Handout zum Thema

Integralrechnung

(von Martina Pflegpeter)

1. Begriffsbildung

Definition 1. *Gegeben sei eine Funktion $f : y = f(x)$ auf einem Definitionsintervall D. Eine Funktion F heißt* ***Stammfunktion*** *der Funktion f, wenn $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in D$. Das Aufsuchen einer Stammfunktion heißt* ***Integrieren****.*

Satz 1. *Mit jeder Stammfunktion $F(x)$ einer gegebenen Funktion $f(x)$ ist auch* jede *Funtkion $F(x)+c$ mit $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktion der Funktion f.*
Umgekehrt: *Außer $F(x)+c$ gibt es* keine weiteren *Stammfunktionen von f.*
D.h.: Zwei verschiedene Stammfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ einer gegebenen Funktion $f(x)$ unterscheiden sich nur um eine additive Konstante c.

Definition 2. *Gegeben sei eine Funktion $f : y = f(x)$. Wenn $f(x)$ eine Stammfunktion $F(x)$ besitzt, bezeichnen wir die Menge aller Stammfunktionen $y = F(x)+c$, mit $c \in \mathbb{R}$, als das* ***unbestimmte Integral*** *der Funktion f und schreiben:*

$$\int f\,dx \text{ oder } \int f(x)\,dx$$

$f(x)$ heißt in diesem Zusammenhang der ***Integrand****, c heißt* ***Integrationskonstante****.*

2. Berechnung von Stammfunktionen (bzw. unbestimmten Integralen)

Grundintegrale:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad \alpha \neq -1$$

$$\int x^{-1}\,dx = \ln|x| + c$$
$$\int \sin x\,dx = -\cos x + c$$
$$\int \cos x\,dx = \sin x + c$$
$$\int \tan x\,dx = -\ln|\cos x| + c$$
$$\int \cot x\,dx = \ln|\sin x| + c$$
$$\int e^x\,dx = e^x + c$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \quad a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$$

Summen- und Differenzenregel:
Das Integral der Summe (Differenz) zweier Funktionen ist gleich der Summe (Differenz) der beiden Integrale:

$$\int (f(x) \pm g(x))\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

(Also: Summen und Differenzen werden *gliedweise* integriert)

Konstantenregel:
Einen konstanten Faktor im Integranden kann man vor das Integrationszeichen ziehen:

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \quad (\text{für } k \neq 0)$$

Substitutionsmethode:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\phi(y))\phi^{'}(y)\,dy$$

Partielle Integration:

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$$

3. Berechnung von bestimmten Integralen

Definition 3. *Der Wert $F(b) - F(a)$ wird als das **bestimmte Integral** der Funktion $f = F^{'}$ mit der Obergrenze b und der Untergrenze a (kurz: Integral von f von a bis b bzw. Integral von f zwischen a und b) bezeichnet. In Zeichen:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\mid_a^b = F(b) - F(a)$$

Numerische Integration:
Viele Funktionen besitzen keine durch elementare Funktionen ausdrückbare Stammfunktion und sind daher auch nicht durch Rückführung auf gewisse elementare Integrale berechenbar.
Für diese Fälle gibt es numerische Näherungsverfahren (Rechtecksformel, Trapezformel, Simpson'sche Formel). Da diese Verfahren den Wert des Integrals nur annähren ist es wichtig den Fehler, die Differenz zum "wahren Wert", abzuschätzen.

4. Hauptsatz der Integralrechnung

Satz 2. *Für jede auf $[a,b]$ stetige Funktion f existiert das (bestimmte) Integral*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Sein Wert ist eine reelle Zahl und berechnet sich durch $F(b) - F(a)$, wobei F eine beliebige Stammfunktion von f bezeichnet. Diese Zahl beschreibt den

orientierten Flächeninhalt *der Ordinatenmenge zwischen a und b, d.h. die oberhalb der x-Achse liegenden Teile der Ordinatenmenge haben einen positiven, die unterhalb der x-Achse liegenden Teile einen negativen Flächeninhalt, und das Integral beschreibt die* Summe *dieser Flächeninhalte.*

Berechnung von Rauminhalten:

1. Volumen von Drehkörpern:

x-Achse als Rotationsachse:
Der bei der Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, um die x-Achse entstehende Drehkörper hat das Volumen

$$V = \pi \int_a^b y^2 \, dx = \pi \int_a^b f^2(x) \, dx$$

In einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem ist der Drehkörper durch die beiden Ebenen $x = a$ und $x = b$ begrenzt.

y-Achse als Rotationsachse:
Der bei der Rotation des Kurvenstücks $y = f(x)$, $c \leq y \leq d$, um die y-Achse entstehende Drehkörper hat das Volumen

$$V = \pi \int_c^d x^2 \, dy$$

Dabei wird vorausgesetzt, dass sich die Funktionsgleichung $y = f(x)$ eindeutig nach x auflösen lässt, d.h., dass die Umkehrfunktion $f^{-1}\colon\, x = f^{-1}(y)$ von f auf $[a, b]$ existiert.
In einem räumlichen kartesischen Koordinatensystem ist der Drehkörper durch die Ebenen $y = c$ und $y = d$ begrenzt.

2. Volumen von Körpern mit bekannter Querschnittsfläche:

Das Volumen V eines durch die Ebenen $x = a$ und $x = b$ begrenzten Körpers, der um die x-Achse zentriert liegt und dessen Querschnittsfläche $q(x)$ in Abhängigkeit von x bekannt ist, berechnet man durch:

$$V = \int_a^b q(x) \, dx$$

Berechnung der Länge eines Kurvenbogens:
Ist $f\colon\, y = f(x)$ auf $[a, b]$ differenzierbar und f auf $[a, b]$ stetig, so besitzt der

Graph von f zwischen a und b eine Bogenlänge s, die gegeben ist durch:

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f(x))^2}\, dx$$

Berechnung des Flächeninhalts des Mantels eines Drehkörpers:
Ist die Funktion $f\colon y = f(x)$ auf $[a,b]$ nicht negativ, differenzierbar und ist f stetig, so besitzt der Drehkörper, der duch Drehung des Graphen von f zwischen a und b um die x-Achse entsteht, eine Mantelfläche mit dem Flächeninhalt:

$$M = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f(x))^2}\, dx$$

Viele Beispiele und eine ausführlichere Einführung in die Integralrechnung finden sich in folgendem Buch (aus welchem auch in diesem Handout zitiert wurde):

Götz, Reichel, Müller, Harnisch, Mathematik- Lehrbuch 8, Österreichischer Bundesschulverlag Schulbuch GmbH & Co.KG, Wien 2007.