1 KURVENDISKUSSION

Unter *Kurvendiskussion* versteht man die Untersuchung einer gegebenen Funktion auf bestimmte Merkmale und Eigenschaften:

1.1 Definitionsbereich

Zuerst bestimmt man den maximalen *Definitionsbereich* D, also für welche reellen Zahlen die Funktion überhaupt definiert ist. Das ist für ganzrationale Funktionen (Polynomfunktionen) ganz einfach: $D = \mathbb{R}$; bei gebrochenrationalen Funktionen muss man auf die Nullstellen des Nenners achten.

Zum Beispiel erhält man den Definitionsbereich $D = (-4, 5] \setminus \{\pm 3\}$ von $f(x) = \frac{\ln(x+4)}{\sqrt{25-x^2}-4}$ durch folgende Überlegungen:

- Es muss $x > -4$ gelten, damit der Logarithmus definiert ist.
- Es muss $-5 \leq x \leq 5$ gelten, damit die Wurzel in $\mathbb{R}$ definiert ist.
- $\sqrt{25 - x^2} - 4 \neq 0$, d.h. $x \neq \pm 3$, damit nicht durch 0 dividiert wird.

1.2 Nullstellen

Eine Funktion f hat an der Stelle x_N eine *Nullstelle*, wenn $f(x_N) = 0$ gilt.

Beispiel:
$f(x) = x^2 - 49$ hat die Nullstellen ± 7.

1.3 Fixpunkte

Man bekommt die *Fixpunkte*, indem man die Gleichung $f(x) = x$ löst.

Beispiel:
$f(x) = -5x + 3$ hat bei $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ einen Fixpunkt.

1.4 Extremwerte

Um die *Extrempunkte* (Hoch- oder Tiefpunkte) zu bestimmen, muss man die Gleichung $f'(x) = 0$ lösen, da dort die Steigung 0 ist, also f eine waagrechte Tangente hat (notwendige Bedingung). Dass diese Bedingung jedoch nicht hinreichend ist, zeigt zum Beispiel die Funktion $f(x) = x^3$. Es gilt zwar $f'(0) = 0$, aber der Punkt $(0, 0)$ ist kein Extrempunkt, sondern ein *Sattelpunkt*.

Mit Hilfe der *zweiten Ableitung* kann die Art des Extremums ermittelt werden:

$$\begin{aligned} f''(x_E) &< 0 \text{ relatives Maximum} \\ f''(x_E) &> 0 \text{ relatives Minimum} \end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle x_E besteht aus zwei Teilen:

$$\begin{aligned} f'(x_E) &= 0, \\ f''(x_E) &\neq 0 \end{aligned}$$

1.5 Wendepunkte

Ein *Wendepunkt* x_W ist ein Punkt, in dem eine Funktion ihr Krümmungsverhalten ändert. Also erhalten wir als notwendige Bedingung

$$f''(x_W) = 0.$$

Dass diese Bedingung nicht hinreichend ist, zeigt $f(x) = x^4$ mit

$$f'(x) = 4x^3, f''(x) = 12x^2, f'''(x) = 24x, f^{(4)}(x) = 24, f^{(5)}(x) = 0$$

An der Stelle $x = 0$ liegt jedoch ein Minimum, und kein Wendepunkt vor.

Daher müssen noch weitere Untersuchungen durchgeführt werden. Mit Hilfe der *dritten Ableitung* erhält man als hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt an der Stelle x_W:

$$\begin{aligned} f''(x_W) &= 0, \\ f'''(x_W) &\neq 0 \end{aligned}$$

1.6 Sattelpunkt

Ein *Sattelpunkt* liegt vor, wenn bei einem Wendepunkt eine waagrechte Tangente vorhanden ist, also wenn gilt:

$$\begin{aligned} f'(x_S) &= 0 \\ f''(x_S) &= 0 \\ f'''(x_S) &\neq 0 \end{aligned}$$

1.7 Monotonieverhalten

Eine Funktion heißt in einem Intervall I *monoton wachsend* bzw. *monoton fallend*, wenn für beliebige $x_1, x_2 \in I$ gilt:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \text{ bzw.}$$
$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Es gilt folgender Satz:
Gilt $\forall x \in I : f'(x) \geq 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$, so ist die Funktion f im Intervall I monoton wachsend bzw. monoton fallend.

Dieses Satz ist sehr hilfreich, um das *Monotonieverhalten* einer Funktion zu bestimmen.

1.8 Krümmungsverhalten

Fährt man mit einem Auto den Graph einer differenzierbaren Funktion entlang, und lenkt dabei innerhalb eines Bereichs immer nach links (bzw. rechts), so nennt man die Funktion dort *linksgekrümmt* (bzw. *rechtsgekrümmt*). Das Krümmungsverhalten ändert sich im Wendepunkt bzw. im Sattelpunkt der Funktion. Hat man diese Punkte bereits berechnet und will man wissen, welche Krümmung der Graph innerhalb der entstandenen Intervalle hat, so hilft folgendes Kriterium:

Gilt für alle $x \in I : f''(x) > 0$, so ist f im Intervall I linksgekrümmt.
Gilt für alle $x \in I : f''(x) < 0$, so ist f im Intervall I rechtsgekrümmt.

1.9 Verhalten am Rand und an den Lücken des Definitionsbereichs

1.9.1 Polstelle

Eine gebrochenrationale Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ($p(x)$, $q(x)$ Polynome) hat im Punkt P genau dann eine *Polstelle*, wenn das Nennerpolynom eine Nullstelle bei P hat und das Zählerpolynom bei P eine Nullstelle niedrigerer Ordnung oder gar keine Nullstelle hat.

1.9.2 Lücke

Eine gebrochenrationale Funktion hat im Punkt L eine (stetig hebbare) *Definitionslücke*, falls nicht nur das Nennerpolynom bei L eine Nullstelle hat, sondern auch der Zähler (und zwar von mindestens gleich großem Grad).

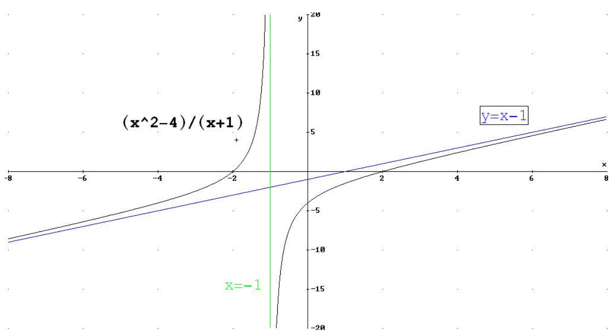
1.9.3 Verhalten im Unendlichen

Um das *Verhalten im Unendlichen* zu analysieren, wird der Funktionswert der Funktion untersucht, wenn x gegen $\pm\infty$ strebt. Man betrachtet also $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)$. Dazu ist es hilfreich, die gebrochenrationale Darstellung durch *Polynomdivision* in eine ganzrationale Darstellung mit Rest überzuführen.

Beispiele:

(1) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = x + 1$ (für $x \neq 1$) hat bei 1 eine Lücke.

(2) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+1} = x - 1 - \frac{3}{x+1}$ hat bei -1 einen Pol und nähert sich für $x \to \infty$ der Geraden $x - 1$ an.



1.10 Symmetrie

1.10.1 Achsensymmetrie

Der Graph einer Funktion f liegt symmetrisch zur Geraden $x = a$, falls gilt:

$$f(a - x) = f(a + x)$$

Setzt man hier $a = 0$, so erhält man: Der Graph einer Funktion f ist symmetrisch zur y-Achse, falls gilt:

$$f(-x) = f(x)$$

1.10.2 Punktsymmetrie

Der Graph einer Funktion f liegt symmetrisch zum Punkt (a, b), falls gilt:

$$f(a + x) - b = -f(a - x) + b$$

Setzt man hier $a = b = 0$, so erhält man: Der Graph einer Funktion f ist symmetrisch zum Ursprung $(0, 0)$, falls gilt:

$$f(x) = -f(-x)$$

1.11 Graph

Nach all den Untersuchungen können wir nun das Schaubild von f, dh. alle Punkte $(x, f(x))$ in einem Intervall darstellen.