

Workshops zur Aufarbeitung des Schulstoffs – WS 2006/07

Gleichungen & Ungleichungen

Gleichungssysteme

Harald Schilly

2006-10-01

Revision 66

Universität Wien

0.1 Grundlagen

Dieser Teil des Tutoriums handelt von Gleichungen, Ungleichungen und Gleichungssystemen. Das sind Techniken, welche Probleme oder Gegebenheiten der Umwelt in ein mathematisches Formelgerüst gießen. Die Methoden damit zu rechnen haben eine lange Geschichte. Kurz zusammengefasst entwickelten sich immer ausgefeiltere Regeln, welche wir nun als *Rechenarten* bezeichnen.

0.1.1 Rechenarten

Stufe	Rechenart	Umkehrung
I. Stufe	Addieren $a + b = c$	Subtrahieren $c - b = a$
II. Stufe	Multiplizieren $a \cdot b = c$	Dividieren $\frac{c}{b} = a$
III. Stufe	Potenzieren $b = a^x$	Radizieren $a = \sqrt[x]{b}$
		Logarithmieren $x = \log_a b$

0.1.2 Rechenregeln

Außerdem gibt es einige grundlegende Gesetze, welche für Teile davon erklärt werden und sich daraus weitere Regeln für höhere Stufen ableiten lassen. Hier ein Auszug solcher Regeln.

Regel	Beispiel
Vorzeichenregeln	$-(+a) = -a$ $a - (-b) = a + b$ $-1 \cdot b = -b$
Klammernregeln	$(a + b) + c = a + b + c = a + (b + c)$ $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot b \cdot c$ $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$
neutrales Element	$1 \cdot a = a$
Distributivgesetz	$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
„Kürzen“	$\frac{a \cdot b}{a \cdot c} = \frac{\underbrace{a}_1}{a} \cdot \frac{b}{c} = \frac{b}{c}$
„auf gemeinsamen Nenner bringen“	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{d} + \frac{c}{d} \cdot \frac{b}{b} = \frac{ad+cb}{bd}$

Das ist in groben Zügen das Grundgerüst, mit dem in der Schule, im Alltag und in vielen Anwendungsbereichen gearbeitet wird.

0.1.3 logische Ausdrücke

Eine Erweiterung des Bisherigen sind Gleichungen und Ungleichungen. Sie benützen neue logische Zeichen: das = Zeichen und das < bzw. > Zeichen.

Logisch bedeutet hier, dass es zum Formulieren von Aussagen benützt wird. Diese können zum Beispiel so aussehen: $2 + 5 = 7$, $5 \cdot 3 = 15$, $(1 - 2) > -5 + 3$. Diese drei Gleichungen haben eines

gemeinsam: sie sind *wahr*. Es gibt auch falsche Gleichungen, diese bilden eine *falsche Aussage* und können zum Beispiel $2 = -6$, $5 + 15 < 3 \cdot 3$ oder $1 + 1 = 3$ lauten.

Darf eine Gleichung um *wahr* zu sein sowohl gleich als auch ungleich sein, so verwendet man das \leq bzw. \geq Zeichen.

Zur Vollständigkeit sei noch erwähnt, dass es auch Ungleichungen gibt, wo beide Seiten sowohl größer als auch kleiner, jedoch nicht gleich sein dürfen. Das wird durch das \neq Symbol angezeigt.

0.1.4 Variablen

Gleichungen und Ungleichungen haben wie bisher geschildert in ihren Ausdrücken nur feste Zahlen. Es können jedoch an einer oder mehreren Stellen Platzhalter für einen unbekanntem Wert verwendet werden. Diese werden als *Variablen* bezeichnet und im Allgemeinen ist das Ziel, Werte für den Platzhalter zu finden, welche die (Un-)Gleichung (also logische Aussage) erfüllen. Das heißt, die Aussage muss *wahr* sein.

Beispiel: $5 \cdot x - 1 = 9$. Lösung: $x = 2$.

Erwähnt werden sollte noch, dass in manchen speziellen Fällen für eine Variable nicht nur eine Zahl gesucht wird, sondern eine Menge von Werten oder ein ganzer Ausdruck.

0.1.5 Zusammenfassung

Der erste Teil dieses Tutoriums wird sich mit Gleichungen und Ungleichungen beschäftigen.

Der zweite Teil behandelt Systeme von Gleichungen. Das bedeutet, eine Menge von mehreren Gleichungen, die alle gemeinsam erfüllt sein müssen.

0.2 Ausblick

Es wird hier immer in den reellen Zahlen (\mathbb{R}) gerechnet. Das muss aber nicht so sein. Viele Gleichungen haben auch komplexe Zahlen (\mathbb{C}) als Lösung, weswegen es sich lohnt auch dort zu suchen. Andererseits werden manchmal auch nur ganze Zahlen (\mathbb{Z}) gesucht, die die Gleichung(en) lösen.

Gleichungen höheren Grades stoßen schnell in Bereiche vor, die nicht mehr so elegant wie Gleichungen ersten und zweiten Grades behandelt werden können. Die Theorie dahinter und Ansätze zu ihrer Lösung führten zu eigenen Fachgebieten innerhalb der Mathematik.

Auch gibt es neben Lösungen mit Zahlen auch andere Arten von Ergebnissen. Differentialgleichungen haben als Ergebnis Funktionen und die dazugehörige Theorie geht bei weitem über das dieser „einfachen“ Gleichungen hinaus, obwohl es trotzdem Parallelen gibt. Mehr dazu im späteren Studium.

1 Gleichungen & Ungleichungen

1.1 Einführung

Wie schon in den Grundlagen beschrieben beschäftigen wir uns zuerst mit Gleichungen. Es gibt sie in den verschiedensten Formen und daher ist es sinnvoll, eine Einteilung in verschiedene Typen vorzunehmen. Eine Möglichkeit ist zum Beispiel die verwendeten Rechenarten herzunehmen, eine andere der *Grad* der Gleichung und wieder eine andere die Art wie die Gleichung verwendet wird. Vertreter des ersten Kriteriums sind unter anderem *Logarithmusgleichungen*, welche in einem anderen Tutorium behandelt werden. Hier geht es um solche mit den Grundrechenarten. Das zweite Kriterium verwendet den Grad der Gleichung. Das bezieht sich auf die Variable und beschreibt, wie stark sie höchstens potenziert wird. Also kommt ein x^3 und x^2 vor, so handelt es sich um eine Gleichung 3. Grades.

1.2 Gleichungen

1.2.1 lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen sind Gleichungen ersten Grades, mit normalerweise einer Variablen. Sie können ganz allgemein auf folgende Form gebracht werden:

$$ax + b = 0 \tag{1.1}$$

Allgemein lässt sich über diese Form 1.1 sagen, dass $a \cdot x$ der *lineare Teil* und b der *konstante Teil* ist. Ist $a \neq 0$, das heißt der lineare Anteil fällt nicht weg, so gibt es genau eine Lösung in den reellen Zahlen (\mathbb{R}). Dieser kann direkt angegeben werden:

$$x = \frac{-b}{a} \tag{1.2}$$

Ist $a = 0$, so kommt entweder ganz \mathbb{R} oder keine Lösung als Lösungsmenge in Frage.

1.2.2 quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen sind ähnlich wie lineare Gleichungen, haben jedoch zusätzlich einen *quadratischen Anteil*, der ihr Charakteristikum für den zweiten Grad ist. Ihre allgemeine Form ist:

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{1.3}$$

Wiederum lässt sich je nach Wert der Parameter a , b und c etwas über die Lösungen sagen. Sie kann keine, eine, zwei oder ganz \mathbb{R} als Lösungsmenge in \mathbb{R} besitzen. Im Allgemeinen wird $a \neq 0$ und $b \neq 0$

verlangt, wobei letzteres nicht unbedingt notwendig ist. Ist $a = 0$ so handelt es sich wieder um den linearen Fall, da der quadratische Anteil wegfällt.

Auch hier gibt es eine Formel für die Lösung der Gleichung:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (1.4)$$

Herleitung der quadratischen Lösungsformel 1.4. Diese Gleichung kommt so zustanden, dass Gleichung 1.3 zuerst in Bezug auf x vereinfacht wird und dann auf ein *vollständiges Quadrat* ergänzt wird. Anschließend kann auf beiden Seiten die Wurzel gezogen werden und nach einigen Umformungen erhält man die Lösungsformel 1.4.

$$\begin{aligned} ax^2 + bx &= -c \\ x^2 + \frac{b}{a}x &= -\frac{c}{a} \\ \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\ x_{1,2} &= -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{-\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}} \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt das die Gleichung 1.4 □

Falls es keine Lösung gibt, kann es in anderen Grundmengen als \mathbb{R} noch weitere Lösungen dieser quadratischen Gleichung geben. Das wird im Tutorium über *komplexe Zahlen* behandelt.

1.2.2.1 Hilfsmittel: Satz von Vieta

Der *Satz von Vieta* ist eine Hilfe beim Lösung von Problemen rund um quadratische Gleichungen. Er funktioniert so, dass Ausdrücke einer wahren Gleichung gegenübergestellt werden und gleiche Terme werden gleichgesetzt. Wir verwenden dabei nicht die Gleichung 1.3, sondern dividieren sie durch a . Das hat den Sinn, dass nur mehr zwei Koeffizienten statt drei da sind, obwohl die Gleichung an sich dieselbe geblieben ist.

Sehen wir uns folgende Herleitung an. x_1 und x_2 stehen dabei für die beiden Lösungen der Gleichung, wobei immer eine oder beide Lösungen für den Satz von Vieta verwendet werden.

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= (x - x_1)(x - x_2) \\ x^2 + px + q &= x^2 \underbrace{-x_1x - x_2x}_{=p} + \underbrace{x_1x_2}_{=q} \\ &\Rightarrow -p = x_1 + x_2 \\ &\Rightarrow q = x_1x_2 \end{aligned}$$

1.2.3 Lösungsmethoden

Der Beweis der Lösungsformel 1.4 verwendete einige Umformungen, um zu einem allgemeinen Ergebnis zu kommen. Nun beleuchten wir diese Umformungen genauer.

Die allgemeine Vorgehensweise ist die, dass Zeile für Zeile *Äquivalenzumformungen* gemacht werden. Dabei ist zu beachten, dass die Lösungsmenge exakt dieselbe bleibt. Ist das nicht zu 100%

gewährleistet, muss eine Fallunterscheidung gemacht werden, am Schluss durch eine Probe die Lösung verifiziert oder der Schritt vollständig verworfen werden.

Die Basisschritte sind gleichzeitiges addieren oder subtrahieren, multiplizieren oder dividieren von Werten auf beiden Seiten der Gleichungen. Dabei ist zu beachten, dass zum Beispiel nicht durch 0 dividiert oder mit der Variablen multipliziert werden darf.

Auswahl von Umformungen die keine Äquivalenzumformungen sind:

- Division durch 0 ist nicht definiert
- Multiplizieren mit der Variablen kann zusätzliche (falsche!) Lösungen erzeugen
- Wurzelziehen kann die Lösungsmenge verkleinern
- Multiplizieren mit 0 lässt beide Seiten 0 werden. Das ist dann zwar immer richtig, hat aber keinen Sinn weil die Information der Gleichung verloren geht.

Folgende Rechnung soll den zweiten Punkt anhand eines übertrieben einfachen Beispiels demonstrieren:

$$\begin{aligned}x &= 9 && (1.5) \\x^2 &= 9x \\x &= 0\end{aligned}$$

Betrachtung der Zeile 1.5 zeigt ganz klar, dass $x = 0$ keine Lösung sein kann, weil dort $x = 9$ steht und $9 = 0$ niemals stimmt! Trotzdem lässt sich so etwas in der Praxis nicht immer verhindern.

Überprüfen der Lösung durch eine *Probe* testet zuverlässig, ob die gefundene vermutete Lösung auch tatsächlich eine ist. Eine Probe ist das Einsetzen der Lösungen in die Angabe, bzw. erste Zeile. Ist dann die Gleichung, als logische Aussage gesehen, *wahr*, so ist es auch das Ergebnis.

1.3 weitere Gleichungstypen

Neben diesen Grundtypen gibt es noch weitere Arten von Gleichungen. Die oben erwähnten sind jedoch als Grundlage für alle anderen zu verstehen, weil die Techniken die für sie gelten für alle anderen Typen übernommen werden können, wo es sinnvoll ist. Häufig ändert sich jedoch der Sinn einer Gleichung und muss daher nicht mehr gelöst werden, sondern hat eine andere Aufgabe. Im Kern bleibt es jedoch dabei, dass Gleichungen so wie sie gestellt werden *wahr* sein müssen.

1.3.1 Funktionsgleichungen

Unter *Funktionsgleichungen* versteht man solche, wo eine Variable von einer anderen abhängt. Das bedeutet, dass die Änderung einer, oder auch mehrerer, Variable(n) direkten Einfluss auf den Wert einer anderen Variable hat. Das betrifft zum Beispiel alle Funktionen, die grafisch gezeichnet werden können.

Beispiel: $y = 2x^2 - 5$. Das y wird häufig als $y(x)$ geschrieben, um die Abhängigkeit von x hervorzuheben.

1.3.2 analytische Gleichungen

Analytische Gleichungen sind Gegenüberstellungen von Ausdrücken mit Variablen, die dasselbe ergeben sollen. Gesucht sind Bereiche im Lösungsraum. Verwendet werden sie bei *Kegelschnitten* (späteres Tutorium)

Beispiel: $a^2 + b^2 = 25$ (Kreis mit Radius 5)

1.3.3 Verhältnisgleichungen

Verhältnisgleichungen sind eine besonders einfache Form von Gleichungen, die zur Angabe von Proportionen, Größenverhältnissen oder Wahrscheinlichkeiten verwendet werden. Eingesetzt werden sie auch bei Wettquoten.

Beispiel: $a : b = 5 : 10$

1.3.4 Einteilung nach Rechenart

Hierzu können *Wurzelgleichungen* wie $2\sqrt{x-1} = 9x$ wegen der Wurzel oder *Exponentialgleichungen* wie $e^{2x-1} = 8$ wegen der Exponentialfunktion gezählt werden. Natürlich gibt es auch Kombinationen davon und noch mehr: Integralgleichungen, Differentialgleichungen.

1.4 Ungleichungen

Ungleichungen sind logische Aussagen mit einer Variablen, welche, wie in den Grundlagen erwähnt, kein = Zeichen, sondern ein Ungleichheitszeichen enthalten. An ganz einfachen Beispielen erkennt man sofort, dass sich die Menge aller möglichen Lösungen stark ändert, wenn das = Zeichen ersetzt wird! Statt einzelner Ergebnisse, die klar abgezählt werden können, gibt es ganze Bereiche der Grundmenge \mathbb{R} , die alle möglichen Werte enthalten, welche die Ungleichung erfüllen.

Betrachten wir zur Demonstration

$$2x + 4 > 8 \quad (1.6)$$

Probiert man $x = 10$ oder $x = 141$, so ist diese Aussage *wahr* – $x = -1$ jedoch *falsch*. Ganz genau gesagt führen alle Werte für $x > 2$ zu einer *wahren* Aussage, $x \leq 2$ zu einer *falschen*. Zu beachten ist, dass \leq nicht nur das $<$ Zeichen, sondern auch das = Zeichen enthält. Das bedeutet, dass sowohl exakte Gleichheit als auch kleiner als gelten darf. Nur diese beiden Relationen zusammen sind das genaue Gegenteil von $>$.

1.4.1 Klassifizierung

Hier lässt sich genauso nach Charakterisierungen suchen wie bei den Gleichungen des letzten Abschnitts. Man braucht sich nur statt des Ungleichheitszeichens ein = Zeichen denken.

1.4.2 Lösungsmethoden

Ebenfalls genauso wie bei den Gleichungen gibt es auch hier die Äquivalenzumformungen. Großteils lassen sie sich 1 : 1 übernehmen, gibt jedoch einige weitere, sehr wichtige Ausnahmen. Sie treten alle dann auf, wenn auf beiden Seiten der Ungleichung ein (möglicher) Vorzeichenwechsel auftritt. Das

kann man sich so vorstellen, als ob die eine Seite die ohne Beschränkung der Allgemeinheit¹ größer als die linke ist, kopfüber gespiegelt wird und somit dann die kleinere von beiden wird. Dadurch dreht sich das Ungleichheitszeichen um und das muss auch während der Umformungen berücksichtigt werden, damit die logische Aussage nicht verdreht wird.

Zur Illustration folgendes sehr einfach gehaltene Beispiel:

$$x > 5 \quad (1.7)$$

$$-x < -5 \quad (1.8)$$

Die zweite Zeile hat genau dieselbe Lösungsmenge wie die erste. Würde sich das Ungleichheitszeichen nicht umdrehen ist fälschlicherweise das richtig, was falsch war und umgekehrt.

Darauf muss immer geachtet werden, wenn beide Seiten der Ungleichung mit einem Term multipliziert werden der die Variable enthält. Dann ist es sogar so, dass je nach Wert der Variablen der Ausdruck sowohl positiv als auch negativ sein könnte. Daher muss in so einer Situation eine *Fallunterscheidung* gemacht werden.

Das kann so aussehen:

$$\frac{1}{x-4} > 10$$

Fall 1:

$$x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$$

$$1 > 10(x - 4)$$

$$1 > 10x - 40$$

$$\frac{41}{10} > x$$

$$\text{zusammen ergibt das: } 4 < x < \frac{41}{10}$$

Fall 2:

$$x - 4 < 0 \Rightarrow x < 4$$

$$1 < 10(x - 4)$$

$$1 < 10x - 40$$

$$\frac{41}{10} < x$$

$$\text{zusammen ergibt das: } x \in \emptyset$$

Insgesamt ist damit die Lösungsmenge: $\mathcal{L} = \{x \in \mathbb{R} \mid 4 < x < \frac{41}{10}\}$.

Wie man klar sehen kann, muss hier genau gearbeitet werden, damit weder wie oben erklärt eine neue Lösung entstehen kann, noch dass Lösungen weggelassen oder zerstört werden.

¹wird üblicherweise mit *o.B.d.A.* abgekürzt

2 Gleichungssysteme

Dieser Abschnitt behandelt *Gleichungssysteme*. Zuerst wird erklärt was sie sind und wozu sie gut sind, dann wird auf Lösungsmethoden und Techniken eingegangen.

2.1 Einführung

Ein *Gleichungssystem* kann kurz gesagt als Zusammenschluss von mehreren Gleichungen gesehen werden. Dabei ist es so, dass für Werte der Variable(n) der Lösungsmenge alle Gleichungen *wahr* sein müssen. Im folgenden ein kleines Beispiel, das dies erklären soll:

$$\begin{aligned} \text{I: } & 2a + b = 10 \\ \text{II: } & b = 4 \end{aligned}$$

Dieses Beispiel besteht aus zwei Gleichungen und zwei Variablen (a und b). Die zweite Gleichung ist sehr einfach; durch sie wird schnell klar, dass b nur 4 sein kann, jeder andere Wert für b führt nicht zu einer *wahren* Aussage. Die erste Gleichung kann folglich nur dann *wahr* sein, wenn $a = 3$ ist. Beides zusammen bedeutet, dass die Lösungsmenge so aussieht: $\mathcal{L} = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a = 2 \wedge b = 4\}$. Die Symbole bedeuten: Die Lösungsmenge \mathcal{L} besteht aus allen Paaren der Variablen a und b , wobei a genau 2 und gleichzeitig b genau 4 ist.

Bei diesem Fall lassen sich für die Variablen einzelne Zahlen als Ergebnis angeben. Das ist nicht immer so. Außer diesem günstigen Fall gibt es noch zwei andere. Es gibt den

- *überbestimmten Fall* – hier gibt es ein zu viel an Information. Das heißt, zu viele Einschränkungen, mehr Gleichungen als Variablen und nur unter günstigen Umständen widersprechen sich die Gleichungen nicht. Widersprechen sie sich, so gibt es keine Lösung, weil es unmöglich ist eine Belegung der Variablen zu finden die alle Gleichungen zugleich erfüllt.
- *unterbestimmter Fall* – dieser Fall ist dadurch gekennzeichnet, dass es zu wenig Einschränkungen an die Variablen gibt. Dies tritt zum Beispiel dann auf, wenn es weniger Gleichungen als Variablen gibt. Als Ergebnis lassen sich daher ganze Bereiche statt einzelner Werte der Grundmenge als Lösung angeben.

Beispiel für ein überbestimmtes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \text{I: } & 2a + b = 10 \\ \text{II: } & 2a = 0 \\ \text{III: } & a - b = 0 \end{aligned}$$

Hier besteht das „Problem“ darin, dass die zweite Gleichung a auf 0 festlegt. Gleichung I und III können dann aber nicht gleichzeitig *wahr* sein, weil hierfür in der ersten $b = 10$ und in der letzten

$b = 0$ gelten müsste. Das kann nicht passieren. Die Lösungsmenge ist daher die leere Menge: $\mathcal{L} = \emptyset$.

Beispiel für ein unterbestimmtes Gleichungssystem:

$$\text{I: } a + b + c = 9$$

$$\text{II: } a + b = 6$$

Um zu verstehen wie die Lösung zu diesem Gleichungssystem aussieht, betrachten wir zuerst die zweite Gleichung. Sie besagt, dass die Summe aus a und b genau 6 sein soll. Nehmen wir an wir haben so ein Paar gefunden, so übertragen wir diese Information in die erste Gleichung. Diese vereinfacht sich nun zu:

$$\underbrace{a + b}_{=6} + c = 9 \Rightarrow 6 + c = 9 \Rightarrow c = 3$$

Gut, damit wissen wir, dass $c = 3$ ist. Doch sagt uns das nichts konkretes über a und b . Genau das ist die Situation, wo man von einem unterbestimmten Gleichungssystem spricht. Es kann nur gesagt werden, dass für jeden Wert a ein entsprechender Wert für b genommen werden muss, sodass ihre Summe 6 ergibt. Die Lösungsmenge kann man daher wie folgt angeben:

$$\mathcal{L} = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid c = 3 \wedge a = 6 - b\}$$

Außer Gleichungen gibt es auch Ungleichungen. Diese können genauso in einem System von Ungleichungen auftreten, die ganz ähnlich zu lösen sind. Darüber hinaus muss man aber genau auf die Lösungsbereiche achten. Auch gibt es Systeme, die sowohl aus Gleichungen als auch Ungleichungen bestehen. Dann müssen alle Methoden kombiniert werden um eine Menge von Werten für die Variablen zu finden, die alle (Un)Gleichungen erfüllen – genau dieses Grundprinzip ist bei allen derartigen Problemstellungen dasselbe!

2.1.1 Lösungsmethoden

Nun wollen wir etwas systematischer die Methoden zum Lösen von Gleichungssystemen beleuchten. Da Gleichungssysteme eine sehr häufig auftretende Problemstellung sind, haben sich schon viele Leute den Kopf zerbrochen wie sie gelöst werden können. Da sie auch sehr groß werden, sind sie hervorragend für den modernen Rechenknecht Computer geeignet.

Es unterscheiden sich jedoch die Methoden für den Menschen von denen für den Computer. Erstere sind freier und appellieren immer an das Verständnis des rechnenden Menschen, während zweitere zwar auch von Menschen gerechnet werden können, aber vom Charakter her viel starrer und klarer geregelt sein müssen. Zuerst gehe ich auf grundlegende Methoden ein, um Gleichungssysteme manipulieren zu können. Anschließend erkläre ich auch eine Methoden, die eher auf das Verständnis des Menschen zugeschnitten ist (wohl aber lässt auch sie sich algorithmisch implementieren).

2.1.1.1 Umformungen

Die folgenden drei Umformungsmethoden können bei Gleichungssystemen verwendet werden. Da eine Umformung allein meist nicht ausreicht um das Ergebnis zu ermitteln, muss es auch eine Gesamtstrategie geben. Darauf wird anschließend eingegangen.

Ziel dieser Umformungen ist es, das Gleichungssystem so zu verändern, dass es nach wie vor genau dieselbe Lösungsmenge hat wobei es gleichzeitig vereinfacht wird.

Additionsmethode

Diese Methode ist von diesen dreien die allgemeinste.

Erklärung. Sie funktioniert so, dass ein passendes Paar der Gleichungen genommen wird, jeweils nach Bedarf mit einer Zahl multipliziert wird (als wäre es nur eine isolierte Gleichung) und anschließend die Summe (oder Differenz) beider Gleichungen eine neue Gleichung ergibt. Dass diese Summe von zwei Gleichungen wieder eine gültige Gleichung ergibt, kann man sich so vorstellen: Setzt man voraus, dass die Gleichungen lösbar sind, so müssen beide Seiten gleich sein. Das heißt, die erste Gleichung hat auf beiden Seiten den Wert A , die zweite des Paares den Wert B . Addiert man beide Gleichungen, so erhält man eine neue, die $A + B = A + B$ ist. Klarerweise ist das wieder eine gültige Gleichung mit derselben Lösungsmenge. \square

Damit diese Methode auch wirklich funktioniert, muss bei diesem letzten Schritt eine Variable wegfallen – ansonsten hat man nichts gewonnen!

Beispiel:

$$\text{I: } 2a + 3b = -1$$

$$\text{II: } 4a - 5b = 9$$

Die erste Gleichung mit -2 multiplizieren:

$$\text{I: } -4a - 6b = 2$$

Beide Gleichungen addieren und umformen, dann rückeinssetzen:

$$\text{I+II: } 0 - 11b = 11$$

$$b = -1$$

$$\Rightarrow a = 1$$

Das Ergebnis ist $\mathcal{L} = \{(a, b) \mid a = 1 \wedge b = -1\}$, was durch eine Probe bestätigt werden kann.

Einsetzungsmethode

Die *Einsetzungsmethode* funktioniert so, dass eine Gleichung des Systems so umgeformt wird, dass eine Variable explizit ausgedrückt wird. Dann wird in einer oder mehreren anderen Gleichungen statt dieser Variablen der äquivalente Ausdruck ohne der Variablen eingesetzt. Der erzielte Effekt ist eine Reduktion der Variablen.

Beispiel:

$$\text{I: } 2x + y = 10$$

$$\text{II: } x + y = 4$$

In der ersten Gleichung y explizit machen:

$$\text{I: } y = 10 - 2x$$

und einsetzen in II

$$\begin{aligned}x + 10 - 2x &= 4 \\-x &= -6 \\x &= 6 \Rightarrow y = -2\end{aligned}$$

Gleichsetzungsmethode

Die *Gleichsetzungsmethode* kombiniert zwei Gleichungen so, dass in beiden Gleichungen eines Paares dieselbe Variable explizit ausgedrückt wird. Dann fällt genauso wie bei der Einsetzmethode beim Kombinieren beider Gleichungen diese Variable weg.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\text{I: } a + b &= 12 \\ \text{II: } a - 2b &= 0\end{aligned}$$

beide explizit nach a umformen:

$$\begin{aligned}\text{I: } a &= 12 - b \\ \text{II: } a &= 2b\end{aligned}$$

gleichsetzen und ausrechnen:

$$\begin{aligned}12 - b &= 2b \\ 4 &= b \Rightarrow a = 8\end{aligned}$$

2.1.1.2 Strategie

Besteht ein Gleichungssystem nur aus zwei Gleichungen, braucht man sich für eine gute Strategie nicht den Kopf zerbrechen. Gibt es jedoch drei oder mehr, so zahlt es sich aus über eine gute Strategie nachzudenken. Zuerst muss man darauf achten, wie viele Variablen und Gleichungen es gibt. Gibt es schon im vornherein weniger Gleichungen als Variablen weiß man, dass es unterbestimmt sein wird. Daher wird es keine klare Lösung geben, sondern nur eine Vereinfachung der Abhängigkeiten. Gibt es gleich viele oder mehr Gleichungen als Variablen, so wird es genau bestimmbar oder überbestimmt sein.

Das zweite was man analysieren sollte ist die Beschaffenheit jeder einzelnen Gleichung. Klarerweise sind Gleichungen mit einer oder nur wenig Variablen einfacher zu behandeln als solche mit vielen Variablen. Solche mit nur einer Variablen können direkt umgeformt werden, ohne eine weitere Gleichung zu benötigen.

Gibt es nur mehrere Gleichungen mit jeweils mehreren Variablen ist zu beachten, dass durch Kombinieren von zwei Gleichungen mit derselben Variablen nach den oben aufgelisteten Umformungsmethoden diese Variable wegfällt. Die anderen Variablen bleiben im Normalfall auch in der entstehenden neuen Gleichung.

Beachtet man diese Vorüberlegungen und bedenkt man die Faulheit des rechnenden Menschen, so muss eine gute Strategie so aussehen, mit möglichst wenig Umformungsschritten zum Ergebnis zu kommen. Kommen alle Variablen in allen Gleichungen vor, so gibt es keinen Spielraum. Es muss

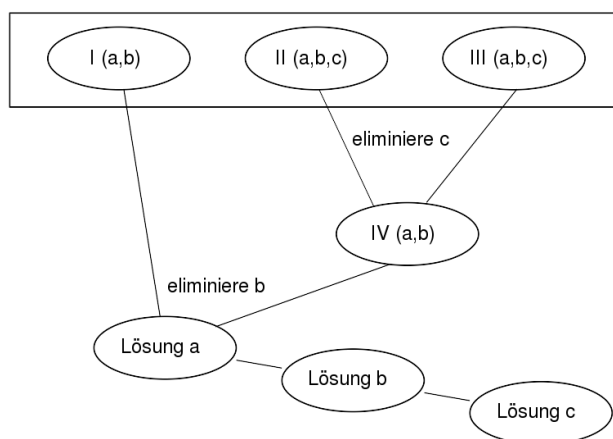


Abbildung 2.1: grafische Darstellung der Lösungsschritte

so vorgegangen werden, dass zuerst ein Paar von Gleichungen genommen wird und eine Variable eliminiert wird. Dann ein weiteres Paar und abermals dieselbe Variable. Das muss man so lange wiederholen bis ein neues System entstanden ist, welches aus einer Gleichung und einer Variablen weniger besteht. Dann dieses System lösen als wäre es das eigentlich gefragte.

Gibt es Gleichungen mit fehlenden Variablen, so kann man sich das zunutze machen. Die Gleichungen mit weniger Variablen werden beiseite genommen und die Gleichungen mit vielen so kombiniert, dass die Variablen, welche in den anderen Gleichungen fehlen, wegfallen. Dadurch lässt sich in weniger Schritten als zuvor ein kleineres System bilden.

Zum Vergleich, ein volles System mit drei Gleichungen mit allen Variablen braucht zuerst 2 Umformungen, dann eine – also 3. Fehlt in einer der drei Gleichung bereits eine Variable, so reicht eine Umformung um eine neue Gleichung ohne dieser Variablen zu erhalten. Diese dann mit der ersten Gleichung kombiniert ergibt schon eine Lösung – also nur 2 Schritte. Abbildung 2.1 stellt diesen Ablauf grafisch dar. Bei größeren Systemen zahlt es sich aus, sich vorher um so eine Strategie zu kümmern bzw. so eine Grafik zu skizzieren um nicht den Überblick zu verlieren.

Freilich gibt es davon abweichend noch andere taktische Schachzüge. Zum Beispiel bei vier Gleichungen und vier Variablen, wo zwei von ihnen nur ein System mit zwei Variablen bilden, sollte zuerst dieses kleinere System gelöst werden. Die Ergebnisse werden dann in den beiden anderen Gleichungen eingesetzt und abermals als System von zwei Gleichungen behandelt. Damit lässt sich dieses günstig gestellte System statt mit $3 + 2 + 1 = 6$ Schritten nur mit 2 lösen! Es gehört also zum effizienten Arbeiten auch etwas Übung und Erfahrung dazu.

2.1.1.3 Gauß-Algorithmus

Der *Gauß-Algorithmus* ist ein Verfahren, welches systematisch Gleichungssysteme löst. Er funktioniert jedoch nur für lineare Gleichungen. Er ist sehr starr und kann daher relativ einfach von einem Computer ausgeführt werden.

Einfach gesagt funktioniert er so, dass zuerst mithilfe der ersten Gleichung und der Additionsmethode die erste Variable in allen anderen Gleichungen eliminiert wird. Anschließend betrachtet man das Gleichungssystem ohne der ersten Gleichung und wiederholt diesen Schritt mit der der neuen ersten Gleichung und der zweiten Variable. Hat man das erledigt, lässt sich von unten nach oben

jede Gleichung auflösen.

Problematisch wird es nur dann, wenn die gerade betrachtete Variable in der momentan verwendeten Gleichung fehlt. Dann kann nämlich nicht eliminiert werden. Tritt dieser Fall auf, so müssen die Gleichungen umsortiert werden.

Beispiel:

$$2x + 2y - z = 10$$

$$x + 2y + 3z = 8$$

$$2x - y - 2z = 20$$

$$\text{Schritt 1: } 2x + 2y - z = 10$$

$$y + \frac{7}{2}z = 3$$

$$-3y - z = 10$$

$$\text{Schritt 2: } 2x + 2y - z = 10$$

$$y + \frac{7}{2}z = 3$$

$$\frac{19}{2}z = 19$$

$$\text{letzte Zeile: } z = 2 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow x = 2$$

2.2 Ungleichungssysteme

Ungleichungssysteme sind genauso wie bei den Gleichungssystemen eine Gruppierung von mehreren Ungleichungen. Das bedeutet abermals, dass jede der Ungleichungen erfüllt sein muss, damit das Ungleichungssystem als ganzes erfüllt wird. Natürlich gibt es auch Systeme mit einer Kombination aus Gleichungen und Ungleichungen.

Methoden wie das Additionsverfahren dürfen nicht automatisch übernommen werden. Gibt es nur eine Variable, so muss der Bereich in \mathbb{R} gefunden werden, der alle Ungleichungen erfüllt. Gibt es mehrere Variablen, so muss auch in höheren Dimensionen gesucht werden. Das Ergebnis lässt sich als Teilgebiet des gesamten Bereichs, der Lösung sein könnte, interpretieren.

In der Schule könnte diese Art von Gleichungssystem bei dem Thema *lineare Optimierung* vorgekommen sein.

Beispiel:

$$3x - y > 0$$

$$x + 2y < 10$$

nach x umformen und man erhält:

$$\frac{y}{3} < x < 10 - 2y$$

Hier werden die Abhängigkeiten aufgezeigt. Im konkreten Anwendungsfall muss individuell entschieden werden, wie mit so einem System umgegangen wird.