# Komplexe Zahlen - $\mathbb{C}$

Thérèse Tomiska

2. Oktober 2008

Eine der Motivationen zur Einführung komplexer Zahlen war, dass man folgende Gleichung lösen wollte:

$$\begin{aligned} x^2 + 1 &= 0 \\ x^2 &= -1 \\ x &= \sqrt{-1} \end{aligned}$$

$\sqrt{-1}$ gibt es in $\mathbb{R}$ ja nicht!

## 1 Die imaginäre Einheit $i$

Man setzt:

$$-1 \quad =: \quad i^2$$

$i$ wird die *imaginäre Einheit* genannt.

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} & \qquad i^{4n+1} &= i \\ i^2 &= -1 & i^{4n+2} &= -1 \\ i^3 &= -i & i^{4n+3} &= -i \\ i^4 &= 1 & i^{4n} &= 1 \end{aligned}$$

Weiters gilt:

$$\frac{1}{i} = i^{-1} = -i$$

$$\frac{1}{i^n} = i^{-n} = (-i)^n$$

## 2 Komplexe Zahlen

$z = a + bi$

| | | |
|---|---|---|
| $a$ | ... | Realteil von z $\Re$ |
| $b$ | ... | Imaginärteil von z $\Im$ |
| $i$ | ... | imaginäre Einheit |

$z^* := a - bi$ heißt die *zu z konjugiert Komplexe Zahl.*

*Der Betrag einer komplexen Zahl $z$ ist definiert als:*

$|\, z \,| := \sqrt{z \cdot z^*} = \sqrt{a^2 + b^2}$

*Rechnen mit komplexen Zahlen:*

$z_1 = a + bi$
$z_2 = c + di$

$$z_1 \pm z_2 = (a \pm c) + (b \pm d)i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \qquad \textit{(Ausmultiplizieren)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(ac + bd) + (-ad + bc)i}{(c^2 + d^2)} \qquad \textit{(Erweitern mit } c - di\textit{)}$$

## 3 Gauß'sche Zahlenebene

*Darstellung von komplexen Zahlen $z$ als "Vektoren"*

*Skizze kommt im Workshop!*

$r = |\, z \,|$ ... Länge (Betrag) des Vektors $z$
$\varphi$ ... Argument von $z$ $(0 \leq \varphi < 2\pi)$

## 4 Polardarstellung

$z = a + bi = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) \triangleq (r\,;\,\varphi)$

Umrechnung:

$$\begin{aligned} r &= |\, z \,| \\ a &= r \cdot \cos\varphi \\ b &= r \cdot \sin\varphi \\ \tan\varphi &= \frac{b}{a} \end{aligned}$$

Rechnen mit komplexen Zahlen in Polardarstellung:

$z_1 = (r_1\,;\,\varphi_1)$
$z_2 = (r_2\,;\,\varphi_2)$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 \cdot r_2\,;\,\varphi_1 + \varphi_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = (\frac{r_1}{r_2}\,;\,\varphi_1 - \varphi_2)$$

$$z^n = (r^n\,;\,n \cdot \varphi)$$

$$\sqrt[n]{z} = (\sqrt[n]{r}\,;\,\frac{\varphi}{n} + \frac{k \cdot 2\pi}{n}) \qquad (k = 0, \ldots, n-1)$$

Sollten euch Fragen außerhalb des Workshops einfallen, schreibt mir einfach ein Mail an therese.tomiska@univie.ac.at