Workshop zu Trigonometrie

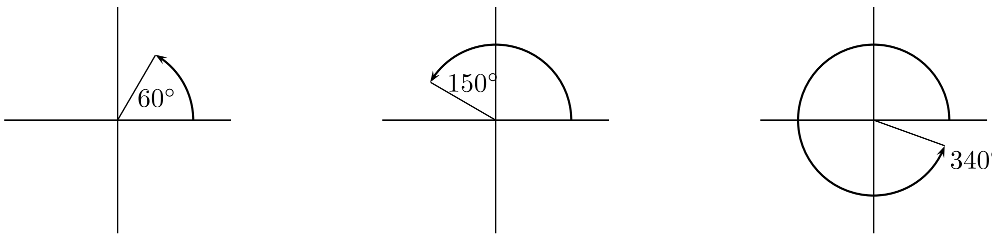
Gudrun Szewieczek   SS 2010

Wir beschäftigen uns hier mit der ebenen Trigonometrie (gr. trigonos = Dreieck, gr. metron = Maß). Dabei geht es hauptsächlich um die geometrische Untersuchung von Dreiecken in der Ebene. Ein wichtiges Hilfsmittel dafür sind die Winkelfunktionen Sinus und Cosinus, denen wir uns als erstes widmen wollen: Wie das Wort Winkelfunktion schon sagt, handelt es sich um eine Funktion, dh um eine Zuordungsvorschrift, bei der verschiedenen Winkeln reelle Zahlen zugeordnet werden:

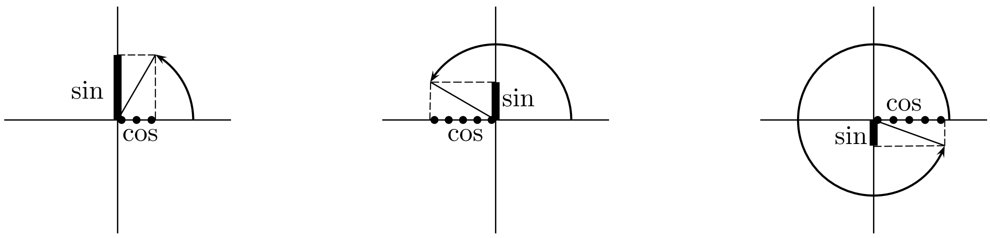
$$2^\circ \xmapsto{sin} 0,0349 \qquad 30^\circ \xmapsto{sin} 0,5$$

$$10^\circ \xmapsto{cos} 0.9848 \qquad 50^\circ \xmapsto{cos} 0,6428$$

Um die beiden Funktionen einzuführen, stellen wir uns am besten einen Uhrzeiger der Länge 1 vor, der im Koordinatensystem im Punkt (0,0) festgemacht ist und sich gegen den Uhrzeigersinn dreht. Wenn sich der Zeiger einmal umdreht, entstehen alle Winkel zwischen 0 und 360 Grad.



Dabei ist wichtig, dass der Winkel immer gegen den Uhrzeiger gemessen wird!
Wir interessieren uns nun für zwei bestimmte Strecken, die man für jeden Winkel einzeichnen kann:



Die Strecke ▬ bezeichnen wir als Sinus und ••• als Cosinus.

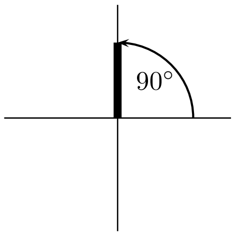
Auch wenn für uns momentan diese Definition genügt, wäre eine genaue Definition über die Exponentialfunktion folgendermaßen möglich:

<u>Defintion</u> (Cosinus und Sinus)
Ist x $\in \mathbb{R}$, dann gilt

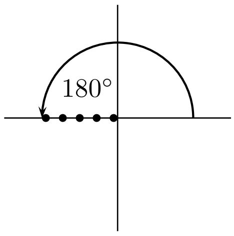
$$cos(x) = Re(e^{ix}) \text{............Realteil von } e^{ix}$$

$$sin(x) = Im(e^{ix}) \text{...........Imaginärteil von } e^{ix}$$

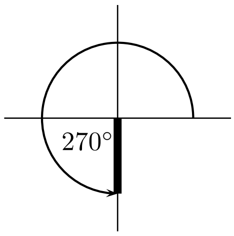
Grundsätzlich sind diese Funktionen nicht so einfach von Hand auszurechnen und man verwendet dafür Taschenrechner bzw. Computer, doch für manche Werte kann man Cosinus und Sinus aus der Zeichnung ablesen:



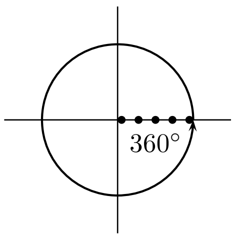
$$sin(90) = 1$$
$$cos(90) = 0$$



$$sin(180) = 0$$
$$cos(180) = -1$$

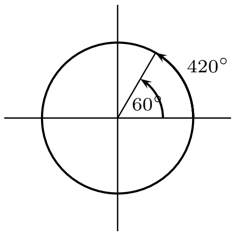


$$sin(270) = -1$$
$$cos(270) = 0$$



$$sin(360) = sin(0) = 0$$
$$cos(360) = cos(0) = 1$$

Bis jetzt hat der Uhrzeiger immer nur eine Umdrehung gemacht. Was aber passiert, wenn er sich weiterdreht?



Man sieht, dass der Zeiger bei 60° und bei 420° auf der gleichen Position steht, dh. die Funktionswerte von Cosinus und Sinus sind gleich.

Allgemein gilt für $0° \leq \alpha \leq 360°$:

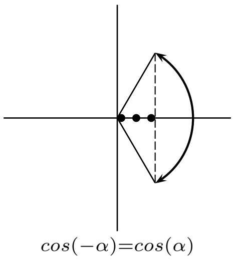
$$sin(\alpha + 360°) = sin(\alpha)$$
$$cos(\alpha + 360°) = cos(\alpha)$$

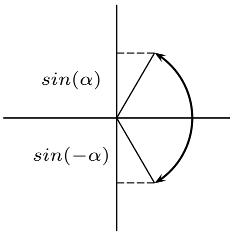
Man spricht in diesem Fall von einer **periodischen Funktion**. Die **Periode** bezeichnet die Länge, ab der sich die Funktionswerte wiederholen.
Im Fall von Cosinus und Sinus beträgt die Periode 360°.

Einige Eigenschaften von Cosinus und Sinus

Neben der Periodizität von Cosinus und Sinus kann man noch ablesen, dass gilt:

$$cos(-\alpha) = cos(\alpha) \quad \textbf{(symmetrisch)}$$
$$sin(-\alpha) = -sin(\alpha) \quad \textbf{(antisymmetrisch)}$$





Weiters sieht man aus der Zeichnung, dass Cosinus und Sinus nur Werte zwischen -1 und 1 annehmen:

$$-1 \leq cos(\alpha) \leq 1$$
$$-1 \leq sin(\alpha) \leq 1$$

Man spricht in so einem Fall von einer **beschränkten Funktion**.

Wir können uns außerdem noch überlegen, dass man schon im Vorhinein sagen kann, welches Vorzeichen die Winkelfunktionen haben:

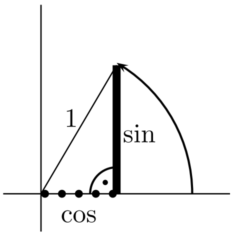
Für den Sinus gilt:

$0° \leq \alpha \leq 180° : +$
$180° \leq \alpha \leq 360° : -$

Für den Cosinus gilt:

$0° \leq \alpha \leq 90° : +$ und $270° \leq \alpha \leq 360° : +$
$90° \leq \alpha \leq 270° : -$

Um eine Beziehung zwischen Cosinus und Sinus herzustellen, kann man ganz einfach eine Gleichung mit Hilfe des Satzes von Pythagoras herleiten:

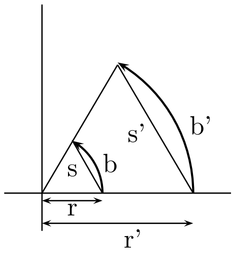


Für jeden Winkel zwischen 0° und 90° entsteht ein rechtwinkliges Dreieck in dem wir den Satz des Pythagoras anwenden können:

$$cos^2(x) + sin^2(x) = 1$$

Das Bogenmaß

Bis jetzt haben wir den Winkel immer in Grad angegeben, es gibt allerdings noch eine andere Möglichkeit, nämlich **das Bogenmaß**.
Dabei gibt man die Länge des Kreisbogens an, der zum Winkel gehört, wobei dabei zu beachten ist, dass die Länge des Kreisbogens vom Radius abhängt.



b und b' bezeichnet die Bogenlänge,
s und s' die dazugehörige Sehnenlänge.
Auf Grund der Ähnlichkeit der Dreiecke gilt:
$\frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$ und ebenso $\frac{b}{r} = \frac{b'}{r'}$
Man sieht, dass die zweite Gleichung unabhängig vom Radius ist und definiert daher:

Definition (Bogenmaß)
Das Bogenmaß eines Winkels ist der Quotient $a = \frac{b}{r}$, wobei b die Länge eines Winkelbogens mit dem Radius r ist.

Wenn man r=1 wählt, gilt: $a = \frac{b}{1} = b$, dh. das Bogenmaß ist gleich der Länge des Winkelbogens mit dem Radius 1.

Umrechnung zwischen Grad- und Bogenmaß

Bezeichne a das Bogenmaß und g das Gradmaß, dann gilt die Beziehung:

$$\frac{a}{\pi} = \frac{g}{180}$$

Denn wir wissen ja, dass im Einheitskreis 180° dem halben Kreisumfang $r.\pi$ entspricht und daher gilt:

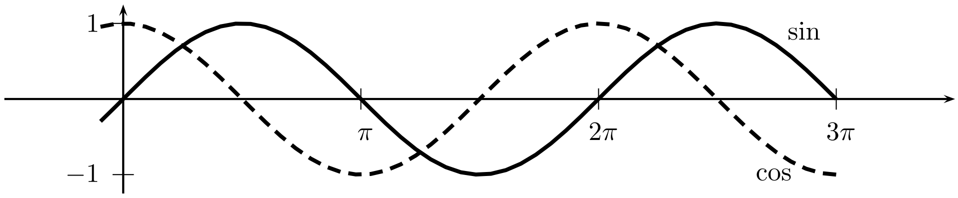
$$180° = \frac{r.\pi}{r} = \pi \Rightarrow 1° = \frac{\pi}{180} \Rightarrow g° = \frac{\pi}{180}.g = a$$

Somit gilt nun zB:

$$cos(90°) = cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$
$$sin(270°) = sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$$

Die Graphen von Cosinus und Sinus

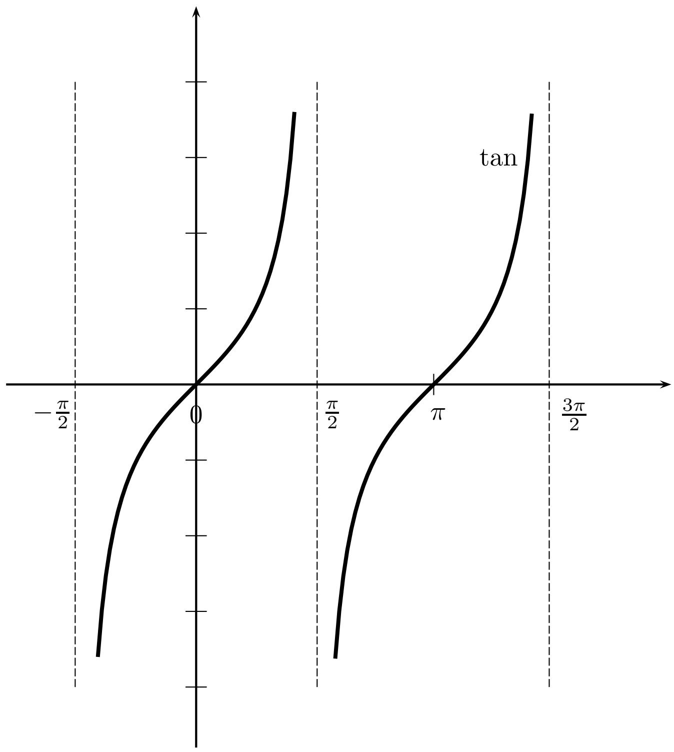
Wir wollen uns nun überlegen, wie die Funktionsgraphen von Cosinus und Sinus ausschauen:



Der Tangens

Neben Cosinus und Sinus gibt es noch eine dritte wichtige Winkelfunktion:

Definition (Tangens)
Der Tangens für x $\in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi$:k$\in\mathbb{Z}\}$ ist definiert durch $tan(x) = \frac{sin(x)}{cos(x)}$



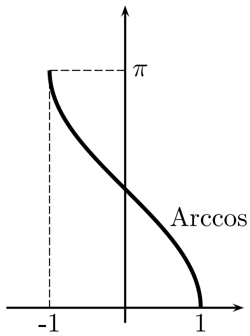
Die Arcusfunktionen

Wir wollen nun versuchen folgende Gleichungen nach α aufzulösen:

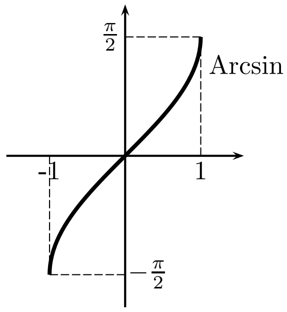
$$cos(\alpha) = 0.5$$
$$sin(\alpha) = \frac{\pi}{3}$$

Um α zu berechnen, müssten wir cos bzw. sin 'auf die andere Seite bringen'. Dies geschieht mit den jeweiligen Umkehrfunktionen, welche aber nur auf gewissen Intervallen definiert sind. (warum man die Umkehrfunktionen nicht auf ganz $\mathbb{R}$ definieren kann, wird in der Analysis-VO näher erläutert)

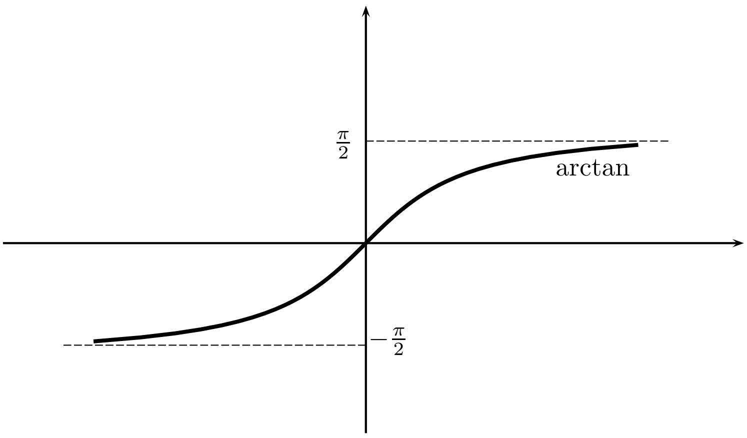
Definition (Arcusfunktionen)
a) Die Umkehrfunktion zum Cosinus ist der arccos: $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, genannt Arcus-Cosins.



b)Die Umkehrfunktion zum Sinus ist der arcsin: $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, genannt Arcus-Sinus.

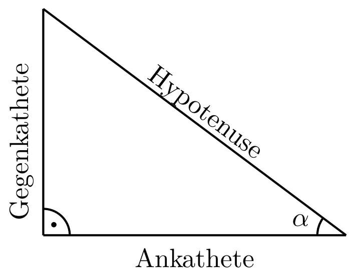


c)Die Umkehrfunktion zum Tangens ist der arctan: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, genannt Arcus-Tangens.



Die Winkelfunktionen in rechtwinkligen Dreiecken

Als nächstes wollen wir rechtwinklige Dreiecke betrachten und die Seiten davon folgendermaßen bezeichnen:



In rechtwinkligen Dreiecken mit $0 < \alpha < 90$ gilt:

$$sin(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Hypotenuse}, \quad cos(\alpha) = \frac{Ankathete}{Hypotenuse}, \quad tan(\alpha) = \frac{Gegenkathete}{Ankathete}$$

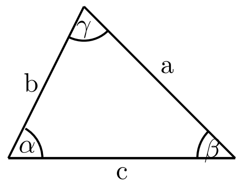
Kennt man von einem rechtwinkligen Dreieck nur eine Seitenlänge und einen Winkel oder nur zwei Seitenlängen, dann kann man mit diesen Beziehungen die restlichen Seitenlängen und Winkel berechnen.

Die Winkelsätze

Um fehlende Größen auch in nicht rechtwinkligen Rechtecken zu berechnen, kann man Winkelsätze herleiten, die in jedem beliebigen Dreieck gelten.

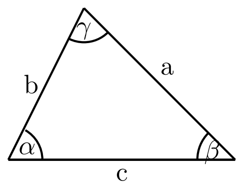
Sinussatz

$\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)}$



Cosinussatz

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.cos(\alpha)$
$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca.cos(\beta)$
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.cos(\gamma)$



Weitere Formeln mit den Winkelfunktionen

Summensätze - Additionstheoreme

$sin(\alpha + \beta) = sin(\alpha).cos(\beta) + cos(\alpha).sin(\beta)$

$cos(\alpha + \beta) = cos(\alpha).cos(\beta) - sin(\alpha).sin(\beta)$

$sin(2\alpha) = 2sin(\alpha).cos(\alpha)$

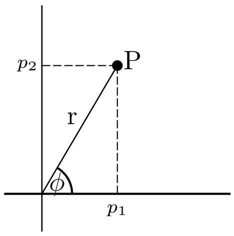
$cos(2\alpha) = cos^2(\alpha) - sin^2(\alpha)$

Flächeninhalt eines Dreiecks

$A = \frac{bc}{2}sin(\alpha) = \frac{ac}{2}sin(\beta) = \frac{ab}{2}sin(\gamma)$

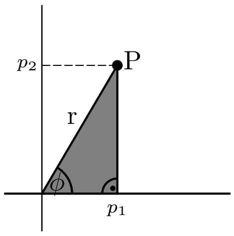
Polarkoordinaten

Neben den Cartesischen Koordinaten gibt es noch eine andere Möglichkeit Punkte in der Ebene zu beschreiben:



In Cartesischen Koordinten ist P=(p_1,p_2).
Will man den Punkt P mit Polarkoordinaten beschreiben,
gibt man den Winkel ϕ und den Radius r an:
P=(r;ϕ)

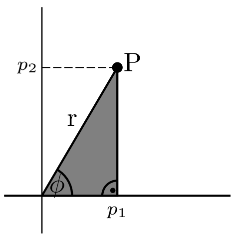
Umrechnung von Polarkoordinaten in Cartesische Koordinaten



Betrachtet man die Zeichnung, erkennt man ein rechtwinkliges Dreieck in dem wir die Winkelfunktionen anwenden können:

$$cos(\phi) = \frac{p_1}{r} \quad , \quad sin(\phi) = \frac{p_2}{r}$$
$$\Rightarrow \quad p_1 = r.cos(\phi) \quad und \quad p_2 = r.sin(\phi)$$

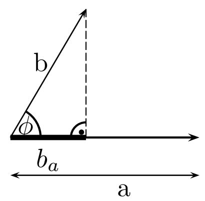
Umrechnung von Cartesischen Koordinaten in Polarkoordinaten



Wieder können wir mit dem rechtwinkligen Dreieck arbeiten und den Satz von Pythagoras anwenden: $r = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}$
Weiters gilt: $tan(\phi) = \frac{p_2}{p_1}$
$$\Rightarrow \quad \phi = arctan(\frac{p_2}{p_1})$$

Die Normalprojektion

Eine weitere Verwendung findet der Cosinus in der Normalprojektion.



Anschaulich leuchtet man bei der Normalprojektion von oben auf den Vektor b und will wissen wie lange der Schatten auf dem Vektor a ist.
Dabei wird der Schatten mit b_a bezeichnet und es gilt:
$$|b_a| = |b|.cos(\phi)$$

Beispiele zum Workshop Trigonometrie

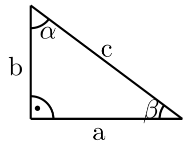
1) Rechne das Gradmaß ins Bogenmaß um:

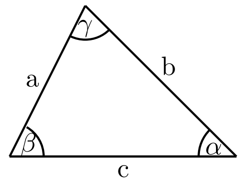
a)135° b)30° c)240°

2) Rechne das Bogenmaß ins Gradmaß um:

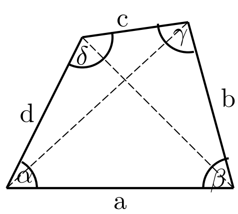
a)$\frac{3\pi}{4}$ b)$\frac{2\pi}{3}$ c)$\frac{7\pi}{10}$

3) Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man zwei Seiten:
$a = 5,4$ und $b = 3,9$. Berechne die dritte Seite und die Winkel!





4) Von einem beliebigen Dreieck kennt man $a = 7$, $c = 10$ und $\gamma = 87°$.
Berechne die Seite b und die restlichen Winkel!



5) Von einem Viereck kennt man $a = 6$, $b = 6$, $d = 7$, $\alpha = 80°$, $\beta = 110°$.
Berechne die übrigen Seiten und Winkel!

6) Berechne die Polarkoordinaten von P=(3, 1) und Q=(4, -1)

7) Rechne S=(1; 130°) und T=(10; 300°) in Cartesische Koordinaten um.

<u>Lösungen:</u>

1)a) $\frac{3}{4}\pi$ b) $\frac{1}{6}\pi$ c) $\frac{4}{3}\pi$

2)a) 135° b) 120° c) 126°

3) $\beta = 35,84°$, $c = 6,67$, $\alpha = 54,16°$

4) $\alpha = 44,35°$, $\beta = 48,65°$, $b = 7,52$

5) $e = 9,83$, $f = 8,39$ (wobei mit e und f die beiden Diagonalen bezeichnet werden), $c = 6,9$, $\delta = 90°$, $\gamma = 80°$

6) $P = (3,16;\ 18,43°)$, $Q = (4,12;\ 345°)$

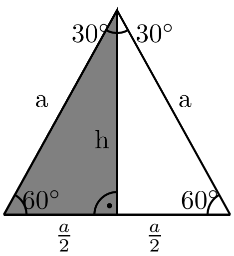
7) $S = (-0,642;\ 0,766)$, $T = (5;\ -8,66)$

Berechnung von weiteren Werten ohne Taschenrechner

Neben den Werten für **0°**, **90°**, **180°** und **270°** gibt es noch einige andere Werte, die man ohne Taschenrechner berechnen kann.
Zuerst wollen wir uns auf den ersten Quadranten beschränken:

	30°	**45°**	**60°**
sin	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$
cos	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$

Doch wie kommt man auf diese Werte?
Für 30° und 60° kann man sich die Werte über ein gleichseitiges Dreieck herleiten:



Nach Pythagoras gilt: $a^2 = (\frac{a}{2})^2 + h^2 \;\Rightarrow h^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

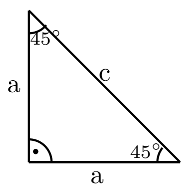
$$cos(60) = \frac{Ankathete}{Hypertenuse} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$cos(30) = \frac{h}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$sin(30) = \frac{Gegenkathete}{Hypertenuse} = \frac{1}{2}$$

$$sin(60) = \frac{h}{a} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Für 45° kann man sich die Werte mit einem gleichschenkligen rechtwinkligen Dreieck erklären:



Nach Pythagoras gilt: $c = a\sqrt{2}$

$$sin(45) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$cos(45) = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

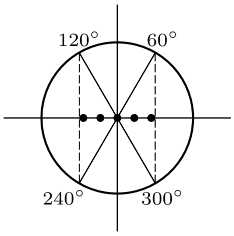
Kennt man diese Funktionswerte von Cosinus und Sinus kann man natürlich sofort für diese Winkel auch den **Tangens** berechnen:

$$tan(30) = \frac{sin(30)}{cos(30)} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$tan(45) = 1$$

$$tan(60) = \sqrt{3}$$

Mit diesen bekannten Werten im ersten Quadranten, kann man sich auch für die **anderen Quadranten** einige Werte überlegen. Zum Beispiel:



$$cos(60) = \frac{1}{2}$$

$$cos(120) = -\frac{1}{2}$$

$$cos(240) = -\frac{1}{2}$$

$$cos(300) = \frac{1}{2}$$

Allgemein kann man diese Überlegungen in folgenden Formeln zusammenfassen:

$$\begin{aligned} sin(\alpha) &= sin(180° - \alpha) = -sin(180° + \alpha) = -sin(360° - \alpha) = sin(\alpha + 360°) \\ cos(\alpha) &= -cos(180° - \alpha) = -cos(180° + \alpha) = cos(360° - \alpha) = cos(\alpha + 360°) \\ tan(\alpha) &= -tan(180° - \alpha) = tan(180° + \alpha) = -tan(360° - \alpha) = tan(\alpha + 360°) \end{aligned}$$

Beispiele

Berechne alle Lösungen für $0° \leq x \leq 360°$ ohne Taschenrechner!

1) $cos(2\pi) = x$
2) $sin(120°) = x$
3) $tan(x) = 1$
4) $sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
5) $arccos(1) = x$
6) $tan(240°) = x$
7) $sin(330°) = x$
8)$cos(\frac{\pi}{2}) = x$
9)$arctan(-1) = x$
10)$tan(\frac{\pi}{4}) = x$
11) $arccos(-\frac{1}{2}\sqrt{3}) = x$
12)$sin(150°) = x$
13)$cos(315°) = x$
14)$cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$
15)$tan(x) = -\frac{1}{3}\sqrt{3}$
16)$cos(240°) = x$
17)$sin(x) = -1$
18)$tan(\frac{5}{4}\pi) = x$
19)$arccos(x) = 0$
20)$sin(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$

Lösungen:
1) 1 2) $\frac{1}{2}\sqrt{3}$ 3) 45° oder 225° 4) 45° oder 135° 5) 0° oder 360°
6) $\sqrt{3}$ 7) $-\frac{1}{2}$ 8) 0 9) 135° oder 315° 10) 1
11) 150° oder 210° 12) $\frac{1}{2}$ 13) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 14) 135° oder 225° 15) 150° oder 330°
16) $-\frac{1}{2}$ 17) 270° 18) 1 19) 1 20) 225° oder 315°

Natürlich kann man alle Winkelmaße auch im Bogenmaß als Lösung angeben.