Satz (Vizing 1964). Für jeden Graphen G gilt

$$\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1.$$

Beweis. Die erste Ungleichung ist klar.

Der Beweis der zweiten Ungleichung erfolgt mit Induktion nach der Anzahl der Kanten. Wenn G keine Kanten hat, dann ist $\chi'(G) = 0 \leq 1 = \Delta(G) + 1$ und damit ist der Induktionsanfang klar.

Nun der Induktionsschritt: $\Delta := \Delta(G) > 0$

Im Folgenden: Statt "Kantenfärbung mit Δ+1 Farben" schreiben wir kürzer "Färbung".

Bemerkungen:

– Laut Induktionsannahme gibt es für jede Kante e eine Färbung von $G - e$.

– In so einer Färbung gibt es für jeden Knoten $v \in V(G)$ wegen $\deg(v) \leq \Delta$ eine Farbe $\beta \in \{1, 2, \ldots, \Delta + 1\}$, die von keiner an v inzidenten Kante getragen wird. Wir sagen: "β fehlt an v".

– Ist $\alpha \in \{1, 2, \ldots, \Delta + 1\}$, so existiert ein eindeutig bestimmter maximaler Kantenzug, der in v beginnt und dessen Kanten abwechselnd mit α und β gefärbt sind.

– Dieser Kantenzug ist sogar ein Weg (d.h. keine Knotenwiederholungen). Wir nennen ihn den α/β–Weg aus v.

Wir nehmen nun indirekt an, dass G keine Färbung besitzt. Dann gilt:

Ist $xy \in E(G)$ und eine Färbung von $G - xy$ gegeben, in der die Farbe α an x und die Farbe β an y fehlt, so endet der α/β-Weg aus y an x.

Andernfalls könnten wir nämlich im α/β-Weg aus y die beiden Farben vertauschen und xy mit α färben und das wäre ein Widerspruch zur Annahme, dass G keine Färbung besitzt.

Es sei nun xy_0 eine Kante in G. Wir fixieren eine Färbung c_0 von $G_0 = G - xy_0$. Weiters sei α eine Farbe, die an x nicht vorkommt.

Wähle nun rekursiv eine maximale Folge $y_1, y_2, \ldots, y_k$ von verschiedenen Nachbarn von x nach der folgenden Regel: y_i ist ein Nachbar von x in G, sodass die Farbe $c_0(xy_i)$ an y_{i-1} fehlt.

Wir setzen $G_i = G - xy_i$ und definieren eine Färbung c_i von G_i durch

$$c_i(e) = \begin{cases} c_0(xy_{i+1}) & \text{für } e = xy_j \text{ mit } j \in \{0, 1, \ldots, i-1\} \\ c_0(e) & \text{sonst} \end{cases} .$$

(Das ist wohldefiniert, weil bezüglich c_0 die Farbe $c_0(xy_{j+1})$ an y_j fehlt.)

Beobachtung: Bezüglich der Färbung c_i fehlen an x die gleichen Farben wie bezüglich c_0.

Es sei nun β eine Farbe, die bezüglich c_0 an y_k fehlt. Dann fehlt β auch bezüglich c_k an y_k. β kann aber nicht an x fehlen: Andernfalls könnten wir c_k zu einer Färbung von ganz G ergänzen, indem wir xy_k mit β färben.

Daher: Es gibt einen Nachbarn y_i von x mit $c_0(xy_i) = \beta$. Wegen der Maximalität von k ist $i \in \{1, 2, \ldots, k-1\}$.

Nun sei P der α/β-Weg aus y_k in G_k bezüglich c_k. Wegen der Behauptung von Folie 3 endet P in x und zwar mit einer β-Kante, da α in x fehlt. Wegen

$$\beta = c_0(xy_i) = c_k(xy_{i-1})$$

ist dies die Kante xy_{i-1}.

Wegen der Wahl von y_i fehlt β an y_{i-1} in c_0 und daher auch in c_{i-1}. Es sei P' der α/β-Weg aus y_{i-1} in G_{i-1} bezüglich c_{i-1}. P' verläuft daher von y_{i-1} bis y_k genauso wie P. In c_0, und daher auch in c_{i-1}, ist y_k jedoch mit keiner β-Kante inzident. Somit endet P' in y_k und das ist ein Widerspruch dazu, dass P' in x enden müsste. (α fehlt ja an x.) $\square$