Übungen zur Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie (1)

Sommer-Semester 2008, K. Auinger

1. Bestimme $\langle x, y \rangle$, $\cos(x, y)$, $\|x\|$, $\|y\|$ für $x = (2, 1, 3)$ und $(1, 2, -1)$.
2. Sei W ein Würfel und O eine Ecke; zeige, daß die Winkel zwischen der Würfeldiagonale (durch O) zu den drei Kanten (durch O) gleich groß sind und berechne die Größe dieser Winkel.
3. Für $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$, bestimme den Kosinus des Winkels, den x mit der i-ten Koordinatenachse einschließt ($i = 1, 2, 3$).
4. Ist das innere Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ kürzbar? D.h.: folgt für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$, aus $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ stets $y = z$?
5. Zeige, daß für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^3$ gilt:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$
6. Ebenso:
$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \frac{1}{4}\|x - y\|^2.$$
7. Seien $x, y \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0 \neq y$; zeige, dass $z = \frac{1}{\|y\|}x + \frac{1}{\|x\|}y$ den Winkel zwischen x und y halbiert.
8. Bestimme einen Vektor z, der zu x und y normal steht für $x = (1, 2, -1)$ und $y = (2, 1, 3)$.
9. Zeige, dass das äußere Produkt $\cdot \times \cdot$ bilinear ist.
10. Ist das äußere Produkt $\cdot \times \cdot$ kürzbar? D.h.: folgt für $x, y, z \in \mathbb{R}^3$, $x \neq 0$, aus $x \times y = x \times z$ stets $y = z$?
11. (Jacobiidentität) Zeige: für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ gilt
$$x \times (y \times z) + y \times (z \times x) + z \times (x \times y) = 0.$$
12. (Grassmannidentität) Zeige: für alle $x, y, z, \in \mathbb{R}^3$ gilt
$$x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle\, y - \langle x, y \rangle\, z.$$
13. Wann gilt $x \times (y \times z) = (x \times y) \times z$?
14. Bestimme die Hesse'sche Normalform der Gleichung der Geraden $x = (1, 2) + \lambda(1, -1)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$.
15. Bestimme die Gleichung der Geraden durch $(1, 3)$, die normal bzw. parallel zur Geraden im vorigen Beispiel ist.
16. Bestimme die Hesse'sche Normalform der Gleichung der Ebene $x = (1, 1, -1) + \lambda(1, 2, 0) + \mu(2, -1, 3)$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R}$).
17. Bestimme den Abstand des Punktes $P = (1, 1, 1)$ von der Ebene $2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 4 = 0$.
18. Finde den Abstand zwischen den (windschiefen) Geraden g und h, wobei g durch $(5, 2, 1)$ und $(7, 1, 3)$ und h durch $(1, 1, 0)$ und $(3, 0, 2)$ geht.
19. Berechne das Spatprodukt $a_1 a_2 a_3$ für $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
20. Löse $Ax = b$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ und $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. (Verwende das Spatprodukt)