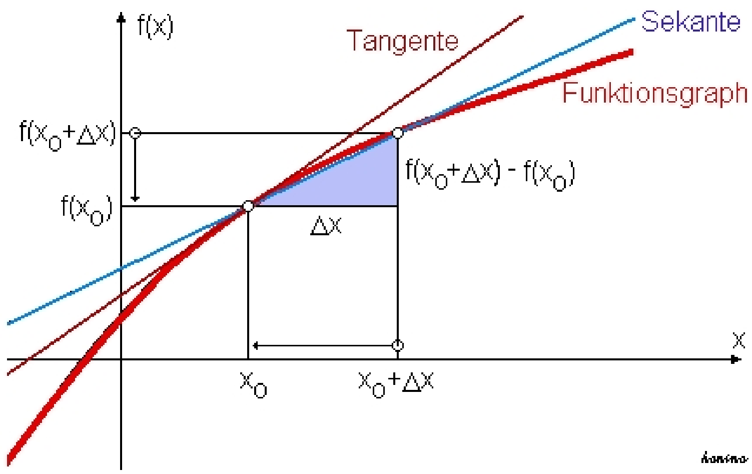
1 DIFFERENTIATION

1.1 Tangentenproblem

Gegeben sei eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, wobei D den Definitionsbereich bezeichnet. Wir sind an der Tangente an f in einem bestimmten Punkt $(x_0, f(x_0))$ interessiert. Die entscheidende Idee ist die *Approximation* der Tangentensteigung durch eine Sekantensteigung.



Die Steigung der Sekante ist durch

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x - x_0)} \quad = \quad \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

gegeben (*Differenzenquotient*). Für $\Delta x \to 0$ nähert sich die Sekante immer besser der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ an. Ihre Steigung ist also der Grenzwert der Sekantensteigung für $\Delta x \to 0$:

$$k_T = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} =: f'(x_0)$$

Man nennt eine Funktion differenzierbar an der Stelle x_0, wenn dieser Grenzwert existiert. Die Gleichung der Tangente im Punkt $(x_0, f(x_0))$ lautet:

$$y = f(x_0) + k_T \cdot (x - x_0) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Dies ergibt sich durch den Ansatz $y = k_T \cdot x + d_T$:
Da der Punkt $(x_0, f(x_0))$ auf der Geraden liegt, folgt $f(x_0) = k_T \cdot x_0 + d_T$, und daher $d_T = f(x_0) - k_T \cdot x_0$. Setzt man dies in den Ansatz ein, so erhält man

$$y = k_T \cdot x + f(x_0) - k_T \cdot x_0 = f(x_0) + k_T \cdot (x - x_0)$$

wie gewünscht.

1.2 Definition

Die vorigen Überlegungen machen folgende Definition sinnvoll: Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine reellwertige Funktion auf einem offenen Intervall I. Man definiert die erste Ableitung von f an der Stelle $x_0 \in I$ als

$$f'(x_0) := \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}; \ (h = x - x_0).$$

Existiert dieser Grenzwert, so heißt f differenzierbar bei x_0. Man beachte: Damit dieser Grenzwert existiert, muss der Zähler gegen 0 gehen, da der Nenner gegen 0 geht.
Ist f in allen Punkten $x_0 \in I$ differenzierbar, so heißt f differenzierbar und die Abbildung $f' : I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f'(x)$ heißt 1. Ableitung von f.

1.3 Ableitung elementarer Funktionen

Um uns mit dieser Definition etwas vertraut zu machen, beweisen wir zwei Ableitungsregeln:

1.3.1 Konstante Funktion

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{c-c}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$, also $f'(x) = 0$.

1.3.2 Identische Funktion

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$:
$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$, also $f'(x) = 1$.

1.4 Ableitung wichtiger Funkionen

Funktion	1. Ableitung
e^x	e^x
x^n	$n \cdot x^{n-1}$, $n \in \mathbb{R}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$1 + \tan(x)^2 = \frac{1}{\cos(x)^2}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin(x)^2}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

1.5 Gibt es immer eine Tangente?

Zwischen *Differenzierbarkeit* und *Stetigkeit* besteht folgender Zusammenhang: Ist eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in einem Punkt x_0, dann ist f dort auch stetig. Die Begründung ist folgende:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Da f in x differenzierbar ist, folgt

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} f(x_n) - f(x) &= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \cdot (x_n - x) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x)}{x_n - x} \cdot \lim_{n\to\infty} (x_n - x) \\
&= f'(x) \cdot 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Das heißt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, was die Stetigkeit von f in x bedeutet.

Es gibt aber *stetige* Funktionen, die *nicht differenzierbar* sind:

1.6 Betragsfunktion

$f(x) = |x|$ ist überall stetig, hat aber im Nullpunkt einen Knick. Dort existiert also keine eindeutige Tangente, weshalb f in 0 nicht differenzierbar ist. Wir wollen das exakter begründen:
Laut Definition müsste der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ existieren.

Nähert man sich dem Nullpunkt von *rechts* erhält man als Grenzwert 1, von *links* ergibt sich jedoch -1. Daher kann dieser Limes nicht existieren.

1.7 Ableitungsregeln

1.7.1 Summenregel

Wie leitet man die Summe zweier Funktionen $f(x) = g(x) + h(x)$ ab? Einsetzen in die Definition liefert:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) + h(x) - g(x_0) - h(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} \frac{h(x) - h(x_0)}{x - x_0} \\ &= g'(x_0) + h'(x_0). \end{aligned}$$

Summen (und Differenzen) werden also gliedweise differenziert!

1.7.2 Konstantenregel

Wir suchen die Ableitung $(a \cdot f)'$ der Funktion $a \cdot f$ mit $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (a \cdot f)'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{af(x) - af(x_0)}{x - x_0} \\ &= a \cdot \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= a \cdot f'(x_0). \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich also:
1) *Multiplikative* Konstanten bleiben beim Differenzieren unverändert.
2) *Additive* Konstanten verschwinden beim Differenzieren.

Mit 1.7.1 und 1.7.2 erhalten wir die *Linearität des Differenzierens*:
Sind f und g differenzierbare Funktionen und $a \in \mathbb{R}$ eine Konstante, so gilt

$$(f + a \cdot g)' = f' + a \cdot g'$$

1.8 Produktregel

Für alle x_0, bei denen g und h differenzierbar sind, ist auch ihr Produkt $f = g \cdot h$ differenzierbar und es gilt: $f' = g' \cdot h + g \cdot h'$.
Beispiel: $f(x) = x \cdot \log(x) - x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \log(x) + x \cdot \frac{1}{x} - 1 = \log(x)$.

1.9 Quotientenregel

Für alle x_0, bei denen g und h differenzierbar sind, ist auch (falls $h(x_0) \neq 0$) der Quotient $f = \frac{g}{h}$ differenzierbar. Aus der Produktregel erhält man

$$f' = \frac{g' \cdot h - g \cdot h'}{h^2}.$$

Beispiel: $f(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x)^2 + \sin(x)^2}{\cos(x)^2} = \frac{1}{\cos(x)^2}$.

1.10 Kettenregel

Sei $f = g \circ h$, dh. $f(x) = g(h(x))$. Ist die Funktion h an der Stelle x_0 und g an der Stelle $h(x_0)$ differenzierbar, so ist $f = g \circ h$ bei x_0 differenzierbar und es gilt:

$$f'(x_0) = g'(h(x_0)) \cdot h'(x_0)$$

Beispiel: $f(x) = \cos(x)^3 \Rightarrow f'(x) = 3 \cdot \cos(x)^2 \cdot (-\sin(x))$

1.11 Umkehrregel

Besitzt f eine Umkehrfunktion g und gilt $f'(x_0) \neq 0$, dann ist g in $f(x_0)$ differenzierbar und man hat:

$$g'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beispiele:

(1) Wir suchen die Ableitung von $y = \arccos(x) = g(x)$: Es gilt also $\cos(y) = x = f(y)$ und weiters $y' = \arccos(x)' = \arccos(\cos(y))' = \frac{1}{-\sin(y)} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos(y)^2}} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos(\arccos(x))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(2) Wir suchen die Ableitung von $y = \arctan(x) = g(x)$. Wir erhalten $\tan(y) = x = f(y)$ und mit der Umkehrregel $y' = \arctan(x)' = \arctan(\tan(y))' \stackrel{4.6}{=} \frac{1}{\tan(y)'} = \frac{1}{1+\tan(y)^2} = \frac{1}{1+x^2}$.

(3) Logarithmusfunktion: Sei $y = \log_a(x)$. Nach der Umkehrregel gilt mit $x = a^y$:
$y' = \log_a(x)' = \log_a(a^y)' \stackrel{4.6}{=} \frac{1}{\ln(a) \cdot a^y} = \frac{1}{\ln(a) \cdot x}$