Workshop zu Reihen

Gudrun Szewieczek SS 2010

Setzt man in einer Folge zwischen den Gliedern Pluszeichen, dann entsteht eine Reihe, dh eine Reihe ist eine Summe über Folgenglieder, zB:
Folge: $a_n = \frac{3}{n}$
Reihe: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 + \frac{3}{2} + 1 + \frac{3}{4} = \frac{25}{4}$
aber auch $a_1 + a_2 + a_3 + ... =$ 'Summe über alle Folgenglieder' $= \infty$

Man unterscheidet zwischen endlichen und unendlichen Reihen:

Endliche Reihen

Summiert man endlich viele Glieder einer Folge a_n, so erhält man eine **endliche Reihe**.
Als Schreibweise verwendet man das Summenzeichen, das griechische Sigma: $\sum$

Sei $a_n = 2n$, $\sum_{n=1}^{4} 2n = \sum_{n=1}^{4} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$

n wird als **Laufindex** bezeichnet. Unterhalb der Summe steht der Beginn des Laufindex und oberhalb das Ende.

Bsp:

$$\sum_{n=3}^{5} 2n = 6 + 8 + 10 = 24$$

$$\sum_{n=4}^{4} 2n = 8$$

Endl. arithmetische Reihe	**Endl. geometrische Reihe**
Die summierte Folge ist eine arithmetische Folge.	Die summierte Folge ist eine geometrische Folge.
$\sum_{n=1}^{m} a_n = (a_1 + a_m).\frac{m}{2}$	$\sum_{n=1}^{m} a_n = b.\frac{1-q^m}{1-q}$ mit $a_n = b.q^{n-1}$ und $q \neq 1$
Bsp: (Gauss-Geschichte)	Bsp:
$a_n = n$	$a_n = 2^n \quad \Rightarrow \quad q = 2$ und b=2
$\sum_{n=1}^{100} a_n = 50.(1 + 100) = 5050$	$\sum_{n=1}^{3} a_n = 2.\frac{1-2^3}{1-2} = 14$

Unendliche Reihen

Man kann sich fragen, was passiert wenn man alle Folgenglieder, also unendlich viele Glieder summiert. Macht das überhaupt Sinn? Hat eine solche Reihe ein Ergebnis?

Bsp 1:

$$a_n = n \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{10} a_n = 55, \quad \sum_{n=1}^{1000} a_n = 500\ 500, \quad \sum_{n=1}^{100\ 000} a_n = 5\ 000\ 050\ 000$$

Bsp 2:

$$a_n = \frac{1}{2^n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=1}^{10} a_n = 0.999023, \quad \sum_{n=1}^{20} a_n = 0.999999, \quad \sum_{n=1}^{100} a_n = 1., \quad \sum_{n=1}^{100\ 000} a_n = 1.$$

Ähnlich wie bei den Folgen hat man auch hier das Gefühl, dass sich manche Reihen mit wachsender Anzahl an Summanden einer Zahl nähern. (Im Bsp 2 ist das 1 und im Bsp 1: ∞)

Sieht man nun die immer länger werdenden Summen als Folge an, also

$b_{\mathbf{n}} = \sum_{i=1}^{\mathbf{n}} a_i$ ....**n-te Partialsumme**

so führt uns das auf den Begriff der unendlichen Reihe:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \lim_{n\to\infty} b_n$$

Die Folge deren Grenzwert wir bilden müssen, sieht also folgendermaßen aus:

$$(a_1,\ a_1 + a_2,\ a_1 + a_2 + a_3,\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4, ...)$$

Hat eine unendliche Reihe einen Grenzwert $< \infty$, dann heißt sie **konvergent**. Ist ihr Grenzwert hingegen gleich ∞, so spricht man von einer **divergenten Reihe**.

Im Allgemeinen kann man nicht auf den ersten Blick sagen, ob eine Reihe konvergent oder divergent ist (in der Analysis-VO werden dafür einige Verfahren besprochen).

Ein Spezialfall ist allerdings die **unendliche geometrische Reihe**:

Wenn die Summanden einer Reihe eine geometrische Folge bilden, dann entsteht eine geometrische Reihe:

$$\sum_{n=0}^{\infty} b.q^n = b + b.q + b.q^2 + b.q^3 + ...$$

Achtung

$$\sum_{\mathbf{n}=\mathbf{0}}^{\infty} b.q^n = \sum_{\mathbf{n}=\mathbf{1}}^{\infty} a_n$$

Für eine endliche geometrische Reihe kennen wir bereits eine Formel zur Berechnung der Reihe:

$$S_m = \sum_{n=1}^{m} a_n = b.\frac{1-q^m}{1-q}$$

Um eine Formel für die unendliche Reihe zu erhalten, müssen wir m gegen ∞ gehen lassen. Wie man sieht hängt das Ergebnis nur von q^m ab, da $(m \to \infty)$ auf die anderen Teile in der Formel keinen Einfluss hat.
Wir müssen also wissen was $\lim\limits_{m\to\infty} q^m$ ist. Dieser Limes hängt natürlich vom Wert q ab:

<u>$q > 1$:</u>

$\Rightarrow \; q^1 < q^2 < q^3 < q^4 < ... \quad \Rightarrow \quad \lim\limits_{m\to\infty} q^m = \infty$

$\Rightarrow \; \sum\limits_{n=0}^{\infty} b.q^n = \infty \; oder - \infty$

<u>$q = 1$</u>

$\Rightarrow \; (q^m) = 1, 1, 1, 1, ... \quad \Rightarrow \quad \sum\limits_{n=0}^{\infty} b.1 = b + b + b + ... = \infty \; oder - \infty$

<u>$0 < q < 1$:</u>

$\Rightarrow \; 0 < .... < q^4 < q^3 < q^2 < q,$ dh. die Folgenglieder nähern sich immer weiter 0 an.

$\Rightarrow \; \lim\limits_{m\to\infty} q^m = 0$

$\Rightarrow \; b.\frac{1-q^m}{1-q} \; \to \; b.\frac{1-0}{1-q} = \frac{b}{1-q} \quad (m \to \infty)$

<u>$q < -1$</u>

zB: $q = -2 \quad \Rightarrow (q^m) = -2, 4, -8, 16, ...$

Die Wert sind immer abwechselnd positiv und negativ und gehen dabei gegen $+\infty$ und -∞.
$\Rightarrow \; (q^m)$ besitzt keinen Grenzwert $\quad \Rightarrow \sum\limits_{n=0}^{\infty} b.q^m$ ist divergent.

<u>$-1 < q < 0$</u>

zB: $q = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad (q^m) = ((-\frac{1}{2})^m) = -\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, ...$

Die Werte springen wieder hin und her, nähern sich aber von rechts und links dem Wert 0

$\Rightarrow \; \lim\limits_{m\to\infty} q^m = 0 \quad \Rightarrow \quad b.\frac{1-q^m}{1-q} \; \to \; b.\frac{1-0}{1-q} = \frac{b}{1-q} \quad (m \to \infty)$

<u>Zusammendfassend gilt:</u>
Die geometrische Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b.q^n$ ist konvergent für $|q| < 1$ und sonst divergent.