1 GLEICHUNGEN

Eine Gleichung ist eine Aussage, in der die Gleichheit zweier Terme durch das *Gleichheitszeichen* (=) ausgedrückt wird. Ganz formal hat eine Gleichung also die Gestalt

$$T_1 = T_2$$

mit zwei Termen T_1 und T_2. Die Aussage einer Gleichung kann *wahr* (zB $\pi = \pi$) oder *falsch* sein (zB $\pi = 3$).

1.1 Wichtige Begriffe

- *Variable:* Das sind Platzhalter für unbekannte Werte.
- *Grundmenge G:* Diese spezifiziert, welche Werte man für die Variable(n) einsetzen darf (zB $\mathrm{G} = \mathbb{R}$ für die Gleichung $3x + 8 = -7$).
- *Lösungsmenge L:* Sie enthält jene Werte der Variablen, für die die Gleichung erfüllt ist (zB $\mathrm{L} = \{1, -1\}$ für die Gleichung $x^2 = 1$).
- *Definitionsmenge D:* Sie gibt an, für welche Werte die Gleichung sinnvoll definiert ist.
- *Äquivalenzumformung:* Das ist eine Umformung der Gleichung in eine andere *äquivalente* Gleichung (dh. eine, die dieselbe Lösungsmenge besitzt). Man verwendet sie, um eine Gleichung Schritt für Schritt in eine von einfacherer Gestalt überzuführen, deren Lösung man dann sofort bestimmen kann.

Da Gleichungen in verschiedensten Formen auftreten, ist es sinnvoll, eine Einteilung in verschiedene Typen vorzunehmen:

1.2 Lineare Gleichungen

Lineare Gleichungen haben im allgemeinen folgende Form

$$ax + b = 0 \, (a, \, b \in \mathbb{R})$$

Ist $a \neq 0$, so gibt es genau eine reelle Lösung, nämlich

$$x = -\frac{b}{a}$$

Ist $a = 0$, so kommt entweder ganz $\mathbb{R}$ (falls $b = 0$) oder keine Lösung (falls $b \neq 0$) in Frage.

1.3 Quadratische Gleichungen

Quadratische Gleichungen haben im allgemeinen folgende Form:

$$ax^2 + bx + c = 0 \,(a,\ b,\ c \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

Wir wollen nun eine Lösungsformel für (1) herleiten:

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= 0 \\ ax^2 + bx &= -c \\ x^2 + \tfrac{b}{a}x &= -\tfrac{c}{a} \\ \left(x + \tfrac{b}{2a}\right)^2 &= -\tfrac{c}{a} + \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2 \\ x_{1,2} &= -\tfrac{b}{2a} \pm \sqrt{-\tfrac{c}{a} + \tfrac{b^2}{4a^2}} \end{aligned}$$

wobei in der vierten Zeile auf ein *vollständiges Quadrat* ergänzt wurde. Umgeformt ergibt das

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

Im normierten Fall (dh. $a = 1$) erhält man die sogenannte „p-q-Formel“:

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Für die Herleitung von (2) aus (1) haben wir NUR Äquivalenzumformungen vorgenommen. Ist jedoch nicht absolut gewährleistet, dass beim Lösen einer Gleichung ausschließlich Äquivalenzumformungen verwendet worden sind, muss man eine Fallunterscheidung machen, am Ende eine Probe durchführen oder den Schritt völlig verwerfen.

Einige Umformungen, die **keine** Äquivalenzumformungen sind:

- Division durch 0 ist nicht definiert
- Multiplizieren mit einer Variablen kann falsche (!) Lösungen erzeugen:

$$\begin{aligned} x &= 1 \\ x^2 &= x \\ x &= 0 \end{aligned}$$

- Multiplizieren der Gleichung mit 0 führt zur Gleichung $0 = 0$; somit geht die ganze Information der Gleichung verloren.

- Quadrieren ist keine Äquivalenzumformung:

$$\begin{aligned} x &= 4 \\ x^2 &= 16 \\ x_{1,2} &= \pm 4 \end{aligned}$$

-4 ist aber keine Lösung der ursprünglichen Gleichung $x = 4$.

1.3.1 Satz von Vieta

Wir dividieren Gleichung (1) durch a, damit nur mehr zwei Koeffizienten übrig bleiben und erhalten eine Gleichung der Form

$$x^2 + px + q = 0 \, (p, \, q \in \mathbb{R}).$$

Durch Ausmultiplizieren und Koeffizientenvergleich erhalten wir (x_1 und x_2 stehen hier für die beiden Lösungen der Gleichung):

$$\begin{aligned} x^2 + px + q &= (x - x_1)(x - x_2) \\ x^2 + px + q &= x^2 \underbrace{-x_1 x - x_2 x}_{\underbrace{-(x_1 + x_2)}_{=p} x} + \underbrace{x_1 x_2}_{=q} \\ & \Rightarrow -p = x_1 + x_2 \\ & \Rightarrow q = x_1 \cdot x_2 \end{aligned}$$

Beispiel:
Man löse die Gleichung $x^2 + 5x + 6 = 0$
Die Vorgangsweise ist folgende: Man untersucht die Teiler von $q = 6$:

$$6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 = (-2) \cdot (-3) = (-1) \cdot (-6)$$

Unter diesen Kombinationen sucht man jene, deren Summe $-p = -5$ ergibt. Das sind in diesem Fall $x_1 = -2$ und $x_2 = -3$ und man hat die Lösungen gefunden.

Es gibt natürlich noch viele weitere Arten von Gleichungen (kubische Gleichungen, Exponentialgleichungen, Differentialgleichungen, Integralgleichungen, ...). Diese werden aber entweder in anderen Workshops oder erst im Laufe des Studiums behandelt werden.