $P$  ein lokal-endliches Poset. Ein Element  $f \in \mathcal{I}(P)$  besitzt ein Inverses  $f^{-1}$  (d.h.:  $\exists f^{-1} \in \mathcal{I}(P)$  mit  $f \star f^{-1} = f^{-1} \star f = \delta$ ) genau dann, wenn  $f(x, x) \neq 0 \forall x \in P$ . Wenn ein Inverses existiert, dann ist dieses eindeutig bestimmt.

**BEWEIS.** Die eine Richtung ( $\implies$ ) ist klar:

$$1 = (f^{-1} \star f)(x, x) = \sum_{x \leq z \leq x} f(x, z) f^{-1}(z, x) \implies f(x, x) \neq 0.$$

Für die andre Richtung ( $\impliedby$ ) betrachten wir ein  $f$  mit  $f(x, x) \neq 0 \forall x \in P$ . Dann definieren wir  $g(x, x) := \frac{1}{f(x, x)}$ , und für  $x < y$  rekursiv (“induktiv nach der Länge des Intervalls  $[x, y]$ ”):

$$\sum_{x \leq z \leq y} f(x, z) g(z, y) = 0,$$

d.h.,  $g(x, y) f(x, x) = -\sum_{x < z \leq y} f(x, z) g(z, y)$  und somit

$$g(x, y) = -\frac{1}{f(x, x)} \sum_{x < z \leq y} f(x, z) g(z, y).$$

Das so konstruierte  $g$  erfüllt also  $f \star g = \delta$ ; und ganz analog kann man auch ein  $h$  mit  $g \star h = \delta$  finden: Dann gilt aber

$$f = f \star \delta = f \star (g \star h) = (f \star g) \star h = \delta \star h = h,$$

d.h., es gilt auch  $g \star f = \delta$  und  $f^{-1} := g$  ist das gesuchte Inverse.  $\square$

### 2.3.2. Die Zeta-Funktion eines lokal-endlichen Posets.

DEFINITION 2.16. Sei  $P$  ein lokal-endliches Poset. Die Funktion  $\zeta \in \mathcal{I}(P)$ :

$$\zeta(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

heißt Zeta-Funktion von  $P$ .

BEMERKUNG 2.4. Wenn man es abstrakt betrachtet, dann “ist” die Zetafunktion eines Posets im wesentlichen die Ordnungsrelation auf dem Poset: Denn jede Relation  $\sim$  auf  $P$  “ist” eine Teilmenge des Cartesischen Produkts  $P \times P$  (nämlich die Menge aller Paare  $(x, y)$ , für die  $x \sim y$  gilt), und die Zetafunktion ist in diesem Sinne nichts anderes als die charakteristische Funktion der Ordnungsrelation.

Für  $P = [n]$  (vergleiche Beispiel 2.7) entspricht die Zetafunktion der oberen Dreiecksmatrix, die oberhalb der Hauptdiagonale die konstante Eintragung 1 hat.

Diese Funktion ist sehr nützlich: Zum Beispiel ist

$$\zeta^2(x, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \underbrace{\zeta(x, z) \zeta(z, y)}_1 = \#(\text{Elemente in } [x, y]),$$

und allgemeiner

$$\zeta^k(x, y) = \sum_{x_0=x \leq x_1 \leq \dots \leq x_{k-1} \leq x_k=y} \underbrace{\zeta(x, x_1) \zeta(x_1, x_2) \cdots \zeta(x_{k-1}, y)}_1,$$

das ist die Anzahl der “Multiketten” der Länge  $k$  von  $x$  nach  $y$ . Wenn man “normale” Ketten der Länge  $k$  von  $x$  nach  $y$  zählen will, kann man  $(\zeta - \delta)$  betrachten:

$$(\zeta - \delta)(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < y \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und erhält diese Anzahl als  $(\zeta - \delta)^k(x, y)$ .

BEMERKUNG 2.5. Obwohl die Algebra nicht kommutativ ist, kommutieren natürlich alle ihre Elemente mit dem Einselement  $\delta$ . Daher gilt folgender Spezialfall des Binomischen Lehrsatzes:

$$(\zeta - \delta)^k(x, y) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^j \zeta^{k-j}(x, y).$$

Und dies wiederum ist als Spezialfall des Prinzips der Inklusion–Exklusion anzusehen. Denn wenn man in einer “Multikette”

$$(x = x_0, x_1, \dots, x_k = y)$$

der Länge  $k$  von  $x$  nach  $y$  genau  $j$  jener Elemente entfernt, die (nach einem ersten Auftreten) wiederholt auftreten, dann bleibt eine “Multikette” der Länge  $(k - j)$  übrig, und umgekehrt kann man aus einer solchen “Multikette” auf  $\binom{k}{j}$  Arten eine “Multikette” der Länge  $k$  machen: Denn die “Multikette” der Länge  $(k - j)$  besteht aus  $k + 1 - j$  Elementen, und jedes davon könnte (auch mehrfach!) wiederholt werden: Da insgesamt  $j$  “Wiederholungen” einzufügen sind, entspreche dies einer  $j$ -elementigen Multimenge aus einer  $k + 1 - j$ -elementigen Menge, die Anzahl ist also

$$\binom{(k + 1 - j) + j - 1}{j} = \binom{k}{j}.$$

Als weiteres Beispiel betrachten wir die Funktion  $(2\delta - \zeta)$ ,

$$(2\delta - \zeta) = \begin{cases} 1 & \text{für } x = y, \\ -1 & \text{für } x < y, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Laut Satz 2.4 hat  $(2\delta - \zeta)$  ein Inverses.

Nun wollen wir *alle* Ketten (beliebiger Länge) von  $x$  nach  $y$  abzählen. Sei  $l$  die Länge des Intervalls  $[x, y]$ , dann ist die gesuchte Anzahl gemäß dem obigen

$$\sum_{k=0}^l (\zeta - \delta)^k (x, y),$$

und nach dem bekannten Trick (*Teleskopsumme*) für die geometrische Reihe gilt

$$(\delta - (\zeta - \delta)) \star \sum_{k=0}^l (\zeta - \delta)^k = \delta - \underbrace{(\zeta - \delta)^{k+1}}_0 = \delta,$$

also ist die gesuchte Anzahl  $(2\delta - \zeta)^{-1}(x, y)$ .

### 2.3.3. Die Möbiusinversion.

DEFINITION 2.17. Die Zetafunktion  $\zeta$  eines lokal–endlichen Posets  $P$  hat gemäß Satz 2.4 eine Inverse:  $\mu := \zeta^{-1}$  wird als Möbiusfunktion von  $P$  bezeichnet. Definitionsgemäß gilt also:

$$\sum_{x \leq z \leq y} \underbrace{\zeta(x, z)}_{=1} \cdot \mu(z, y) = \sum_{x \leq z \leq y} \mu(z, y) = 0 \text{ für alle } x < y, \quad (2.6)$$

$$\sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) \cdot \underbrace{\zeta(z, y)}_{=1} = \sum_{x \leq z \leq y} \mu(x, z) = 0 \text{ für alle } x < y \quad (2.7)$$

und  $\mu(x, x) \equiv 1$ .

**SATZ 2.5 (Möbiusinversion).** *Sei  $P$  ein lokal-endliches Poset, in dem jedes Ordnungs-Hauptideal endlich ist. Seien  $f, g : P \rightarrow \mathbb{C}$  komplexwertige Funktionen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

$$g(x) = \sum_{y \leq x} f(y) \quad \forall x \in P \quad (2.8)$$

$$f(x) = \sum_{y \leq x} g(y) \mu(y, x) \quad \forall x \in P. \quad (2.9)$$

**BEMERKUNG 2.6.** *Dies ist eine Verallgemeinerung der Möbiusinversion aus der Zahlentheorie: Die natürlichen Zahlen, geordnet durch die Teilbarkeitsrelation, sind ein lokal-endliches Poset, in dem jedes Hauptideal (das Hauptideal von  $n$  ist ja einfach die Menge der Teiler von  $n$ ) endlich ist:*

$$g(n) = \sum_{d|n} f(d) \iff f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) g(d)$$

(das Intervall  $[d, n]$  in diesem Poset ist ja isomorph zu  $[1, n/d]$ , also  $\mu(d, n) = \mu(1, n/d) =: \mu(n/d)$ ).

**BEWEIS DER MÖBIUSINVERSION.** Der Beweis besteht nur aus zwei einfachen Rechnungen:

$$\begin{aligned} \sum_{y \leq x} g(y) \cdot \mu(y, x) &= \sum_{y \leq x} \sum_{z \leq y} f(z) \cdot \mu(y, x) \quad \leftarrow \text{nach (2.8)} \\ &= \sum_{y \leq x} \mu(y, x) \sum_{z \leq y} f(z) \cdot \zeta(z, y) \quad \leftarrow \text{Definition } \zeta \\ &= \sum_{z \in P} f(z) \sum_{z \leq y \leq x} \zeta(z, y) \cdot \mu(y, x) \\ &= \sum_{z \in P} f(z) \delta(z, x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

und umgekehrt:

$$\begin{aligned} \sum_{x \leq s} f(x) &= \sum_{x \leq s} \sum_{y \leq x} g(y) \cdot \mu(y, x) \quad \leftarrow \text{nach (2.9)} \\ &= \sum_{x \leq s} \zeta(x, s) \sum_{y \leq x} g(y) \cdot \mu(y, x) \quad \leftarrow \text{Definition } \zeta \\ &= \sum_{y \in P} g(y) \sum_{y \leq x \leq s} \mu(y, x) \cdot \zeta(x, s) \\ &= \sum_{y \in P} g(y) \delta(y, s) \\ &= g(s). \end{aligned}$$

□

BEMERKUNG 2.7. Der “abstrakte Kern” der Sache ist, daß die Gleichungen (2.8) und (2.9) äquivalent sind zu den “symmetrischen” Gleichungen

$$g(x) = \sum_{y \in P} f(y) \cdot \zeta(y, x) \quad \forall x \in P,$$

$$f(x) = \sum_{y \in P} g(y) \cdot \mu(y, x) \quad \forall x \in P,$$

und daß auf dem Vektorraum  $\mathbb{C}^P$  aller Funktionen  $P \rightarrow \mathbb{C}$   $\mathcal{I}(P)$  als Algebra linearer Abbildungen (von rechts) wirkt durch

$$(f\xi)(x) := \sum_{y \in P} f(y) \xi(y, x) \quad \text{für } f \in \mathbb{C}^P, \xi \in \mathcal{I}(P).$$

In dieser abstrakten Sichtweise bedeutet die Möbiusinversion nichts anderes als

$$f\xi = g \iff f = g\mu.$$

Dual zu Satz 2.5 gilt:

SATZ 2.6. Sei  $P$  ein lokal-endliches Poset, in dem jedes duale Hauptideal endlich ist. Seien  $f, g : P \rightarrow \mathbb{C}$  komplexwertige Funktionen. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$g(x) = \sum_{y \geq x} f(y) \quad \forall x \in P \tag{2.10}$$

$$f(x) = \sum_{y \geq x} \mu(x, y) g(y) \quad \forall x \in P. \tag{2.11}$$

BEISPIEL 2.8. Seien  $S_1, S_2, \dots, S_n$  Mengen. Betrachte das Poset  $P$ , das aus beliebigen Durchschnitten dieser Mengen besteht, die durch Inklusion geordnet sind. Der leere Durchschnitt ist dabei definiert als

$$\bigcap_{i \in \emptyset} S_i := S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n = \hat{1}.$$

Wir wollen eine Formel für  $|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n|$  und definieren dazu die Funktionen  $g, f : P \rightarrow \mathbb{C}$  durch  $g(T) := |T|$  und  $f(T) := |T \setminus (\bigcup_{T' < T} T')|$  (in Worten:  $f(T)$  ist die Anzahl der Elemente, die in  $T$ , aber in keinem  $T' \in P$  mit  $T' \subsetneq T$  enthalten sind).

Zunächst beobachten wir, daß ganz allgemein gilt (kurz nachdenken!):

$$g(T) = \sum_{T' \subseteq T} f(T').$$

Mit Möbiusinversion folgt daraus sofort

$$f(T) = \sum_{T' \subseteq T} g(T') \cdot \mu(T', T).$$

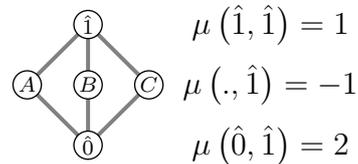
Insbesondere gilt also

$$0 = f(\hat{1}) = \sum_{T' \subseteq \hat{1}} g(T') \cdot \mu(T', \hat{1}) = \sum_{T' \subseteq \hat{1}} \mu(T', \hat{1}) |T'|,$$

woraus sich folgende Formulierung des Prinzips der Inklusion–Exklusion ergibt:

$$|S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_n| = |\hat{1}| = - \sum_{T' \subsetneq \hat{1}} \mu(T', \hat{1}) |T'|.$$

Im einleitenden Beispiel (zu Beginn von Abschnitt 2.3) sieht die Sache also so aus:



**2.3.4. Konkrete Berechnung der Möbiusfunktion.** Wirklich nützlich wird die Möbiusinversion natürlich nur, wenn wir die Möbiusfunktion konkret ausrechnen können.

BEISPIEL 2.9. Sei  $P = \mathbb{N}$  (mit der üblichen Ordnungsrelation). Direkt aus der definierenden Gleichung (2.6) folgt

$$\mu(x, y) = \begin{cases} 1 & x = y, \\ -1 & y = x + 1, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Möbiusinversion ergibt also hier das “Diskrete Analogon zum Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung”

$$g(n) = \sum_{i=1}^n f(i) \quad \forall n \geq 1 \iff f(n) = \begin{cases} g(1) & \text{für } n = 1, \\ g(n) - g(n-1) & \text{für } n > 1. \end{cases}$$

Denn dies bedeutet “abstrakt”, daß auf dem Vektorraum  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  aller Funktionen  $c : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  der Summationsoperator

$$(\Sigma c)(n) := \sum_{i=1}^n c(i)$$

und der Differenzenoperator

$$(\Delta c)(n) := \begin{cases} c(1) & n = 1 \\ c(n) - c(n-1) & n > 1 \end{cases}$$

zueinander invers sind.

SATZ 2.7. Seien  $P$  und  $Q$  lokalendliche Posets. Für das direkte Produkt  $P \times Q$  gilt

$$\mu_{P \times Q}((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \mu_P(x_1, y_1) \cdot \mu_Q(x_2, y_2).$$

BEWEIS. Zur Erinnerung: Im direkten Produkt  $P \times Q$  ist

$$(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2) :\iff x_1 \leq x_2 \text{ und } y_1 \leq y_2.$$

Wir rechnen nach, daß die angegebene Funktion die definierende Eigenschaft für die Möbiusfunktion erfüllt:

$$\begin{aligned} \sum_{(x_1, y_1) \leq (x_3, y_3) \leq (x_2, y_2)} \mu_P(x_3, x_2) \cdot \mu_Q(y_3, y_2) &= \\ \sum_{x_1 \leq x_3 \leq x_2} \sum_{y_1 \leq y_3 \leq y_2} \mu_P(x_3, x_2) \cdot \mu_Q(y_3, y_2) &= \delta_P(x_1, x_2) \cdot \delta_Q(y_1, y_2) \\ &= \delta_{P \times Q}((x_1, y_1), (x_2, y_2)). \end{aligned}$$

□

BEISPIEL 2.10 (Klassische Möbiusfunktion). Der Teilerverband  $T_n := \{d : d|n\}$  (Ordnungsrelation = Teilbarkeitsrelation) für  $n$  mit Primfaktorzerlegung  $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot p_m^{k_m}$  ist isomorph zum Produkt der linearen Posets

$$T_n \simeq [0, k_1] \times \cdots \times [0, k_m].$$

Gemäß Satz 2.7 erhalten wir also:

$$\begin{aligned} \mu_{T_n}(x, y) &= \mu_{T_n}(p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}, p_1^{\beta_1} \cdots p_m^{\beta_m}) \\ &= \mu_{[0, k_1]}(\alpha_1, \beta_1) \cdots \mu_{[0, k_m]}(\alpha_m, \beta_m) \\ &= \begin{cases} (-1)^{\sum_{i=1}^m (\beta_i - \alpha_i)} & \text{wenn } (\beta_i - \alpha_i) \in \{0, 1\} \forall i, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

Da im Teilerverband die Isomorphiebeziehung

$$[x, y] = \left[1, \frac{y}{x}\right]$$

gilt, folgt natürlich für die Möbiusfunktion ebenso

$$\mu(d, d \cdot k) = \mu(1, k) =: \mu(k),$$

und wir erhalten die klassische Möbiusfunktion aus der Zahlentheorie

$$\mu(k) = \begin{cases} (-1)^m & k = p_1 \cdots p_m \text{ (} i \neq j \implies p_i \neq p_j \text{)}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

BEISPIEL 2.11 (Eulersche  $\varphi$ -Funktion). Die aus der Zahlentheorie bekannte Eulersche  $\varphi$ -Funktion ist

$$\phi(n) := |\{x \in [n] : \text{ggT}(x, n) = 1\}|.$$

(In Worten:  $\phi(n)$  ist die Anzahl der zu  $n$  relativ primen natürlichen Zahlen  $\leq n$ ; für  $n = 12$  sind das z.B. die Zahlen 1, 5, 7 und 11, also  $\varphi(12) = 4$ .)

Es gilt:

$$n = \sum_{d|n} \phi(d),$$

denn  $[n]$  ist die disjunkte Vereinigung

$$[n] = \underbrace{\bigcup_{d|n} \left\{ y \cdot \frac{n}{d} : y \leq d \text{ und } \text{ggT}(y, d) = 1 \right\}}_{\text{Anzahl: } \varphi(d)}.$$

Mit Möbiusinversion (setze  $g(n) = n$  und  $f(n) = \phi(n)$ ) erhalten wir also

$$\begin{aligned} \phi(n) &= \sum_{d|n} \mu(d, n) d \\ &= \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}, n\right) \frac{n}{d} \\ &= \sum_{d|n} \mu(1, d) \frac{n}{d} \\ &= n \sum_{d|n} \mu(d) \frac{1}{d} \\ &= n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right). \end{aligned}$$

Die letzte Umformung ergibt sich so: Sei  $n = p_1^{k_1} \cdots p_m^{k_m}$ , dann läuft die vorletzte Summe über alle  $d$ , die Produkte verschiedener Primzahlen sind, d.h.  $d = p_{i_1} \cdots p_{i_j}$  (für alle anderen Teiler ist ja die Möbiusfunktion 0) mit  $\mu(d) = (-1)^j$ .

Z.B. ist  $\varphi(12) = 12 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4$ .

BEISPIEL 2.12 (Boolescher Verband). Die Potenzmenge  $2^{[n]}$  von  $[n]$  kann man als Familie charakteristischer Funktionen auffassen (vergleiche Beispiel 2.2):

$$A \subseteq [n] \leftrightarrow f_A : [n] \rightarrow \{0, 1\}, f_A(x) = [x \in A]^1.$$

Daraus wird klar, daß die folgenden Posets isomorph sind:

$$2^{[n]} \simeq \{0, 1\}^n.$$

Für die Möbiusfunktion auf dem (linear geordneten) Poset  $\{0, 1\}$  ist natürlich

$$\mu(0, 0) = \mu(1, 1) = 1; \mu(0, 1) = -1.$$

<sup>1</sup>Iversons Notation.

Daraus erhält man für  $T \subseteq S \subseteq [n]$  sofort

$$\mu(T, S) = \prod_{i=1}^n \mu([i \in T], [i \in S]) = (-1)^{|S \setminus T|}.$$

Das *Prinzip der Inklusion–Exklusion* läßt sich nun so formulieren: Sei  $E$  eine Menge von Eigenschaften, die die Elemente einer gegebenen Grundmenge  $A$  haben können (z.B.:  $A$  könnte die Menge aller Permutationen von  $[n]$  sein, und  $E = \{E_1, \dots, E_n\}$  könnte aus den  $n$  Eigenschaften

$$E_i := \text{“hat } i \text{ als Fixpunkt”}, i = 1, 2, \dots, n$$

bestehen.) Für eine beliebige Teilmenge  $S \subseteq E$  sei

$$f_=(S) := \#(x \in A, \text{ die genau die Eigenschaften aus } S \text{ haben})$$

(also keine weiteren Eigenschaften “außerhalb” von  $S$ ), und für eine beliebige Teilmenge  $T \subseteq E$  sei

$$f_{\geq}(T) := \#(x \in A, \text{ die mindestens die Eigenschaften aus } T \text{ haben})$$

(also eventuell auch weitere Eigenschaften “außerhalb” von  $T$ ; z.B. ist die Anzahl aller Permutationen der  $\mathfrak{S}_n$ , die mindestens die  $k$  verschiedenen Fixpunkte  $i_1, i_2, \dots, i_k$  haben, gleich  $(n - k)!$ ). Klarerweise gilt:

$$f_{\geq}(T) = \sum_{S \supseteq T} f_=(S).$$

Mit Möbiusinversion folgt daraus sofort:

$$f_=(T) = \sum_{S \supseteq T} (-1)^{|S \setminus T|} f_{\geq}(S).$$

Also für den Spezialfall  $T = \emptyset$ :

$$f_=(\emptyset) = \sum_S (-1)^{|S|} f_{\geq}(S). \quad (2.12)$$

Z.B. ist also die Anzahl aller fixpunktfreien Permutationen der  $\mathfrak{S}_n$  (die bekannte Anzahl der *Derangements*):

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (n - k)! = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Wenn man richtig hinschaut, ist (2.12) tatsächlich das Prinzip der Inklusion–Exklusion:

**KOROLLAR 2.5 (Inklusion–Exklusion).** *Seien  $A_1, A_2, \dots, A_n$   $n$  (nicht als disjunkt vorausgesetzte!) Mengen. Dann gilt:*

$$\begin{aligned} |A_1 \cup \dots \cup A_n| &= |A_1| + \dots + |A_n| - |A_1 \cap A_2| - \dots \\ &\quad - |A_{n-1} \cap A_n| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3| + \dots - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \end{aligned}$$

BEWEIS. In der Sprechweise von Beispiel 2.12: Sei  $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ , und bestehe  $E = \{E_1, \dots, E_n\}$  aus den  $n$  Eigenschaften

$$E_i := \text{“ist in } A_i \text{ enthalten”}, i = 1, 2, \dots, n.$$

Dann ist klarerweise  $f_=(\emptyset) = 0$ , und die Behauptung folgt sofort aus (2.12).  $\square$

KOROLLAR 2.6. *Sei  $L$  ein endlicher distributiver Verband. Die Rangfunktion auf  $L$  erfüllt*

$$\begin{aligned} \mathbf{rg}(x_1 \vee \dots \vee x_n) &= \mathbf{rg}(x_1) + \dots + \mathbf{rg}(x_n) - \mathbf{rg}(x_1 \wedge x_2) - \dots \\ &\quad - \mathbf{rg}(x_{n-1} \wedge x_n) + \mathbf{rg}(x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) + \dots - \dots \\ &\quad + (-1)^{n-1} \mathbf{rg}(x_1 \wedge \dots \wedge x_n). \end{aligned}$$

BEWEIS. Gemäß dem Satz von Birkhoff 2.2 gibt es ein Poset  $P$ , sodaß

$$L \simeq \mathcal{J}(P).$$

In diesem Isomorphismus entspricht jedem  $x \in L$  ein Ordnungsideal  $I_x$  von  $P$ , und  $\mathbf{rg}(x) = |I_x|$ . Außerdem ist  $I_{x \wedge y} = I_x \cap I_y$ : Die Behauptung folgt also sofort aus Korollar 2.5.  $\square$

### 2.3.5. Möbiusalgebra eines lokal-endlichen Verbands.

DEFINITION 2.18. *Sei  $L$  ein lokal-endlicher Verband, in dem jedes Ordnungshauptideal endlich ist. Wir betrachten den komplexen Vektorraum aller formalen Linearkombinationen  $\sum_{x \in L} c_x x$  mit Koeffizienten  $c_x \in \mathbb{C}$ : Mit der bilinearen (also: “distributiv fortgesetzten”) Multiplikation*

$$x \cdot y := x \wedge y \quad \forall x, y \in L$$

wird dieser Vektorraum zu einer kommutativen Algebra  $\mathcal{A}(L)$ : Diese wird als Möbiusalgebra bezeichnet.  $L$  bildet (natürlich) eine Basis des Vektorraums; diese besteht aus Idempotenten ( $x \cdot x = x \wedge x = x$ ).

Für jedes  $x \in L$  definieren wir den Vektor  $\delta_x$  als folgende Linearkombination:

$$\delta_x := \sum_{y \leq x} \mu(y, x) y.$$

Für diese speziellen Vektoren  $\delta_x \in \mathcal{A}(L)$  gilt mit Möbiusinversion

$$\sum_{y \leq x} \delta_y = \sum_{y \leq x} \sum_{s \leq y} \mu(s, y) s = \sum_{s \leq x} s \sum_{s \leq y \leq x} \mu(s, y) = x. \quad (2.13)$$

Das heißt aber: Die Elemente  $\{\delta_y : y \in L\}$  spannen den Vektorraum  $\mathcal{A}(L)$  auf; wenn  $L$  endlich ist, bilden sie also ebenfalls eine Basis.

LEMMA 2.2. *Sei  $L$  ein lokal-endlicher Verband. In  $\mathcal{A}(L)$  gilt:*

$$\delta_x \cdot \delta_y = [x = y] \delta_x. \quad (2.14)$$

BEWEIS. Zunächst ist

$$\begin{aligned}\delta_x \cdot \delta_y &= \left( \sum_{z_1 \leq x} \mu(z_1, x) z_1 \right) \cdot \left( \sum_{z_2 \leq y} \mu(z_2, y) z_2 \right) \\ &= \sum_{z_1 \leq x} \sum_{z_2 \leq y} \mu(z_1, x) \mu(z_2, y) z_1 \wedge z_2.\end{aligned}$$

Gemäß (2.13) ist  $z_1 \wedge z_2 = \sum_{s \leq z_1 \wedge z_2} \delta_s$ , also ist das weiter gleich

$$\sum_{s \leq x \wedge y} \delta_s \left( \underbrace{\sum_{s \leq z_1 \leq x} \mu(z_1, x)}_{=[s=x]} \right) \left( \underbrace{\sum_{s \leq z_2 \leq y} \mu(z_2, y)}_{=[s=y]} \right) = [x=y] \delta_x.$$

□

KOROLLAR 2.7. Sei  $L$  ein endlicher Verband mit mindestens 2 Elementen, und sei  $\hat{1} \neq a \in L$ . Dann gilt:

$$\sum_{x: x \wedge a = \hat{0}} \mu(x, \hat{1}) = 0. \quad (2.15)$$

BEWEIS. Gemäß und (2.13) und (2.14) gilt einerseits:

$$a \cdot \delta_{\hat{1}} = \left( \sum_{b \leq a} \delta_b \right) \cdot \delta_{\hat{1}} = 0 \in \mathcal{A}(L) \text{ für } a \neq \hat{1}.$$

Andererseits ist nach Definition von  $\delta_x$

$$a \cdot \delta_{\hat{1}} = a \cdot \sum_{x \in L} \mu(x, \hat{1}) x = \sum_{x \in L} \mu(x, \hat{1}) x \wedge a.$$

Nun hat aber  $a \cdot \delta_{\hat{1}}$  (wie jedes Element in  $\mathcal{A}(L)$ ) eine Entwicklung in der Basis  $L$ :

$$a \cdot \delta_{\hat{1}} = \sum_{x \in L} c_x x,$$

und da  $a \cdot \delta_{\hat{1}} = 0$  (Nullvektor in  $\mathcal{A}(L)$ ), ist insbesondere auch der Koeffizient  $c_{\hat{0}} = 0$ :

$$0 = c_{\hat{0}} = \sum_{x: x \wedge a = \hat{0}} \mu(x, \hat{1}).$$

(Diese Summe ist ähnlich der definierenden Relation  $\sum_x \mu(x, \hat{1}) = 0$ , sie enthält aber im allgemeinen weniger Terme.) □

BEISPIEL 2.13 (Möbiusfunktion des Partitionsverbands). Für zwei Partitionen  $\sigma, \pi$  von  $[n]$  gilt ja  $\sigma \leq \pi : \iff$  "alle Blöcke von  $\sigma$  sind in Blöcken von  $\pi$  enthalten". Zum Beispiel:

$$\begin{aligned}\pi_0 &= 1\ 4\ 5\ 6\ 7|2\ 8\ 9\ 10|3 \\ \sigma_0 &= 1|4\ 5|6\ 7|2|8\ 9\ 10|3\end{aligned}$$

Im Beispiel sieht man sofort:  $[\sigma_0, \pi_0] \simeq \Pi_3 \times \Pi_2 \times \Pi_1$ .

Allgemein gilt: Sei  $\pi = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ , und seien genau  $\lambda_i$  Blöcke von  $\sigma$  in  $B_i$  enthalten, dann ist  $[\sigma, \pi] \simeq \Pi_{\lambda_1} \times \Pi_{\lambda_2} \times \dots \times \Pi_{\lambda_k}$ ; dabei ist  $\sigma \sim (\hat{0}_{\Pi_{\lambda_1}}, \dots, \hat{0}_{\Pi_{\lambda_k}})$  und  $\pi \sim (\hat{1}_{\Pi_{\lambda_1}}, \dots, \hat{1}_{\Pi_{\lambda_k}})$ . Daher ist also

$$\mu(\sigma, \pi) = \mu(\hat{0}_{\Pi_{\lambda_1}}, \hat{1}_{\Pi_{\lambda_1}}) \cdot \mu(\hat{0}_{\Pi_{\lambda_2}}, \hat{1}_{\Pi_{\lambda_2}}) \cdots \mu(\hat{0}_{\Pi_{\lambda_k}}, \hat{1}_{\Pi_{\lambda_k}}).$$

Wir können also die Möbiusfunktion in  $\Pi_n$  allgemein ausrechnen, wenn wir  $\mu(\hat{0}_{\Pi_m}, \hat{1}_{\Pi_m})$  bestimmen können. Wir verwenden dazu Korollar 2.7. Sei  $a = 1 \ 2 \ \dots \ (n-1) \ |n$ . Falls  $x \wedge a = \hat{0}_{\Pi_m}$ , dann ist entweder  $x = \hat{0}_{\Pi_m}$  oder  $x = n \ i \mid$  (Rest in 1-er-Blöcken) für ein  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Gemäß (2.15) ist also

$$\mu_m := \mu(\hat{0}_{\Pi_m}, \hat{1}_{\Pi_m}) = - \sum_{x=n \ i \mid (\text{Rest})} \mu(x, \hat{1}_{\Pi_m}) = -(n-1) \mu_{m-1}.$$

Mit der Anfangsbedingung  $\mu_1 = 1$  erhalten wir also

$$\mu_m = \mu(\hat{0}_{\Pi_m}, \hat{1}_{\Pi_m}) = (-1)^{m-1} (m-1)! \quad (2.16)$$

Also ist in unserem konkreten Beispiel

$$\mu(\sigma_0, \pi_0) = (-1)^2 2! (-1) 1! 1 = -2.$$

KOROLLAR 2.8. Sei  $L$  ein endlicher Verband, sei  $X \subseteq L$ , sodaß

- $\hat{1}_L \notin X$ ,
- $y \in L$  und  $y \neq \hat{1}_L \implies \exists x \in X$  mit  $y \leq x$ .

(D.h.,  $X$  enthält alle Koatome von  $L$ .) Dann gilt:

$$\mu(\hat{0}_L, \hat{1}_L) = \sum_k (-1)^k N_k,$$

wo  $N_k$  die Anzahl aller  $k$ -elementigen Teilmengen von  $X$  ist, deren Infimum gleich  $\hat{0}_L$  ist.

BEWEIS. Für  $x \in L$  gilt in  $\mathcal{A}(L)$

$$\hat{1}_L - x = \sum_{y \leq \hat{1}_L} \delta_y - \sum_{y \leq x} \delta_y = \sum_{y \not\leq x} \delta_y.$$

Daraus folgt einerseits

$$\begin{aligned} \prod_{x \in X} (\hat{1}_L - x) &= \sum_{y: y \not\leq x \ \forall x \in X} \delta_y \leftarrow \text{wegen (2.14)} \\ &= \delta_{\hat{1}_L}. \leftarrow \text{nach Voraussetzung} \end{aligned}$$

Andererseits können wir das Produkt auch einfach ausmultiplizieren, um eine Darstellung in der Basis  $L$  zu erhalten:

$$\hat{1}_L - \sum_{x \in X} x + \sum_{x, y \in X} x \wedge y - \cdots = \underbrace{\sum_{x \in L} \mu(x, \hat{1}_L) x}_{\delta_{\hat{1}_L}}$$

Koeffizientenvergleich für  $x = \hat{0}_L$  ergibt sofort die Behauptung.  $\square$

**BEMERKUNG 2.8.** In Korollar 2.8 ist es natürlich am nächstliegenden,  $X$  gleich der Menge aller Koatome von  $L$  zu wählen. Insbesondere gilt also: Wenn  $\hat{0}_L$  nicht als Infimum von Koatomen darstellbar ist, dann ist  $\mu(\hat{0}_L, \hat{1}_L) = 0$ .

**KOROLLAR 2.9.** Sei  $L$  ein endlicher Verband. Wenn  $\hat{0}_L$  nicht als Infimum von Koatomen oder  $\hat{1}_L$  nicht als Supremum von Atomen darstellbar ist, dann gilt

$$\mu(\hat{0}_L, \hat{1}_L) = 0.$$

**BEISPIEL 2.14** (Möbiusfunktion eines distributiven Verbands). Für einen distributiven Verband  $L$  gilt ja nach dem Satz von Birkhoff 2.2:

$$L \simeq \mathcal{J}(P).$$

Sei  $I \subseteq I' \in \mathcal{J}(P)$ , dann ergibt sich

$$\mu(I, I') = \begin{cases} (-1)^{|I' \setminus I|} & \text{wenn } [I, I'] \simeq \text{Boolescher Verband,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Denn sei  $I' = I \cup \{x_1, \dots, x_n, \dots, x_m\}$ , wobei  $I \cup \{x_1\}, \dots, I \cup \{x_n\}$  die Atome in  $[I, I']$  seien. Dann gibt es nur zwei Möglichkeiten:

Fall 1:  $I \cup \{x_1, \dots, x_n\} = I'$ , dann ist  $[I, I'] \simeq 2^{[n]}$ .

Fall 2:  $I \cup \{x_1, \dots, x_n\} \neq I'$ , dann ist  $[I, I'] \not\simeq 2^{[n]}$ , denn im Booleschen Verband ist  $\hat{1}$  immer als Supremum der Atome darstellbar.

(Siehe zur Möbiusfunktion auch den Artikel von Rota und Stanley [6].)

**BEISPIEL 2.15** (Möbiusfunktion für  $V_n(q) = \mathbf{GF}(q)^n$ ). Seien zwei Teilräume  $V, W \leq V_n(q)$  gegeben mit  $V \leq W$ . Dann ist das Intervall  $[V, W]$  isomorph zu  $\left[ \left\{ \vec{0} \right\}, W/V \right]$ , und letzteres hängt wiederum nur von der Dimension  $\dim(V/W) = \dim(V) - \dim(W)$  ab. Daher können wir uns darauf beschränken,  $\mu_n := \mu\left(\left\{ \vec{0} \right\}, V_n(q)\right)$  zu berechnen. Dazu benutzen wir die dualisierte Version von Korollar 2.7:

$$\sum_{x: x \vee a = \hat{1}} \mu(\hat{0}, x) = 0. \quad (2.17)$$

Sei  $a$  ein Atom: Aus  $x \vee a = \hat{1}$  folgt

- entweder  $a \leq x \implies x = \hat{1}$ ,
- oder  $a \not\leq x \implies a \wedge x = \hat{0}$ .

In  $V_n(q)$  gilt ja allgemein

$$\mathbf{rg}(x) + \mathbf{rg}(c) = \mathbf{rg}(x \wedge c) + \mathbf{rg}(x \vee c)$$

Daher folgt aus  $a \vee x = \hat{0}$  sofort  $\mathbf{rg}(x) + 1 = 0 + n$ , also:  $x$  ist ein Koatom, und aus (2.17) folgt

$$\mu(\hat{0}, \hat{1}) = - \sum_{a \not\leq x, x \text{ Koatom}} \mu(\hat{0}, x).$$

Sei  $a$  also ein fixes Atom in  $V_n(q)$ , d.h., ein Teilraum der Dimension 1.  $V_n(q)$  hat  $\begin{bmatrix} n \\ n-1 \end{bmatrix}_q = [n]_q = q^{n-1} + q^{n-2} + \dots + q + 1$  Koatome, also Teilräume<sup>2</sup> der Dimension  $n-1$ , davon enthalten  $\begin{bmatrix} n-1 \\ n-2 \end{bmatrix}_q = [n-1]_q = q^{n-2} + \dots + q + 1$  den Teilraum  $a$ . Also ist

$$\mu_n := \mu_{V_n(q)}(\hat{0}, \hat{1}) = -q^{n-1} \mu_{n-1}.$$

Daher folgt mit der Anfangsbedingung  $\mu_1 = -1$

$$\mu_n = (-1)^n q^{\binom{n}{2}}.$$

Als kleine Anwendung berechnen wir die Anzahl der spannenden Teilmengen in  $V_n(q)$ . Sei  $f(W)$  die Anzahl der Teilmengen, die  $W$  aufspannen, und sei  $g(W)$  die Anzahl der nicht-leeren Teilmengen von  $W$ . Klarerweise gilt:

$$g(W) = \sum_{T \leq W} f(T).$$

Mit Möbiusinversion erhalten wir daraus:

$$f(W) = \sum_{T \leq W} \mu(T, W) g(T),$$

insbesondere also

$$f(V_n(q)) = \sum_T \mu(T, V_n(q)) g(T) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}} (2^{q^k} - 1).$$

---

<sup>2</sup>Direktes Abzählargument: Es gibt  $[n]_q = \frac{q^n - 1}{q - 1}$  Teilräume der Dimension 1 in  $V_n(q)$ . Eine Basis eines Teilraums  $W$  der Dimension  $k$  kann man mit  $n - k$  Vektoren auf eine Basis von  $V_n(q)$  erweitern; das Erzeugnis dieser  $n - k$  Vektoren ist isomorph zu  $V_{n-k}(q)$ . Einen beliebigen  $k$ -dimensionalen Teilraum von  $V_n(q)$  kann man also auf  $[n]_q \cdot [n-1]_q \cdots [n-k+1]_q$  Arten als (geordnete) direkte Summe von eindimensionalen Teilräumen schreiben; diese Überlegung führt direkt auf die Anzahl der  $k$ -dimensionalen Teilräume:  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q \cdot [n-1]_q \cdots [n-k+1]_q}{[k]_q \cdot [k-1]_q \cdots [1]_q}$ .



## KAPITEL 3

### Asymptotische Abzählung

Bisher hatten wir mit formalen Potenzreihen ausschließlich algebraisch hantiert: Da die erzeugenden Funktionen alle Informationen über ihre Koeffizienten enthalten, konnten wir durch elementares Rechnen explizite Formeln oder Rekursionen gewinnen.

In diesem Kapitel werden wir sehen, dass mit analytischen Methoden noch mehr Information herauszuholen ist. (Sehr viel mehr zu diesem Thema findet man in [3].)

**BEISPIEL 3.1.** *Wir haben die exponentiell erzeugende Funktion der Bell-Zahlen  $B_n$ , die die Anzahl aller Partitionen einer  $n$ -elementigen Menge angeben, bereits berechnet (1.2):*

$$B(z) = \sum \frac{B_n}{n!} z^n = e^{e^z - 1} = \sum \frac{1}{m!} (e^z - 1)^m = \sum_{m,j} \frac{1}{m!} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} e^{jz},$$

die sofort auf die Formel führt:

$$B_n = \sum_{m,j} \frac{1}{m!} \binom{m}{j} (-1)^{m-j} j^n.$$

Hier kann man die Frage stellen: In welcher *Größenordnung* bewegt sich die Zahl  $B_n$  (für  $n$  groß)? Die analoge Frage “Wie groß ist  $n!$ ?” wird ja durch die *Stirlingsche Formel*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{für } n \rightarrow \infty \quad (3.1)$$

beantwortet, ähnliche “asymptotische” Antworten wollen wir nun auch in anderen Fällen finden.

#### 3.1. Die Landau-Notation

**DEFINITION 3.1.** *Sei  $S$  eine beliebige Menge und  $f, g$  reell- oder komplexwertige Funktionen auf  $S$ . Dann bedeutet die O-Notation “ $f$  ist ein Groß-O von  $g$  auf  $S$ ”:*

$$f(z) = O(g(z)) : \iff \exists C > 0 : \forall z \in S : |f(z)| \leq C \cdot |g(z)|. \quad (3.2)$$

Häufig ist die interessierende Menge  $S$  eine “geeignete” (aber nicht unbedingt fix vorgegebene) Umgebung eines Punktes  $\zeta$  ( $\zeta = \infty$  ist hier

auch möglich): Wenn  $f, g$  beispielsweise Folgen sind (also Funktionen  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ), dann bedeutet

$$f(n) = O(g(n)) \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

daß es eine Umgebung  $S$  von  $\infty$  (also  $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq a\}$ ) gibt, für die (3.2) gilt.

Ähnlich bedeutet die  $o$ -Notation “ $f$  ist ein Klein- $O$  von  $g$ ”:

$$f(z) = o(g(z)) \text{ für } z \rightarrow \zeta : \iff \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{f(z)}{g(z)} = 0. \quad (3.3)$$

Schließlich verwenden wir die folgende Notation für asymptotische Äquivalenz:

$$f(z) \sim g(z) \text{ für } z \rightarrow \zeta : \iff \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{f(z)}{g(z)} = 1. \quad (3.4)$$

**BEMERKUNG 3.1.** Die  $O$ - und  $o$ -Notation darf nicht als “Gleichung” mißverstanden werden: Zum Beispiel bedeutet

$$n^3 + 2n^2 - 1 = O(n^3),$$

daß  $n^3 + 2n^2 - 1$  in der Klasse aller Funktionen  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  enthalten ist, für die es ein  $C > 0$  gibt sodaß  $|f(n)| \leq C|n^3|$ . In gesprochenen Worten wird diese Gefahr eines Mißverständnisses dadurch gemildert, daß man “... ist ein Groß- $O$  von ...” sagt und nicht “... ist gleich Groß- $O$  von ...”. Die  $O$ - und  $o$ -Notation ist aber in dieser Form üblich; wir bleiben also dabei.

**BEMERKUNG 3.2.** Die “ $\sim$ ”-Notation für asymptotische Äquivalenz ist an sich überflüssig, denn sie kann durch die  $o$ -Notation ersetzt werden:

$$f(x) \sim g(x) \iff f(x) = g(x)(1 + o(1)) \iff f(x) = e^{o(1)} \cdot g(x).$$

Sie ist aber ebenso in dieser Form üblich.

**BEISPIEL 3.2.**  $O$ -Notation:

$$\begin{aligned} n^3 + 2n^2 - 1 &= O(n^3) \quad (n \rightarrow \infty) \\ z^2 &= O(z) \quad (z \rightarrow 0) \\ z &= O(z^2) \quad (z \rightarrow \infty) \\ (\log z)^5 &= O(\sqrt{z}) \quad (z \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

**BEISPIEL 3.3.**  $o$ -Notation:

$$\begin{aligned} n^3 + 2n^2 - 1 &= o(n^4) \quad (n \rightarrow \infty) \\ z^2 &= o(z) \quad (z \rightarrow 0) \\ \frac{1}{n} &= o(1) \quad (n \rightarrow \infty) \\ n! &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + o(1)) \quad (n \rightarrow \infty) \\ o(f(z) \cdot g(z)) &= f(z) \cdot o(g(z)) \quad (z \rightarrow \zeta) \end{aligned}$$

Die letzte "Gleichung" bedeutet hier (vergleiche Bemerkung 3.1): Die Klasse der Funktionen  $\phi$ , für die

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\phi(z)}{f(z) \cdot g(z)} = 0$$

gilt, ist enthalten in der Klasse der Funktion  $f \cdot \psi$ , für die

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{\psi(z)}{g(z)} = 0$$

gilt (setze einfach  $\psi(z) := \frac{\phi(z)}{f(z)}$ ).

BEISPIEL 3.4. *Asymptotische Äquivalenz:*

$$z + 1 \sim z \quad (z \rightarrow \infty)$$

$$\sinh z \sim \frac{1}{2} e^z \quad (z \rightarrow \infty)$$

$$n! \sim e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n} \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\pi(z) \sim \frac{z}{\log(z)} \quad (z \rightarrow \infty)$$

Es ist natürlich klar: In den meisten Fällen will man eine Funktion durch eine einfachere Funktion, die asymptotisch äquivalent ist, ersetzen.

BEISPIEL 3.5. *Typische erzeugenden Funktionen, die wir im folgenden untersuchen wollen, sind:*

- *Derangements:*  $\sum D_n \frac{z^n}{n!} = e^{-z} \cdot \frac{1}{1-z}$ ,
- *Catalan-Zahlen:*  $\sum C_n z^n = \frac{1 - \sqrt{1-4z}}{2z}$ ,
- *Bell-Zahlen:*  $\sum B_n \frac{z^n}{n!} = e^{e^z - 1}$ .

Für die Derangements (Anzahl der fixpunktfreien Permutationen) erhalten wir ja aus dem Prinzip der Inklusion-Exklusion (siehe die Darstellung vor Korollar 2.5) eine exakte Formel, aus der man direkt eine asymptotische Formel ablesen kann:

$$D_n = n! \left( \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \dots + (-1)^n \frac{1}{n!} \right) \sim \frac{n!}{e}.$$

Für die Catalan-Zahlen kann man mithilfe der Stirlingschen Formel (3.1) leicht eine asymptotische Formel ableiten:

$$C_n = \frac{(2n)!}{(n+1)n!^2} \sim \left( \frac{2n}{e} \right)^{2n} \left( \frac{e}{n} \right)^{2n} \frac{1}{n\sqrt{2\pi n}} = 4^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi n^{3/2}}}.$$

Die Asymptotik für die Catalan-Zahlen ist typisch: Wenn die erzeugende Funktion  $f$  Singularitäten hat, dann sei  $\rho$  eine Singularität kleinsten Betrages. Die Koeffizienten von  $f$  verhalten sich dann asymptotisch:

$$\langle z^n \rangle f(z) \sim \left( \frac{1}{|\rho|} \right)^n \cdot \Theta(n)$$

mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\Theta(n)} = 1$ ; die Art der Singularität bestimmt  $\Theta(n)$ . Diese Art asymptotischer Untersuchungen nennt man *Singularitätenanalyse* (siehe Abschnitt 3.3). Wenn es keine (oder jedenfalls keine "einfachen") Singularitäten gibt, dann kann in vielen Fällen die *Sattelpunktmethode* helfen (siehe Abschnitt 3.4).

### 3.2. Wiederholung: Komplexe Analysis

Wir wiederholen (sehr kurz) einige Grundbegriffe aus der komplexen Analysis, die wir im folgenden brauchen werden.

**DEFINITION 3.2.** *Ein Gebiet  $G$  ist eine offene zusammenhängende Teilmenge der komplexen Zahlen:  $G \subseteq \mathbb{C}$ . Eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt analytisch bei  $z_0 \in G$ , falls es eine Umgebung  $U \subseteq G$  von  $z_0$  gibt, in der die Reihenentwicklung*

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$$

für gewisse Koeffizienten  $c_n \in \mathbb{C}$  gilt. Eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt (schlechthin) analytisch, wenn sie für alle  $z \in G$  analytisch ist.

Bekanntlich gilt für eine Funktion  $f$ , die bei  $z_0$  analytisch ist:

- Es gibt einen positiven Konvergenzradius  $R$ , sodaß die Reihe im Inneren des Kreises  $\mathbf{D}(z_0, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq R\}$  mit Mittelpunkt  $z_0$  und Radius  $R$  konvergiert.
- $f(z)$  ist im Inneren  $\{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < R\}$  des Konvergenzkreises analytisch.
- Die Reihe *divergiert* für alle  $z$  mit  $|z - z_0| > R$ .

**DEFINITION 3.3.** *Eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt (komplex!) differenzierbar bei  $z_0$ , wenn der Grenzwert*

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \delta) - f(z_0)}{\delta} \quad (\delta \text{ komplex!})$$

existiert; sie heißt (schlechthin) differenzierbar, wenn sie für alle  $z \in G$  differenzierbar ist.

**SATZ 3.1.** *Eine Funktion  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  ist analytisch auf  $G$  genau dann, wenn sie auf  $G$  differenzierbar ist.*

*Seien  $f$  und  $g$  zwei analytische Funktionen, sei  $\lambda \in \mathbb{C}$ . Dann sind auch  $f + g$ ,  $\lambda \cdot f$  und  $f(g)$  analytisch; aber  $\frac{f}{g}$  ist nicht analytisch bei einer Nullstelle  $\zeta$  von  $g$ :  $g(\zeta) = 0$ .*

**DEFINITION 3.4.** *Eine Funktion  $h : G \rightarrow \mathbb{C}$  heißt meromorph bei  $z_0$ , falls  $h(z)$  in einer Umgebung  $U$  von  $z_0$  als Quotient zweier auf  $U$  analytischer Funktionen  $f, g$  dargestellt werden kann:*

$$\forall z \in U \setminus \{z_0\} : h(z) = \frac{f(z)}{g(z)}.$$

Es gilt dann auch

$$h(z) = \sum_{n \geq -m} c_n (z - z_0)^n$$

für alle  $z \neq z_0$  in einem Kreis um  $z_0$ . Wenn  $m$  die größte natürliche Zahl ist, für die in dieser Reihenentwicklung  $c_{-m} \neq 0$  ist, dann nennt man  $z_0$  einen Pol der Ordnung  $m$ . Der Koeffizient  $c_{-1}$  von  $(z - z_0)^{-1}$  in dieser Reihenentwicklung heißt das Residuum von  $h$  an der Stelle  $z_0$ , wir bezeichnen es mit  $\text{Res}(h, z_0)$ :

$$\text{Res}(h, z_0) = \langle (z - z_0)^{-1} \rangle h(z).$$

**DEFINITION 3.5.** Sei  $\phi : [0, 1] \rightarrow G$  eine differenzierbare Funktion, die im Gebiet  $G$  eine Kurve  $\Gamma$  (mit Anfangspunkt  $\phi(0)$  und Endpunkt  $\phi(1)$ ) beschreibt; sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  eine Funktion. Dann verstehen wir unter dem Kurvenintegral  $\int_{\Gamma} f(z) d(z)$  das Integral

$$\int_0^1 f(\phi(t)) \phi'(t) dt.$$

Die Kurve  $\Gamma$  heißt geschlossen, wenn  $\phi(0) = \phi(1)$ .

**BEMERKUNG 3.3.** Das Kurvenintegral hängt nur von der Kurve  $\Gamma$  ab, nicht von der konkreten Parametrisierung  $\phi(t)$ .

**SATZ 3.2 (Satz von Cauchy).** Sei  $f : G \rightarrow \mathbb{C}$  analytisch auf  $G$ , und sei  $\Gamma$  eine beliebige geschlossene Kurve in  $G$ . Dann gilt

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 0.$$

**SATZ 3.3 (Residuensatz).** Sei  $h(z)$  meromorph auf  $G$ , sei  $\Gamma$  eine geschlossene Kurve in  $G$ . Dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} h(z) dz = \sum_s n_s \cdot \text{Res}(h, s),$$

wobei die Summe über alle Pole  $s$  von  $h$  läuft, und  $n_s$  die Windungszahl<sup>1</sup> von  $\Gamma$  um  $s$  bezeichnet.

**KOROLLAR 3.1 (Cauchysche Integralformel).** Sei  $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$  analytisch in einem Kreis um 0, und sei  $\Gamma$  eine Kurve im Inneren dieses Kreises, die 0 einmal (positiv orientiert) umrundet (d.h., Windungszahl 1 um 0 hat), dann gilt

$$\langle z^n \rangle f(z) = f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz. \quad (3.5)$$

<sup>1</sup>Salopp gesprochen gibt die Windungszahl an, wie oft sich die Kurve  $\Gamma$  um  $s$  "herumwickelt": In unseren Beispielen wird die Windungszahl immer gleich 1 sein.

DEFINITION 3.6. Sei  $f(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$  eine analytische Funktion mit Konvergenzradius  $R$ ; sei  $\zeta$  ein Punkt am Rand

$$\partial \mathbf{D}(z_0, R) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = R\}$$

des Konvergenzkreises. Wenn es eine Umgebung  $U$  von  $\zeta$  gibt mit einer in  $U$  analytischen Funktion  $\hat{f}$ , sodaß

$$\hat{f} \Big|_{U \cap \mathbf{D}(z_0, R)} = f \Big|_{U \cap \mathbf{D}(z_0, R)},$$

dann nennt man dieses  $\hat{f}$  eine analytische Fortsetzung von  $f$  in  $\zeta$ . Wenn es eine derartige analytische Fortsetzung gibt, so ist sie eindeutig.

$\zeta$  heißt eine Singularität von  $f$ , wenn  $f$  nicht in  $\zeta$  analytisch fortgesetzt werden kann.

Die Menge der Singularitäten von  $f$  bezeichnen wir mit  $\text{Sing}(f)$ .  $\text{Sing}(f) \cap \partial \mathbf{D}(z_0, R)$  ist immer abgeschlossen; der Fall

$$\text{Sing}(f) = \partial \mathbf{D}(z_0, R)$$

ist möglich: Dann nennt man  $\partial \mathbf{D}(z_0, R)$  eine natürliche Grenze von  $f$ .

BEISPIEL 3.6. Die Funktion

$$\sqrt{1+z} = (1+z)^{\frac{1}{2}} = \sum_{k \geq 0} \binom{\frac{1}{2}}{k} z^k$$

ist um  $\zeta = -1$  nicht analytisch fortsetzbar, hat dort also eine Singularität.

Die Funktionen  $\frac{1}{1-z}$  und  $\frac{e^{-z}}{1-z}$  haben beide eine Singularität (einen Pol) bei  $\zeta = 1$ .

SATZ 3.4. Es sei  $f(z) = \sum f_n z^n$  analytisch bei 0 mit Konvergenzradius  $R < \infty$ . Dann existiert eine Singularität  $\zeta$  am Rand des Konvergenzkreises, also mit  $|\zeta| = R$

BEWEIS. Indirekt: Angenommen nicht; dann läßt sich  $f$  in allen Punkten mit  $|z| = R$  analytisch fortsetzen. D.h., für alle  $z$  mit  $|z| = R$  existiert eine Umgebung  $U_z$ , sodaß  $f$  auf  $U$  analytisch fortsetzbar ist.  $\bigcup_{z: |z|=R} U_z$  ist eine Überdeckung von  $\partial \mathbf{D}(0, R)$ ; da der Kreisrand kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung. Dann ist aber  $f$  analytisch auf  $\mathbf{D}(0, R_1)$  mit  $R < R_1$ , und für ein  $R_0$  mit  $R < R_0 < R_1$  gilt gemäß (3.5):

$$f_n = \langle z^n \rangle f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=R_0} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz.$$

Daraus folgt aber sofort die Abschätzung

$$|f_n| \leq \frac{1}{R_0^n} \cdot \max_{|z|=R_0} |f(z)|, \quad (3.6)$$

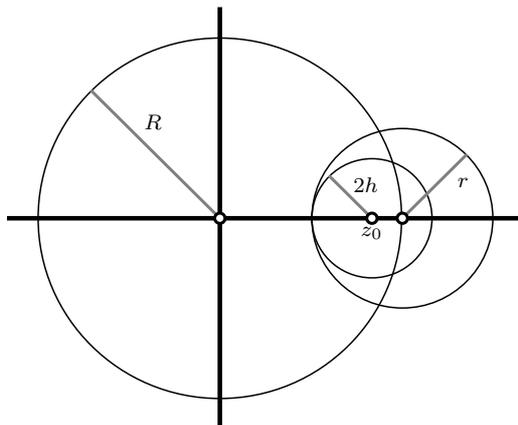
d.h.,  $f_n = O(R_0^{-n})$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Sei  $q$  mit  $R < q < R_0$ , dann konvergiert aber  $f(z) = \sum f_n z^n$  für  $|z| < q$  gemäß dem *Wurzelkriterium*<sup>2</sup>, ein Widerspruch (da  $q > R$ ).  $\square$

**SATZ 3.5** (Pringsheim). *Es sei  $f(z) = \sum f_n z^n$  analytisch bei 0 mit Konvergenzradius  $R$ . Weiters sei  $f_n \geq 0$  für alle  $n \geq 0$ . Dann ist die (reelle) Zahl  $R$  eine Singularität.*

**BEWEIS.** Indirekt: Angenommen,  $f(z)$  ist analytisch bei  $\zeta = R$ . Dann gibt es einen Konvergenzradius  $r$ , sodaß  $f(z)$  für alle  $z$  mit  $|z - R| < r$  analytisch ist. Sei  $h = \frac{r}{3}$  und  $z_0 = R - h$ . Dann ist

$$f(z) = \sum_m g_m (z - z_0)^m$$

für gewisse Koeffizienten  $g_m$  und alle  $z$  mit  $|z - z_0| \leq 2h$ .



Äquivalent dazu ist:

$$f(z_0 + z) = \sum_m g_m z^m \text{ für } |z| \leq 2h = \frac{2r}{3}$$

und somit

$$\begin{aligned} g_m = \langle z^m \rangle f(z + z_0) &= \frac{1}{m!} \left( \frac{d}{dz} \right)^m f(z + z_0) \Big|_{z=0} \\ &= \frac{1}{m!} f^{(m)}(z_0) \\ &= \frac{1}{m!} \sum_n f_n \cdot n \cdot (n-1) \cdots (n-m+1) z_0^{n-m} \\ &= \sum_{n \geq m} \binom{n}{m} f_n \cdot z_0^{n-m}. \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Denn aus  $|f_n| \leq \frac{C}{R_0^n}$  folgt ja für  $|z| < q < R_0$ :  $\sqrt[n]{|f_n z^n|} < \frac{q}{R_0} \sqrt[n]{C}$ , also insbesondere  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n z^n|} < 1$  (da  $\frac{q}{R_0} < 1$ ).

Es gilt also

$$f(\underbrace{z_0 + 2h}_{=R+h}) = \sum_m \left( \sum_{n \geq m} \binom{n}{m} f_n \cdot z_0^{n-m} \right) (2h)^m.$$

Die rechte Seite ist eine Doppelsumme, die konvergiert (denn  $R + h$  liegt im Inneren von  $\mathbf{D}(R, r)$ ) und aus lauter *nichtnegativen* Termen besteht: Daher ist sie *absolut konvergent*, und man kann sie beliebig *umordnen*.

$$\begin{aligned} f(R+h) &= \sum_n f_n \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} z_0^{n-m} (2h)^m \\ &= \sum_n f_n (z_0 + 2h)^n = \sum_n f_n (R+h)^n, \end{aligned}$$

ein Widerspruch, da  $R+h > R$ . □

### 3.3. Singularitätenanalyse

**BEISPIEL 3.7.** *Die meisten uns interessierenden Potenzreihen sind erzeugende Funktionen, die zu Abzählproblemen gehören und die daher stets nichtnegative Koeffizienten haben: In diesen Fällen ist der Satz von Pringsheim also anwendbar.*

- (1) Für die Derangement-Zahlen  $D_n$  wissen wir

$$\sum \frac{D_n}{n!} z^n = \frac{e^{-z}}{1-z}$$

und  $\frac{D_n}{n!} \sim \frac{1}{e}$ ; also ist der Konvergenzradius 1 — und tatsächlich ist  $\zeta = 1$  eine Singularität.

- (2) Sei  $S_n$  die Anzahl der Surjektionen  $[n] \rightarrow [k]$  ( $k \leq n$  beliebig): Kombinatorisch ist klar, daß wir die Spezies Folgen ( $\mathbf{Mengen}_1$ ) (siehe Beispiel 1.15) vor uns haben, also haben wir die erzeugende Funktion

$$\sum \frac{S_n}{n!} z^n = \frac{1}{1 - (e^z - 1)} = \frac{1}{2 - e^z}.$$

Die Singularitäten dieser Funktion sind sichtlich  $\log 2 + 2\pi i k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; die einzige reelle Singularität ist  $\log 2$ , dies ist zugleich der Konvergenzradius.

- (3) Die erzeugende Funktion der Catalan-Zahlen ist bekanntlich

$$\frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

mit  $\zeta = \frac{1}{4}$  als Singularität; daher ist der Konvergenzradius auch  $\frac{1}{4}$ .

(4) Die erzeugende Funktion der Spezies **Zyklen** ist

$$\log \frac{1}{1-z} = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

mit einer Singularität bei  $\zeta = 1$ ; daher ist der Konvergenzradius auch 1.

### 3.3.1. Die Exponential Growth Formula.

DEFINITION 3.7. Eine Singularität  $\zeta$  von  $f$  mit minimalem Betrag wird als dominanter singulärer Punkt bezeichnet.

DEFINITION 3.8. Wir sagen, eine Zahlenfolge  $(a_n)_{n=0}^\infty$  sei von exponentieller Ordnung  $K^n$  und führen dafür die Abkürzung  $a_n \asymp K^n$  ein:

$$a_n \asymp K^n \iff \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = K, \quad (3.7)$$

d.h.,  $\forall \epsilon > 0$  gilt

$$|a_n| > (K - \epsilon)^n \text{ für unendlich viele } n, \quad (3.8)$$

$$|a_n| < (K + \epsilon)^n \text{ für fast alle } n. \quad (3.9)$$

Anders ausgedrückt:

$$a_n = K^n \cdot \Theta(n),$$

wobei  $\Theta$  subexponentiell ist, d.h.

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|\Theta(n)|} = 1.$$

Typische Beispiele für subexponentielle Folgen sind

$$1, n^3, n^{-3/2}, \log n, (-1)^n, e^{\sqrt{n}}, e^{\log^2 n}, n^2 \sin n \frac{\pi}{2}, \dots$$

SATZ 3.6. Sei  $f(z) = \sum_n f_n \cdot z^n$  analytisch bei 0, sei  $R$  der Betrag eines dominanten singulären Punktes. Dann gilt:

$$f_n \asymp \left(\frac{1}{R}\right)^n.$$

BEWEIS. Wir zeigen die beiden Bedingungen aus Definition 3.8.

Zunächst wissen wir, daß  $R$  zugleich der Konvergenzradius ist. Für alle  $R > \delta > 0$  gilt daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n \cdot (R - \delta)^n = 0$$

(sonst würde die Reihe in  $(R - \delta)$  nicht konvergieren), insbesondere also  $|f_n| \cdot (R - \delta)^n < 1$  für fast alle  $n$ :

$$\sqrt[n]{|f(n)|} < \frac{1}{(R - \delta)} = \frac{1}{R} + \underbrace{\frac{1}{R} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{\delta}{R}\right)^k}_{\text{wird beliebig klein: } \leq \epsilon},$$

daher gilt für  $\epsilon > 0$  beliebig

$$|f(n)| < \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right)^n \text{ für fast alle } n.$$

Damit folgt (3.9).

Nun zu (3.8): Angenommen, es wäre

$$|f_n|(R + \delta)^n \leq C$$

für fast alle  $n$ , dann wäre

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|} \leq \frac{1}{R + \delta}$$

und somit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|} \left(R + \frac{\delta}{2}\right)^n = \left(R + \frac{\delta}{2}\right) \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|f_n|} \leq \frac{R + \frac{\delta}{2}}{R + \delta} < 1.$$

Nach dem *Wurzelkriterium* würde also

$$\sum |f_n| \left(R + \frac{\delta}{2}\right)^n$$

konvergieren; ein Widerspruch. Also gilt für unendlich viele  $n$

$$\sqrt[n]{|f_n|} > \frac{1}{(R + \delta)} = \frac{1}{R} - \underbrace{\frac{1}{R} \sum_{k \geq 1} \left(\frac{\delta}{R}\right)^k (-1)^{k-1}}_{\text{wird beliebig klein: } \leq \epsilon},$$

daher gilt für  $\epsilon > 0$  beliebig

$$|f_n| > \left(\frac{1}{R} - \epsilon\right)^n$$

für unendlich viele  $n$ . □

Wir fassen diese Erkenntnisse zusammen:

**GRUNDREGEL 3.1** (Erstes Prinzip der Singularitätenanalyse). *Die (Beträge der) Singularitäten von  $f(z) = \sum f_n \cdot z^n$  bestimmen das exponentielle Wachstum der Koeffizienten  $f_n$ .*

Als Beispiele hatten wir bereits die Derangement-Zahlen  $D_n$ , die Surjektionen  $S_n$  und die Catalan-Zahlen  $C_n$  gesehen.

**DEFINITION 3.9.** *Sei  $G$  ein Gebiet, sei  $z_0 \in G$ . Sei  $f : G \setminus z_0 \rightarrow \mathbb{C}$  eine analytische Funktion. Der Punkt  $z_0$  heißt isolierte Singularität von  $f$ . Es gibt dann nur drei Möglichkeiten für  $z_0$ :*

- hebbare Singularität, wenn auf  $f$  auf ganz  $G$  analytisch fortsetzbar ist<sup>3</sup>.

<sup>3</sup>Nach dem *Riemannschen Hebbbarkeitssatz* ist dies möglich, wenn  $f$  in einer Umgebung von  $z_0$  beschränkt ist. Analytische Fortsetzungen sind immer eindeutig.

- Pol, wenn  $z_0$  keine hebbare Singularität ist und es eine natürliche Zahl  $m$  gibt, sodaß  $(z - z_0)^m \cdot f(z)$  eine hebbare Singularität bei  $z_0$  hat. Ist  $m$  minimal gewählt, dann nennt man  $z_0$  einen Pol  $m$ -ter Ordnung.
- wesentliche Singularität, wenn  $z_0$  weder hebbbar noch ein Pol ist.

BEISPIEL 3.8. Die folgenden Funktionen  $\mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$  haben alle eine Singularität bei 0:

- $\frac{\sin z}{z}$  hat bei 0 eine hebbare Singularität,
- $\frac{1}{z^m}$  hat bei 0 einen Pol  $m$ -ter Ordnung,
- $e^{\frac{1}{z}}$  hat bei 0 eine wesentliche Singularität.

BEMERKUNG 3.4. Der Logarithmus ist eine Überlagerung und auf keinem Gebiet, das 0 enthält, analytisch! 0 ist also auch keine isolierte Singularität des Logarithmus (und damit der Wurzelfunktion  $\sqrt[n]{z} = z^{1/n} = \exp \frac{1}{n} \log z$ ).

PROPOSITION 3.1. Sei  $f(z)$  analytisch auf  $|z| < R$  mit  $0 \leq R < \infty$ . Dann gilt für  $r$  beliebig im offenen Intervall  $(0, R)$ :

$$|f_n| \leq \frac{\sup_{|z|=r} |f(z)|}{r^n},$$

also

$$|f_n| \leq \inf_{0 < r < R} \frac{\sup_{|z|=r} |f(z)|}{r^n},$$

Falls  $f(z)$  nichtnegative Koeffizienten hat, gilt speziell

$$f_n \leq \frac{f(r)}{r^n} \implies f_n \leq \inf_{0 < r < R} \frac{f(r)}{r^n}.$$

BEWEIS. Die wesentliche Abschätzung ergibt sich aus der Cauchyschen Integralformel (3.5) (wie im Beweis von Satz 3.4): Mit  $z(\theta) = r \cdot e^{i\theta}$  und  $\frac{d}{d\theta} z(\theta) = iz(\theta)$  gilt

$$f_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(r \cdot e^{i\theta})}{r^n e^{n \cdot i\theta}} d\theta$$

□

BEMERKUNG 3.5. Falls  $f(z)$  nichtnegative Koeffizienten hat, wird das inf angenommen bei

$$\left( \frac{f(r)}{r^n} \right)' = 0 \iff \frac{f'(r)}{r^n} - n \frac{f(r)}{r^{n+1}} = 0 \iff r \frac{f'(r)}{f(r)} = n.$$

Diese einfache Beobachtung werden wir bei der Sattelpunktmethode verwenden.

Wir wollen nun das folgende Prinzip erläutern:

**GRUNDREGEL 3.2** (Zweites Prinzip der Singularitätenanalyse). *Die Natur der dominanten Singularitäten bestimmt den subexponentiellen Anteil  $\Theta(n)$  in*

$$f_n \sim K^n \cdot \Theta(n).$$

**3.3.2. Rationale Funktionen.** Aus der bekannten *Partialbruchzerlegung* einer rationalen Funktion  $f$  (dargestellt als Quotient zweier Polynome  $p$  und  $q$ , die keine Nullstelle gemeinsam haben)

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)} = \frac{p(z)}{C(z-z_1)^{e_1} \cdots (z-z_k)^{e_k}} = \underbrace{R(z)}_{\text{Polynom}} + \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^{e_i} \frac{\gamma_{i,l}}{(z-z_i)^l}$$

zusammen mit dem binomischen Lehrsatz

$$(z-z_i)^{-l} = (-z_i)^{-l} \sum_{n \geq 0} \binom{-l}{n} \left(-\frac{z}{z_i}\right)^n = (-1)^l \sum_{n \geq 0} z^n \binom{n+l-1}{l-1} z_i^{-n-l}$$

ergibt sich sofort folgende exakte Formel für die Koeffizienten  $f_n = \langle z^n \rangle f(z)$ ,  $n > \deg(R)$ :

$$\begin{aligned} f_n &= \sum_{i=1}^k \sum_l^{e_i} (-1)^l \gamma_{i,l} \binom{n+l-1}{l-1} z_i^{-n-l} \\ &= \sum_{i=1}^k z_i^{-n} \underbrace{\sum_l^{e_i} (-1)^l \gamma_{i,l} \binom{n+l-1}{l-1} z_i^{-l}}_{\text{Polynom in } n} \end{aligned}$$

Daraus lesen wir unmittelbar die Asymptotik ab:

**SATZ 3.7.** *Seien  $a_1, \dots, a_m$  die dominanten Singularitäten (Pole) der rationalen Funktion  $f(z)$ ; seien  $e_1, \dots, e_m$  die entsprechenden Ordnungen der Pole. Dann gilt:*

$$f_n = \sum_{i=1}^m a_i^{-n} \underbrace{\text{Polynom}_i(n)}_{\text{vom Grad } e_i-1} + O(b^{-n})$$

wobei  $b$  eine nicht-dominante Singularität kleinsten Betrages ist.

**BEISPIEL 3.9.** *Die erzeugende Funktion der Fibonacci-Zahlen  $F_n$  ist bekanntlich*

$$\sum_{n \geq 0} F_n \cdot z^n = \frac{1}{1-z-z^2}.$$

*Die Singularitäten dieser rationalen Funktion sind  $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Die Partialbruchzerlegung lautet*

$$\frac{1}{1-z-z^2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \frac{1}{1-\frac{1+\sqrt{5}}{2}z} - \frac{1-\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \frac{1}{1-\frac{1-\sqrt{5}}{2}z},$$

woraus sich sofort die Asymptotik ergibt:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} + O \left( \left( \underbrace{\frac{1 - \sqrt{5}}{2}}_{\approx 0.618034} \right)^{n+1} \right).$$

Weitere einfache Beispiele dazu wären

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-2z)^2} &= \sum_{n \geq 0} (n+1) 2^n z^n \quad (\text{ein Pol zweiter Ordnung}), \\ \frac{1}{1-z^2} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{2} ((1)^n + (-1)^n) z^n \quad (\text{zwei dominante Pole}). \end{aligned}$$

**3.3.3. Meromorphe Funktionen.** Meromorphe Funktionen sind nicht wesentlich schwieriger zu behandeln als rationale:

**SATZ 3.8.** Sei  $f(z)$  meromorph für  $|z| \leq R$  mit Polen bei  $a_1, \dots, a_m$ ; seien  $e_1, \dots, e_m$  die Ordnungen dieser Pole. Sei  $f$  analytisch bei 0 und für alle  $z$  mit  $|z| = R$ . Dann gilt:

$$f_n = \sum_{i=1}^m a_i^{-n} \underbrace{\text{Polynom}_i(n)}_{\text{vom Grad } e_i-1} + O(R^{-n})$$

**BEWEIS.** Der Beweis gelingt durch “Subtraktion der Singularitäten”.

Betrachte den Pol  $a_1$ . In einer Umgebung von  $a_1$  kann man  $f(z)$  in eine *Laurentreihe* entwickeln:

$$f(z) = \underbrace{c_{-e_1} (z - a_1)^{-e_1} + \dots + c_{-1} (z - a_1)^{-1}}_{=: S_{a_1}(z)} + \underbrace{\sum_{n \geq 0} c_n (z - a_1)^n}_{=: H_{a_1}(z)}.$$

Hier ist  $S_{a_1}(z)$  der singuläre Anteil bei  $a_1$ ,  $H_{a_1}(z)$  ist hingegen analytisch bei  $a_1$ . Dieses “Abziehen singulärer Anteile” kann man natürlich ebenso für alle anderen Pole durchführen und erhält damit

$$f(z) = \underbrace{\sum_{i=1}^m S_{a_i}(z)}_{=: S(z)} + \underbrace{\left( f(z) - \sum_{i=1}^m S_{a_i}(z) \right)}_{=: H(z)},$$

wobei  $S(z)$  eine rationale Funktion mit Polen  $a_1, \dots, a_m$  ist und  $H(z)$  eine analytische Funktion im Kreis  $|z| \leq R + \epsilon$  für ein  $\epsilon > 0$  (weil  $f$  analytisch für alle  $z$  mit  $|z| = R$ ; Kompaktheitsargument). Da für die Koeffizienten  $h_n$  von  $H(z)$  gilt

$$h_n = O(R^{-n})$$

(siehe (3.6)), folgt die Behauptung. □

BEISPIEL 3.10. Die exponentiell erzeugende Funktion der Anzahlen  $S_n$  aller Surjektionen  $[n] \rightarrow [k]$  ( $k$  beliebig) hatten wir bereits berechnet:

$$f(z) = \frac{1}{2 - e^z}.$$

Diese Funktion hat Pole bei  $\log 2 + k \cdot 2\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ ; durch "Abziehen" des singulären Anteils bei  $\log 2$  ergibt sich

$$f(z) = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{z - \log 2} \right) + H(z) = \frac{1}{2 \log 2} \left( \frac{1}{1 - \frac{1}{\log 2} z} \right) + H(z)$$

(denn  $\lim_{z \rightarrow \log 2} \frac{z - \log 2}{2 - e^z} = -\frac{1}{2}$  nach der Regel von de L'Hospital), wobei  $H(z)$  analytisch ist für alle  $z$  mit  $|z| \leq 2\pi$ . Also erhält man aus Satz 3.8

$$f_n = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\log 2} \right)^{n+1} + O((2\pi)^{-n})$$

bzw. für die Zahlen  $S_n$

$$S_n = \frac{n!}{2} \left( \frac{1}{\log 2} \right)^{n+1} + O(n! (2\pi)^{-n}) \quad (3.10)$$

BEISPIEL 3.11. Die (exponentiell) erzeugende Funktion von Zyklen\* (also Folgen (Zyklen)) ist

$$f(z) = \frac{1}{1 - \log \frac{1}{1-z}}.$$

Offenbar gibt es einen Pol bei  $z = 1$  und einen bei

$$\log \frac{1}{1-z} = 1 \iff \frac{1}{1-z} = e \iff z = \frac{e-1}{e} = 1 - \frac{1}{e} \simeq 0.632121,$$

daher ist die dominante Singularität  $\zeta = 1 - e^{-1}$ . Wieder liefert die Regel von de L'Hospital sofort

$$\lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{z - \zeta}{1 - \log \frac{1}{1-z}} = \lim_{z \rightarrow \zeta} \frac{1}{\frac{-1}{1-z}} = \zeta - 1 = -e^{-1},$$

also

$$f(z) = -\frac{e^{-1}}{z - (1 - e^{-1})} + H(z).$$

$H(z)$  ist im (abgeschlossenen) Kreis mit Radius  $R = 1 - \epsilon$  analytisch ( $\epsilon > 0$ ), daher erhalten wir die Asymptotik

$$f_n = \frac{1}{e} \left( \frac{1}{1 - e^{-1}} \right)^{n+1} + O((1 - \epsilon)^{-n}) \simeq \frac{1}{e} 1.58198^{n+1} + O(1.0001^n).$$

BEISPIEL 3.12. Die Anzahl  $C_{n,k}$  der Surjektionen  $[n] \rightarrow [k]$  läßt sich bekanntlich mithilfe der Stirling-Zahlen zweiter Art ausdrücken:

$$C_{n,k} = k! \cdot S_{n,k}.$$

Wir wollen die Frage beantworten: Wenn man für festes  $n$  alle Surjektionen  $[n] \rightarrow [k]$  ( $k$  beliebig) als gleichwahrscheinlich ansieht, was ist

dann die durchschnittliche Kardinalität der Bildmenge? Dazu betrachten wir die erzeugende Funktion in zwei Variablen

$$f(t, z) := \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq 0} C_{n,k} \cdot \frac{z^n}{n!} \cdot t^k = \sum_{k \geq 0} t^k (e^z - 1)^k = \frac{1}{1 - t(e^z - 1)}.$$

Dann ist

$$\left. \frac{df}{dt} \right|_{t=1} = \sum_{n \geq 0} \left( \sum_{k=0}^n k \cdot C_{n,k} \right) \cdot \frac{z^n}{n!} = \frac{e^z - 1}{(2 - e^z)^2}.$$

Die Pole (Ordnung: 2) dieser Funktion liegen wieder bei  $\log 2 + k \cdot 2\pi i$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , und die Laurent-Reihenentwicklung lautet

$$\frac{e^z - 1}{(2 - e^z)^2} = \frac{1}{4(z - \log 2)^2} + \frac{1}{4(z - \log 2)} + H(z),$$

wobei  $H(z) = -\frac{7}{48} + \frac{1}{48}(z - \log 2) + O((z - \log 2)^2)$  im (abgeschlossenen) Kreis mit Radius  $R = \sqrt{4\pi^2 + (\log 2)^2} - \epsilon$  ( $\epsilon > 0$ ; man kann  $R \simeq 6.3213$  wählen) analytisch ist. Daraus ergibt sich sofort

$$\begin{aligned} \langle z^n \rangle \frac{e^z - 1}{(2 - e^z)^2} &= \frac{n+1}{4(\log 2)^2} \left( \frac{1}{\log 2} \right)^n - \frac{1}{4\log 2} \left( \frac{1}{\log 2} \right)^n + O(R^{-n}) \\ &= \frac{1}{4}(n+1 - \log 2) \left( \frac{1}{\log 2} \right)^{n+2} + O(R^{-n}). \end{aligned}$$

Dieses Ergebnis müssen wir jetzt mit (3.10)...

$$\langle z^n \rangle \frac{1}{2 - e^z} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\log 2} \right)^{n+1} + O(R^{-n})$$

... kombinieren, denn der gesuchte Erwartungswert ist ja einfach der Quotient dieser Koeffizienten:

$$\frac{\frac{1}{4}(n+1 - \log 2) \left( \frac{1}{\log 2} \right)^{n+2} + O(R^{-n})}{\frac{1}{2} \left( \frac{1}{\log 2} \right)^{n+1} + O(R^{-n})} = \frac{n+1}{2\log 2} - \frac{1}{2} + O(R^{-n}).$$

(Denn  $\log 2 \sim 0.693147 < 1$ ; siehe (3.15) im folgenden Lemma.)

Hinter der letzten Umformung im vorigen Beispiel steckt folgendes einfache Lemma, das einige "typische" Manipulationen mit der  $O$ -Notation festhält:

**LEMMA 3.1.** Seien  $f(n)$  und  $h(n)$  beliebige Folgen (also Funktionen  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ ). Dann gilt

$$O(f(n)) \cdot h(n) = O(f(n) \cdot h(n)). \quad (3.11)$$

Wenn speziell  $h(n) = O(1)$ , dann gilt einfach

$$O(f(n)) \cdot h(n) = O(f(n)). \quad (3.12)$$

Sei  $r : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} r(n) = 0$  (also  $r = o(1)$ ). Dann gilt:

$$\frac{1}{1 + O(r(n))} = 1 + O(r(n)) \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (3.13)$$

Sei weiters  $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ , sodaß  $\frac{1}{g(n)} = O(1)$ . Dann gilt:

$$\frac{1}{1 + \frac{O(r(n))}{g(n)}} = 1 + \frac{O(r(n))}{g(n)} \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (3.14)$$

Sei schließlich  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$  mit  $\frac{f(n)}{(g(n))^2} = O(1)$ . Dann gilt

$$\frac{f(n) + O(r(n))}{g(n) + O(r(n))} = \frac{f(n)}{g(n)} + O(r(n)) \quad (3.15)$$

BEWEIS. (3.11): Sei  $\zeta(n) \in O(f(n))$  ein konkretes (aber beliebiges) Element aus  $O(f(n))$ . Dann gilt definitionsgemäß

$$\begin{aligned} |\zeta(n) \cdot h(n)| &= |\zeta(n)| \cdot |h(n)| \\ &\geq K \cdot |f(n)| \cdot |h(n)| \\ &= K \cdot |f(n) \cdot h(n)|. \end{aligned}$$

(3.12): Setze einfach die obige Ungleichungskette mit " $\leq K \cdot K' \cdot |f(n)|$ " fort, die ja definitionsgemäß gilt.

(3.13): Nach Definition des Limes bzw. von  $O$  gibt es ein  $C > 0$  und ein  $n_0 \in \mathbb{N}$ , sodaß für ein konkretes (aber beliebiges) Element"  $\zeta(n) \in O(r(n))$  im Nenner von (3.13) gilt:

$$|\zeta(n)| \leq C \cdot |r(n)| \leq \frac{1}{2} \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Dann ist aber für alle  $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1 + \zeta(n)} \right| &= \frac{1}{|1 + \zeta(n)|} \leq \frac{1}{1 - |\zeta(n)|} \\ &\leq \frac{1}{1 - C \cdot |r(n)|} \stackrel{\leftarrow 1 - C|r(n)| \leq 1 - \zeta(n)}{} \\ &= 1 + \frac{C \cdot |r(n)|}{1 - C \cdot |r(n)|} \stackrel{\leftarrow 1 - C \cdot |r(n)| \geq \frac{1}{2}}{} \\ &\leq 1 + (2 \cdot C) \cdot |r(n)|, \end{aligned}$$

und damit ist (3.13) gezeigt.

(3.14): Nach Voraussetzung gibt es ein  $\epsilon > 0$ , sodaß  $|g| > \epsilon$  für  $n > N$ . Sei  $\zeta(n)$  wie zuvor, wähle nun aber  $n_0$  so, daß

$$|\zeta(n)| \leq C \cdot |r(n)| \leq \frac{\epsilon}{2} \text{ für alle } n \geq n_0.$$

Dann ist für alle  $n \geq \max(n_0, N)$  zunächst  $|C \cdot |r(n)|/g(n)| \leq 1/2$ , und

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{1 + \frac{\zeta(n)}{g(n)}} \right| &\leq \frac{1}{1 - \frac{|\zeta(n)|}{|g(n)|}} \leq \frac{1}{1 - \frac{C \cdot |r(n)|}{|g(n)|}} \\ &= 1 + \frac{C \cdot |r(n)| / |g(n)|}{1 - C \cdot |r(n)| / |g(n)|} \leftarrow C \cdot |r(n)| / |g(n)| \leq \frac{1}{2} \\ &\leq 1 + (2 \cdot C) \cdot \frac{|r(n)|}{|g(n)|}, \end{aligned}$$

und damit ist (3.14) gezeigt.

(3.15): Schließlich haben wir

$$\frac{f(n) + O(r(n))}{g(n) + O(r(n))} = \frac{f(n)}{g(n) + O(r(n))} + \frac{O(r(n))}{g(n) + O(r(n))}.$$

Für den ersten Term auf der rechten Seite haben wir

$$\begin{aligned} \frac{f(n)}{g(n) + O(r(n))} &= \frac{f(n)}{g(n)} \left( \frac{1}{1 + \frac{O(r(n))}{g(n)}} \right) \\ &= \frac{f(n)}{g(n)} \left( 1 + \frac{O(r(n))}{g(n)} \right) \leftarrow \text{gem. (3.14)} \\ &= \frac{f(n)}{g(n)} + \frac{f(n) O(r(n))}{(g(n))^2} \\ &= \frac{f(n)}{g(n)} + O(r(n)) \leftarrow \text{nach Vor. und (3.12)}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Term auf der rechten Seite haben wir gemäß (3.12)

$$\frac{O(r(n))}{g(n) + O(r(n))} = O(r(n)),$$

denn auch  $|g(n) + O(r(n))| > \epsilon/2$  für  $n$  "groß genug", also  $\frac{1}{g(n) + O(r(n))} = O(1)$ . Und weil natürlich  $O(r(n)) + O(r(n)) = O(r(n))$  gilt, ist damit auch (3.15) gezeigt.  $\square$

### 3.3.4. Mehrfache Singularitäten.

BEISPIEL 3.13 (Auslöschung). *Betrachte die Summe der rationalen Funktionen  $\frac{1}{1+z^2}$  und  $\frac{1}{1-z^3}$ :*

$$\frac{1}{1+z^2} + \frac{1}{1-z^3} = \frac{2+z^2-z^3}{(1+z^2)(1-z^3)}.$$

Die Koeffizienten von  $z^n$  verschwinden für  $n \equiv 1, 5, 6, 7, 11 \pmod{12}$ .  
( $n = 2(2k+1) = 3m \iff k \equiv 1 \pmod{3} \iff n = 12m + 6$ .)

BEISPIEL 3.14 (Nichtperiodische Fluktuationen). *Betrachte die rationale Funktion*

$$\frac{1}{1 - \frac{6}{5}z + z^2} = 1 + \frac{6}{5}z + \frac{11}{25}z^2 - \frac{84}{125}z^3 - \frac{779}{625}z^4 - \frac{2574}{3125}z^5 + \dots$$

mit der Partialbruchzerlegung

$$\frac{1}{1 - \frac{6}{5}z + z^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{3i}{8}}{1 - \left(\frac{3}{5} - \frac{4i}{5}\right)z} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{3i}{8}}{1 - \left(\frac{3}{5} + \frac{4i}{5}\right)z}.$$

Die Wurzeln des Nennerpolynoms haben Betrag 1 und sind invers zueinander, lassen sich also schreiben als

$$\frac{3}{5} + \frac{4i}{5} = e^{i\theta} \quad \text{und} \quad \frac{3}{5} - \frac{4i}{5} = e^{-i\theta}.$$

Damit erscheint der Koeffizient von  $z^n$  als

$$\begin{aligned} \frac{e^{in\theta} + e^{-in\theta}}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} &= \cos(n \cdot \theta) + \frac{3}{4} \sin(n \cdot \theta) \\ &= \cos(n \cdot \theta) + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin(n \cdot \theta) \\ &= \frac{\sin((n+1) \cdot \theta)}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

**3.3.5. “Standardisierte” Singularitätenanalyse.** Wir wollen nun den quasi “mechanischen Algorithmus” der Singularitätenanalyse erarbeiten, wie er von Philippe Flajolet und Andrew Odlyzko entwickelt wurde. Er besteht — grob gesprochen — aus folgenden Schritten, um die Asymptotik der Koeffizienten einer analytischen Funktion  $f(z)$  zu bestimmen:

**Normalisierung der Singularität:** Wenn  $\rho$  die “relevante Singularität” von  $f(z)$  ist, betrachte  $\hat{f}(z) := f(\rho \cdot z)$ : Dann ist 1 die “relevante Singularität” von  $\hat{f}(z)$ .

**Asymptotik für “Standardfunktionen”:** Für die “Standardfunktionen”

$$(1-z)^{-\alpha} \left( \frac{1}{z} \log \frac{1}{1-z} \right)^\beta$$

wird die Asymptotik der Koeffizienten allgemein bestimmt.

**Transfer-Theoreme:** Aus einer asymptotischen Abschätzung für Funktionen folgt direkt eine asymptotische Abschätzung der Koeffizienten:

$$f(z) = O \left( (1-z)^{-\alpha} \left( \log \frac{1}{1-z} \right)^\beta \right) \implies \langle z^n \rangle f(z) = O \left( n^{\alpha-1} (\log n)^\beta \right)$$

## 3.3.5.1. Die Gammafunktion.

DEFINITION 3.10 (Gammafunktion). Die Gammafunktion  $\Gamma(s)$  ist durch die Eulersche Integraldarstellung

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{s-1} dt. \quad (3.16)$$

für  $\Re(s) > 0$  definiert. Sie erfüllt die Funktionalgleichung

$$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s). \quad (3.17)$$

Daraus folgt, daß  $\Gamma(s)$  analytisch fortgesetzt werden kann auf  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ . Es gilt für alle  $m \in \mathbb{N}_0$

$$\Gamma(s) \sim \frac{(-1)^m}{m!} \frac{1}{s+m} \text{ für } s \rightarrow -m. \quad (3.18)$$

Für die Gammafunktion gilt der Eulersche Ergänzungssatz:

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}. \quad (3.19)$$

Aus der Funktionalgleichung (3.17) folgt auch sofort

$$\Gamma(s+n) = s^{\overline{n}} \cdot \Gamma(s) = s \cdot (s+1) \cdots (s+n-1) \cdot \Gamma(s). \quad (3.20)$$

Insbesondere sieht man aus (3.16) sofort  $\Gamma(1) = 1$ , also folgt für  $n \geq 0 \in \mathbb{Z}$

$$\Gamma(n+1) = n!$$

und ebenso mit  $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\overline{n}} \cdot \sqrt{\pi} = \frac{(2n)! \cdot \sqrt{\pi}}{n! \cdot 4^n}. \quad (3.21)$$

Für die Gammafunktion gibt die *Stirlingsche Formel* eine asymptotische Approximation:

$$\Gamma(s+1) \sim s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s} \left(1 + \frac{1}{12s} + \frac{1}{288s^2} - \frac{139}{51840s^3} + \dots\right). \quad (3.22)$$

BEMERKUNG 3.6.  $\Psi$ -Funktion Die  $\Psi$ -Funktion ist definiert als die logarithmische Ableitung der Gamma-Funktion:

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}.$$

Die folgende Formel liefert die Auswertungen der  $\Psi$ -Funktion bei rationalen Zahlen  $z = \frac{p}{q}$ ; siehe [2, Abschnitt 1.7.3, Gleichung (29)]:

$$\begin{aligned} \Psi\left(\frac{p}{q}\right) &= -\gamma - \log q - \frac{\pi}{2} \cot\left(\frac{\pi p}{q}\right) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\frac{q}{2}'} \cos\left(2\pi \frac{pn}{q}\right) \log\left(2 - 2 \cos\left(2\pi \frac{n}{q}\right)\right), \end{aligned} \quad (3.23)$$

wobei der Strich bei der oberen Summationsindexgrenze bedeuten soll, daß für gerades  $q$  der letzte (also dem Index  $n = \frac{q}{2}$  entsprechende) Term mit  $\frac{1}{2}$  multipliziert werden muß. Zum Beispiel erhält man:

$$\begin{aligned} \Psi\left(\frac{1}{2}\right) &= -\gamma - \log 2 - \frac{\pi}{2} \cot\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \cos \pi \log(2 - 2 \cos(\pi)) \\ &= -\gamma - 2 \log 2, \end{aligned} \quad (3.24)$$

weil  $\cot\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ,  $\cos \pi = -1$  und  $\log 4 = 2 \log 2$ .

**BEMERKUNG 3.7.** Für den folgenden Satz ist es nützlich, sich folgende Fakten in Erinnerung zu rufen: Sei  $z \in \mathbb{C}$  mit  $\Re(z) = x$  und  $\Im(z) = y$ , also  $z = x + iy$ . Dann kann man  $z$  bekanntlich auch in Polarkoordinaten  $(r, \phi)$  ausdrücken, also  $z = r \cdot (\cos \phi + i \sin \phi)$  mit  $r = |z|$  und  $\phi = \phi_0 + 2\pi k$  für  $k \in \mathbb{Z}$ , wobei wir hier mit  $\phi_0$  den Hauptwert des Arguments  $\arg(z)$  im Bereich  $-\pi < \arg(z) \leq \pi$  bezeichnen. (Für  $r = 0$  kann man den Winkel  $\phi$  überhaupt beliebig wählen.) Bekanntlich gilt:

$$e^{x+iy} = e^x \cdot (\cos y + i \sin y), \quad (3.25)$$

$$\log(x + iy) = \log|x + iy| + i \arg(x + iy). \quad (3.26)$$

Das heißt insbesondere, der (komplexe) Logarithmus (als Umkehrfunktion der Exponentialfunktion) ist eine mehrwertige Funktion, die erst dadurch eindeutig wird, daß man sich auf einen Wertebereich des Arguments festlegt (z.B. auf den Hauptwert).

Weiters hängen die trigonometrischen Funktionen bekanntlich so mit der Exponentialfunktion zusammen:

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}. \end{aligned}$$

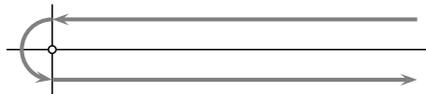
**SATZ 3.9** (Darstellung mit Hankel-Kurvenintegral). Für die Gammafunktion gilt

$$\frac{1}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} (-t)^{-s} \cdot e^{-t} dt, \quad (3.27)$$

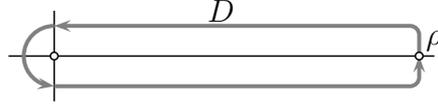
wobei  $\mathcal{H} = \mathcal{H}^- + \mathcal{H}^o + \mathcal{H}^+$  eine Kurve ist, die sich aus den Teilen

- $\mathcal{H}^- = \{w - i : w \geq 0\}$ ,
- $\mathcal{H}^o = \{-e^{i\phi} : -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}\}$ ,
- $\mathcal{H}^+ = \{w + i : w \geq 0\}$

zusammensetzt; graphisch sieht das so aus:



BEWEIS. Sei  $D$  eine Kurve, die von einem Punkt  $\rho > 0$  auf der reellen Achse startet, den Ursprung im Gegenuhrzeigersinn einmal umrundet und wieder zu  $\rho$  zurückkehrt.

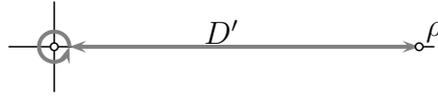


Betrachte für  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$  mit  $\Re(z) > 0$  das Integral

$$\int_D (-t)^{z-1} e^{-t} dt. \quad (3.28)$$

Der Faktor  $(-t)^{z-1} = e^{(z-1)\log(-t)}$  im Integranden wird eindeutig durch die Festlegung, daß  $\log(-t) \in \mathbb{R}$  für  $t < 0$ : Das heißt, für alle Punkte  $t \in D$  gilt  $-\pi \leq \arg(z) \leq \pi$ .

Der Integrand ist zwar nicht analytisch im Inneren von  $D$  (der Logarithmus ist ja nur auf der *geschlitzten* Ebene analytisch, also in keiner Umgebung von 0), aber nach dem Satz von Cauchy 3.2 können wir die Kurve  $D$  so zu einer Kurve  $D'$  deformieren, ohne den Wert des Integrals zu ändern:



Im ersten (geradlinigen) Teil dieser neuen Kurve  $D'$  ist  $\arg(-t) = -\pi$ , also

$$(-t)^{z-1} = e^{(z-1)(\log t - i\pi)},$$

und im letzten (geradlinigen) Teil ist  $\arg(-t) = \pi$ , also

$$(-t)^{z-1} = e^{(z-1)(\log t + i\pi)}.$$

(In beiden Teilen ist  $\log t \in \mathbb{R}$ .) Den kleinen Kreis beschreiben wir als  $-t = \delta e^{i\theta}$ , dann erhalten wir also:

$$\begin{aligned} \int_D (-t)^{z-1} e^{-t} dt &= \int_\rho^\delta e^{-i\pi(z-1)} t^{z-1} e^{-t} + \int_\delta^\rho e^{i\pi(z-1)} t^{z-1} e^{-t} \\ &\quad + i \int_{-\pi}^\pi (\delta e^{i\theta})^{z-1} e^{\delta e^{i\theta}} \delta e^{i\theta} d\theta = \\ &\quad - 2i \sin(\pi z) \int_\delta^\rho t^{z-1} e^{-t} dt + i\delta^z \int_{-\pi}^\pi e^{iz\theta + \delta e^{i\theta}} d\theta. \end{aligned}$$

(Denn  $\sin(\pi(z-1)) = \sin(\pi z - \pi) = -\sin(\pi z)$ .)

Diese Gleichheit gilt für alle positiven reellen Zahlen  $\delta \leq \rho$ : Für  $\delta \rightarrow 0$  geht  $\delta^z \rightarrow 0$  (da  $\Re(z) > 1$ ) und  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta + \delta e^{i\theta}} d\theta \rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\theta} d\theta$  (weil der Integrand gleichmäßig konvergiert); also folgt:

$$\int_D (-t)^{z-1} e^{-t} dt = -2i \sin(\pi z) \int_0^\rho t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Dies gilt für alle positiven reellen Zahlen  $\rho$ :  $\mathcal{H}$  ist ersichtlich der ‘‘Grenzfall’’ der Kurve  $D$  für  $\rho \rightarrow \infty$ , dann gilt also

$$\int_{\mathcal{H}} (-t)^{z-1} e^{-t} dt = -2i \sin(\pi z) \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt,$$

also

$$\Gamma(z) = -\frac{1}{2i \sin(\pi z)} \int_{\mathcal{H}} (-t)^{z-1} e^{-t} dt. \quad (3.29)$$

Die Kurve  $\mathcal{H}$  kommt dem Ursprung nicht nahe, daher brauchen wir auch die Voraussetzung  $\Re(z) > 0$  nicht mehr<sup>4</sup>: Das Integral in (3.29) ist eine (einwertige) analytische Funktion, die für  $\Re(z) > 0$  mit  $\Gamma(z)$  übereinstimmt; die *Hankelsche Formel* (3.29) für die Gammafunktion gilt also für alle  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ . Wenn wir darin  $z$  durch  $1-z$  ersetzen und den Eulerschen Ergänzungssatz (3.19) anwenden, folgt die Behauptung.  $\square$

3.3.5.2. *Asymptotik für ‘‘Standardfunktionen’’*. Nach dem Binomischen Lehrsatz erhalten wir für die ‘‘Standardfunktion’’  $(1-z)^{-\alpha}$  (wobei  $\alpha \in \mathbb{C}$  beliebig)

$$\langle z^n \rangle (1-z)^{-\alpha} = (-1)^n \binom{-\alpha}{n} = \binom{n+\alpha-1}{n}.$$

Falls  $\alpha \in \{0, -1, -2, \dots\}$ , ist die Asymptotik dieser Koeffizienten trivial (denn  $(1-z)^{-\alpha}$  ist ja dann ein Polynom, und die Koeffizienten sind alle 0 für  $n > -\alpha$ ). Andernfalls kann man das aber so schreiben:

$$\binom{n+\alpha-1}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha+1) \cdots (\alpha+n-1)}{n!} = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha) \Gamma(n+1)},$$

also könnte man durch Anwendung der *Stirlingschen Formel für die Gammafunktion* (3.22)

$$\Gamma(s+1) = s^s e^{-s} \sqrt{2\pi s} \left(1 + O\left(\frac{1}{s}\right)\right)$$

eine Asymptotik gewinnen — aber das geht besser mit der Cauchyschen Integralformel (3.5):

**SATZ 3.10** (Asymptotik für Koeffizienten von Standardfunktionen, 1). *Sei  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ . Wir betrachten die ‘‘Standardfunktion’’*

$$f(z) = (1-z)^{-\alpha}.$$

<sup>4</sup>Der Logarithmus ist ja in der *geschlitzten* komplexen Zahlenebene analytisch!

Dann gilt für  $n \rightarrow \infty$  die folgende asymptotische Entwicklung in absteigenden Potenzen von  $n$ :

$$\langle z^n \rangle f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k(\alpha)}{n^k} \right), \quad (3.30)$$

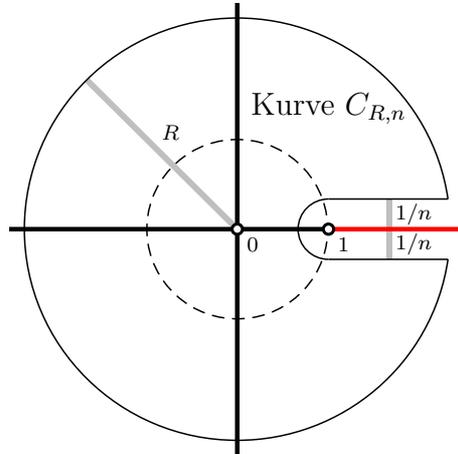
wobei  $e_k(\alpha)$  ein Polynom vom Grad  $2k$  in  $\alpha$  ist, das durch  $\alpha^{k+1} = \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdots (\alpha - k)$  teilbar ist. Die ersten Terme lauten:

$$\begin{aligned} \langle z^n \rangle (1-z)^{-\alpha} &\sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left( 1 + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1)}{2n} + \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdot (3\alpha - 1)}{24n^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha^2 \cdot (\alpha - 1)^2 \cdot (\alpha - 2) \cdot (\alpha - 3)}{48n^3} + O\left(\frac{1}{n^4}\right) \right). \end{aligned} \quad (3.31)$$

BEWEIS. Gemäß der Cauchyschen Integralformel (3.5) ist

$$\langle z^n \rangle (1-z)^{-\alpha} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{C}} \frac{(1-z)^{-\alpha}}{z^{n+1}} dz, \quad (3.32)$$

wobei  $\mathcal{C}$  irgendeine geschlossene Kurve (mit Windungszahl 1) um 0 ist, die den Strahl der reellen Zahlen  $\geq 1$  vermeidet: Wir wählen konkret die in der folgenden Graphik beschriebene Kurve  $\mathcal{C}_{R,n}$ .



Für alle  $n > \Re(-\alpha)$  wird das Integral entlang des "Kreisstücks" von  $\mathcal{C}_{R,n}$  beliebig klein, wenn wir  $R \rightarrow \infty$  gehen lassen, sodaß also "nur mehr" das "Hankel-artige Stück"  $\mathcal{H}_n = \mathcal{H}_n^- + \mathcal{H}_n^o + \mathcal{H}_n^+$  von  $\mathcal{C}_{R,n}$  eine Rolle spielt, das aus den Teilen

- $\mathcal{H}_n^- = \left\{ w - \frac{i}{n} : w \geq 1 \right\}$ ,
- $\mathcal{H}_n^o = \left\{ 1 - \frac{e^{i\phi}}{n} : -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ ,
- $\mathcal{H}_n^+ = \left\{ w + \frac{i}{n} : w \geq 1 \right\}$

besteht. Mit der Substitution

$$z = 1 + \frac{t}{n}, \quad dz = \frac{1}{n} dt$$

erhalten wir

$$\langle z^n \rangle (1-z)^{-\alpha} = \frac{n^{\alpha-1}}{2i\pi} \int_{\mathcal{H}} (-t)^{-\alpha} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n-1} dt, \quad (3.33)$$

wobei  $\mathcal{H}$  nun einfach die Hankelkurve aus Satz 3.9 ist.

Für  $|t| < n$  konvergiert die Potenzreihenentwicklung von  $\log\left(1 + \frac{t}{n}\right)$ , daher erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n-1} &= e^{-(n+1)\log(1+t/n)} \\ &= \exp\left(- (n+1) \left(\frac{t}{n} - \frac{t^2}{2n^2} + \frac{t^3}{3n^3} - + \dots\right)\right) \\ &= \exp\left(-t + \frac{t^2 - 2t}{2n} + \frac{3t^2 - 2t^3}{6n^2} + \dots\right) \leftarrow \text{Sortiere } n^{-k} \\ &= e^{-t} \cdot \exp\left(\frac{t^2 - 2t}{2n} + \frac{3t^2 - 2t^3}{6n^2} + \dots\right) \\ &= e^{-t} \left(1 + \frac{t^2 - 2t}{2n} + \frac{3t^4 - 20t^3 + 24t^2}{24n^2} + \dots\right). \end{aligned} \quad (3.34)$$

D.h., für  $|t| \leq R$  ( $R < \infty$  beliebig, aber fest) konvergiert der Integrand von (3.33) für  $n \rightarrow \infty$  *gleichmäßig* gegen  $(-t)^{-\alpha} e^{-t}$ . ‘‘Asymptotisch’’ haben wir also

$$\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-n-1} = e^{-t} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

‘‘Formal’’ erhalten wir daher durch Einsetzen in (3.33)

$$\begin{aligned} \langle z^n \rangle (1-z)^{-\alpha} &= \frac{n^{\alpha-1}}{2i\pi} \int_{\mathcal{H}} (-t)^{-\alpha} e^{-t} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) dt \\ &= \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{aligned}$$

Das war jetzt freilich etwas kühn und bedarf noch einer Rechtfertigung: Dazu zerlegen wir die Hankelkurve  $\mathcal{H}$

- in den Teil mit  $\Re(t) \geq \log^2 n$ : Wir werden zeigen, daß dieser Teil ‘‘vernachlässigbar’’ ist;
- und in den Teil mit  $\Re(t) < \log^2 n$ : Dann ist  $\frac{|t|}{n} \leq \frac{\log^2 n}{n} < 1$  (denn  $\log z < \sqrt{z}$  für alle  $z > 0$ ) und die Entwicklung (3.34) ‘‘funktioniert’’.

Der vernachlässigbare Teil erfordert ein bißchen Feinarbeit in puncto Integral-Abschätzung. Die Teil-Integrale über  $\mathcal{H}^+$  und  $\mathcal{H}^-$  können wir ‘‘in einem Aufwaschen’’ erledigen, denn zunächst ist:

$$\left| \int_{\log^2 n}^{\infty} \frac{(-t \pm i)^{\alpha}}{\left(1 + \frac{t \pm i}{n}\right)^{n+1}} dt \right| \leq \int_{\log^2 n}^{\infty} \frac{|t + i|^{\alpha}}{\left|1 + \frac{t \pm i}{n}\right|^{n+1}} dt.$$

Aus

$$\begin{aligned} z^\alpha &= e^{\alpha \log z} = e^{(\Re(\alpha) + i\Im(\alpha))(\log|z| + i \arg z)} \\ &= e^{\Re(\alpha) \log|z| - \Im(\alpha) \arg z} \cdot e^{i(\Im(\alpha) \log|z| + \Re(\alpha) \arg z)} \end{aligned}$$

folgt ja sofort

$$|z^\alpha| = e^{\Re(\alpha) \log|z| - \Im(\alpha) \arg z},$$

also hier konkret

$$|(t + \mathbf{i})^\alpha| = |t + \mathbf{i}|^{\Re(\alpha)} \cdot e^{-\Im(\alpha) \arg(t + \mathbf{i})} \leq C \cdot |t|^{\Re(\alpha)},$$

denn  $\arg(t + \mathbf{i}) \rightarrow 0$  für  $t \rightarrow \infty$  und

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2 + 1}}}{1} = 1$$

(Regel von de l'Hospital). Weiters gilt natürlich

$$\left| 1 + \frac{t + \mathbf{i}}{n} \right| \geq \left( 1 + \frac{t}{n} \right),$$

daher können wir die Integralabschätzung so fortsetzen (wir setzen  $\alpha' = \Re(\alpha)$ ):

$$\left| \int_{\log^2 n}^{\infty} \frac{(-t \pm \mathbf{i})^\alpha}{\left(1 + \frac{t \pm \mathbf{i}}{n}\right)^{n+1}} dt \right| \leq C \cdot \int_{\log^2 n}^{\infty} \frac{t^{\alpha'}}{\left|1 + \frac{t}{n}\right|^{n+1}} dt.$$

Hier ist die Integrationsvariable  $t \geq \log^2 n$  reell, was im folgenden *immer* gelten soll. Dann haben wir zunächst also

$$\left| 1 + \frac{t}{n} \right| \geq 1 + \frac{\log^2 n}{n},$$

woraus sofort

$$\left| 1 + \frac{t}{n} \right|^{-n} \leq \left( 1 + \frac{\log^2 n}{n} \right)^{-n}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$  folgt.

Aus der Analysis wissen wir (siehe etwa [5, Satz 26.1]): Sei  $x_n$  eine Nullfolge mit  $x_n \neq 0$  und  $x_n > -1$  für alle  $n$ , dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + x_n)^{1/x_n} = e.$$

Wir wählen die spezielle Nullfolge<sup>5</sup>  $\frac{\log^2 n}{n}$  und erhalten

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{\log^2 n}{n} \right)^{n/\log^2 n} = e$$

bzw. äquivalent (der reelle Logarithmus ist stetig):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \log \left( 1 + \frac{\log^2 n}{n} \right)}{\log^2 n} = 1$$

---

<sup>5</sup>Zweimal de l'Hospital:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log^2 n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 \log n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{n} = 0$ .

Daraus folgt aber immerhin für jedes  $\epsilon > 0$

$$n \log \left( 1 + \frac{\log^2 n}{n} \right) \geq (1 - \epsilon) \log^2 n, \quad (3.35)$$

wenn nur  $n$  groß genug ist.

Wir behaupten nun: Für jedes feste  $k$  können wir ein  $n$  wählen, sodaß für  $t \geq \log^2 n$  gilt:

$$\frac{t^{\alpha'}}{\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{n+1}} \leq \frac{1}{n^k t^2}. \quad (3.36)$$

Denn wenn wir diese Behauptung logarithmieren, erhalten wir äquivalent

$$(\alpha' + 2) \log t - (n + 1) \log \left( 1 + \frac{t}{n} \right) \leq -k \log n \quad (3.37)$$

(denn der reelle Logarithmus ist eine streng monoton steigende Funktion), und wenn wir für  $t \rightarrow \log^2 n$  einsetzen, dann ist klar, daß die folgende Ungleichung für  $n$  groß genug richtig wird:

$$\underbrace{(\alpha' + 2) \log \log^2 n - (n + 1) \log \left( 1 + \frac{\log^2 n}{n} \right)}_{\geq (1-\epsilon) \log^2 n \text{ gem. (3.35)}} \leq -k \log n$$

(denn  $\log^2 n$  wächst stärker als  $\log \log^2 n$  und  $\log n$ ). Wenn wir die Ableitung von (3.37) betrachten, dann gilt aber auch

$$\frac{2 + \alpha'}{t} - \frac{n + 1}{n} \frac{1}{1 + t/n} = \frac{2 + \alpha'}{t} - \frac{n + 1}{n + t} \leq 0,$$

wenn  $t \geq \frac{n(2+\alpha')}{n-\alpha'-1}$ , und weil die rechte Seite dieser Ungleichung nach  $2 + \alpha'$  konvergiert, wird für genügend großes  $n$  auch  $\log^2 n \geq \frac{n(2+\alpha')}{n-\alpha'-1}$ . Damit ist (3.36) gezeigt, und wir können die Abschätzung abschließen:

$$\left| \int_{\log^2 n}^{\infty} \frac{(-t \pm \mathbf{i})^\alpha}{\left(1 + \frac{t \pm \mathbf{i}}{n}\right)^{n+1}} dt \right| \leq C \cdot \int_{\log^2 n}^{\infty} \frac{1}{n^k t^2} dt = \frac{C}{n^k \log^2 n}.$$

Gemäß (3.34) erscheint das Integral (3.33) für große  $n$  "bis auf obigen Fehlerterm" also als Summe von Termen der Gestalt

$$c_k \int_{\mathcal{H}: \Re(t) \leq \log^2 n} (-t)^{-\alpha} \mathbf{e}^{-t^k} dt.$$

Wir wollen natürlich argumentieren, daß diese Integrale "im wesentlichen" gleich sind

$$\int_{\mathcal{H}} (-t)^{-\alpha+k} \mathbf{e}^{-t} dt = \frac{2\pi \mathbf{i}}{\Gamma(\alpha - k)} = \frac{2\pi \mathbf{i} \cdot (\alpha - k) \cdot (\alpha - k + 1) \cdots (\alpha - 1)}{\Gamma(\alpha)}$$

(gemäß der Hankelschen Formel (3.27) bzw der Funktionalgleichung (3.20)). Dazu überlegen wir, daß das "abgeschnittene Rest-Integral"

(mit denselben Umformungen wie im Beweis von Satz 3.9) auf das reelle Integral

$$2i \sin(\pi\alpha) \int_{\log^2 n}^{\infty} e^{-t} (-t)^{-\alpha} dt$$

führt, dessen Integrand natürlich auch sehr klein wird, wenn  $t$  groß wird:

$$|e^{-t} (-t)^{-\alpha}| \leq e^{-t} t^{\Re(\alpha)} \leq \frac{1}{n^k t^2}$$

(denn  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} t^{\Re(\alpha)+2} = 0$ ); sodaß wir den Fehler genauso wie zuvor abschätzen können.

Wenn wir alles zusammensetzen, ergibt sich die Behauptung.  $\square$

BEMERKUNG 3.8. *Es gilt für die Koeffizienten  $e_k$  in (3.30):*

$$e_k = \sum_{l=k}^{2k} \lambda_{k,l} (\alpha - 1) \cdot (\alpha - 2) \cdots (\alpha - l)$$

mit  $\lambda_{k,l} = \langle v^k t^l \rangle e^t \cdot (1 + vt)^{-1-1/v}$ .

SATZ 3.11 (Asymptotik für Koeffizienten von Standardfunktionen, 2). Sei  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ . Wir betrachten die "Standardfunktion"

$$f(z) = (1 - z)^{-\alpha} \left( \frac{1}{z} \log \frac{1}{1 - z} \right)^\beta. \quad (3.38)$$

Dann gilt für  $n \rightarrow \infty$  die folgende asymptotische Entwicklung in absteigenden Potenzen von  $\log n$ :

$$\langle z^n \rangle f(z) \sim \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\log n)^\beta \left( 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{C_k(\alpha)}{\log^k n} \right), \quad (3.39)$$

wobei  $C_k = \binom{\beta}{k} \Gamma(\alpha) \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{\Gamma(s)} \Big|_{s=\alpha}$  ist.

BEMERKUNG 3.9. Der Faktor  $\frac{1}{z}$  in (3.38) wird "nur" eingefügt, damit  $f(z)$  eine Potenzreihe ist, auch wenn  $\beta \notin \mathbb{Z}$  (der Logarithmus ist ja in keiner Umgebung von  $z = 0$  analytisch!):

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{z} \log \frac{1}{1 - z} \right)^\beta &= \exp \left( \beta \log \left( \frac{1}{z} \log \frac{1}{1 - z} \right) \right) \\ &= \exp \left( \beta \log \left( 1 + \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} + \frac{z^3}{4} + \dots \right) \right) \\ &= \exp \left( \beta \left( \frac{z}{2} + \frac{5z^2}{24} + \frac{z^3}{8} + \dots \right) \right) \end{aligned}$$

BEWEISSKIZZE. Analog zum Beweis von Satz 3.10 wählen wir in der Cauchyschen Integralformel eine “Hankel-ähnliche” Kurve; nach Substitution  $z \rightarrow 1 + \frac{t}{n}$  erhalten wir ein Integral über die “gewöhnliche” Hankelkurve  $\mathcal{H}$  mit dem Integranden

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} f \left( 1 + \frac{t}{n} \right) \left( 1 + \frac{t}{n} \right)^{-n-1} &= \frac{1}{n} \left( -\frac{t}{n} \right)^{-\alpha} \left( \log \left( -\frac{n}{t} \right) \right)^\beta \left( 1 + \frac{t}{n} \right)^{-\beta-n-1} \\ &\sim n^{\alpha-1} (-t)^{-\alpha} (\log n)^\beta \left( \frac{1 - \frac{\log(-t)}{\log n}}{1 - \frac{-t}{n}} \right)^\beta e^{-t}. \end{aligned}$$

Für  $|t| \leq \log n$  ist

$$\left( 1 + \frac{t}{n} \right)^{-\beta} = \sum_{k \geq 0} \binom{-\beta}{k} \frac{t^k}{n^k} = 1 + O \left( \frac{\log n}{n} \right),$$

daher “spielen diese Terme in unserer  $\frac{1}{\log^k n}$ -Entwicklung asymptotisch nicht mit”, also können wir weiter vereinfachen

$$\frac{1}{n} f \left( 1 + \frac{t}{n} \right) \left( 1 + \frac{t}{n} \right)^{-n-1} \sim n^{\alpha-1} (\log n)^\beta e^{-t} (-t)^{-\alpha} \left( 1 - \frac{\log(-t)}{\log n} \right)^\beta,$$

und den von  $t$  abhängigen Teil entwickeln wir einfach binomisch:

$$e^{-t} (-t)^{-\alpha} \left( 1 - \beta \frac{\log(-t)}{\log n} + \frac{\beta(\beta-1)}{2!} \left( \frac{\log(-t)}{\log n} \right)^2 - \dots \right)$$

Analog zum Beweis von Satz 3.10 müssen wir uns überzeugen, daß diese Entwicklung “bis auf einen asymptotisch unbedeutenden Rest” richtig ist und können dann einfach gliedweise integrieren, wobei wir Differenzieren

$$\frac{d}{ds} (-t)^{-s} = \frac{d}{ds} \exp(-s \log(-t)) = -\log(-t) \exp(-s \log(-t))$$

und Integrieren vertauschen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} (-t)^{-s} e^{-t} \log^k(-t) dt &= (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \left( \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathcal{H}} (-t)^{-s} e^{-t} dt \right) \\ &= (-1)^k \frac{d^k}{ds^k} \frac{1}{\Gamma(s)}. \quad \leftarrow \text{gem. (3.27)} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Behauptung.  $\square$

BEISPIEL 3.15. Eine typische Anwendung von Satz 3.11 ist ( $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $\beta = -1$ ):

$$\langle z^n \rangle \frac{1}{\sqrt{1-z}} \frac{1}{z \log \frac{1}{1-z}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi} \log n} \left( 1 - \frac{\gamma + 2 \log 2}{\log n} + O \frac{1}{\log^2 n} \right),$$

denn  $\Gamma \left( \frac{1}{2} \right) = \sqrt{\pi}$ ,  $(\Gamma(z)^{-1})' = -\frac{\Psi(z)}{\Gamma(z)}$  und  $\Psi \left( \frac{1}{2} \right) = -\gamma - 2 \log 2$  (siehe (3.24)).

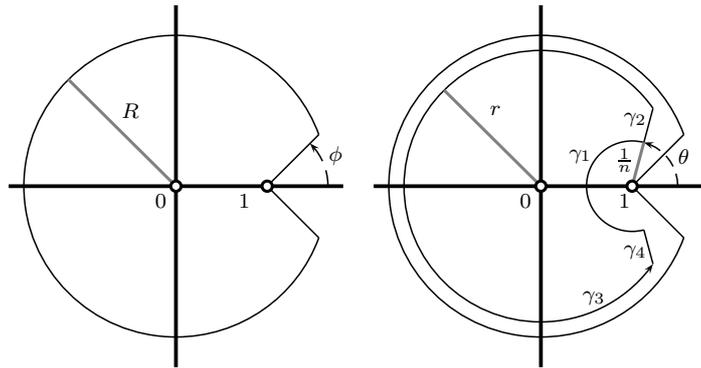
## 3.3.5.3. Transfer-Theoreme.

DEFINITION 3.11. Für zwei reelle Zahlen  $\phi, R$  mit  $R > 1$  und  $0 < \phi < \frac{\pi}{2}$  definieren wir das offene Gebiet

$$\Delta(\phi, R) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < R, z \neq 1, |\arg(z-1)| > \phi\}$$

und nennen jedes solche Gebiet ein  $\Delta$ -Gebiet.

Das linke Bild in der folgenden Graphik illustriert dies.



SATZ 3.12. Seien  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  (nicht  $\mathbb{C}$ !) beliebig, und sei  $f(z)$  eine Funktion, die auf einem  $\Delta$ -Gebiet analytisch ist. Wenn  $f$  im Durchschnitt einer Umgebung von 1 und dem  $\Delta$ -Gebiet

- die Bedingung

$$f(z) = O\left((1-z)^{-\alpha} \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^\beta\right)$$

erfüllt ist, dann gilt

$$\langle z^n \rangle f(z) = O\left(n^{\alpha-1} (\log n)^\beta\right); \quad (3.40)$$

- die Bedingung

$$f(z) = o\left((1-z)^{-\alpha} \left(\log \frac{1}{1-z}\right)^\beta\right)$$

erfüllt ist, dann gilt

$$\langle z^n \rangle f(z) = o\left(n^{\alpha-1} (\log n)^\beta\right). \quad (3.41)$$

BEWEIS. Wie immer verwenden wir die Cauchysche Integralformel

$$f_n = \langle z^n \rangle f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$$

für eine Kurve  $\gamma$  im  $\Delta$ -Gebiet, die den Ursprung in positiver Richtung einmal umläuft. Konkret wählen wir nun (siehe auch das rechte Bild in

der obigen Graphik) eine Kurve  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4$ , die aus folgenden Teilen besteht:

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \left\{ z \in \mathbb{C} : |z-1| = \frac{1}{n}, |\arg(z-1)| \geq \theta \right\}, \\ \gamma_2 &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{n} \leq |z-1|, |z| \leq r, |\arg(z-1)| = \theta \right\}, \\ \gamma_3 &= \{ z \in \mathbb{C} : |z| = r, |\arg(z-1)| \geq \theta \}, \\ \gamma_4 &= \left\{ z \in \mathbb{C} : \frac{1}{n} \leq |z-1|, |z| \leq r, |\arg(z-1)| = -\theta \right\};\end{aligned}$$

wobei  $1 < r < R$  und  $\phi < \theta < \frac{\pi}{2}$  gilt. Wir behandeln die einzelnen Abschnitte des Integrals separat:

$$f_n^j = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

$j = 1, 2, 3, 4$ . Dann gilt:

$$f_n^1 = O\left(\frac{1}{n}\right) \cdot O\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{-\alpha} (\log n)^\beta\right) = O\left(n^{\alpha-1} (\log n)^\beta\right),$$

denn  $f = O\left(n^\alpha (\log n)^\beta\right)$  entlang  $\gamma_1$  laut Voraussetzung, die Länge des Integrationspfades ist  $O\left(\frac{1}{n}\right)$ , und  $z^{-n-1} = O(1)$  entlang  $\gamma_1$ .

Weiters ist für  $r' := n \cdot r$

$$\begin{aligned}|f_n^2| &\leq \frac{1}{2\pi n} \int_1^{r'} \left|\frac{t}{n}\right|^{-\alpha} \left|\log \frac{n}{t}\right|^\beta \left|1 + \frac{e^{i\theta}t}{n}\right|^{-n-1} dt \leftarrow \log \frac{n}{t} \leq \log n \\ &\leq \frac{1}{2\pi} n^{\alpha-1} (\log n)^\beta \int_1^\infty t^{-\alpha} \left|1 + \frac{e^{i\theta}t}{n}\right|^{-n-1} dt \leftarrow \left|1 + \frac{e^{i\theta}t}{n}\right| \geq 1 + \Re\left(\frac{e^{i\theta}t}{n}\right) \\ &\leq \frac{1}{2\pi} n^{\alpha-1} (\log n)^\beta \int_1^\infty t^{-\alpha} \left|1 + \frac{t \cos \theta}{n}\right|^{-n-1} dt.\end{aligned}$$

Da

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^\infty t^{-\alpha} \left|1 + \frac{t \cos \theta}{n}\right|^{-n-1} dt = \int_1^\infty t^{-\alpha} e^{-t \cos \theta} dt < \infty \leftarrow \text{weil } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

folgt

$$f_n^2 = O\left(n^{\alpha-1} (\log n)^\beta\right),$$

und völlig analog gilt das auch für  $f_n^4$ .

Entlang  $\gamma_3$  ist  $f(z)$  beschränkt, aber  $z^{-n} = O(r^{-n})$ :  $f_n^3$  ist also "exponentiell klein".

Analog (aber etwas komplizierter: Die geradlinigen Teile müssen so ähnlich "zerlegt" werden wie im Beweis von Satz 3.10...) funktioniert die Abschätzung mit  $o$  (statt  $O$ ).  $\square$

In den folgenden Beispielen kommt immer wieder das bekannte Gauß'sche Integral vor:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \sqrt{2\pi}. \quad (3.42)$$

BEISPIEL 3.16 (Unär-binäre Bäume). *Betrachten wir die Spezies  $\mathcal{T}$  der (unbezeichneten nicht-leeren) ebenen unär-binären Bäumen (d.h.: jeder innere Knoten hat entweder einen oder zwei "Nachfolger"). Die folgende Graphik zeigt schematisch die Zerlegung dieser Spezies:*

$$\mathcal{T} = \circ + \begin{array}{c} \circ \\ | \\ \mathcal{T} \end{array} + \begin{array}{c} \circ \\ / \backslash \\ \mathcal{T} \quad \mathcal{T} \end{array}$$

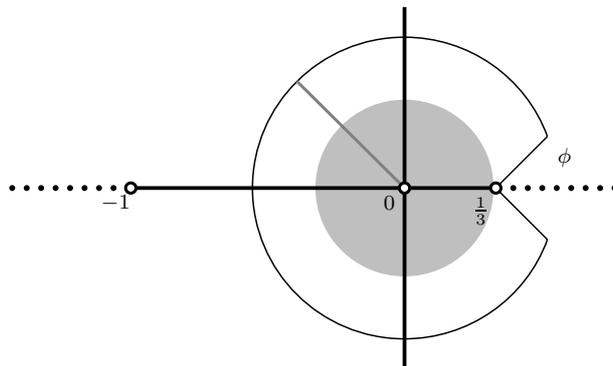
Dies übersetzt sich unmittelbar in die folgende Funktionalgleichung für die (gewöhnliche) erzeugende Funktion  $T(z)$ :

$$T(z) = z(1 + T(z) + T^2(z)).$$

mit der Lösung

$$T(z) = \frac{1 - z - \sqrt{(1+z)(1-3z)}}{2z}.$$

Die dominante Singularität ist sichtlich  $z = \frac{1}{3}$ , und die Funktion ist in einem Delta-Gebiet analytisch, siehe folgende Graphik:



Mit der Substitution

$$1 - 3z = u \iff z = \frac{1 - u}{3}$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
T(u) &= \frac{1 - \frac{1-u}{3} - \sqrt{\left(1 + \frac{1-u}{3}\right)u}}{2^{\frac{1-u}{3}}} \\
&= \frac{2 + u - 3\sqrt{\frac{1}{3}u(4-u)}}{2(1-u)} \quad \leftarrow -2+u=2(1-u)+3u \\
&= 1 + \frac{3u - \sqrt{3}\sqrt{u}2\sqrt{\left(1 - \frac{u}{4}\right)}}{2(1-u)} \quad \leftarrow 2 \text{ binom. LS "trivial"} \\
&= 1 + \frac{3u - 2\sqrt{3}\sqrt{u}(1 + O(u))}{2} (1 + O(u)) \\
&= 1 - \sqrt{3}\sqrt{u} + \frac{3u}{2} + O(u^{3/2}).
\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich daraus die Darstellung (nun wieder in  $z$ ):

$$T(z) = 1 - \sqrt{3}\sqrt{1-3z} + \frac{3}{2}(1-3z) + O\left((1-3z)^{3/2}\right).$$

Gemäß (3.30) (mit  $\alpha = -\frac{1}{2}$ ) ist

$$\langle s^n \rangle \sqrt{1-s} \sim \frac{n^{-\frac{3}{2}}}{\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right)} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_k\left(-\frac{1}{2}\right)}{n^k}\right),$$

gemäß (3.21) in Verbindung mit (3.19) ist

$$\Gamma\left(-\frac{1}{2}\right) = -2\sqrt{\pi},$$

und gemäß (3.40) (mit  $\alpha = -\frac{3}{2}$  und  $\beta = 0$ ) ist der Koeffizient des Restes  $O\left((1-s)^{3/2}\right)$

$$O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right).$$

Insgesamt ergibt sich für den Koeffizienten  $T_n$  von  $z^n$  in  $T(z)$  also:

$$T_n = \langle z^n \rangle T(z) = 3^n \sqrt{\frac{3}{4\pi n^3}} + O\left(3^n n^{-\frac{5}{2}}\right).$$

BEISPIEL 3.17 (2-reguläre Graphen). Die bezeichnete Spezies der 2-regulären Graphen können wir als Mengen von Zyklen der Länge mindestens 3 (= Kreise im graphentheoretischen Sinn) deuten, wobei Zyklen identifiziert werden, wenn sie sich nur um eine Spiegelung unterscheiden. Die entsprechende exponentiell erzeugende Funktion ist also

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} + \dots\right)\right) \\ &= \exp\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{1-z} - \frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}\right) \\ &= \frac{e^{-\frac{z}{2} - \frac{z^2}{4}}}{\sqrt{1-z}} \end{aligned}$$

Wir substituieren  $u = 1 - z$ :

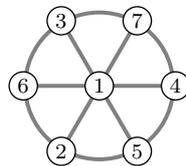
$$\begin{aligned} f(u) &= \frac{e^{-\frac{1-u}{2} - \frac{1-2u-u^2}{4}}}{\sqrt{u}} = \frac{e^{-\frac{3}{4} + u + \frac{u^2}{4}}}{\sqrt{u}} \\ &= \frac{e^{-\frac{3}{4}}}{\sqrt{u}} (1 + u + O(u^2)) \\ &= e^{-\frac{3}{4}} (1-z)^{-\frac{1}{2}} + e^{-\frac{3}{4}} (1-z)^{\frac{1}{2}} + O\left((1-z)^{\frac{3}{2}}\right). \end{aligned}$$

Wie im vorigen Beispiel folgt nun

$$f_n = e^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} - e^{-\frac{3}{4}} \frac{5}{8\sqrt{\pi n^3}} + O\left(n^{-\frac{5}{2}}\right),$$

die Anzahl der 2-regulären Graphen ist also asymptotisch gleich  $n! \cdot f_n$ .

BEISPIEL 3.18 (Kinderrunden). Die bezeichnete Spezies “Kinderrunden” ist eine Aufteilung einer Menge von Kindern auf mehrere “einzelne Runden”, bei denen jeweils ein Kind in der Mitte sitzt, siehe die folgende Illustration:



Es gibt genau  $\frac{n!}{n-1}$  verschiedene solche “Runden” mit  $n$  Kindern (denn zyklische Vertauschungen der Kinder, die im Kreis sitzen, werden identifiziert); die exponentiell erzeugende Funktion solcher “einzelner Runden” ist also

$$z^2 + \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{3} + \dots,$$

und “Kinderrunden” sind einfach Mengen solcher “einzelner Runden”, daher ist die entsprechende erzeugende Funktion

$$\begin{aligned} f(z) &= \exp\left(z^2 + \frac{z^3}{2} + \frac{z^4}{3} + \dots\right) \\ &= \exp\left(z \log \frac{1}{1-z}\right) \\ &= (1-z)^{-z} = \frac{1}{1-z} (1-z)^{-z+1} \\ &= \frac{1}{1-z} \exp((1-z) \log(1-z)). \end{aligned}$$

Diese Funktion ist analytisch in  $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 1}$  und hat bei  $\zeta = 1$  eine Singularität. Um  $z_0 = 0$  können wir die Exponentialfunktion einfach entwickeln:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1 + \log(1-z)(1-z) + \frac{(\log(1-z)(1-z))^2}{2!} + \dots}{1-z} \\ &= \frac{1}{1-z} - \log \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} (1-z) \log^2 \frac{1}{1-z} \\ &\quad + \sum_{n \geq 3} \frac{(\log(1-z))^n (1-z)^{n-1}}{n!} \end{aligned}$$

Es ist aber der “Summenteil”

$$\frac{1}{1-z} \sum_{n \geq 3} \frac{(\log(1-z)(1-z))^n}{n!} = O((1-z)^{-1}) \text{ für } z \rightarrow 1,$$

denn

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \log s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\log s}{1/s} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{s}}{-\frac{1}{s^2}} = 0 \leftarrow \text{de'l Hospital.}$$

Für den Teil  $\frac{1}{1-z} - \log \frac{1}{1-z}$  ergibt sich natürlich sofort der Koeffizient  $1 - \frac{1}{n}$ , und für die restlichen Teile erhalten wir die Asymptotik wieder aus (3.39) (mit  $\alpha = -1$  und  $\beta = 2$ ) und (3.40) (mit  $\alpha = -1$  und  $\beta = 0$ ), also insgesamt

$$f_n = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2} n^{-2} \log^2 n + O(n^{-2}).$$

### 3.4. Sattelpunktmethode

Singularitätenanalyse hat sich für die Bestimmung der Asymptotik als sehr nützlich erwiesen: Aber was kann man machen, wenn die erzeugende Funktion

- entweder überhaupt keine Singularitäten hat, wie z.B.  $e^z$  (Mengen),  $e^{z+\frac{z^2}{2}}$  (Involutionen) oder  $e^{e^z-1}$  (Bell-Zahlen),

- oder die Singularitäten nicht mit unseren “Standardfunktionen” approximierbar sind, wie z.B.  $e^{\frac{z}{1-z}}$  (Mengen von nicht-leeren Permutationen)?

**3.4.1. Heuristik: Kurve durch Sattelpunkt.** In solchen Fällen kann die folgende heuristische Überlegung helfen. Ausgangspunkt ist wieder die Formel von Cauchy:

$$\langle z^n \rangle f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \quad (3.43)$$

und die Idee ist einfach die, die Kurve  $C$  um 0 mit Windungszahl 1 so in das Gebiet  $G$  zu legen, in dem die Funktion  $f$  analytisch ist, daß

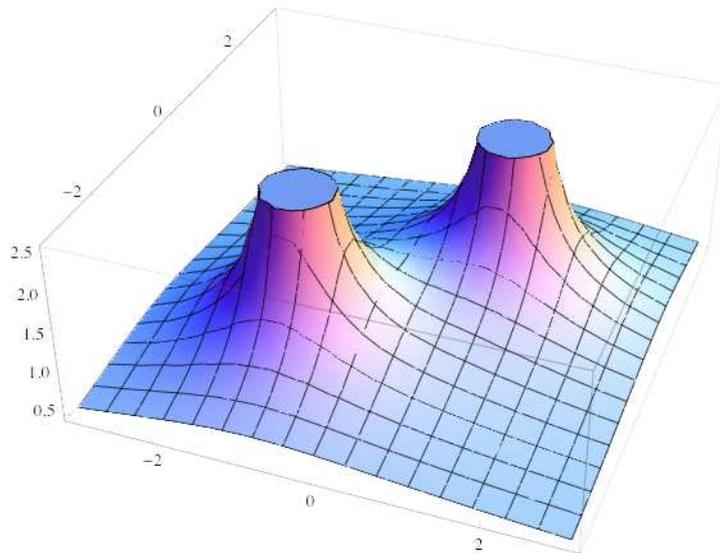
- der Integrand  $\frac{f(z)}{z^{n+1}}$  auf einem Teil  $C'$  der Kurve  $C$  so klein ist, daß der Teil  $\frac{1}{2\pi i} \int_{C'} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz$  in der asymptotischen Betrachtung vernachlässigbar ist,
- sodaß also der asymptotisch relevante Anteil vom Integral über den “Rest”  $C''$  der Kurve  $C$  stammt (wobei dieser Rest auch noch leicht bestimmbar sein sollte).

Das klingt so unklar und verschwommen, daß man sich gar nicht vorstellen kann, daß das in der Praxis funktioniert: Tatsächlich führt diese vage Idee aber so oft zum Ziel, daß sie als *Sattelpunktmethode* bezeichnet wird.

Es geht also zunächst um eine Abschätzung des Absolutbetrages des Integranden

$$\left| \frac{f(z)}{z^{n+1}} \right|$$

in (3.43). Diese reellwertige Funktion erscheint graphisch als Gebirgslandschaft über der komplexen Ebene; und der Weg, den die Kurve  $C$  beschreibt, soll “fast immer in der Ebene verlaufen, und nur einmal über einen Paß führen” (Siehe die folgende Graphik.)

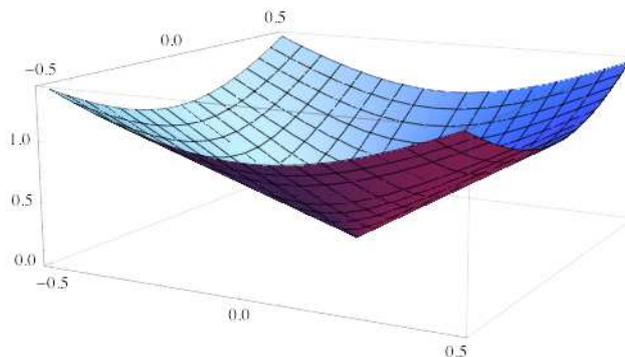


Betrachten wir also die Funktion  $g(z) := \frac{f(z)}{z^{n+1}}$ : nach dem Taylorschen Lehrsatz ist

$$g(z) = g(z_0) + (z - z_0)g'(z_0) + \frac{1}{2}(z - z_0)^2g''(z_0) + O((z - z_0)^3) \text{ für } z \rightarrow z_0.$$

Wir schreiben  $z - z_0 = r \cdot e^{i\theta}$  mit  $r \in \mathbb{R}_+$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  (Polarkoordinaten) und betrachten die Möglichkeiten für das Verhalten der Funktion  $|g|$  in der Nähe von  $z_0$ :

**Fall 1:**  $g(z_0) = 0$ . In diesem Fall hat  $|g|$  in  $z_0$  einen Tiefpunkt, siehe folgende Graphik:



**Fall 2:**  $g(z_0) \neq 0$  und  $g'(z_0) \neq 0$ . Dann schreiben wir  $\frac{g'(z_0)}{g(z_0)} = \lambda e^{i\phi}$  in Polarkoordinaten und sehen

$$|g(z)| = |g(z_0)| \cdot |1 + r \cdot \lambda \cdot e^{i(\phi+\theta)} + O(r^2)|,$$

und für kleines  $r$  gilt entlang eines Geradenstücks durch  $z_0$  mit Winkel  $\theta$  in erster Näherung

- für  $\theta = -\phi \pm \pi$  steigt  $|g(z)|$ , von einem Minimum  $\sim |g(z_0)|(1 - r\lambda)$  auf ein Maximum  $\sim |g(z_0)|(1 + r\lambda)$ ,

- für  $\theta = -\phi \pm \frac{\pi}{2}$  ist  $|1 \pm r\lambda i| = \sqrt{1 + r^2\lambda^2} = 1 + O(r^2) = 1 + o(r)$  “im wesentlichen konstant”.

**Fall 3:**  $g(z_0) \neq 0$  und  $g'(z_0) = 0$ . Sei  $\frac{1}{2} \frac{g''(z_0)}{g(z_0)} = \lambda e^{i\phi}$  in Polarkoordinaten. Dann ist

$$|g(z)| = |g(z_0)| |1 + \lambda r^2 e^{i(2\theta+\phi)} + O(r^3)|.$$

Für Winkel  $\theta$  gleich

- $\theta = -\frac{\phi}{2}$  ist  $e^{i(2\theta+\phi)} = 1$ ;  $|g(z)|$  verhält sich in dieser Richtung also wie eine nach oben geöffnete Parabel,
- $\theta = -\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2}$  ist  $e^{i(2\theta+\phi)} = -1$ ;  $|g(z)|$  verhält sich in dieser Richtung also wie eine nach unten geöffnete Parabel.

Der Punkt  $z_0$  ist also ein *Sattelpunkt* von  $|g(z)|$ . Die “Strategie”, der *Sattelpunktmethode* besteht nun einfach darin, die Kurve  $\Gamma$  für die Cauchysche Integralformel

- durch den Sattelpunkt
- in Richtung des “stärksten Abfalls” (also in Richtung  $-\frac{\phi}{2} + \frac{\pi}{2}$ , in der obigen Bezeichnung in Polarkoordinaten) zu legen;

in der Hoffnung, daß das Kurvenintegral in zwei Teile zerlegt werden kann:

- in einen Teil um den Sattelpunkt herum, der den “dominantesten” Beitrag zum Integral liefert,
- und in einen restlichen Teil, der “vernachlässigbar” ist.

**BEMERKUNG 3.10** (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes Polynom  $p(z)$  vom Grad  $n > 0$  über dem Körper  $\mathbb{C}$  hat eine Nullstelle in  $\mathbb{C}$ : Denn angenommen nicht, dann wäre  $f(z) := \frac{1}{p(z)}$  betragsmäßig beschränkt*

$$|f(z)| \leq C \text{ für alle } z \in \mathbb{C},$$

und dann würde gemäß der Cauchyschen Integralformel für alle Koeffizienten gelten:

$$|\langle z^n \rangle f(z)| \leq \frac{C}{2\pi} \frac{1}{R^n} \text{ für alle } R > 0,$$

also  $|\langle z^n \rangle f(z)| = 0$  für  $n > 0$ , ein Widerspruch.

Schauen wir uns das “Funktionieren” der Sattelpunktmethode in einem wohlvertrauten Beispiel an:

**BEISPIEL 3.19** (Stirlingsche Formel). Sei  $f(z) = e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n$ . Wir wollen eine “günstige” Integrationskurve  $\Gamma$  für die Cauchysche Integralformel

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{e^z}{z^{n+1}} dz$$

finden und suchen dafür nach einem Sattelpunkt: Die Gleichung

$$\left(\frac{e^z}{z^{n+1}}\right)' = 0 \iff \frac{e^z}{z^{n+1}} - (n+1) \frac{e^z}{z^{n+2}} = 0$$

hat sichtlich die Lösung  $z = n + 1$  — aber so sklavisch müssen wir uns nicht an unsere “Sattelpunktheuristik” halten, wir können ebensogut  $z = n$  ( $n \sim n + 1$  für  $n \rightarrow \infty$ ;  $n$  ist also sozusagen “asymptotischer Sattelpunkt”) versuchen. Für  $g(z) := \left(\frac{e^z}{z^{n+1}}\right)$  sind  $g(n)$  und  $g'(n)$  reell, der Winkel  $\phi$  (siehe die vorigen Überlegungen: “Fall 3”) ist also 0, und wir wählen als Kurve, die die reelle Achse im Punkt  $n$  orthogonal schneidet, einfach den Kreis mit Radius  $r = n$

$$z(\theta) = n \cdot e^{i\theta} \text{ mit der Ableitung } z'(\theta) = i \cdot n \cdot e^{i\theta} = i \cdot z. \quad (3.44)$$

Wir betrachten also das Kurvenintegral

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{z(\theta)}}{(z(\theta))^{n+1}} \cdot z'(\theta) d\theta &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{n \cdot e^{i\theta}}}{n^{n+1} e^{i(n+1)\theta}} \cdot i \cdot n \cdot e^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{n^{-n}}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{n \cdot e^{i\theta} - i \cdot n\theta} d\theta \\ &= \left(\frac{n}{e}\right)^{-n} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{n(e^{i\theta} - 1 - i\theta)} d\theta. \end{aligned}$$

Dieses Integral teilen wir jetzt “geschickt” auf:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta}}_{=: I_n^0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta}}_{=: I_n^1},$$

wobei wir  $\delta = n^{-2/5}$  wählen.

Wir betrachten zuerst  $I_n^1$ :  $\left|e^{n \cdot e^{i\theta}}\right| = e^{\Re(n \cdot e^{i\theta})} = e^{n \cos \theta}$  ist

- auf dem Intervall  $(\delta, \pi)$  fallend, das Maximum liegt dort also bei  $\delta$ ,
- auf dem Intervall  $(\pi, 2\pi - \delta)$  steigend, das Maximum liegt dort also bei  $2\pi - \delta$ .

Also können wir den Integranden von  $I_n^1$  so abschätzen:

$$\begin{aligned} \left|e^{n(e^{i\theta} - 1 - i\theta)}\right| &= e^{\Re(n(e^{i\theta} - 1 - i\theta))} \\ &= e^{n(\cos \theta - 1)} \\ &\leq e^{n(\cos \delta - 1)} \leftarrow \cos z = \sum_m z^{2m} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \\ &\sim e^{-n \frac{\delta^2}{2}} = e^{-\frac{\sqrt[5]{n}}{2}}. \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir also:  $I_n^1 = O\left(\exp\left(-\frac{1}{2} \cdot n^{\frac{1}{5}}\right)\right)$ .

Nun betrachten wir  $I_n^0$ :

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} e^{n(e^{i\theta}-1-i\theta)} d\theta &= \int_{-\delta}^{\delta} e^{n(-\frac{\theta^2}{2}+O(\theta^3))} d\theta \quad \leftarrow e^z = \sum_n \frac{z^n}{n!} \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} e^{-n\frac{\theta^2}{2}+O(n^{-\frac{1}{5}})} d\theta \quad \leftarrow |\theta^3| \leq \delta^3 = n^{-\frac{6}{5}} \\ &= \int_{-\delta}^{\delta} e^{-n\frac{\theta^2}{2}} \cdot \left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)\right) d\theta \\ &= \left(1 + O\left(n^{-\frac{1}{5}}\right)\right) \int_{-\delta}^{\delta} e^{-n\frac{\theta^2}{2}} \cdot d\theta. \end{aligned}$$

Wir machen eine kleine Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\infty} e^{-n\frac{\theta^2}{2}} d\theta &= \int_0^{\infty} e^{-\frac{n}{2} \cdot (\delta^2 + 2\delta t + t^2)} dt \quad \leftarrow \theta = t + \delta \\ &\leq e^{-\frac{n\delta^2}{2}} \int_0^{\infty} e^{-n\delta t} dt \\ &= e^{-\frac{n\delta^2}{2}} \left(-\frac{1}{n\delta} e^{-n\delta t}\right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{n\delta} e^{-\frac{n\delta^2}{2}} = O\left(e^{-n^{\frac{1}{5}}}\right). \quad \leftarrow \delta = n^{-\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-n\frac{\theta^2}{2}} d\theta &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\frac{\theta^2}{2}} d\theta + O\left(e^{-n^{1/5}}\right) \quad \leftarrow s = \theta \sqrt{\frac{n}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{n}} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2} ds}_{\sqrt{\pi}} + O\left(e^{-n^{1/5}}\right) \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} + O\left(n^{-\frac{1}{5}}\right). \quad \leftarrow O(e^{-x}) = O\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Wenn wir alles zusammensetzen, erhalten wir folgende Variante der Stirlingschen Formel:

$$\frac{1}{n!} = \left(\frac{n}{e}\right)^{-n} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(1 + O\left(n^{-1/5}\right)\right).$$

BEISPIEL 3.20. Sei  $u_n$  die Anzahl der (Mengen-)Partitionen, bei denen es aber innerhalb jedes Blocks auf die Reihenfolge der Elemente ankommt. In der Sprache der Spezies sind das einfach

Mengen (Permutationen<sub>1</sub>),

woraus wir direkt die (exponentiell) erzeugende Funktion ablesen:

$$\sum_{n \geq 0} u_n \frac{z^n}{n!} = \exp\left(\frac{z}{1-z}\right).$$

Für die Cauchysche Integralformel haben wir es also mit dem Integranden

$$f(z) = \frac{\exp\left(\frac{z}{1-z}\right)}{z^{n+1}}$$

zu tun; mit der Ableitung

$$f'(z) = \frac{\exp\left(\frac{z}{1-z}\right)}{z^{n+2}} \cdot \left( \frac{z}{(1-z)^2} - (n+1) \right) \leftarrow \left(\frac{z}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{1}{(1-z)^2}$$

Wenn wir  $f'(z)$  gleich Null setzen, führt das also zur Gleichung

$$z^2(n+1) - z(2(n+1)+1) + n+1 = 0$$

mit den Lösungen

$$\begin{aligned} z_{1,2} &= \frac{2n+3 \pm \sqrt{4n^2+12n+9-4n^2-8n-4}}{2(n+1)} \leftarrow z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} \\ &= \frac{2n+3 \pm \sqrt{4n+5}}{2(n+1)}. \end{aligned}$$

Wir wählen die kleinere Lösung

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{\sqrt{4(n+1)+1}}{2(n+1)}$$

und erhalten aus der Reihenentwicklung

$$\sqrt{1+z} = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{8} + \frac{z^3}{16} - \frac{5z^4}{128} + O(z^5) \quad (|z| < 1)$$

der Quadratwurzel um  $z=0$

$$\frac{\sqrt{4z+1}}{2z} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{4z}}}{\sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{z}} \left(1 + O((4z)^{-1})\right); (z \rightarrow \infty),$$

und für  $z=(n+1)$  ergibt sich

$$z_1 = 1 + \frac{1}{2(n+1)} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{4(n+1)}\right)\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Aus der Reihenentwicklung

$$\frac{1}{\sqrt{1+z}} = 1 - \frac{z}{2} + \frac{3z^2}{8} - \frac{5z^3}{16} + \frac{35z^4}{128} + O(z^5) \quad (|z| < 1)$$

um  $z=0$  erhalten wir nun

$$\frac{1}{\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \quad (n \rightarrow \infty).$$

Insgesamt also

$$z_1 = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2(n+1)} + O(n^{-3/2}).$$

Wieder gehen wir es großzügig an und wählen den "asymptotischen Sattelpunkt"

$$r = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

auf der reellen Achse, der zugleich der Radius jenes Kreises um 0 ist, den wir als Integrationskurve wählen (siehe voriges Beispiel, insbesondere (3.44)). Dann ergibt die Cauchysche Integralformel:

$$\frac{u_n}{n!} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left(\frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} - ni\theta\right) r^{-n} d\theta$$

wie im vorigen Beispiel teilen wir dieses Integral jetzt "geschickt" auf:

$$\int_0^{2\pi} = \int_{-\delta}^{2\pi-\delta} = \underbrace{\int_{-\delta}^{\delta}}_{=: I_n^0} + \underbrace{\int_{\delta}^{2\pi-\delta}}_{=: I_n^1},$$

wobei wir  $\delta = n^{-7/10}$  wählen.

Es ist wegen  $r = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$

$$\begin{aligned} \frac{re^{i\theta}}{1-re^{i\theta}} &= r \cdot e^{i\theta} + r^2 \cdot e^{2i\theta} + r^3 \cdot e^{3i\theta} + \dots \leftarrow e^{i\theta} = 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^3) \\ &= 1 \left( \underbrace{r + r^2 + r^3 + \dots}_{\frac{r}{1-r} = \sqrt{n}-1} \right) + i\theta \left( \underbrace{r + 2r^2 + 3r^3 + \dots}_{\frac{r}{(1-r)^2} = n - \sqrt{n}} \right) \\ &\quad - \frac{\theta^2}{2} \left( \underbrace{r + 2^2r^2 + 3^2r^3 + \dots}_{\frac{r(1+r)}{(1-r)^3} = \sqrt{n} - 3n + 2n^{3/2}} \right) \\ &\quad + O(\theta^3) \left( \underbrace{r + 2^3r^2 + 3^3r^3 + \dots}_{\frac{r(1+4r+r^2)}{(1-r)^4} = O\left(\frac{1}{(1-r)^4}\right) = O(n^2)} \right) \quad (n \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Für den Teil  $I_n^0$  ist  $|\theta|^3 \leq \delta^3 = n^{-21/10}$  und somit  $O(\theta^3)O(n^2) = O(n^{-1/10})$ ; wir erhalten also:

$$\begin{aligned} I_n^0 r^n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} e^{\frac{r}{1-r} + i\theta\left(\frac{r}{(1-r)^2} - n\right) - \theta^2 \frac{r(1+r)}{2(1-r)^3} + O\left(\frac{\theta^3}{(1-r)^4}\right)} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left(\sqrt{n} - 1 - i\theta\sqrt{n} - \theta^2(n^{3/2} + O(n)) + O(n^{-1/10})\right) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \exp\left(\sqrt{n} - 1 - \theta^2 n^{3/2} + O(n^{-1/10})\right) d\theta, \end{aligned}$$

wobei die letzte Vereinfachung aus

$$\theta\sqrt{n} = O(n^{-2/10}), \quad \theta^2 O(n) = O(n^{-4/10})$$

folgt. Wie im vorigen Beispiel ist

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{\infty} e^{-\theta^2 n^{3/2}} d\theta &= \int_0^{\infty} e^{-(\delta^2 + 2\delta t + t^2)n^{3/2}} dt \quad \leftarrow \theta = \delta + t \\ &\leq e^{-n^{3/2}\delta^2} \int_0^{\infty} e^{-2\delta t n^{3/2}} dt \\ &= e^{-n^{3/2}\delta^2} \left( \frac{1}{-2\delta n^{3/2}} e^{-2\delta t n^{3/2}} \right) \Big|_0^{\infty} \\ &= \frac{e^{-n^{3/2}\delta^2}}{2\delta n^{3/2}} = O\left(e^{-n^{1/10}}\right) \quad \leftarrow \delta = n^{-7/10} \end{aligned}$$

und somit

$$I_n^0 r^n = \frac{1}{2\pi} e^{\sqrt{n}-1} \left( \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\theta^2 n^{3/2}) d\theta}_{\sqrt{\pi} n^{-3/4}} \right) (1 + O(n^{-1/10})).$$

Zusammen mit der Entwicklung

$$\begin{aligned} r^{-n} &= \exp\left(-n \log\left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \exp\left(-n \left(-\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n} + O(n^{-3/2})\right)\right) \\ &= \exp\left(\sqrt{n} + \frac{1}{2} + O(n^{-1/2})\right) \\ &= e^{\sqrt{n} + \frac{1}{2}} e^{O(n^{-1/2})} = e^{\sqrt{n} + \frac{1}{2}} (1 + O(n^{-1/2})) \end{aligned}$$

erhalten wir schließlich

$$I_n^0 = \frac{e^{2\sqrt{n} - \frac{1}{2}}}{2\sqrt{\pi} n^{3/4}} (1 + O(n^{-1/10})).$$

Für den restlichen Integralteil  $I_n^1$  überlegen wir: Es gilt (natürlich)  $e^{\frac{z}{1-z}} = e^{\frac{1}{1-z} - 1}$  und (ebenso natürlich)  $\frac{1}{1-z} = \frac{1-\bar{z}}{(1-z)(1-\bar{z})}$ ; daraus folgt sofort

$$\left| e^{\frac{z}{1-z}} \right| = \frac{1}{e} \left| \exp\left(\frac{1 - r e^{i\theta}}{1 - 2r \cos \theta + r^2}\right) \right| = \frac{1}{e} \exp\left(\frac{1 - r \cos \theta}{1 - 2r \cos \theta + r^2}\right).$$

Die Ableitung der Funktion  $\frac{1-rz}{1-2rz+r^2}$  ( $z \in [-1, 1]$ ,  $0 < r < 1$ ) nach  $z$  ist  $\frac{r(1-r^2)}{(1-2rz+r^2)^2} > 0$ , also ist sie strikt steigend. Das heißt aber: Für  $z = r e^{i\theta}$  und  $\delta \leq \theta \leq 2\pi - \delta$  ist

$$\left| e^{\frac{z}{1-z}} \right| \leq e^{-1} \exp\left(\frac{1 - r \cos \delta}{1 - 2r \cos \delta + r^2}\right),$$

und

$$\exp\left(\frac{1 - r \cos n^{-7/10}}{1 - 2r \cos n^{-7/10} + r^2}\right) = \exp(\sqrt{n} - n^{1/10} + O(1))$$

(das sieht man — nach Substitution von  $r = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$  und  $n = z^{-10}$  — aus der Laurent-Reihenentwicklung

$$\frac{(z^5 - 1) \cos(z^7) + 1}{z^{10} - 2z^5 + 2(z^5 - 1) \cos(z^7) + 2} = \frac{1}{z^5} - \frac{1}{z} + O(z^3),$$

und Rücksubstitution  $z = n^{-1/10}$ .) Also ist

$$I_n^1 \leq \frac{2\pi}{2\pi} r^{-n} e^{\sqrt{n} - n^{1/10}} e^{O(1)} = O\left(e^{2\sqrt{n} - n^{1/10}}\right),$$

mit der Entwicklung von  $r^{-n}$  wie zuvor. Das sieht vielleicht nicht spektakulär aus: Aber asymptotisch ist  $I_n^1$  "viel kleiner" als  $I_n^0$ :

$$\left|\frac{I_n^1}{I_n^0}\right| \leq C \left|n^{3/4} e^{-n^{1/10}}\right|,$$

also

$$I_n^1 = o(I_n^0) \quad (n \rightarrow \infty).$$

BEMERKUNG 3.11 (Weitere asymptotische Entwicklung). Man kann die Taylorreihenentwicklung in  $\theta$  weiter führen — für  $e^z$  (siehe Beispiel 3.19) ergibt sich beispielsweise

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{n(e^{i\theta} - 1 - i\theta)} d\theta &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{n\left(-\frac{\theta^2}{2} - i\frac{\theta^3}{6} + \frac{\theta^4}{24} + i\frac{\theta^5}{120} + O(\theta^6)\right)} d\theta \leftarrow e^z = 1 + z + O(z^2)! \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n\frac{\theta^2}{2}} \left(1 - n i \frac{\theta^3}{6} + n \frac{\theta^4}{24} + n i \frac{\theta^5}{120} + n O(\theta^6)\right) d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} - \underbrace{ni O(\dots)}_{\text{imaginär!}} + \frac{n}{24} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^4 e^{-\theta^2 \frac{n}{2}} d\theta \\ &\quad + O\left(n \int_{-\infty}^{\infty} \theta^6 e^{-\theta^2 \frac{n}{2}} d\theta\right). \end{aligned}$$

Mit den Integralen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \theta^4 e^{-\theta^2 \frac{n}{2}} d\theta &= \frac{3\sqrt{2\pi}}{n^{5/2}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} \theta^6 e^{-\theta^2 \frac{n}{2}} d\theta &= \frac{15\sqrt{2\pi}}{n^{7/2}} \end{aligned}$$

ergibt sich also:

$$\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} + \frac{1}{8} \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{3/2}} + O(n^{-5/2}).$$

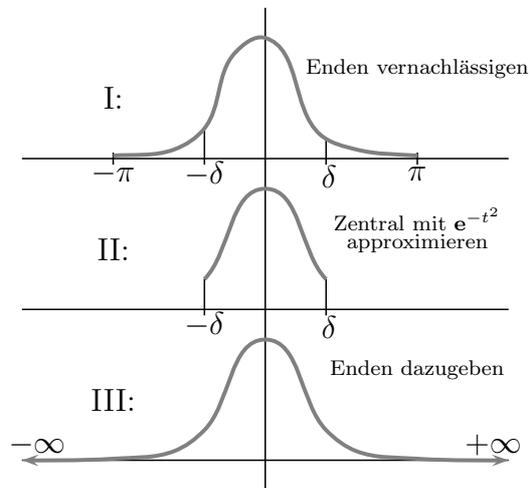
**3.4.2. Der Satz von Hayman.** Unsere typische Situation ist ja diese: Sei  $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$  analytisch bei  $z = 0$ , dann wollen wir den Koeffizienten  $f_n$  durch die Cauchysche Integralformel ausdrücken, wobei wir über einen Kreis  $z(\theta) = r e^{i\theta}$  integrieren:

$$f_n = \frac{r^{-n}}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{e^{ni\theta}} d\theta.$$

Die weitere Vorgangsweise folgt dem allgemeinen Muster:

- Zeige, daß die Enden des Integrals (also  $\theta \notin (-\delta, \delta)$ ) “asymptotisch vernachlässigbar klein sind im Vergleich zum Hauptteil”,
- Zeige, daß für den Hauptteil des Integrals (also  $\theta \in (-\delta, \delta)$ ) eine Approximation durch einen Integranden vom Typ  $e^{-\theta^2}$  existiert,
- Zeige, daß die Enden dieses “neuen, approximativen Integrals” (also die Integrationsbereiche  $\theta < -\delta$  und  $\theta > \delta$  wieder asymptotisch vernachlässigbar klein sind,

siehe die folgende schematische Illustration.



Die Situationen, in denen dieses “allgemeine Muster” funktioniert, wollen wir nun “allgemein beschreiben”.

Für  $r \geq 0$  im Konvergenzkreis mit  $f(r) > 0$  und kleines  $\theta$  gibt es eine Reihenentwicklung in  $\theta$

$$\log(f(re^{i\theta})) = \log(f(r)) + \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p(r) \frac{(i\theta)^p}{p!}. \quad (3.45)$$

Von besonderem Interesse für unsere Zwecke sind die ersten beiden Terme, die wir mit der Notation  $h(r) := \log(f(r))$  wie folgt schreiben:

$$a(r) := \alpha_1(r) = rh'(r) = r \frac{f'(r)}{f(r)} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} b(r) &:= \alpha_2(r) = r^2 h''(r) + rh'(r) \\ &= r \frac{f'(r)}{f(r)} + r^2 \left( \frac{f''(r)}{f(r)} - \left( \frac{f'(r)}{f(r)} \right)^2 \right) \end{aligned} \quad (3.47)$$

**DEFINITION 3.12.** Sei  $f(z)$  analytisch um 0 mit Konvergenzradius  $0 < R \leq \infty$ , und gelte weiters  $f(z) > 0$  für  $z \in (R_0, R)$  für ein  $0 < R_0 < R$ .  $f(z)$  heißt Hayman-zulässig, falls die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

- **H1:**  $\lim_{r \rightarrow R} a(r) = +\infty$  und  $\lim_{r \rightarrow R} b(r) = +\infty$ ,
- **H2:** Es gibt eine Funktion  $\delta(r)$  auf  $(R_0, R)$  mit  $0 < \delta(r) < \pi$ , sodaß für  $|\theta| \leq \delta(r)$  gleichmäßig gilt:

$$f(re^{i\theta}) = f(r) e^{i\theta a(r) - (\theta^2 b(r))/2 + o(1)} \quad (r \rightarrow R),$$

- **H3:** Außerdem gilt gleichmäßig für  $\delta(r) \leq |\theta| < \pi$

$$f(re^{i\theta}) = o\left(\frac{f(r)}{\sqrt{b(r)}}\right) \quad (r \rightarrow R).$$

In der Praxis geht es natürlich zunächst darum, die Funktion  $\delta(r)$  zu finden: Mit der Notation aus (3.45) sollte gemäß **H3** für  $r \rightarrow R$  einerseits

$$\alpha_2(r) \delta(r)^2 \rightarrow \infty$$

gelten und andererseits

$$\alpha_3(r) \delta(r)^3 \rightarrow 0,$$

zusammen ergibt sich also als notwendige Bedingung

$$\lim_{r \rightarrow R} \frac{\alpha_3(r)^2}{\alpha_2(r)^3} = 0.$$

Für den “Sattelpunkt-Ansatz” brauchen wir

$$\alpha_2(r)^{-1/2} = o(\delta(r)) \quad \text{und} \quad \delta(r) = o(\alpha_3(r)^{-1/3}), \quad (3.48)$$

also z.B.

$$\delta(r) = \alpha_2(r)^{-1/4} \cdot \alpha_3(r)^{-1/6}$$

**BEMERKUNG 3.12.** Hayman-zulässige Funktionen sind beispielsweise  $e^z$ ,  $e^{e^z-1}$  und  $e^{z+\frac{z^2}{2}}$  (mit  $R = \infty$ ) oder  $e^{\frac{z}{1-z}}$  (mit  $R = 1$ ). Nicht Hayman-zulässig ist zum Beispiel  $e^{z^2}$  (wird in der Nähe von  $\pi$  “zu groß” und verletzt **H3**).

**SATZ 3.13** (Hayman). Sei  $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$  Hayman-zulässig. Sei für  $n \in \mathbb{N}$   $\zeta = \zeta(n)$  die größte (und damit eindeutige) Lösung der Gleichung

$$a(z) = z \frac{f'(z)}{f(z)} = n$$

im Intervall  $(R_0, R)$ . Dann gilt für  $n \rightarrow \infty$

$$f_n \sim \frac{f(\zeta)}{\zeta^n \sqrt{2\pi b(\zeta)}},$$

wobei  $b(z) = z^2 \frac{d^2}{dz^2} \log f(z) + z \frac{d}{dz} \log f(z)$ .

**BEWEIS.** Wir zeigen das stärkere Resultat

$$f_n r^n = \frac{f(r)}{\sqrt{2\pi b(r)}} \left( \exp \left( -\frac{(a(r) - n)^2}{2b(r)} \right) + o(1) \right) \quad (r \rightarrow R) \quad (3.49)$$

(unabhängig von  $n$ ).

Wie immer verwenden wir die Cauchysche Integralformel in der “zerlegten” Version

$$f_n r^n = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta}_{I_n^0} + \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{\delta}^{2\pi-\delta} f(re^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta}_{I_n^1},$$

wobei wir  $\delta = \delta(r)$  setzen und daher Teil  $I_n^1$  gemäß Voraussetzung **H3** sofort abschätzen können:

$$|I_n^1| \leq \frac{1}{2\pi} 2\pi \cdot o \left( \frac{f(r)}{\sqrt{b(r)}} \right).$$

Für den Teil  $I_n^0$  verwenden wir die Voraussetzung **H2**:

$$\begin{aligned} I_n^0 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} f(r) \exp \left( \mathbf{i}(a(r) - n)\theta - \frac{1}{2}b(r)\theta^2 + o(1) \right) d\theta \\ &= \frac{f(r)}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta(a(r)-n) - \frac{1}{2}b(r)\theta^2} (1 + o(1)) d\theta \quad \leftarrow \mathbf{e}^{o(1)} = 1 + o(1) \\ &= \frac{f(r)}{2\pi} \left( \int_{-\delta}^{\delta} \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta(a(r)-n) - \frac{1}{2}b(r)\theta^2} d\theta + o \left( \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{-\frac{1}{2}b(r)\theta^2} d\theta \right) \right) \quad \leftarrow |\mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta(a-n)}| = 1 \\ &= \frac{f(r)}{2\pi} \left( \int_{-\delta}^{\delta} \mathbf{e}^{\mathbf{i}\theta(a(r)-n) - \frac{1}{2}b(r)\theta^2} d\theta + o \left( b(r)^{-1/2} \right) \right) \quad \leftarrow \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{e}^{-\frac{t^2 b}{2}} dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{b}} \end{aligned}$$

Die Bedingungen **H2** und **H3** gelten für  $\theta = \delta(r)$  ja beide und ergeben zusammen:

$$\sqrt{b(r)} \mathbf{e}^{\mathbf{i}\delta(r)a(r) - \delta(r)^2 b(r)/2} \rightarrow 0 \implies \delta(r)^2 b(r) \rightarrow \infty \text{ für } r \rightarrow R.$$

Wir substituieren  $t = \sqrt{\frac{b(r)}{2}}\theta$  (also  $d\theta = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b(r)}}dt$ ) und erhalten für  $r \rightarrow R$ :

$$\begin{aligned} f_n r^n &= \frac{f(r)}{2\pi} \int_{-\delta\sqrt{\frac{b(r)}{2}}}^{\delta\sqrt{\frac{b(r)}{2}}} \left( \sqrt{\frac{2}{b(r)}} e^{-t^2 + it\sqrt{\frac{2}{b(r)}}(a(r)-n)} dt + o\left(b(r)^{-1/2}\right) \right) dt \\ &= \frac{f(r)}{\pi\sqrt{2b(r)}} \int_{-\delta\sqrt{\frac{b(r)}{2}}}^{\delta\sqrt{\frac{b(r)}{2}}} \left( e^{-t^2 + it\sqrt{\frac{2}{b(r)}}(a(r)-n)} dt + o(1) \right) dt \leftarrow \text{Quadrat erg.} \\ &= \frac{f(r)}{\pi\sqrt{2b(r)}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t - i\sqrt{\frac{1}{2b(r)}}(a(r)-n))^2 - \frac{(a(r)-n)^2}{2b(r)}} dt + o(1) \right) \leftarrow \delta\sqrt{b(r)/2} \rightarrow \infty \\ &= \frac{f(r)}{\pi\sqrt{2b(r)}} \left( e^{-\frac{(a(r)-n)^2}{2b(r)}} \underbrace{\int_{-\infty - i\sqrt{\frac{1}{2b(r)}}(a(r)-n)}^{\infty - i\sqrt{\frac{1}{2b(r)}}(a(r)-n)} e^{-s^2} ds}_{\sqrt{\pi}} + o(1) \right). \end{aligned}$$

Damit ist (3.49) gezeigt, und die Behauptung des Satzes folgt sofort: Denn nach **H1** ist  $\lim_{r \rightarrow R} a(r) = +\infty$  und daher

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \zeta(n) = R,$$

also setzen wir einfach  $r = \zeta(n)$ .  $\square$

Das Bequeme an der Hayman-Zulässigkeit sind die folgenden ‘‘Abschlueigenschaften’’: ‘‘Große Klassen von Funktionen sind Hayman-zulässig’’.

**SATZ 3.14.** *Seien  $f(z)$  und  $g(z)$  Hayman-zulässige Funktionen und sei  $p(z)$  ein Polynom mit reellen Koeffizienten. Dann gilt:*

- $f(z) \cdot g(z)$  und  $e^{f(z)}$  sind ebenfalls Hayman-zulässig,
- $f(z) + p(z)$  ist Hayman-zulässig; falls der führende Koeffizient von  $p(z)$  positiv ist, ist auch  $f(z)p(z)$  und  $p(f(z))$  Hayman-zulässig,
- Falls fast alle Taylor-Koeffizienten von  $e^{p(z)}$  positiv sind, dann ist auch  $e^{p(z)}$  Hayman-zulässig.

**SKIZZE.** Es geht vor allem darum, die geeignete Funktion  $\delta(r)$  zu finden: Dazu benutzt man (3.48).  $\square$

Wir betrachten Beispiele zur Hayman-Zulässigkeit:

**BEISPIEL 3.21.** *Für  $f(z) = e^z$  haben wir die Entwicklung*

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= e^{r+ri\theta-r\frac{\theta^2}{2}+O(r\theta^3)} \\ &= f(r) \cdot e^{ri\theta-r\frac{\theta^2}{2}+O(r\theta^3)}. \end{aligned}$$

Also  $a(r) = b(r) = r$ , damit ist **H1** natürlich erfüllt.

Für **H2** müssen wir  $\delta = \delta(r)$  so wählen, daß

$$\lim_{r \rightarrow R} r\delta^3 = 0$$

gilt, also  $\delta = o(r^{-1/3})$ , und für **H3** müssen wir erreichen:

$$|f(re^{i\theta})| = |e^{re^{i\theta}}| = |e^{r \cos \theta}| \stackrel{!?!}{=} o\left(\frac{e^r}{\sqrt{r}}\right).$$

Da  $r \cos \theta = r - r\frac{\theta^2}{2} + O(r\theta^4)$  und  $\sqrt{r} = e^{\frac{1}{2} \log r}$  gelingt dies für

$$\log r = o(r\theta^2),$$

also z.B.  $\delta = r^{-2/5}$ .

BEISPIEL 3.22. Für  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  betrachten wir die Taylorreihenentwicklung von  $\log \frac{1}{1-re^{i\theta}}$  um  $t = 0$ :

$$\log \frac{1}{1-re^{i\theta}} = \log \frac{1}{1-r} \cdot t^0 + \frac{\mathbf{i}r}{1-r} \cdot t^1 + \frac{-r}{(1-r)^2} \cdot t^2 + O\left(\frac{r \cdot (r+1)}{(1-r)^3} \cdot t^3\right)$$

und erhalten damit die Entwicklung

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{1-r} \exp\left(\frac{\mathbf{i}r}{1-r} \cdot \theta - \frac{r}{(1-r)^2} \cdot \theta^2 + O\left(\frac{r \cdot (r+1)}{(1-r)^3} \cdot \theta^3\right)\right)$$

Sichtlich ist hier  $a(r) = \frac{r}{1-r}$  und  $b(r) = \frac{r}{(1-r)^2}$ , und **H1** ist erfüllt ( $R = 1$ ). Damit **H2** erfüllt ist, sollte also  $\theta = o(1-r)$  gelten. Für **H3** müßten wir erreichen, daß

$$|f(re^{i\theta})| = o\left(\frac{f(r)}{\sqrt{b(r)}}\right),$$

also

$$\left|\frac{1}{1-re^{i\theta}}\right| \stackrel{!?!}{=} o\left(\frac{\frac{1}{1-r}}{\frac{\sqrt{r}}{1-r}}\right) = o\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right).$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} \frac{1}{|1-re^{i\theta}|} &= \frac{1}{\sqrt{(1-r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2r \cos \theta + r^2}} \quad \leftarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1, \end{aligned}$$

und für  $r \rightarrow R = 1$  geht  $\theta \rightarrow 0$  (weil  $\theta = o(1-r)$  sein muß); genauer:

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + O(\theta^4) = 1 - o(1-r)^2.$$

Also

$$\frac{1}{|1-re^{i\theta}|} = \frac{1}{\sqrt{(1-r)^2 + 2r \cdot o(1-r)}},$$

und das geht für  $r \rightarrow 1$  nach  $\infty$ :  $f(z)$  ist also nicht Hayman-zulässig.

BEISPIEL 3.23. Für  $f(z) = e^{z^2}$  ist

$$\log f(re^{i\theta}) = r^2 e^{2i\theta} = r^2 + 2r^2 i\theta - 4r^2 \frac{\theta^2}{2} + O(r^2 \theta^3),$$

also  $a(r) = 2r^2$  und  $b(r) = 4r^2$ . Aber **H3** können wir nicht erreichen: Es müßte ja für  $\delta \leq |\theta| \leq \pi$  gelten

$$|f(re^{i\theta})| = e^{r^2 \cos 2\theta} \stackrel{?}{=} o\left(\frac{e^{r^2}}{2r}\right) \quad (r \rightarrow R = \infty),$$

(denn  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos(2\theta)$ ) und für  $\theta = \pi$  ist das natürlich falsch.

BEISPIEL 3.24. Sei  $f_n$  die Anzahl der Permutationen von  $[n]$ , in deren Zyklenzerlegung nur Zyklen der Längen 2 und 3 auftreten. In der Sprache der Spezies wird also die Zusammensetzung Mengen ( $\text{Zyklen}_{2,3}$ ) betrachtet:

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{f_n}{n!} z^n = e^{\frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3}}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \log f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2} e^{2i\theta} r^2 + \frac{1}{3} e^{3i\theta} r^3 \\ &= \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r^3}{3}\right) + \underbrace{(r^2 + r^3)}_{a(r)} i\theta - \underbrace{(2r^2 + 3r^3)}_{b(r)} \theta^2 + O(\theta^3) \end{aligned}$$

Diese Funktion ist Hayman-zulässig, es ist also

$$f_n \sim n! \frac{e^{\frac{\zeta^2}{2} + \frac{\zeta^3}{3}}}{\zeta^n \sqrt{2\pi\zeta^2(3\zeta + 2)}},$$

wobei  $\zeta = \zeta(n)$  eine Lösung von

$$a(\zeta) = \zeta^2(1 + \zeta) = n \quad (3.50)$$

ist; d.h.,  $\zeta(n) \sim \sqrt[3]{n}$ . Wenn wir in (3.50)  $\zeta = \sqrt[3]{n} + \rho$  ansetzen und ausmultiplizieren, dann ergibt sich

$$n + \sqrt[3]{n^2}(1 + 3\rho) + \sqrt[3]{n}(2\rho + 3\rho^2) + \rho^2 + \rho^3 = n$$

### 3.4.3. Ein Sattelpunktsatz über große Potenzen.

BEISPIEL 3.25. Wenn wir zwei zusammensetzungsinverse Potenzreihen  $F$  und  $f$  haben, also

$$F(f(z)) = z,$$

dann kann man die Koeffizienten von  $F(z)$  mit Lagrange-Inversion bestimmen:

$$\langle z^n \rangle F(z) = \frac{1}{n} \langle z^{-1} \rangle f(z)^{-n}.$$

Angenommen,  $f$  läßt sich schreiben als

$$f(z) = \frac{z}{\varphi(z)}.$$

Dann ergibt sich also das folgende Kurvenintegral:

$$\langle z^n \rangle F(z) = \frac{1}{n} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^n(z)}{z^n} dz.$$

**BEISPIEL 3.26.** Bezeichne  $W_n$  die Anzahl aller Wege im Gitter  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , die nur aus Schritten  $(1, 0)$  (waagrecht nach rechts),  $(1, 1)$  und  $(1, -1)$  (diagonal nach rechts oben und rechts unten) bestehen, und die von  $(0, 0)$  nach  $(n, 0)$  führen. Es gilt

$$W_n = \langle z^0 \rangle \left( \frac{1}{z} + 1 + z \right)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(1 + z + z^2)^n}{z^{n+1}} dz.$$

Die beiden Beispiele motivieren die allgemeinere Problemstellung: Berechne

$$\langle z^N \rangle A(z) B(z)^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{A(z) B(z)^n}{z^{N+1}} dz$$

für  $n \rightarrow \infty$  und  $N \rightarrow \infty$ .

**SATZ 3.15.** Gegeben seien zwei bei 0 analytische Funktionen  $A(z) = \sum_{j \geq 0} a_j z^j$  und  $B(z) = \sum_{j \geq 0} b_j z^j$  mit den folgenden Eigenschaften:

**L1:**  $A$  und  $B$  haben nichtnegative Koeffizienten und  $B(0) \neq 0$ .

**L2:**  $B(z)$  ist aperiodisch, d.h.:  $\text{ggT}(j : b_j > 0) = 1$ .

**L3:** Der Konvergenzradius  $R$  von  $B(z)$  ist  $< \infty$ ; der Konvergenzradius von  $A(z)$  ist  $\geq R$ .

Sei  $T$  der (linksseitige) Limes

$$T := \lim_{s \rightarrow R^-} s \frac{B'(s)}{B(s)}.$$

Dann gilt für  $\lambda := \frac{N}{n}$ : Wenn  $\lambda \in (0, T)$ , dann ist

$$\langle z^N \rangle A(z) B(z)^n = A(\zeta) \frac{B(\zeta)^n}{\zeta^{N+1} \sqrt{2\pi n \cdot \xi}} (1 + o(1)), \quad (3.51)$$

wobei  $\zeta$  die größte Lösung der Gleichung

$$\alpha_1^B(\zeta) = \zeta \frac{B'(\zeta)}{B(\zeta)} = \lambda$$

(vergleiche (3.46)) ist und

$$\xi := \frac{d^2}{ds^2} (\log B(s) - \lambda \log s)|_{s=\zeta}.$$

Dies gilt gleichmäßig für  $\lambda$  aus einem beliebigen kompakten Teilintervall von  $(0, T)$ .

Für den Beweis brauchen wir das folgende einfache Lemma:

LEMMA 3.2. Sei  $f(z) = \sum_{n \geq 0} f_n z^n$  analytisch bei 0 für  $|z| < R$  mit nichtnegativen Koeffizienten, wovon mindestens 2 (strikt) positiv sind. Wenn es ein nicht reelles  $z$  gibt mit  $|z| < r$ , für das

$$|f(z)| = f(|z|)$$

gilt, dann

- muß dieses  $z$  von der Gestalt

$$z = r \cdot e^{2\pi i \frac{p}{q}}$$

sein, wobei  $0 < p < q$  und  $\text{ggT}(p, q) = 1$ ,

- und es muß ein  $a \in \mathbb{Z}$  geben, sodaß  $f_n \neq 0$  nur für  $n \equiv a \pmod{q}$ .

BEWEIS DES LEMMAS. Natürlich ist

$$\left| \sum_{n \geq 0} f_n z^n \right| \leq \sum_{n \geq 0} |f_n z^n| = \sum_{n \geq 0} f_n |z^n| \quad \leftarrow f_n \geq 0$$

Gleichheit für ein  $z = r e^{i\theta}$  kann nur dann gelten, wenn alle Potenzen  $z^n = r^n e^{ni\theta}$  (interpretiert als Vektoren im  $\mathbb{R}^2$ ) in dieselbe Richtung zeigen. Seien also zwei beliebige Koeffizienten  $f_{n_1}, f_{n_2} \neq 0$ . Dann muß

$$e^{n_1 i \theta} = e^{n_2 i \theta} \iff |n_1 - n_2| \theta = 2k\pi$$

gelten, also  $\theta = 2\pi \frac{k}{|n_1 - n_2|}$ , wobei wir natürlich  $k < |n_1 - n_2|$  wählen können. Sei  $\frac{p}{q} = \frac{k}{|n_1 - n_2|}$  der "gekürzte" Bruch, dann gilt natürlich

$$q |n_1 - n_2|,$$

also  $n_1 \equiv n_2 \pmod{q}$ . □

BEWEIS DES SATZES. Für jedes feste  $r$  mit  $0 < r < R$  hat die Funktion  $|B(r e^{i\theta})|$  nach Voraussetzung **L2** (Aperiodizität von  $B$ ) und Lemma 3.2 ihr *eindeutiges* Maximum bei  $\theta = 0$ , und sie ist bei 0 unendlich oft differenzierbar (ihre Taylorentwicklung um 0 enthält also *keinen* linearen Term). Daher gibt es ein (kleines)  $\theta_1 \in (0, \pi)$  sodaß

- $|B(r e^{i\theta})| \leq |B(r e^{i\theta_1})|$  für  $\theta \in [\theta_1, \pi]$  ist,
- $|B(r e^{i\theta})|$  auf  $[0, \theta_1]$  strikt fallend ist.

Wenn wir also speziell über die Kurve  $z = \zeta e^{i\theta}$  integrieren, erhalten wir den gesuchten Koeffizienten als  $J(\pi)$ , wobei

$$J(\theta) := \frac{1}{\zeta^N 2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} A(\zeta e^{i\theta}) B(\zeta e^{i\theta})^n e^{-Ni\theta} d\theta,$$

wobei für  $n \rightarrow \infty$  die Differenz  $J(\pi) - J(\theta_1)$  exponentiell klein ist (wegen der obigen Abschätzung für  $|B(re^{i\theta})|$ ). Wenn wir wie in (3.45) entwickeln, erhalten wir für den Integranden ( $N = \lambda n$ ):

$$A(\zeta) B(\zeta)^n \cdot \exp(i\theta \left( \alpha_1^A(\zeta) + n \underbrace{\left( \alpha_1^B(\zeta) - \lambda \right)}_{=0 \text{ nach Vor.}} \right)) \\ - \frac{\theta^2}{2} (\alpha_2^A(\zeta) + n\alpha_2^B(\zeta)) + O(n \cdot \theta^3),$$

denn  $\alpha_3^A(\zeta)$  und  $\alpha_3^B(\zeta)$  sind  $O(1)$  für  $n \rightarrow \infty$ , da  $\zeta$  ja nicht von  $n$  abhängt. Sei nun  $\theta_0 := n^{-2/5}$ . Dann gilt für  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$  (natürlich)

$$e^{-\frac{\theta^2}{2}(\alpha_2^A(\zeta) + n\alpha_2^B(\zeta)) + O(n\theta^3)} = O\left(e^{-n^{1/5}}\right) \cdot e^{O(n^{-1/5})} = O\left(e^{-n^{1/5}}\right),$$

für  $n \rightarrow \infty$ , also ist auch  $J(\theta_1) - J(\theta_0) = O\left(e^{-n^{1/5}}\right)$  für  $n \rightarrow \infty$ , also exponentiell klein. Der gesuchte Koeffizient ist also asymptotisch gleich  $J(\theta_0)$ : Für  $\theta < \theta_0$  ist aber (natürlich)  $\frac{\theta^2}{2} \cdot \alpha_2^A(\zeta) = O(n^{-4/5})$  ( $n \rightarrow \infty$ ) — das heißt, der gesuchte Koeffizient ist (nach ‘‘Anfügen’’ der asymptotisch vernachlässigbaren Integralenden) also asymptotisch gleich

$$\frac{A(\zeta) B(\zeta)^n}{2\pi\zeta^N} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\theta^2}{2}n\alpha_2^B(\zeta)} d\theta = \frac{A(\zeta) B(\zeta)^n}{\zeta^N \sqrt{2\pi n} \cdot \alpha_2^B(\zeta)}.$$

Es ist ja  $\alpha_2^B$  der dritte Taylorkoeffizient in der Entwicklung von  $\log B(re^{i\theta})$ , also

$$\alpha_2^B(r) = - \left. \frac{d^2}{d\theta^2} \log B(re^{i\theta}) \right|_{\theta=0} = r \frac{B'(r)}{B(r)} + r^2 \frac{B''(r)}{B(r)} - r^2 \left( \frac{B'(r)}{B(r)} \right)^2,$$

und es ist

$$\xi = \left. \frac{d^2}{ds^2} (\log B(s) - \lambda \log s) \right|_{s=\zeta} = \frac{B''(\zeta)}{B(\zeta)} - \left( \frac{B'(\zeta)}{B(\zeta)} \right)^2 + \frac{\lambda}{\zeta^2} = \frac{\alpha_2^B(\zeta)}{\zeta^2}.$$

Daraus folgt nun ohne weiteres die Behauptung.  $\square$

BEISPIEL 3.27. Sei  $f(z)$  durch die Gleichung

$$f(z) = z \cdot e^{f(z)} \iff f(z) e^{-f(z)} = z$$

gegeben. D.h.,  $f$  ist zusammensetzungsinvers zu  $z \cdot e^{-z}$ , und mit Lagrange-Inversion ergibt sich

$$f_n = \frac{1}{n} \langle z^{-1} \rangle (ze^{-z})^{-n} \\ = \frac{1}{n} \langle z^{-1} \rangle \frac{e^{nz}}{z^n} \\ = \frac{1}{n} \langle z^{n-1} \rangle (e^z)^n \\ = \frac{1}{n} \langle z^n \rangle (e^z)^n \cdot z.$$

Wir haben also in der Notation von Satz 3.15  $A(z) = z$  und  $B(z) = e^z$  sowie  $n = N$  (also  $\lambda = 1$ ). Aus dem Satz ergibt sich nun sofort

$$\frac{n^{n-1}}{n!} \sim \frac{1}{n} \zeta \frac{e^{n\zeta}}{\zeta^{n+1} \sqrt{2\pi n \xi}},$$

wobei  $\lambda = \xi = \zeta = 1$ , also (wenig überraschend, siehe (3.1)):

$$\frac{n^{n-1}}{n!} \sim \frac{1}{n} \frac{e^n}{\sqrt{2\pi n}}.$$

BEISPIEL 3.28. Wir betrachten die Trinomialzahlen

$$T_n := \langle z^n \rangle (1 + z + z^2)^n.$$

Wir haben also in der Notation von Satz 3.15  $A(z) = 1$  und  $B(z) = (1 + z + z^2)$  sowie  $n = N$  (also  $\lambda = 1$ ). Aus dem Satz ergibt sich nun sofort

$$T_n \sim \frac{(1 + \zeta + \zeta^2)^n}{\zeta^n \sqrt{2\pi n \xi}},$$

wobei sich  $\zeta$  aus der Gleichung

$$\zeta \frac{1 + 2\zeta}{1 + \zeta + \zeta^2} = \lambda = 1$$

ergibt, also  $\zeta = 1$ , und

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{d^2}{ds^2} (\log B(s) - \lambda \log s) \Big|_{s=\zeta=1} \\ &= \frac{d}{ds} \left( \frac{1 + 2s}{1 + s + s^2} - \frac{1}{s} \right) \Big|_{s=1} \quad \leftarrow \lambda=1 \\ &= \frac{1 - 2s - 2s^2}{(1 + s + s^2)^2} + \frac{1}{s^2} \Big|_{s=1} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich also

$$T_n \sim \frac{3^{n+1/2}}{2\sqrt{\pi n}}.$$

BEISPIEL 3.29 (Asymptotik für unäre–binäre Bäume). Wir hatten die Anzahl der unär–binären ebenen Wurzelbäume auf  $n > 0$  Knoten schon in Beispiel 3.16 betrachtet und mit  $T_n$  bezeichnet. Die entsprechende erzeugende Funktion  $T(z) = \sum T_n z^n$  erfüllt die Gleichung

$$T(z) = z(1 + T(z) + T(z)^2),$$

also ist  $T$  die Zusammensetzungsinverse zu  $\frac{z}{1+z+z^2}$ :  $\frac{T}{1+T+T^2} = z$ .

Mit Lagrange–Inversion erhalten wir also

$$\begin{aligned} M_n &= \frac{1}{n} \langle z^{-1} \rangle \frac{(1 + z + z^2)^n}{z^n} \\ &= \frac{1}{n} \langle z^n \rangle z (1 + z + z^2)^n. \end{aligned}$$

Ganz analog zum vorigen Beispiel erhalten wir hier

$$T_n \sim \frac{3^{n+1/2}}{2\sqrt{\pi n^3}}.$$

### 3.5. Asymptotik von kombinatorischen Summen

Die Idee, die wir bei der Sattelpunktmethode erfolgreich verwendet hatten, können wir auch auf Summen (statt auf Integrale) anwenden. Wir schauen uns das anhand eines Beispiels an.

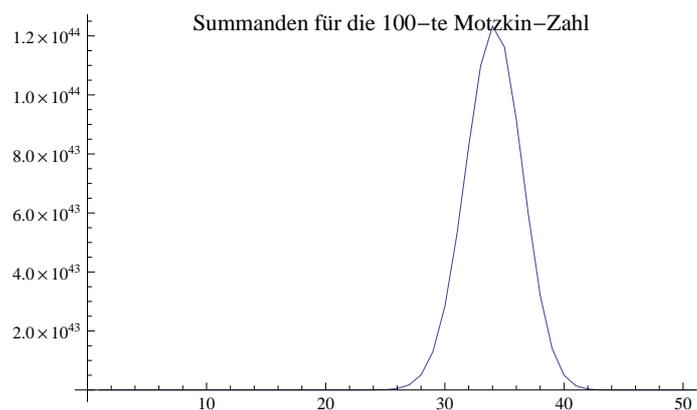
BEISPIEL 3.30 (Motzkin-Zahlen). Die Anzahl aller Wege im Gitter  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ , die

- von  $(0, 0)$  zu  $(n, 0)$  führen,
- nur aus Schritten  $(1, 0)$  (waagrecht nach rechts),  $(1, 1)$  und  $(1, -1)$  (diagonal nach rechts oben und rechts unten) bestehen,
- und niemals unter die  $x$ -Achse gehen

wird als Alkshest-Zahl  $M_n$  bezeichnet. Wenn wir in einem solchen Motzkin-Pfad die waagrechten Schritte wegnehmen, dann bleibt sichtbar ein Dyck-Pfad übrig, der aus  $2k \leq n$  diagonalen Schritten besteht. Diese Überlegung führt sofort auf die Formel

$$M_n = \sum_{k=0}^{n/2} \underbrace{\frac{1}{k+1} \binom{2k}{k} \binom{n}{n-2k}}_{=:s(n,k)}. \quad (3.52)$$

Die Summanden  $s(n, k)$  in dieser Summe zeigen “optisch” ein ähnliches Verhalten wie die vom Nullpunkt weg stark abfallende Funktion  $e^{-t^2}$ , siehe den folgenden Plot der Summanden  $s(100, k)$ :



Zur Bestimmung des “Hochpunktes” dieser Summanden suchen wir jenes  $k$ , für das  $s(n, k+1)/s(n, k) = 1$ . Das führt zunächst auf die Gleichung

$$\frac{k+1}{k+2} \frac{(n-2k)(n-2k-1)}{(k+1)^2} = 1$$

bzw. äquivalent

$$(n - 2k)(n - 2k - 1) = (k + 1)(k + 2).$$

Wir sind aber wieder einmal nicht unbedingt an der “exakten” Lösung interessiert: Mit dem “approximativen” Ansatz  $k \sim \lambda n$  führt das “approximativ” auf die quadratische Gleichung

$$(1 - 2\lambda^2) = \lambda^2$$

mit den offensichtlichen Lösungen  $\lambda_1 = 1$ ,  $\lambda_2 = \frac{1}{3}$ . Wir setzen also  $k_0 = \frac{n}{3}$  und approximieren  $s(n, n/3 - k_1)$  mit der Stirlingschen Formel (3.1), die wir logarithmieren:

$$\log n! \sim -n + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + \frac{1}{2}(\log 2\pi)$$

Also:

$$\begin{aligned} s(n, k) &= \frac{n!}{(k+1)!(k)!(n-2k)!} \\ &= \exp\left(\left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + 1 - \log 2\pi \xrightarrow{k=n/3-k} \right. \\ &\quad \left. - \left(n - 2k + \frac{1}{2}\right) \log(n - 2k) \xrightarrow{-\log(-z+n/3)=\log n - \log 3 + \log(1-3z/n)} \right. \\ &\quad \left. - \left(k + \frac{1}{2}\right) \log(k) - \left(k + \frac{3}{2}\right) \log(k + 1)\right) \xrightarrow{-\log(1-z)=z+z^2/2+O(z^3)} \\ &= \exp\left(\frac{9k^2 - 3k + 3}{n} - 2 \log(n) + n \log(3) + 2 \right. \\ &\quad \left. - \log(2\pi) + \frac{5 \log(3)}{2} + O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{3^{n+\frac{5}{2}}}{2\pi n^2} e^{2-\frac{1}{n}(9k^2-3k+3)} \left(1 + O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)\right). \end{aligned}$$

(Der Ausdruck wird dadurch so einfach, daß viele Terme in dem  $O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)$  “verschwinden”.) Also ist

$$M_n = e^2 \sum_k \frac{3^{n+\frac{5}{2}}}{2\pi n^2} e^{-\frac{1}{n}(9k^2-3k+3)} \left(1 + O\left(\frac{k^3}{n^2}\right)\right). \quad (3.53)$$

Wir zerlegen diese Summe nun wie folgt:

$$M_n = \sum_{|k| \leq n^{3/5}} (\dots) + \sum_{|k| > n^{3/5}} (\dots).$$

Für  $|k| > n^{3/5}$  (also  $k = \pm(n^{3/5} + k_1)$  mit  $k_1 > 0$ ) dominiert der Summand für  $|k| = n^{3/5}$  die anderen Summanden, wenn  $n$  genügend groß ist:

$$e^{-\frac{1}{n}(9(n^{3/5}+k_1)^2 \pm 3(n^{3/5}+k_1)+3)} = e^{-9(n^{3/5-1/2}+k_1/\sqrt{n})^2 + O(n^{-2/5})}.$$

Daher können wir den entsprechenden Summenteil abschätzen:

$$\left| \sum_{|k| > n^{3/5}} (\dots) \right| = O\left(n \cdot 3^n n^{-2} e^{-9n^{1/5}}\right),$$

das ist also exponentiell klein im Vergleich mit  $3^n/n^{3/2}$ . Der andere Summenteil ist

$$\sum_{|k| \leq n^{3/5}} \frac{3^{n+\frac{5}{2}}}{2\pi n^2} e^{2-9\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^2} \cdot (1 + O(n^{-1/5})).$$

Wenn man den Summationsbereich dieser Summe auf ganz  $\mathbb{Z}$  ausdehnt, führt man einen Fehler ein, der aber wieder exponentiell klein ist: Es ergibt sich so

$$\frac{3^{n+5/2}}{2\pi n^2} \sqrt{n} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-9\left(\frac{k}{\sqrt{n}}\right)^2},$$

und die Summe erscheint als Riemannsumme für  $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-9t^2} dt = \frac{1}{3}\sqrt{\pi}$ , also

$$M_n \sim e^2 \frac{3^{n+5/2}}{2\pi n^{3/2}} \frac{1}{3} \sqrt{\pi} = e^2 \frac{3^{n+3/2}}{2\sqrt{\pi n^3}}.$$

## Literaturverzeichnis

- [1] F. Bergeron, G. Labelle, and P. Leroux. *Combinatorial Species and tree-like Structures*, volume 67 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1998.
- [2] A. Erdélyi, editor. *Higher Transcendental Functions*, volume 1. McGraw–Hill, 1953.
- [3] P. Flajolet and R. Sedgewick. *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2009.
- [4] M. Fulmek and C. Krattenthaler. Diskrete Mathematik. Vorlesungsskriptum.
- [5] H. Heuser. *Lehrbuch der Analysis*. B.T. Teubner, 12. edition, 1998.
- [6] G. C. Rota and R. Stanley. Theory of Möbiusfunction. *Z. Wahrsch. Theorie*, 2:340–368, 1964.
- [7] R. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume 1. Wadsworth & Brooks/Cole, 1986.