Funktionen

1 Der Funktionsbegriff

Definition. *Eine Funktion (oder Abbildung) ist eine Vorschrift, die* **jedem** *Element einer Menge A* **genau ein** *Element einer Menge B zuordnet.*

Dabei nennt man die Menge A Definitionsmenge der Funktion, B heißt Zielmenge (oder Wertebereich).
Ein Element der Menge A nennt man Argument, Veränderliche oder unabhängige Variable und bezeichnet es of mit x.
Das durch eine Funktion f dem Argument $x \in A$ zugeordnete Element in B nennt man Funktionswert von f an der Stelle x, oder Bild von x unter f und schreibt dafür $f(x)$.
Die Menge aller Elemente von B die auch wirklich von f angenommen werden, bezeichnet man als Bild von f und schreibt dafür $\mathrm{Im}(f)$ (vom engl. 'Image').
Alternativ kann $\mathrm{Im}(f)$ auch als die Menge aller Bilder von Elementen aus A definieren, formal: $Im(f) := \{f(x) : x \in A\}$.

Die präziseste Schreibweise für eine Funktion ist:

$$f : A \to B \qquad\qquad x \mapsto f(x)$$

oder äquivalent

$$f : A \to B \qquad\qquad f(x) = \dots$$

Dabei werden jeweils separat Definitions- bzw. Wertebereich und Zuordnungsvorschrift angegeben.

Zum Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad x \mapsto |x|$$

bzw.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad f(x) = |x|$$

sind beides Darstellungen der Funktion, die jedem Vektor in der Ebene seine Länge (oder euklidische Norm), also eine reelle Zahl zuordnet. Hier gilt: $Im(f) = \mathbb{R}_0^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$.

Achtung: Die Umkehrung der anfänglichen Definition gilt nicht! Ein Element in B kann von mehreren Elementen in A als Funktionswert angenommen werden, oder aber auch von gar keinem.
Beispiel: Die Normfunktion oben ordnet keinem Vektor die Länge -5 zu, jedoch mehreren Vektoren die Länge 1 (allen Vektoren am Einheitskreis).

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x)$ heißt gerade, falls $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. f heißt ungerade falls $f(x) = -f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2 Beispiele für Funktionen

Aus der Schule bekannt sind z.B.:

- **Lineare Funktionen:** z.B: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto kx + d\,(k, d \in \mathbb{R})$
- **Polynome:** Darunter versteht man Funktionen der Form $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ $(a_n, \ldots, a_0$ sind konstant).
- **Rationale Funktionen:** Das sind Funktionen der Form $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, wobei g und h Polynome sind. Auf den Nullstellen des Nenners sind rationale Funktionen nicht definiert.
- **Trigonometrische Funktionen:**

$$sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = sin(x)$$

$$cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = cos(x)$$

$$tan : \mathbb{R} \setminus \{k\pi + \frac{\pi}{2} : k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R} \qquad f(x) = tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$$

- **Signumsfunktion:** $sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ (-1) & \text{für } x < 0 \end{cases}$
- Weitere Beispiele sind etwa: Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen, Exponentialfunktion ($f(x) = e^x$) oder die Betragsfunktion.

3 Graphen von Funktionen

3.1 Darstellung von Funktionen

Funktionen können, je nach ihrer Beschaffenheit unterschiedlich grafisch dargestellt werden. So könnte etwa die Funktion, die jeder Partei die Anzahl ihrer erreichten Stimmen zuordnet als Tabelle, Balkendiagramm, Kreisdiagramm o.ä. dargestellt werden.

Bei vielen Funktionen in der Mathematik (v.a. Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$) erweist sich eine Darstellung durch einen Funktionsgraphen als sinnvoll. Hierzu werden im kartesischen Koordinatensystem auf der x-Achse die Argumente und auf der y-Achse die dazugehörigen Funktionswerte eingezeichnet. Oder anders formuliert die Menge aller Paare $(x, f(x))$. In vielen Fällen ergibt sich so eine Kurve in der Ebene.
Achtung: Nicht jede Kurve ist Graph einer Funktion. Enthält eine Kurve zwei Punkte mit gleicher x-Koordinate, widerspricht das der in der anfänglichen Definition geforderten Eindeutigkeit der Zuordnung.

Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen:
$x \mapsto 2x - 1$; $x \mapsto x^2$; $x \mapsto x^3$; $x \mapsto \sqrt{x}$; $x \mapsto e^x$; $x \mapsto log(x)$; $x \mapsto sin(x)$; $x \mapsto cos(x)$; $x \mapsto tan(x)$; $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto |x|$

3.2 Manipulieren von Funktionsgraphen

Kennt man den Graphen einer Funktion f, so kann man daraus in vielen Fällen auf die Graphen 'ähnlicher' Funktionen schließen:

> $f(x) + a$: Verschieben des Graphen um a in y-Richtung
>
> $f(x - a)$: Verschieben des Graphen um a in x-Richtung
>
> $k \cdot f(x)$: Strecken/Stauchen des Graphen um den Faktor k in y-Richtung
>
> $f(\frac{x}{k})$: Strecken/Stauchen des Graphen um den Faktor k in x-Richtung
>
> $-f(x)$: Spiegeln des Graphen an der x-Achse
>
> $f(-x)$: Spiegeln des Graphen an der y-Achse (Eine gerade Funktion ist also spiegelsymmetrisch zur y-Achse.)
>
> $|f(x)|$: Spiegeln der unterhalb der x-Achse gelegenen Teile des Graphen an der x-Achse.

Wir wollen nun den Graphen der Funktion

$$f : [-1, \infty) \to \mathbb{R} \qquad f(x) = -\sqrt{x+1} + 2$$

konstruieren. Dazu können wir schrittweise vorgehen und der Reihe nach folgende Graphen konstruieren:

$f_1(x) = \sqrt{x}$

$f_2(x) = f_1(x+1) = \sqrt{x+1}$

$f_3(x) = f_2(x) - 2 = \sqrt{x+1} - 2$

$f(x) = -f_3(x) = -\sqrt{x+1} + 2$

Skizziere die Graphen der folgenden Funktionen:

1) $f(x) = 2 \cdot sin(-x)$
2) $g(x) = |\frac{1}{x-1}|$

4 Eigenschaften von Funktionen

Die Begriffe Nullstelle, Monotonie, Extremstelle und Wendepunkt werden in den Workshops 'Differentation' und 'Kurvendiskussion' behandelt.
In der Universitätsmathematik spielen die folgenden drei Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv eine große Rolle.

4.1 Injektivität

Definition. *Eine Funktion $f : A \to B$ heißt injektiv, wenn jedes Element in B von höchstens einem Element aus A als Funktionswert angenommen wird. Anders ausgedrückt: Verschiedene Elemente aus A haben verschiedene Bilder, formal: $x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Beispiele:
Die Funktion, die jedem Österreicher seine Passnummer zuordnet ist injektiv.
Die Funktion, die jedem Österreicher seinen Geburtstag zuordnet ist nicht injektiv.
$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht injektiv.
$f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist injektiv.

Grafisch erkennt man eine injektive Funktion (Injektion) daran, dass jede Parallele zur x-Achse den Funktionsgraphen höchstens einmal schneidet.

4.2 Surjektivität

Definition. *Eine Funktion $f : A \to B$ heißt surjektiv, wenn jedes Element in B auch wirklich von f getroffen wird. Anders ausgedrückt: Das Bild der Funktion ist ganz B, formal $im(f) = B$.*

Beispiele:
Die Funktion, die jedem Österreicher seinen Geburtstag (ohne Jahreszahl) zuordnet ist surjektiv.
Die Funktion, die jedem Österreicher seine Passnummer zuordnet nicht surjektv (wenn man alle natürlichen Zahlen als Wertebereich zulässt).
$g_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ ist nicht surjektiv (es wird kein Wert kleiner 0 getroffen).
$g_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$ ist surjektiv.

Das Beispiel $x \mapsto x^2$ zeigt: Ob eine Funktion surjektiv ist, hängt vom angegebenen Wertebereich ab. Generell ist jede Funktion f, wenn man sie als Funktion auf ihr Bild betrachtet, also $f : A \to Im(f)$ surjektiv.

4.3 Bijektivität

Definition. *Eine Funktion $f : A \to B$ heißt bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist. Bei einer bijektiven Funktion (Bijektion) wird also jedes Element in B von genau einem Element in A getroffen.*

Bemerkung: Zu einer bijektiven Funktion $f : A \to B$ existiert die Umkehrfunktion (inverse Funktion) $f^{-1} : B \to A$. Man erhält sie, indem man die Zuordnungsvorschrift 'umdreht'. Beispiel: $f : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto x^2$, Umkehrfunktion: $f^{-1} : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \sqrt{x}$.
Den Graph der inversen Funktion erhält man durch Spiegelung des ursprünglichen Graphen an der Gerade $y = x$.

Sind die folgenden Funktionen injektiv, surjektiv, bijektiv?

$f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ x \mapsto x^3$

$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^3$

$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \sin(x)$

$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto 4x - 1$

Die Funktion, die jedem Stadionbesucher seinen Sitzplatz zuordnet.

4.4 Stetigkeit

Ein weiterer zentraler Begriff im Umgang mit Funktionen ist die Stetigkeit. Wir beschränken uns hier auf Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$.

Definition. *Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$, wenn für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die gegen x konvergiert, die Bildfolge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert.*
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt stetig, wenn sie in jedem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist.

Dieser Begriff ist anfangs schwer verdaulich (er wird in der Analysis-Vorlesung noch ausführlich behandelt). Bei Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ reicht oft die anschauliche Definition: Eine Funktion ist stetig, wenn ihr Graph 'ohne Absetzen' gezeichnet werden kann. Oder: 'Wenn sich das Argument nur wenig ändert, dann ändert sich auch der Funktionswert wenig.' Die Funktion hat also keine Sprungstellen.

5 Weitere wichtige Begriffe

Sei stets $f : A \to B,\ x \mapsto f(x)$.

Das **Bild** einer Teilmenge T von A ist die Menge aller Bilder von Elementen aus T, man schreibt dafür $f(T)$. Formal $f(T) = \{f(x) : x \in A\}$. Es gilt: $f(T) \subseteq B$.

Das **Urbild** eines Elementes $y \in B$ ist die Menge aller Elemente aus A, deren Bild y ist, man schreibt dafür $f^{-1}(y)$. Formal: $f^{-1}(y) = \{x \in A : f(x) = y\}$.

Das **Urbild** einer Teilmenge M von B, ist die Menge aller Elemente aus A, deren Bild in M liegt, man schreibt $f^{-1}(M)$. Formal: $f^{-1}(M) = \{x \in A : f(x) \in M\}$. Klarerweise gilt: $f^{-1}(B) = A$

Ein **Fixpunkt** von f ist ein Element $x \in A$ für das gilt $f(x) = x$, natülich muss dafür $x \in B$.

Sei $g : B \to C,\ y \mapsto g(y)$. Dann ist die **Verknüpfung**(Komposition) von f und g definiert durch: $g \circ f : A \to C,\ x \mapsto g(f(x))$.