Geraden und Ebenen

Thérèse Tomiska

2. Oktober 2008

1 Geraden

1.1 Parameterdarstellung ($\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$)

$g: \quad X = P + t \cdot \vec{a}$

P	...	Punkt auf g
$\vec{a}$	...	Richtungsvektor der Geraden g
t	...	Parameter

$g: \quad X = P + t \cdot \vec{PQ}$

P	...	Punkt auf g
$\vec{PQ}$	...	Richtungsvektor der Geraden g
t	...	Parameter

1.2 Normalvektordarstellung (nur $\mathbb{R}^2$)

$g: \quad \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$

$\vec{n}$	...	Normalvektor zu g
X	...	beliebiger Punkt auf g
P	...	Punkt auf g

durch Skalarmultiplikation erhält man:
$g: \quad n_x x + n_y y = c$, wobei c eine Konstante ist

2 Ebenen

2.1 Parameterdarstellung

$\varepsilon: \quad X = P + t \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b}$

P	...	Punkt auf ε
$\vec{a}$, $\vec{b}$	...	Richtungsvektoren der Ebene ε
t,s	...	Parameter

2.2 Normalvektordarstellung

$\varepsilon: \quad \vec{n} \cdot X \ = \ \vec{n} \cdot P$

$\vec{n}$	...	Normalvektor zu ε
X	...	beliebiger Punkt auf ε
P	...	Punkt auf ε

durch Skalarmultiplikation erhält man:
$\varepsilon: \quad n_x\, x \ + \ n_y\, y \ + \ n_z\, z \quad = \quad c$, wobei c eine Konstante ist

Kennt man von einer Ebene ε die beiden Richtungsvektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so kann man ihren Normalvektor $\vec{n}$ mittels Kreuzprodukt bestimmen:

$$\vec{a} \times \vec{b} \quad = \quad \vec{n}$$

3 Winkel

3.1 Winkel zwischen zwei Vektoren

$\cos\varphi \ := \ \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$, wobei φ der von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ eingeschlossene Winkel ist ($\sphericalangle\,(\vec{a},\vec{b})$)

3.2 Winkel zwischen zwei Geraden g und h

$g: \quad X \ = \ P \ + \ t \cdot \vec{a}$
$h: \quad X \ = \ Q \ + \ s \cdot \vec{b}$

Als Winkel φ zwischen zwei Geraden g und h bezeichnet man den Winkel zwischen ihren Richtungsvektoren:
$\varphi := \quad \sphericalangle\,(g,h) \quad = \quad \sphericalangle\,(\vec{a},\vec{b})$

3.3 Winkel zwischen einer Geraden g und einer Ebene ε

$g: \quad X \ = \ P \ + \ t \cdot \vec{a}$
$\varepsilon: \quad \vec{n} \cdot X \ = \ \vec{n} \cdot Q$

Um den Winkel φ zwischen einer Geraden g und einer Ebene ε zu bestimmen, berechnet man zuerst den Winkel φ' zwischen dem Richtungsvektor der Geraden und dem Normalvektor der Ebene:
$\varphi' := \quad \sphericalangle\,(\vec{a},\vec{n})$
$\varphi := \quad \sphericalangle\,(g,\varepsilon) \quad = \quad (90^\circ \ - \ \varphi')$

3.4 Winkel zwischen zwei Ebenen ε_1 und ε_2

$\varepsilon_1: \quad \vec{n_1} \cdot X \ = \ \vec{n_1} \cdot P$
$\varepsilon_2: \quad \vec{n_2} \cdot X \ = \ \vec{n_2} \cdot Q$

Der Winkel φ zwischen zwei Ebenen ε_1 und ε_2 entspricht dem Winkel zwischen ihren Normalvektoren:
$\varphi := \quad \sphericalangle\,(\varepsilon_1,\varepsilon_2) \quad = \quad \sphericalangle\,(\vec{n_1},\vec{n_2})$

4 Abstand

4.1 Abstand d eines Punktes P zu einer Geraden g

Um den Abstand d eines Punktes P von einer Geraden g zu ermitteln, gibt es verschiedene Möglichkeiten:

4.1.1 Trigonometrisch ($\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$)

$g:\quad X = Q + t \cdot \vec{a}$	$\dots$	Gerade im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$
P	$\dots$	Punkt des $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$
h	$\dots$	Gerade durch P und Q
φ	$\dots$	Winkel zwischen der Geraden g und der Geraden h

Man bestimmt zuerst $\vec{QP}$ und berechnet dann den Winkel φ $\quad (\cos\varphi := \frac{\vec{a}\cdot\vec{QP}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{QP}|})$

$$\sin\varphi = \frac{d}{|\vec{QP}|}$$

daraus folgt:

$$d = \sin\varphi \cdot |\,\vec{QP}\,|$$

4.1.2 Im $\mathbb{R}^2$ - mittels zu g normaler Gerade h

$g:\quad X = Q + t \cdot \vec{a}$	$\dots$	Gerade im $\mathbb{R}^2$
P	$\dots$	Punkt des $\mathbb{R}^2$

Man legt eine zu g normale Gerade h durch den Punkt P und schneidet diese mit g. Der Schnittpunkt von g und h wird Fußpunkt F genannt. Anschließend berechnet man $\vec{PF}$ und ermittelt dessen Länge d, die dem Abstand des Punktes P von der Geraden g entspricht:

$$d = |\,\vec{PF}\,|$$

(Ist die Gerade g in Normalvektordarstellung gegeben, so funktioniert die Abstandsberechnung genau so wie in 4.1.1 und 4.1.2!)

4.1.3 Im $\mathbb{R}^3$ - mittels zu g normaler Ebene ε

$g:\quad X = Q + t \cdot \vec{a}$	$\cdots$	Gerade im $\mathbb{R}^3$
P	$\cdots$	Punkt des $\mathbb{R}^3$

Dieser Fall funktioniert im Prinzip gleich wie der vorige, nur stellt man statt einer zu g normalen Geraden eine zu g normale Ebene ε auf.

4.2 Abstand d zweier paralleler Geraden g und h

$g:\quad X = P + t \cdot \vec{a}$	$\dots$	Gerade im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$
$h:\quad X = Q + s \cdot \vec{b}$	$\dots$	Gerade im $\mathbb{R}^2$ bzw. $\mathbb{R}^3$

Will man den Abstand d zwischen g und h berechnen, so nimmt man einen Punkt auf h (z.B. Q) und geht dann genau so vor wie in 4.1.
Der Abstand zweier windschiefer Geraden im $\mathbb{R}^3$ lässt sich mithilfe einer Formel berechnen, die man in der Linearen Algebra lernt.

4.3 Abstand d einer Geraden g zu einer Ebene ε ($\mathbb{R}^3$)

$g:\quad X = P + t \cdot \vec{a}$	$\dots$	Gerade des $\mathbb{R}^3$
$\varepsilon:\quad \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot Q$	$\dots$	Ebene im $\mathbb{R}^3$
$h:\quad X = P + t \cdot \vec{n}$	$\dots$	zu ε normale Gerade des $\mathbb{R}^3$ durch P

Um den Abstand d zwischen g und ε zu bestimmen, legt man zuerst eine zu ε normale Gerade h durch den Punkt P von g, schneidet dann h mit ε und erhält so den Fußpunkt F. Dann berechnet man $\vec{FP}$. Der Abstand d zwischen g und ε ist $\mid \vec{FP} \mid$:

$$d \quad = \quad \mid \vec{FP} \mid$$

4.4 Abstand d zweier paralleler Ebenen ε_1 und ε_2

$\varepsilon_1: \quad \vec{n_1} \cdot X = \vec{n_1} \cdot P \quad \ldots \quad$ Ebene im $\mathbb{R}^3$
$\varepsilon_2: \quad \vec{n_2} \cdot X = \vec{n_2} \cdot Q \quad \ldots \quad$ Ebene im $\mathbb{R}^3$ ($\vec{n_2}$ ist parallel zu $\vec{n_1}$)
$h: \quad X = R + t \cdot \vec{n_1} \quad \ldots \quad$ zu ε_1 und ε_2 normale Gerade des $\mathbb{R}^3$ durch R (Punkt auf ε_1)

Um den Abstand d zwischen ε_1 und ε_2 zu bestimmen, legt man zuerst eine zu ε_2 normale Gerade h durch einen Punkt R von ε_1, schneidet dann h mit ε_2 und erhält so den Fußpunkt F. Anschließend berechnet man $\vec{FR}$. Der Abstand d zwischen ε_1 und ε_2 ist $\mid \vec{FR} \mid$:

$$d \quad = \quad \mid \vec{FR} \mid$$

5 Lagebeziehungen

5.1 Geraden

5.1.1 $\mathbb{R}^2$

$g: \quad X = P + t \cdot \vec{a}$
$h: \quad X = Q + s \cdot \vec{b}$

Zwei Geraden g und h im $\mathbb{R}^2$ können folgende Lagen zueinander haben:

- sich schneiden $\quad (g \cap h)$
- parallel $\quad (g \parallel h)$
- ident $\quad (g = h)$

Zuerst überprüft man, ob die Richtungsvektoren $\vec{a}$ von g und $\vec{b}$ von h zueinander parallel sind.

- Ist dies der Fall, so sind g und h entweder parallel oder ident.
  Nun überprüft man, ob z.B. P auch auf h liegt (P in h einsetzen).
  Wenn ja, so sind g und h ident. Wenn nicht, so sind sie parallel.
- Ist dies nicht der Fall, so schneiden g und h einander in einem Punkt S, dem sogenannten Schnittpunkt.

5.1.2 $\mathbb{R}^3$

Zu den oben genannten Möglichkeiten im $\mathbb{R}^2$ kommt im $\mathbb{R}^3$ noch eine weitere hinzu:

- Zwei Geraden g und h können windschief zueinander sein.
  Dies ist dann der Fall, wenn g und h keine parallelen Richtungsvektoren besitzen und einander auch nicht schneiden.

Den Abstand zweier windschiefer Geraden berechnet man folgendermaßen:
Sei $\quad g: \quad X = P + t \cdot \vec{a}$
und $\quad h: \quad X = Q + s \cdot \vec{b}$.
Dann gilt:

$$d(g,h) = \mid \vec{PQ} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})_0 \mid$$

5.2 Geraden und Ebenen

$g: \quad X = P + t \cdot \vec{a}$
$\varepsilon: \quad \vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot Q$

Eine Gerade g und eine Ebene ε können folgende Lagen zueinander haben:

- sich schneiden $(g \cap \varepsilon)$
- parallel $(g \parallel \varepsilon)$
- zusammenfallend $(g \in \varepsilon)$

Um die Lage von g und ε zueinander zu ermitteln, schneidet man sie am besten:

- Erhält man einen Schnittpunkt, so gilt $g \cap \varepsilon$.
- Kommt am Ende $0 = 0$ heraus, so liegt g in ε.
- Erhält man ein sinnloses Ergebnis wie z.B. $3 = 4$, so sind g und ε zueinander parallel.

5.3 Ebenen

$\varepsilon_1: \quad \vec{n_1} \cdot X = \vec{n_1} \cdot P$
$\varepsilon_2: \quad \vec{n_2} \cdot X = \vec{n_2} \cdot Q$

Zwei Ebenen ε_1 und ε_2 können folgende Lagen zueinander haben:

- sich schneiden $(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2)$
- parallel $(\varepsilon_1 \parallel \varepsilon_2)$
- ident $(\varepsilon_1 = \varepsilon_2)$

Zuerst überprüft man, ob Gleichung von ε_1 ein Vielfaches der Gleichung von ε_2 ist.

- Ist dies der Fall, so sind ε_1 und ε_2 ident.
- Ist nur die linke Seite der Gleichung von ε_1 ein Vielfaches der Gleichung von ε_2, so sind ε_1 und ε_2 parallel.
- Ist dies nicht der Fall, so schneiden ε_1 und ε_2 einander in einer Geraden g, der sogenannten Schnittgeraden.

Sollten euch Fragen außerhalb des Workshops einfallen, schreibt mir einfach ein Mail an
therese.tomiska@univie.ac.at