Workshop zu Folgen

Gudrun Szewieczek SS 2010

Eine Aneinanderreihung von Zahlen nennt man eine Folge, zB:

(a_n) = 1, 3, 5, 7,...
(a_n) = -1, 1, -1, 1,...
$(a_n) = a_1, a_2, a_3, ...$

a_1.........erste (Folgen-)Glied
a_n.........n-te (Folgen-)Glied

Definiton (Folge)
Eine **Folge** reeller Zahlen ist eine Abbildung von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{R}$. Jedem n $\in \mathbb{N}$ wird also ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

$1 \longmapsto a_1$
$2 \longmapsto a_2$
...
$n \longmapsto a_n$
...

Für eine Folge gibt es verschiedene Darstellungsarten:

- verbal
- explizit
  Das n-te Glied a_n wird aus dem Index n berechnet.
  Bsp: $a_n = 2n \Leftrightarrow (2, 4, 6, 8, ...)$
- rekursiv
  Das n-te Glied a_n wird aus dem (den) vorigen(m) Glied(ern) berechnet. Hierfür muss (müssen) das (die) erste(n) Glied(er) angegeben werden.
  Bsp: $a_n = a_{n-1} + 2,\ a_1 = 2 \Leftrightarrow (2, 4, 6, 8, ...)$
  Bsp: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ a_1 = 1,\ a_2 = 1 \Leftrightarrow (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...)$ *Fibonacci-Zahlen*

Beachte:
Die Reihenfolge der Aufzählung der Folge ist wichtig!
$(2, 4, 6, 8, ...) \neq (2, 6, 4, 8, ...)$

Zwei spezielle Typen von Folgen:

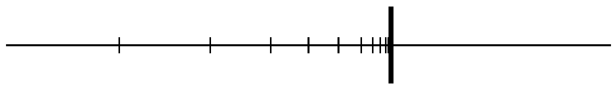
Arithmetische Folge	**Geometrische Folge**
$a_1 \overset{+d}{\to} a_2 \overset{+d}{\to} a_3 \overset{+d}{\to} a_4$.....	$a_1 \overset{\cdot q}{\to} a_2 \overset{\cdot q}{\to} a_3 \overset{\cdot q}{\to} a_4$.....
Das nächste Glied der Folge entsteht durch Addition des vorigen Gliedes mit einer Konstanten d.	Das nächste Glied entsteht durch Multiplikation des vorigen Gliedes mit einer Konstanten q.
$\Leftrightarrow$ Die Differenz zweier Nachbarglieder ist konstant.	$\Leftrightarrow$ Der Quotient zweier Nachbarglieder ist konstant.
$\Leftrightarrow a_{n+1} = a_n + d$	$\Leftrightarrow a_{n+1} = q.a_n$
$\Leftrightarrow a_n = a_1 + (n-1).d$	$\Leftrightarrow a_n = a_1.q^{n-1}$
Bsp: $a_n = 10 + 3n \longrightarrow (13, 16, 19, 22, ...)$	Bsp: $a_n = 2.a_{n-1}, a_1 = 3 \longrightarrow (3, 6, 12, 24, ...)$

Weitere Spezialfälle:

konstante Folge: zB: $(a_n) = (7) = 7, 7, 7, 7, ...$
alternierende Folge: zB: $(a_n) = ((-1)^n) = -1, 1, -1, 1, -1, ...$

Mögliche Eigenschaften von Folgen

- Beschränktheit: nach oben bzw. nach unten beschränkt

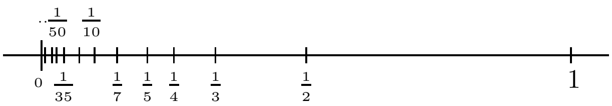


- Monotonie: (streng) monoton steigend bzw. fallend

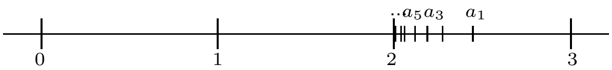
- **Konvergenz**

Zunächst einige Beispiele zur Veranschaulichung:

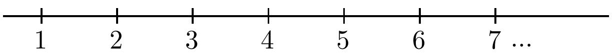
1) $a_n = \frac{1}{n}$



2) $a_n = 2 + \frac{1}{n}$



3) $a_n = n$



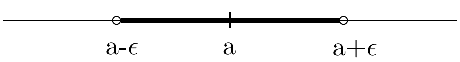
Es gibt Folgen bei denen man das Gefühl hat, dass sie mit wachsendem Index n einer Zahl immer "näher kommen"(Bsp 1 und 2). Andere Folgen haben diese Eigenschaft nicht (Bsp 3). Im ersten Fall spricht man von einer konvergenten Folge und die Zahl, der sie sich "nähert"bezeichnet man mit Grenzwert oder Limes. Genauer definiert man dieses "Näherkommen"folgendermaßen:

Definition (Konvergenz)
Sei a_n eine Folge reeller Zahlen. Die Folge heißt **konvergent gegen a** $\in \mathbb{R}$ falls gilt:

Zu jedem $\epsilon > 0$ existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt $|a_n - a| < \epsilon$.

Man schreibt dafür: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \to a \ (n \to \infty)$

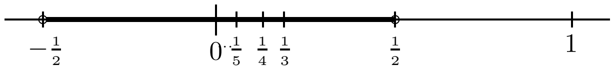
Wie schaut $|a_n - a| < \epsilon$ graphisch aus?



ϵ- Umgebung von a

Damit eine Folge konvergent ist, muss es nun zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ geben, sodass ab diesem N alle Glieder in der ϵ-Umgebung von a sind.

In Bsp 1 von vorher schaut das folgendermaßen aus:
Nehmen wir an, der Grenzwert von $a_n = 0$ und setzen wir $\epsilon = \frac{1}{2}$:



Für $\epsilon = \frac{1}{2}$, liegen $a_3 = \frac{1}{3},\ a_4 = \frac{1}{4}, ...$ in dieser ϵ-Umgebung, dh. ab N=3 gilt $|a_n - 0| < \epsilon$.

<u>Definition</u> (Divergenz)
Wenn eine Folge keinen Grenzwert besitzt, dann heißt sie **divergent**.

<u>Einige Beispiele</u> (ohne strenge Beweise, hierfür siehe Analysis 1-VO)

1) Eine der wohl wichtigsten und schon erwähnten Folgen ist $a_n = \frac{1}{n}$ und es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$

Folgen die gegen 0 konvergieren, werden auch **Nullfolgen** genannt.

2) Konstante Folgen:
$a_n = 2 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = 2$
$a_n = -1 \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{n \to \infty} a_n = -1$

An diesen beiden Beispielen sieht man, dass eine konvergente Folge den Grenzwert annehmen kann, aber nicht muss!

3) $a_n = (-1)^n$
Diese Folge ist divergent, da man keinen Grenzwert finden kann!

4) $a_n = \frac{4}{n}$
Wir wissen: $\frac{1}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty) \quad \Rightarrow \quad 4.\frac{1}{n} \to 0 \ \ (n \to \infty)$

5) $a_n = \frac{n-3}{2n+2}$
Hier ist der Grenzwert nicht so einfach zu sehen, umformen hilft uns dabei:

$$\frac{n-3}{2n+2} = \frac{\frac{n-3}{n}}{\frac{2n+2}{n}} = \frac{\frac{n}{n} - \frac{3}{n}}{\frac{2n}{n} + \frac{2}{n}} = \frac{1-\frac{3}{n}}{2+\frac{2}{n}} \to \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}\ (n \to \infty)$$

Bei diesem Beispiel haben wir folgende Rechenregeln benützt, die man natürlich erst beweisen müsste:

$$\lim(a_n + b_n) = \lim(a_n) + \lim(b_n)$$
$$\lim(a_n b_n) = \lim(a_n)\lim(b_n)$$