Übungen zur Einführung in die lineare Algebra und Geometrie

(Einführung in das mathematische Arbeiten)

Sommersemester 2010

Schulstoff

1. *Lineare Gleichungssysteme.* Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme.

(a) $$\begin{array}{rcrcr} 2x_1 & + & 5x_2 & = & 29 \\ 8x_1 & - & 3x_2 & = & 1 \end{array}$$

(b) $$\begin{array}{rcrcl} x & + & y & = & a \\ x & - & y & = & b \qquad a, b \in \mathbb{R}\,, \text{ (konstant)} \end{array}$$

(c) $$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & - & x_2 & & & = & 2 \\ x_1 & & & + & 3x_3 & = & 5 \end{array}$$

(d) $$\begin{array}{rcrcrcrcl} 5a & - & 2b & + & 3c & - & 4d & = & 0 \\ 2a & + & b & & & & & = & 0 \\ & & & & 3c & - & 2d & = & x \\ a & & & + & 6c & & & = & y \qquad x, y \in \mathbb{R}\,, \text{ (konstant)} \end{array}$$

2. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die gilt:

a) $\frac{17-3x}{5} + 38 < 4x - 13$.

b) $325 - 2x(2x - 39) < 8x(x - 4)^2 - (2x - 5)^3$.

c) $4 - 3x < 2x + 3 \leq 3x - 4$.

d) $x < x + 3 < 6 \leq 5x - 1$.

e) $\frac{5+x}{5-x} \leq 2$.

f) $3 - \frac{x+1}{x-2} < \frac{x-4}{x-2}$.

g) $\frac{1}{3} < \frac{2x-1}{3-2x} < \frac{1}{2}$.

3. Bestimmen Sie zeichnerisch, für welche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ gilt:

a) $x - 2y \geq 0$ und $2x + y \geq 1$.

b) $x + y \leq 1$ oder $x - y \leq 1$.

c) $3y^2 \leq 6 - 2x^2$.

Summen- und Produktzeichen, Induktion

4. *Summen- und Produktschreibweise 1.*
Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke ohne Verwendung der Summen- bzw. Produktzeichen an:

   (a) $\sum_{k=2}^{12} k^{2k+1}$
   (b) $\sum_{k=4}^{6} b_{k+3}$
   (c) $\sum_{k=0}^{n} x^{k-1}$
   (d) $\prod_{j=1}^{9} i^3$
   (e) $\prod_{i=1}^{7} h^{ij}$
   (f) $\prod_{l=1}^{5} l_i^j$
   (g) $\sum_{j=2}^{5} \prod_{k=2}^{4} e^{jk+2}$
   (h) $\sum_{k=0}^{m} \sum_{j=k}^{m} \binom{k}{j}$

5. *Summen- und Produktschreibweise 2.* Schreiben Sie die folgenden Ausdrücke mit Hilfe von Summen- bzw. Produktzeichen:

   (a) $1 + 3 + 9 + 27 + 81 + 243 + 729 + 2187$
   (b) $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10}$
   (c) $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \ldots (2n-1)$
   (d) $\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{12} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{42}$
   (e) $a_1 + 3a_2 + 5a_3 + 2a_1^2 + 6a_2^2 + 10a_3^2 + 4a_1^3 + 12a_2^3 + 20a_3^3 + 8a_1^4 + 24a_2^4 + 40a_3^4$

6. *Binomialkoeffizient.* Wiederholen Sie den Begriff des Binomialkoeffizienten und beweisen Sie die folgenden Identitäten.

   (a) $$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$
   Verwenden Sie dabei die Darstellung des Binomialkoeffizienten als $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!}$.

   (b) $$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n,$$

   (c) $$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

   Hinweis: Formulieren Sie die rechten Seiten von (b) und (c) mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes!

7. *Vollständige Induktion.* Beweisen Sie die folgenden Identitäten für alle angegebenen $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$:

   (a) $$\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n},$$

   (b) $$\sum_{k=1}^{n} k^3 + k = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}$$

(c) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k-1)} = \frac{n-1}{n}$

Komplexe Zahlen

8. *Rechnen mit komplexen Zahlen 1.* Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen $|z|$, $\arg z$, $1/z$, $\sqrt{z}$.

   (a) $z = 2 + 3i$,

   (b) $z = 1 - 3i$,

   (c) $z = i$,

   (d) $z = 2 - 2i$.

9. *Rechnen mit komplexen Zahlen 2.* Schreiben Sie die folgenden Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$:

   (a) $\frac{1+i}{7-i}$,

   (b) $|4 + 3i|$,

   (c) $\left|\frac{2-6i}{3+8i}\right|$,

   (d) $(9 + 6i)^4$,

   (e) $\sqrt{5 - 3i}$,

   (f) i^{101},

   (g) $\sum_{n=1}^{1234} i^n$.

10. *Rechnen mit komplexen Zahlen 3.*

    (a) Multiplizieren Sie $3+\frac{2}{3}i$ mit $-1+\frac{i}{4}$. Wie sieht das in der komplexen Zahlenebene aus?

    (b) Was ist in $\mathbb{C}$ das Inverse zu $\frac{7}{4} - \frac{2}{3}i$?

11. *Komplexe Nullstellen von Polynomen.* Bestimmen Sie alle (auch die komplexen) Nullstellen der Polynome

    (a) $p(x) = x^3 - 2x^2 + 4x - 8$,

    (b) $p(x) = x^3 + x - 10$,

    (c) $p(z) = z^2 - 4iz - 5$,

    (d) $p(z) = z^4 - 6z^2 + 25$,

12. *Lineares Gleichungssystem über* $\mathbb{C}$. Lösen Sie folgendes Gleichungssystem über dem Körper der komplexen Zahlen:

$$(2-i)x + (2+i)y = 12 - 6i$$
$$(2-3i)x - (1-i)y = 11 - 3i.$$

Grundlegende Algebra

13. *Gruppenaxiome.*

    (a) Überprüfen Sie, ob die folgende auf $\mathbb{R}$ definierte Verknüpfung assoziativ resp. kommutativ sind:

    $$a \oplus b := ab - 4.$$

    (b) Stellen Sie (durch Nachprüfen der Gruppenaxiome) fest, ob $(\mathbb{R}, \otimes)$ eine abelsche Gruppe ist, wobei die Verknüpfung durch $a \otimes b := a + b - 8$ definiert ist.

14. *Regeln in Gruppen, Ringen und Körpern.*

    (a) Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe. Beweisen Sie, dass für alle $g \in G$ das inverse Element g^{-1} eindeutig bestimmt ist.

    (b) Sei G eine Gruppe, und seien $g, h \in G$. Bestimmen Sie $(gh)^{-1}$.

    (c) Sei R ein Ring. Beweisen Sie für alle $a \in R$ die Beziehung $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$.

    (d) Sei K ein Körper. Widerlegen Sie die Aussage: Es gibt $a, b \in K$ mit $a \neq 0$ und $b \neq 0$ und $ab = 0$.

15. Zeigen Sie, dass die Menge der komplexen Zahlen c mit $|c| = 1$ bezüglich der Multiplikation komplexer Zahlen eine Gruppe bildet. Kann man 1 durch eine beliebige natürliche Zahl ersetzen?

16. Gegeben sei die folgende Teilmenge von $\mathbb{R}$:

    $$\mathbb{Q}[\sqrt{5}] := \{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

    Auf dieser Menge betrachten wir die Operationen $\oplus$ und $\otimes$, definiert durch:

    $$(a + b\sqrt{5}) \oplus (a' + b'\sqrt{5}) := (a + a') + (b + b')\sqrt{5}$$
    $$(a + b\sqrt{5}) \otimes (a' + b'\sqrt{5}) := (aa' + 5bb') + (ab' + a'b)\sqrt{5}.$$

    Bildet $(\mathbb{Q}[\sqrt{5}], \oplus, \otimes)$ einen Körper?

17. $\mathbb{Z}_n$.

    (a) Stellen Sie die beiden Verknüpfungstafeln (bzgl. $+$ und $\cdot$) von $\mathbb{Z}_3$ auf. Welche algebraische Struktur sehen Sie vor sich?

    (b) Führen Sie dasselbe mit $\mathbb{Z}_4$ durch! Ist die so erhaltene Struktur ein Körper?

Abbildungen

18. Welche der folgenden Eigenschaften muss eine Abbildung $f : A \to B$ per definitionem erfüllen?

    (a) Zu jedem $a \in A$ gibt es höchstens ein $b \in B$ mit $b = f(a)$.

    (b) Zu jedem $b \in B$ gibt es genau ein $a \in A$ mit $b = f(a)$.

    (c) Zu jedem $b \in B$ gibt es höchstens ein $a \in A$ mit $b = f(a)$.

    (d) Zu jedem $b \in B$ gibt es ein $a \in A$ mit $b = f(a)$.

    (e) Zu jedem $a \in A$ gibt es ein $b \in B$ mit $b = f(a)$.

19. *Bild und Urbild.* Wiederholen Sie die Definition des Bildes und des Urbildes einer Menge unter einer Abbildung. Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und die Mengen A_i, B_i $(i = 1, 2, 3)$ die Bildmengen $f_i(A_i)$ sowie die Urbildmengen $f_i^{-1}(B_i)$:

    (a) $f_1(x) = x + 3$, $A_1 = \{1, 2, 5\}$, $B_1 = (-1, 3)$,

    (b) $f_2(x) = x^2 - 1$, $A_2 = (-1, 1)$, $B_2 = \{-1, 0\}$,

    (c) $f_3(x) = a$ ($a \in \mathbb{R}$ konstant), $A_3 = \{0\} \cup (1, 2)$, $B_3 = \{a\}$.

20. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 1.*

    (a) Sei $f : A \to B$ eine Abbildung von der Menge A in die Menge B. Geben Sie die (genauen(!)) Definitionen für Injektivität, Surjektivität und Bijektivität von f an.

    (b) Geben Sie jeweils eine injektive und nicht surjektive, eine surjektive und nicht injektive und eine bijektive Funktion von A nach B an, wobei A und B geeignete Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind.

    (c) Untersuchen Sie die folgenden Aussagen:
    Eine Abbildung $f : A \to B$ ist surjektiv, wenn...

    i. aus $b = f(a_1)$ und $b = f(a_2)$ folgt $a_1 = a_2$.
    ii. zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $b = f(a)$ existiert.
    iii. zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $b = f(a)$ existiert.
    iv. aus $b_1 = f(a)$ und $b_2 = f(a)$ folgt $b_1 = b_2$.
    v. sie nicht injektiv ist.

    Eine Abbildung $f : A \to B$ ist injektiv, wenn...

    i. es zu jedem $b \in B$ ein $a \in A$ mit $b = f(a)$ gibt.
    ii. es zu jedem $a \in A$ höchstens ein $b \in B$ mit $b = f(a)$ gibt.
    iii. es zu jedem $a \in A$ ein $b \in B$ mit $b = f(a)$ gibt.
    iv. es zu jedem $b \in B$ höchstens ein $a \in A$ mit $b = f(a)$ gibt.

v. sie nicht surjektiv ist.

21. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 2.* Sind die folgenden Abbildungen injektiv, surjektiv bzw. bijektiv? Begründen Sie Ihre Antwort.

    (a) $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x^2$
    (b) $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n^4$
    (c) $f_3 : \mathbb{R} \to [-1, 1]$, $x \mapsto \sin x$
    (d) $f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto -4x + 1$
    (e) $f_5 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \mapsto x + (-1)^x$

22. *Injektiv, Surjektiv, Bijektiv 3.*

    (a) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht bijektiv sind, sodass die Zusammensetzung $f \circ g$ bijektiv ist?
    (b) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht injektiv sind, sodass die Zusammensetzung $f \circ g$ injektiv ist?
    (c) Gibt es zwei Funktionen f, g, die beide nicht surjektiv sind, sodass die Zusammensetzung $f \circ g$ surjektiv ist?

23. *Urbildmenge.* Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, und seien $A, B \subseteq Y$ Teilmengen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen und geben Sie jeweils eine verbale Formulierung der Form: „Das Urbild des Durchschnitts zweier Mengen ist … “ an.

    (a) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
    (b) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
    (c) $f^{-1}(Y \setminus A) = X \setminus f^{-1}(A)$.

    Hinweis: Gehen Sie formal vor und beginnen Sie z.B. den Beweis von (a) mit der definitionsgemäßen Formulierung, dass x ein Element der linken Menge in der Gleichung ist, also $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B$. Nun verwenden Sie die Definition für den Durchschnitt zweier Mengen …

24. *Bildmenge.* Sei $f : X \to Y$ eine Funktion, und seien $A, B \subseteq X$ Teilmengen. Untersuchen Sie, welche Eigenschaften (injektiv, surjektiv, bijektiv) für f nötig sind, damit die nachstehenden Gleichungen erfüllt sind. Muss bzw. kann man das $=$ durch $\subseteq$ oder $\supseteq$ ersetzen, damit die Beziehung auch für allgemeine f gilt? Geben Sie schließlich—wie im obigen Beispiel—eine verbale Formulierungen für jede der Eigenschaften an.

    (a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
    (b) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
    Analog zu (b) im vorigen Beispiel gilt hier die Verallgemeinerung auf beliebige Durchschnitte unter denselben Voraussetzungen wie (b) selbst.
    (c) $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$.

Analytische Geometrie

25. *Abstand 1.* Gegeben seien der Punkt $P = (2, 3, 1)$ und die Gerade $g : X = (9, 1, 3) + t(3, 4, -5)$ im Raum.
    (a) Bestimmen Sie die Gleichung der Normalebene ε auf g durch P.
    (b) Berechnen Sie den Schnittpunkt von ε mit g.
    (c) Berechnen Sie den Normalabstand des Punktes P von der Geraden g.
26. *Winkel.* Wo und unter welchem Winkel schneidet die Gerade $g : X = (6, 3, -4) + t(2, 1, -2)$ die x–y–Ebene ?
27. *Ebene 1.* Gegeben ist die Ebene $\varepsilon : 6x + 4y + 3z = 24$. Ihre Schnittpunkte mit den drei Koordinatenachsen werden mit A, B, C bezeichnet. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide, die aus diesen drei Punkten und dem Ursprung gebildet wird.
28. *Abstand 2.* Zeigen Sie, dass die Geraden $g : X = (1, 1, 3) + s(2, -1, 1)$ und $h : X = (5, 2, 3) + t(1, 0, -1)$ windschief sind und berechnen Sie ihren Abstand.
29. *Ebene 2.* Bestimmen Sie die Lagebeziehung der drei Ebenen $\varepsilon_1 : 8x - 4y + z = 15$, $\varepsilon_2 : 7x - 5y + 3z = 18$, $\varepsilon_3 : 9x + 8y - 2z = 20$. Welche möglichen Lagebeziehungen können bei drei Ebenen auftreten (Skizze)?