FIT Workshop Mathematik

Johanna Michor

Fakultät für Mathematik

31. Januar 2012

Programm

Teil 1: Das Studium der Mathematik an der Uni Wien

Bachelor	**Lehramt**
$\Rightarrow$ Master	
$\Rightarrow$ Doktorat	

Teil 2: Die Euler'sche Polyederformel

1. Induktionsbeweis
2. Gauss'sche Summenformel
3. Polyeder
4. Planare Graphen
5. Euler'sche Polyederformel für zusammenhängende planare Graphen
6. ...

Die Fakultät für Mathematik im www

http://www.mat.univie.ac.at

Insbesondere Informationen

- über das Mathematikstudium
- für Erstsemestrige (die wichtigsten Informationen zum Studienbeginn)
- für Studierende (Prüfungstermine, Vorlesungen, Stipendien, Jobs, ..)
- zu Hörsälen und Seminarräumen

Die Studien

Lehramtsstudium *Unterrichtsfach Mathematik*

- Diplomstudium, kombinationspflichtig (zweites Fach), 2 Studienabschnitte, Regelstudiendauer 9 (4+5) Semester
- Grundeinheit ist die Wochenstunde, insgesamt sind 99 Wochenstunden zu absolvieren.
- Lehrveranstaltungen sind zu (relativ wenigen) Prüfungsfächern zusammengefasst.
- Abschluss durch Absolvierung von Lehrveranstaltungen (durch aktive Teilnahme und/oder Prüfung), Diplomarbeit im Erstfach und abschließende Diplomprüfung in beiden Fächern.

Die Studien

Bachelorstudium *Mathematik*

- Einzelstudium, Regelstudiendauer 6 Semester (Arbeitsaufwand 180 ECTS Punkte [European Credit Transfer System])
- Lehrveranstaltungen werden mit Wochenstunden und ECTS Punkten (die den Aufwand für Studierende messen sollen) bewertet und sind zu (relativ vielen) Modulen zusammengefasst.
- Abschluss nur durch Absolvierung von Lehrveranstaltungen (darunter zwei Bachelorseminare, in denen Bachelorarbeiten verfasst werden).

$\Rightarrow$ Zulassung zum Masterstudium Mathematik
$\Rightarrow$ Zulassung zum Masterstudium "Quantitative Economics, Management and Finance" der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Uni Wien

Lehramt und Bachelor können auch parallel studiert werden

Die Studien

Masterstudium *Mathematik*

- Studiendauer 4 Semester (Arbeitsaufwand 120 ECTS Punkte)
- 7 Studienschwerpunkte zur Wahl:
  1. Algebra, Zahlentheorie und diskrete Mathematik
  2. Analysis
  3. Angewandte Mathematik und Scientific Computing
  4. Biomathematik
  5. Geometrie und Topologie
  6. Mathematische Logik und theoretische Informatik
  7. Stochastik und dynamische Systeme
- Abschluss durch Masterarbeit und Masterprüfung

$\Rightarrow$ Zulassung zum Doktoratsstudium Mathematik

Die Studien

Doktoratsstudium *Mathematik*

- Studiendauer 3 Jahre (Lehrveranstaltungen im Ausmass von 8 bis 30 Semesterwochenstunden)
- Abschluss durch Doktorarbeit und öffentliche Defensio

Vorschriften und Regeln :-(

Informationsquellen

- Allgemeine Regeln: Universitätsgesetz 2002, studienrechtlicher Teil der Satzung der Universität Wien (siehe `http://www.univie.ac.at/satzung/studienrecht.html`)
- Regeln für die einzelnen Studien: Studienpläne bzw. Curricula.
- Homepage des StudienServiceCenters: Studienpläne und Curricula, Informationenen zum Lehrangebot, Empfehlungen zur Studiengestaltung, FAQ, News, etc.

Studium ist äusserst studentenfreundlich

- Workshops von TutorInnen in der Anfangsphase des Studiums, um fehlende Vorkenntnisse aus der Schule nachzuholen
- viele starke Forschungsgruppen, gute internationale Präsenz
  $\Rightarrow$ Spezialisierung in viele mathematische Richtungen möglich
  $\Rightarrow$ Dissertanten (und manchmal auch schon Masterstudenten) werden in der Regel in Forschungsprojekten angestellt
- Lehrveranstaltungen im Abendstudium für berufstätige Hörer
- sehr gutes Betreuungsverhältnis ProfessorInnen/StudentInnen, das "Institutsklima" ist dementsprechend ausgezeichnet
- grosse Freiheit bei der Wahl der Prüfungstermine
- gute Infrastruktur (Fachbibliothek, neues PC-Labor)
- praxisnahe Ausbildung durch Einsatz math. Softwareprogramme

Berufsaussichten

Hervorragend!

Breite der Anwendungen macht MathematikerInnnen vielseitig einsetzbar:

Anwendungen

Computerwissenschaften, Kryptographie, Genetik, Biomathematik, Halbleitertechnologie, Ökonomie, Statistik, Finanzmathematik, Physik, Chemie, Philosophie (insbesondere Logik)

Mathematik trainiert

- analytische Präzision des Denkens
- Problemlösen auf höchstem Niveau

Berufsfelder

- **Lehre und Forschung** an Schulen, Fachhochschulen, Universitäten
- **Physik, Chemie, Biologie, Ökonomie etc:** MathematikerInnen
  - modellieren die Funktionsweise des Hirns
  - erforschen ökonomische Zusammenhänge
  - erklären die Evolution
- **Softwareentwicklung, Informationstechnologie:** mathematische Analyse, Entwicklung und Umsetzung von Algorithmen
- **Banken, Versicherungen, Marktforschung** etc: Statistik/Wahrscheinlichkeitstheorie; Risikomanagement
- **Industriebetriebe:** Prozessoptimierung; Operations Research; Modellierung; Einsatz numerischer Methoden; Computersimulation
- **Unternehmensberatung, Consultingfirmen**

Arten von Lehrveranstaltungen

Grundsätzlich gibt es zwei Arten von Lehrveranstaltungen (LVA):

LVA mit immanentem Prüfungscharakter

- z.B. Übungen, Seminare, Proseminare
- Abschluss durch mehrere Einzelleistungen *während der Lehrveranstaltung*
- daher Anmeldung (und ggf. Abmeldung) und Anwesenheitspflicht
- Beurteilungskriterien werden in der LVA bekannt gegeben

LVA ohne immanenten Prüfungscharakter:

- z.B. Vorlesungen
- Abschluss durch Prüfung (schriftlich, mündlich oder beides) *nach Ende der Lehrveranstaltung*
- keine Anmeldung, keine Anwesenheitspflicht, Kenntnisse können auch anders erworben werden

Studieneingangs– und –orientierungsphase (StEOP)

- Nach der letzten Novelle des UG2002 muss sowohl das Lehramtsstudium als auch das Bachelorstudium eine Studieneingangs– und –orientierungsphase (StEOP) aufweisen.
- Die erfolgreiche Absolvierung der StEOP ist Voraussetzung für die Absolvierung weiterer Lehrveranstaltungen.
- Im Lehramtsstudium besteht die StEOP aus drei Teilen (pädagogisch plus 2 Unterrichtsfächer), der pädagogische Teil ist Voraussetzung für alles, die StEOP jedes Faches ist nur für dieses Fach relevant.
- Prüfungen im Rahmen der StEOP dürfen nur ein Mal wiederholt werden.
- Im Bereich der Mathematik sind die Verschärfungen durch die StEOP unerwünscht, wir werden versuchen, sie organisatorisch abzufedern.

Lehrveranstaltungen für StudienanfängerInnen

Im **Bachelorstudium** ist die Situation einfach: Für einen regulären Studienfortgang sollte im ersten Semester einerseits die StEOP (Vorlesung "Einführung in das mathematische Arbeiten" und Übung "Hilfsmittel aus der EDV") absolviert werden. Dazu kommen noch zwei Vorlesungen mit zugehörigen Übungen, in denen die Grundlagen für das gesamte weitere Studium gelegt werden:

- "Einführung in die Analysis"
- "Einführung in die lineare Algebra und Geometrie"

Die Studienprogrammleitung Mathematik

- ao. Prof. Andreas Čap (SPL, Bachlor-, Master-, Diplom- und Doktoratsstudium)
- ao. Prof. Stefan Götz (Vize-SPL, Lehramtsstudium)
- ao. Prof. Günther Hörmann (Vize-SPL, Lehrplanung und Lehrorganisation)
- Martina Pflegpeter (Studienassistentin, Anfragen und Beratung)

Das StudienServiceCenter Mathematik

- erste Anlaufstelle für Fragen der Lehr- und Studienorganisation
- Zimmer C 606, Tel. 4277 504 01, Mo.-Do. 9-15, Fr. 9-12
- Fr. Cornelia Bauer und Fr. Christine Semler
- Hompage: `http://ssc-mathematik.univie.ac.at`
- mailto: ssc.mathematik@univie.ac.at

Bibliotheken

Fachbereichsbibliothek Mathematik, Statistik, Informatik

UZA 4, Bauteil D, 1. Stock

Mathematische Fachbücher und Zeitschriften

`http://www.ub.univie.ac.at/fb-mathematik_statistik_informatik/`

Universitätsbibliothek

Hauptgebäude, `http://www.ub.univie.ac.at/`

Lehrbuchsammlung

Hauptgebäude, viele Standardlehrbücher in großer Zahl

`http://www.ub.univie.ac.at/hauptbibliothek/lehrbuchsammlung.html`

EDV-Infrastruktur

PC-Labors der Fakultät fr Mathematik

- 68 Arbeitsplätze in 3 PC-Labors (C203, C204, C205)
- Öffnungszeiten Mo. – Fr. 8^{00} – 21^{30} (Ferien 10^{00} – 17^{30})
- Linux, Windows, Standardsoftware, Mathematiksoftware
- 40 MB, kein Mailaccount, kein Zugriff von außen, kein Backup!
- Fakultätseigenes Accountsystem
- Infoblatt bei den PC-Labors und unter `http://plone.mat.univie.ac.at/ressourcen/computer`

u:net – EDV-Service der Uni Wien

- `http://unet.univie.ac.at`
- Mailaccount axxxxxxx@unet.univie.ac.at, Webspace
- Grosse PC-Räume im NIG und am Campus
- Online Anmeldung mittels Passwort aus der Voranmeldung

Programm

Teil 2: Die Euler'sche Polyederformel

1. Induktionsbeweis
2. Gauss'sche Summenformel
3. Polyeder
4. Planare Graphen
5. Euler'sche Polyederformel für zusammenhängende planare Graphen
6. CW-Komplexe
7. Euler-Charakteristik als topologische Invariante

Vollständige Induktion

Soll die Formel $A(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ bewiesen werden, dann genügen 2 Beweisschritte:

Beweisschema

1. Induktionsanfang: Beweis von $A(1)$
2. Induktionsschritt: Beweis der Induktionsbehauptung $A(n+1)$ mithilfe der Induktionsvoraussetzung $A(n)$, $n \geq 1$

Einfaches Beispiel

Was ist die Summe der Zahlen von 1 bis 100?
5050

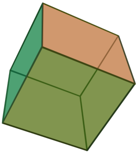
Gauss'sche Summenformel

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

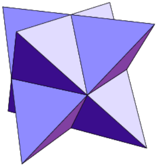
Beweis durch vollständige Induktion

Polyeder

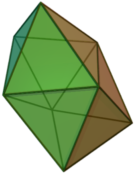
Ein **Polyeder** ist ein Teil des $\mathbb{R}^3$, der von endlich vielen ebenen Flächen begrenzt wird. Ein Kegel ist z.B. kein Polyeder.



Würfel



8-eckiger Stern



Dispenoid

Ein Polyeder heisst **regulär**, wenn alle Flächen aus demselben regelmässigen Vieleck bestehen und in jeder Ecke gleich viele dieser Vielecke zusammenstossen. Ein Polyeder heisst **konvex**, wenn für je 2 Punkte im Polyeder auch jeder Punkt auf der geradlinigen Verbindungsstrecke zum Polyeder gehört. Es gibt genau 5 reguläre konvexe Polyeder, die **Platonischen Körper**.

Polyeder

Eulersche Polyedersatz

Seien E die Anzahl der Ecken, K die Anzahl der Kanten und F die Anzahl der Flächen eines *beschränkten, konvexen Polyeders*. Dann gilt:

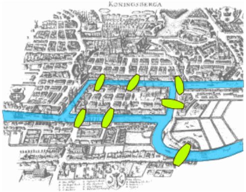
$$E - K + F = 2.$$

Ein Polyeder heisst **beschränkt**, wenn er in einem Ball mit endlichem Radius enthalten ist.
1750 erwähnt Leonard Euler dieses Resultat in einem Brief an Christian Goldbach. Erst A.M. Legendre veröffentlicht 1794 einen vollständigen Beweis.

Leonard Euler (1707–1783)

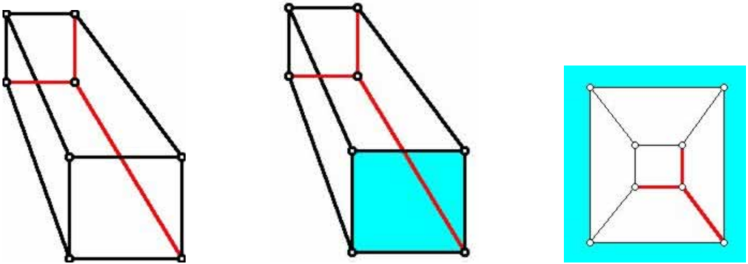
Begründer der Analysis, Graphentheorie und Topologie; mathematische Symbolik (e, π, i, Summenzeichen Σ, $f(x)$ für eine Funktion); 866 wissenschaftliche Arbeiten

1736 löst Euler das "Königsberger Brückenproblem": Die Stadt Königsberg an der Pregel hat 2 grosse Inseln, die über Brücken verbunden sind. Gibt es einen Weg, der jede Brücke genau einmal überquert und zum Ausgangspunkt zurueckkehrt? Nein.



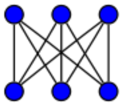
Vereinfachung

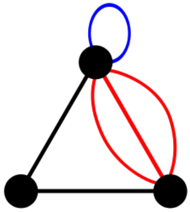
Reduktion des Polyeders auf einen **Graphen** in der Ebene:

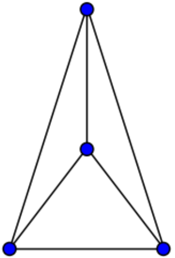


Graph

Ein **Graph** besteht aus Ecken und Kanten, wobei Kanten stets 2 Ecken verbinden. Wir werden nur mit endlichen zusammenhängenden Graphen zu tun haben. Jeder Graph kann kreuzungsfrei in den $\mathbb{R}^3$ eingebettet werden, d.h. Kanten kreuzen sich nicht. Ein Graph heisst **planar**, wenn er eine kreuzungsfreie Einbettung in die Ebene hat.



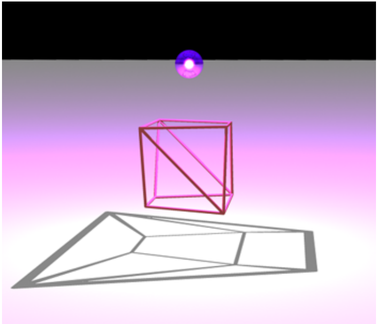




Eine kreuzungsfreie Einbettung eines planaren Graphen zerlegt die Ebene in endlich viele Flächen; genau eine ist unbeschränkt (Jordan'scher Kurvensatz).

Stereographische Projektion

Eine Lichtquelle oberhalb des Polyeders projeziert Schatten auf eine Ebene.



Die Schatten der Polyederkanten formen einen Graphen mit geraden Kanten. Die Polyederflächen werden zu konvexen Gebieten und die Fläche nahe der Lichtquelle wird zur Aussenfläche. Umgekehrt wird jeder planare Graph mit gewissen Zusammenhangseigenschaften auf diese Weise von einem Polyeder erzeugt.

Planare Graphen

Graphen, die von Polyedern herrühren, sind stets planar. Daher reicht es, folgenden Satz zu zeigen:

Eulersche Polyedersatz für zusammenhängende planare Graphen

Sei G ein *zusammenhängender planarer Graph* mit E Ecken und K Kanten. Dann gilt für die Anzahl F der Flächen einer beliebigen kreuzungsfreien Einbettung von G in die Ebene:

$$E - K + F = 2.$$

Beweis

Durch Induktion nach Anzahl der Flächen:

1. *Induktionsanfang* $F = 1$: Die Aussenfläche ist die einzige Fläche. Daher ist G ein **Baum**, dh. er enthält keinen Kreis, und es gilt:

$$E = K + 1, \quad \text{also } E - K + 1 = 2.$$

2. *Induktionsschritt* $F - 1 \Rightarrow F$: Sei $F > 1$. Dann enthält G mindestens einen Kreis. Entfernen wir eine beliebige Kante in diesem Kreis, so verschmelzen die beiden angrenzenden Flächen. Es entsteht ein neuer zusammenhängender planarer Graph G' mit $E' = E$ Ecken, $K' = K - 1$ Kanten und $F' = F - 1$ Flächen, also:

$$E - K + F = E' - (K' + 1) + (F' + 1) = E' - K' + F' = 2$$

nach Induktionsvoraussetzung.

Alternativer Beweis

Durch Induktion nach Anzahl der Ecken:

1. *Induktionsanfang* $E = 1$: G enthält eine Ecke, endlich viele Schlingen und eine Aussenfläche:

$$F = K + 1, \quad \text{also } E - K + F = 1 - K + (K + 1) = 2.$$

2. *Induktionsschritt* $E - 1 \Rightarrow E$: Sei $E > 1$. Es gibt mindestens eine Kante mit 2 verschiedenen Ecken. Durch Kontrahieren dieser Kante und Identifikation der beiden Ecken erhalten wir einen neuen zusammenhängenden planaren Graphen G' mit $E' = E - 1$ Ecken, $K' = K - 1$ Kanten und $F' = F$ Flächen, also:

$$E - K + F = (E' + 1) - (K' + 1) + F' = E' - K' + F' = 2$$

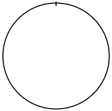
nach Induktionsvoraussetzung.

Die Eulersche Formel heute: Zellenkomplexe

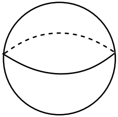
J.H.C. Whitehead (1904 - 1960) führte 1949 ein Konstruktionprinzip für Räume ein, das er CW-Zerlegung nannte:

- 0-Skelett: Eine endliche Menge von Punkten.
- 1-Skelett: Das 0-Skelett und endlich viele Kurvenstücke, deren Endpunkte an das 0-Skelett geklebt sind.
- 2-Skelett: Das 1-Skelett und endlich viele Kreisscheiben, deren Ränder (die Kreise) am 1-Skelett kleben.
- Und so weiter.

Zum Beispiel: CW-Zerlegungen der Sphäre:



1 0-Zelle, 1 2-Zelle,



2 0-Zellen, 2 1-Zellen, 2 2-Zellen.

Euler-Charakteristik

Jeder Polyeder ist ein CW-Komplex.

Definition

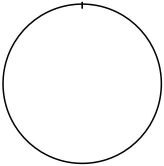
Sei a_k die Anzahl der k-Zellen in einem CW-Komplex M. Die **Euler-Charakteristik von** M ist definiert durch

$$\chi(M) := \sum_k (-1)^k a_k.$$

Theorem

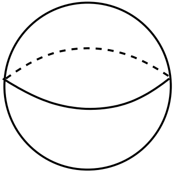
Die Euler-Charakteristik ist eine **topologische Invariante**, d.h. falls zwei Räume X und Y topologisch gleich sind, dann gilt $\chi(X) = \chi(Y)$.

Euler-Charakteristik der Sphäre



1 0-Zelle, 1 2-Zelle,

$\chi(S^2) = 1 + 1 = 2,$



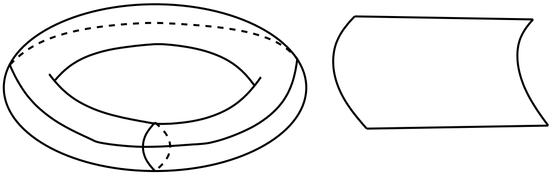
2 0-Zellen, 2 1-Zellen, 2 2-Zellen,

$\chi(S^2) = 2 - 2 + 2 = 2.$

Jeder der Polyeder, die wir am Anfang gesehen haben, ist eine Zellenzerlegung der Sphäre. Das liefert einen weiteren Beweis für den Euler'schen Polyedersatz.

Euler-Charakteristik des Torus

Der Torus ist eine **orientierbare** Fläche vom **Geschlecht** $g = 1$.



1 0-Zelle, 2 1-Zellen, 1 2-Zelle,

$$\chi(\mathit{Torus}) = 1 - 2 + 1 = 0.$$

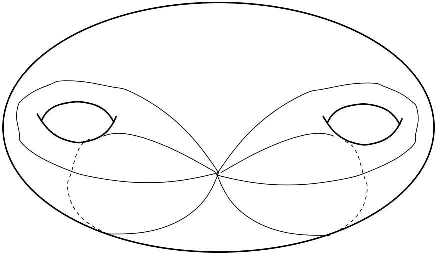
Zusammenhang zwischen Euler-Charakteristik χ und Geschlecht g

Für orientierbare Flächen M gilt

$$\chi(M) = 2 - 2g(M).$$

Euler-Charakteristik des Bretzels

Ein Bretzel ist eine orientierbare Fläche vom Geschlecht $g = 2$.



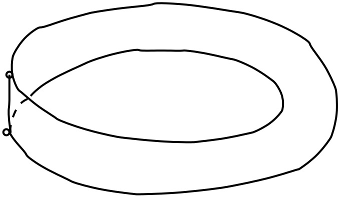
1 0-Zelle, 4 1-Zellen, 1 2-Zelle,

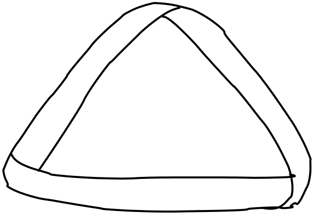
$$\chi(\mathit{Bretzel}) = 1 - 4 + 1 = -2,$$

$$\chi(\mathit{Bretzel}) = 2 - 2g(\mathit{Bretzel}) = -2.$$

Euler-Charakteristik des Möbiusbands

Ein Möbiusbands ist eine **nichtorientierbare** Fläche vom Geschlecht $g = 1$.





2 0-Zellen, 3 1-Zellen, 1 2-Zelle,

$$\chi(\mathit{Moebius}) = 2 - 3 + 1 = 0.$$

Klassifikationssatz kompakter Flächen

Zwei geschlossene zusammenhängende Flächen sind genau dann homöomorph, wenn sie dieselbe Euler-Charakteristik und Orientierung besitzen.

Referenzen

- http://www.mat.univie.ac.at
- Feature Column of the AMS, http://www.ams.org/samplings/feature-column/fcarc-eulers-formula
- Nineteen Proofs of Euler's Formula, http://www.ics.uci.edu/%7Eeppstein/junkyard/euler/
- http://en.wikipedia.org/wiki/Planar_graph
- http://de.wikipedia.org/wiki/Eulerscher_Polyedersatz