Potenzen - Wurzeln - Logarithmen

Anna Geyer

4. Oktober 2006

1 Potenzrechnung

Potenz = Produkt mehrerer gleicher Faktoren

1.1 Definition (Potenz):

(i) $a^n := a \cdot ... \cdot a \,, n \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}$
a ... Basis
n ... Exponent od. Hochzahl
a^n ... Potenz

(ii) $a^0 := 1$ für alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

(iii) $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ für alle $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}, n \in \mathbb{N}$

1.2 Rechenregeln für Potenzen

1.2.1 Addition, Subtraktion von Potenzen

Potenzen können genau dann addiert bzw. subtrahiert werden, wenn sowohl ihre Basen als auch ihre Exponenten übereinstimmen

z.B. $5a^2 + 2b^2 - (3b + 2a^2 - b^2) = 3a^2 + 3b^2 - 3b$

1.2.2 Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis (und verschiedenen Exponenten)

Potenzen mit gleicher Basis werden multipliziert, indem man die Basis mit der Summe der Exponenten potenziert, d.h.:

$\boxed{a^r \cdot a^s = a^{r+s} \text{ für alle } a \in \mathbb{R} \text{ und } r, s \in \mathbb{N}(\mathbb{R})}$

z.B.: $2^3 \cdot 2^2 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (2 \cdot 2) = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^5 = 2^{3+2}$ (nach Definition 1.1.(i))

1.2.3 Division von Potenzen mit gleicher Basis (und verschiedenen Exponenten)

Potenzen mit gleicher Basis werden dividiert, indem man die Basis mit der Differenz der Exponenten potenziert, d.h.:

$$\boxed{\frac{a^r}{a^s} = a^{\,r-s} \text{ für alle } a \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \text{ und } r, s \in \mathbb{N}(\mathbb{R})}$$

z.B.

$\frac{2^3}{2^2} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 2 = 2^{3-2}$ (nach Definition 1.1.(i))

$\frac{2^2}{2^3} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 2} = \frac{1}{2} = 2^{-1} = 2^{2-3}$ (nach Definition 1.1.(i)und 1.(iii))

$\frac{2^2}{2^2} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 2} = 1 = 2^0 = 2^{2-2}$(nach Definition 1.1.(i)und 1.(ii))

1.2.4 Multiplikation von Potenzen mit gleichem Exponenten (und verschiedenen Basen)

Potenzen mit gleichem Exponenten werden multipliziert, indem man das Produkt der Basen mit dieser Hochzahl potenziert, d.h.:

$$\boxed{a^{\,r} \cdot b^{\,r} = (a \cdot b)^{\,r} \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } r \in \mathbb{N}(\mathbb{R})}$$

z.B.: $2^3 \cdot 5^3 = (2 \cdot 2 \cdot 2) \cdot (5 \cdot 5 \cdot 5) = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3$ (nach Definition 1.1.(i) und KG in $\mathbb{N}$)

1.2.5 Division von Potenzen mit gleichem Exponenten (und verschiedenen Basen)

Potenzen mit gleichem Exponenten werden dividiert, indem man den Quotienten der Basen mit dieser Hochzahl potenziert, d.h.:

$$\boxed{\frac{a^{\,r}}{b^{\,r}} = (\frac{a}{b})^{\,r} \text{ für alle } a, b \in \mathbb{R} \text{ wo } b \neq 0 \text{ und } r \in \mathbb{N}(\mathbb{R})}$$

z.B.: $\frac{2^3}{5^3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{5 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = (\frac{2}{5})^3$

1.2.6 Potenzieren von Potenzen

Potenzen werden potenziert, indem man die Basis mit dem Produkt der Exponenten potenziert, d.h.:

$$\boxed{(a^r)^{\,s} = a^{\,r \cdot s} \text{ für alle } a \in \mathbb{R} \text{ und } r, s \in \mathbb{N}}$$

z.B.:

$(5^3)^2 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$ (nach Definition 1.1.(i) und 1.2.6)

$(a^2)^3 = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$ (nach Definition 1.1.(i)und 1.2.6)

1.3 Übungsbeispiele (Potenzen)

1. Berechne!

   (a) $2^5 =$

   (b) $(-3)^3 =$

   (c) $(-3)^4 =$

   (d) $(-2.5)^3 =$

   (e) $2^{-3} =$

2. Berechne bzw. Vereinfache!

   (a) $(-1)^{2n} =$

   (b) $(-1)^{2n+1} =$

   (c) $\dfrac{2 + (-1)^{n+1}}{2 - (-1)^{n+2}} =$

3. Berechne!

   (a) $(\dfrac{1}{3})^2 \cdot (\dfrac{1}{3})^3 =$

   (b) $(\dfrac{5}{2})^2 \cdot (\dfrac{-1}{5})^3 =$

4. Vereinfache!

   (a) $(-a)^2 \cdot (-a)^5 =$

   (b) $x^a y^{b-1} z^c y^2 z x^2 =$

   (c) $(b^3 + 3b) \cdot 2 - b^3 - 6b =$

5. Berechne bzw. Vereinfache!

   (a) $\dfrac{(-3)^4}{3^3} =$

   (b) $\dfrac{(-\frac{1}{2})^5}{(\frac{1}{2})^4} =$

   (c) $\dfrac{a^2}{(-a)^3} =$

   (d) $\dfrac{5a^{3x}}{15a^x} =$

   (e) $\dfrac{18b^z}{12b^{2z+1}} =$

(f) $\dfrac{-2^3a^2b^2c^4}{4a^5b^2c^5} =$

(g) $\dfrac{\frac{5}{3^3}\,x^5y^3z^2}{\frac{10}{9}\,x^5y^2z^3} =$

6. Berechne bzw. Vereinfache!

   (a) $((-a)^3)^2 =$

   (b) $(-a^2)^3 =$

   (c) $\big((-\frac{1}{3})^2\big)^3 =$

   (d) $\Big(\dfrac{3rs^2}{6r^3s^2}\Big)^2 =$

   (e) $(a^x b^{\,y+1})^y =$

   (f) $\dfrac{(\frac{6x^2}{y^6})^2}{(\frac{9x^3}{y^4})^2} =$

   (g) $\dfrac{\frac{-3x^3}{y^2} \cdot (\frac{4y^4}{5x^2})^2}{(\frac{6y^2}{5x})^2} =$

   (h) $\dfrac{\dfrac{(\frac{2ab^6}{a^3})^4}{(\frac{-b^3}{5a})^2}}{(\frac{25a^2}{2b^3})^2} =$

   (i) $\dfrac{(\frac{3x^2}{5y})^{-2} \cdot (\frac{7y^4}{x^{-2}})^{-3}}{(\frac{5}{(xy)^6})^2 \cdot \frac{3^{-2}}{7^3}} =$

2 Wurzeln

Wurzeln = Potenzen, deren Exponenten Stammbrüche sind

2.1 Definition (Wurzel)

Die n-te Wurzel aus einer nichtnegativen Zahl a ist jene nichtnegative Zahl b, deren n-te Potenz gleich a ist, d.h.:

$\sqrt[n]{a} = b :\Longleftrightarrow b^n = a$ für alle $a, b \in \mathbb{R} a, b \geq 0,$ und $n \in \mathbb{N}$

a ... Radikand
n ... Wurzelexponent
a^n ... Wurzel

2.2 Bemerkung

(i) Was bedeutet *Wurzelziehen*? Wir haben n, a gegeben und suchen b; d.h. wir wollen die Gleichung $b^n = a$ nach b auflösen.
Frage: Gibt es eine eindeutige Lösung?
Antwort: Ja, weil wir nur positive Werte für a annehmen. Dadurch ist die Potenzfunktion $f(x) = x^n$ bijektiv, d.h. die Zuordnung ist eindeutig.

(ii) Aus Definition 2.1. folgt: $(\sqrt[n]{a})^n = b^n = a$ und $\sqrt[n]{b^n} = \sqrt[n]{a} = b$
allgemein: $(\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$ für $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$,
d.h. Potenzieren und Wurzelziehen sind zueinander inverse Rechenoperationen für nicht negative Argumente.

Wir stellen eine einfache Überlegung an:
$\sqrt[n]{a} \cdot \ldots \cdot \sqrt[n]{a} = b \cdot \ldots \cdot b = b^{\,n} = a = a^{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot \ldots \cdot a^{\frac{1}{n}}$
Sie führt uns zu folgender

2.3 Definition (Wurzel,Potenz mit rationalem Exponent)

- $a^{\frac{s}{r}} := \sqrt[r]{a^s}\,, a \in R, a \geq 0, r \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}, s \in \mathbb{Z}$
- Spezialfall für $s = 1$: $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$ für $a \geq 0, n \in \mathbb{N}$

2.4 Rechenregeln für Wurzeln

Die Rechenregeln für Wurzeln sind analog zu den Rechenregeln für Potenzen mit Exponenten aus den rationalen Zahlen:

(i) $\boxed{p \cdot \sqrt[r]{a^s} + q \cdot \sqrt[r]{a^s} = (p+q) \cdot \sqrt[r]{a^s}}$

(ii) $\boxed{\sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[s]{a} = \sqrt[r \cdot s]{a^{r+s}}}$

(iii) $\boxed{\dfrac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[rs]{a^{s-r}}}$

(iv) $\boxed{\sqrt[r]{a \cdot b} = \sqrt[r]{a} \cdot \sqrt[r]{b}}$

(v) $\boxed{\sqrt[r]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[r]{a}}{\sqrt[r]{b}}}$

(vi) $\boxed{\sqrt[r]{\sqrt[s]{a}} = \sqrt[r\cdot s]{a} = \sqrt[s]{\sqrt[r]{a}}}$

(vii) $\boxed{\sqrt[n\cdot r]{a^{n\cdot s}} = \sqrt[r]{a^s}}$

z.B.:
$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}} = \sqrt[3]{\sqrt[10]{x^{5-2}}} = \sqrt[10]{\sqrt[3]{x^3}} = \sqrt[10]{x}$

Alternativ mithilfe der Potenzschreibweise:
$\sqrt[3]{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[5]{x}}} = (\frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{5}}})^{\frac{1}{3}} = x^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{5})\frac{1}{3}} = x^{\frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3}} = x^{\frac{1}{10}}$

Praktisch für teilweises Wurzelziehen und Wurzel freimachen des Nenners:

1. $\sqrt{54} - \sqrt{216} + \sqrt{24} = \sqrt{6\cdot 9} - \sqrt{36\cdot 6} + \sqrt{4\cdot 6} = 3\cdot\sqrt{6} - 6\cdot\sqrt{6} + 2\cdot\sqrt{6} = -\sqrt{6}$
2. $\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{5^{\frac{1}{5}}} = \frac{2}{5^{\frac{1}{5}}}\cdot\frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{2}{3}}} = \frac{2\cdot 5^{\frac{2}{3}}}{5} = \frac{2}{5}\cdot\sqrt[3]{25}$

2.5 Definition (Potenz- und Wurzelfunktion)

(i) Eine Funktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, p\,(x) = x^r, r \in \mathbb{N}(\mathbb{Q}, \mathbb{R})$ heißt Potenzfunktion.

(ii) Eine Funktion $w : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R}+\,, w\,(x) = \sqrt{x}, n \in \mathbb{N}$ heißt Wurzelfunktion

2.6 Übungsbeispiele

1. Schreibe folgende Ausdrücke in Potenzen bzw. Wurzeln um und vereinfache ggf.!
   (a) $\sqrt[4]{9^5} =$
   (b) $\sqrt[4]{(x+y)^3} =$
   (c) $3^{\frac{2}{3}} =$
   (d) $(5x)^{\frac{3}{8}} =$
   (e) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{2}{a}}$
2. Wie oben!
   (a) $\frac{\sqrt[5]{a^{6n}}}{\sqrt[5]{a^5}} =$
   (b) $\frac{\sqrt[3]{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{2}}{\frac{\sqrt[6]{2}}{(\sqrt[3]{3})^2}} =$
   (c) $(\sqrt[4]{5} + 3\cdot\sqrt[4]{10} - \sqrt[4]{15})\cdot\sqrt[4]{125} =$

(d) $\frac{(\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{192})}{\sqrt[3]{3}} =$

3. Stelle die Ausdrücke durch Potenzen mit rationalen Hochzahlen dar:

   (a) $\frac{1}{\sqrt[5]{x \cdot y}} =$

   (b) $\sqrt{x^3 \sqrt[3]{x^3 \cdot y^2}} =$

3 Logarithmus

3.1 Bemerkung

Überlegung am Beispiel $2^3 = 8$.
$2^3 = x$ ... Potenzieren
$x^3 = 8$ ... Wurzelziehen
$2^x = 8$ ... ???
wir brauchen also eine weitere Umkehroperation des Potenzierens, mit zugehöriger Schreibweise, nämlich

3.2 Definition (Logarithmus)

Sei $a \in \mathbb{R} + \setminus \{1\}$ und $b \in \mathbb{R} +$. Die Lösung $x_0 \in \mathbb{R}$ der Gleichung $a^x = b$ wird als *Logarithmus von b zur Basis a* bezeichnet.
Es gilt: $x_0 = a \log b \Longleftrightarrow a^{x_0} = b$
a ... Basis
b ... Numerus
a^n ... Logarithmus

3.3 Bemerkung

Der Logarithmus von b zu Basis a ist jener Exponent mit dem man a potenzieren muss um b zu erhalten: $a^{a \log b} = b$

3.4 Beispiele

1. ${}_7 \log 49 = 2$, denn $7^2 = 49$
2. ${}_2 \log \frac{1}{8} = -3$, denn $2^{-3} = \frac{1}{8}$
3. ${}_5 \log \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, denn $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

3.5 Rechenregeln für das (Ent)Logarithmieren

für alle $a, b \in \mathbb{R}+\setminus\{1\}$, alle $u, v \in \mathbb{R}+$ und alle $r \in \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\boxed{{}_a\log u \cdot v =_a \log u +_a \log v}$

(ii) $\boxed{{}_a\log \frac{u}{v} =_a \log u -_a \log v}$

(iii) $\boxed{{}_a\log u^r = r \cdot_a \log u}$

(iv) $\boxed{{}_b\log u = \frac{{}_a\log u}{{}_a\log b}}$

3.6 Bemerkung

Die zwei gebräuchlichsten Logarithmen sind:
(i) der dekadische Logarithmus mit Basis 10 ... ${}_{10}log$, lg
(ii) der natürliche Logarithmus mit Basis e ... ${}_{e}log$, ln

3.7 Definition (Logarithmus- und Exponentialfunktion)

(i) Die Zahl $e := lim(1+1/n)^n = 2,71821828459045...$ wird Eulersche Zahl genannt.
Die Funktion $f(x) = e^x$ wird als natürliche *Exponentialfunktion* bezeichnet.

(ii) Unter der *Logarithmusfunktion zur Basis a* verstehen wir die Funktion ${}_a\log : \mathbb{R}+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto_a \log x$, $a \in \mathbb{R}+\setminus\{1\}$

Es gilt:
$e^{\log x} = x$ für $x \in \mathbb{R}+$ und $\log(e^x) = x$ für $x \in \mathbb{R}$,
d.h. die beiden Funktionen bzw. Rechenoperationen sind zueinander invers!

3.8 Übungsbeispiele

1. Berechne!

   (a) ${}_3\log 9 =$
   (b) ${}_3\log \sqrt{3} =$
   (c) ${}_5\log \sqrt[4]{125} =$
   (d) ${}_e\log \sqrt[5]{e^2} =$
   (e) ${}_7\log \sqrt[3]{49} =$
   (f) $9^{({}_3\log 4)} =$

2. Berechne und vergleiche die Ergebnisse (besonders (c) und (d))!

   (a) ${}_a\log \frac{1}{a^n} =$

(b) ${}_{a}\log \sqrt[n]{a} =$

(c) ${}_{a}\log \sqrt[n]{\frac{1}{a^p}} =$

(d) ${}_{\frac{1}{a}}\log \sqrt[n]{a^p} =$

3. Löse nach x auf!

   (a) ${}_{x}\log \frac{1}{36} = -2$

   (b) ${}_{x}\log 16 = -\frac{4}{3}$

   (c) ${}_{x}\log 27 = -\frac{3}{4}$

   (d) ${}_{\frac{9}{4}}\log x = -0.5$

   (e) ${}_{\frac{4}{9}}\log x = -2$

4. Berechne (zerlege in einzelne Terme, soweit möglich)!

   (a) $\log(a \cdot \sqrt[3]{b}) =$

   (b) $\log \frac{3\cdot\sqrt{x}}{y^2} =$

   (c) $\log \dfrac{\sqrt{2 \cdot a} \cdot \sqrt[5]{b^2}}{\sqrt[3]{4 \cdot b} \cdot \sqrt[4]{a^3}} =$

   (d) $\log \dfrac{x^2 - y^2}{\sqrt{x - y}} =$

5. Stelle als Logarithmus eines einzigen Terms dar:

   (a) $\log x + 2 \cdot \log y - \frac{2}{3} \cdot \log z =$

   (b) $3 \cdot \log x - \log y - \frac{1}{5}(2 \cdot \log(x - y) + \log y) =$

6. Berechne den Umrechnungsfaktor k!

   (a) ${}_{3}\log x = k \cdot {}_{10}\log x$

   (b) $\ln x = k \cdot \lg x$

   (c) $\lg x = k \cdot \ln x$