Übungen zur Einführung in die Lineare Algebra und Geometrie (3)

Sommer-Semester 2008, K. Auinger

46. Zeige: ist ein Vektorraum nicht endlich erzeugt, dann besitzt er eine unendliche linear unabhängige Teilmenge.

47. Die Funktionen sin und cos sind linear unabhängig (als Elemente des $\mathbb{R}$-Vektorraumes aller Funktionen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

48. Gilt dasselbe für die Funktionen $\mathbf{1} : x \mapsto 1$, sin, cos, $\sin^2 : x \mapsto (\sin x)^2$, $\cos^2 : x \mapsto (\cos x)^2$?

49. Das Cartesische Produkt $V \times W$ von K-Vektorräumen V und W wird durch die komponentenweise Definition der Operationen zu einem K-Vektorraum: $(v, w) + (v', w') := (v + v', w + w')$ und $\lambda(v, w) := (\lambda v, \lambda w)$ für alle $v, v' \in V$, $w, w' \in W$, $\lambda \in K$. Bestimme $\dim(V \times W)$, wenn $\dim V = n$ und $\dim W = m$. Finde Unterräume V' und W' von $V \times W$, sodass $V \cong V'$, $W \cong W'$ und $V' \oplus W' = V \times W$.

50. Finde eine Basis für den $\mathbb{C}$-Vektorraum $M_{nm}(\mathbb{C})$ aller komplexen $n \times m$-Matrizen und bestimme seine Dimension.

51. Sei A eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K. Zeige: es gibt ein nichttriviales Polynom $p(t) = \sum_{k=1}^{m} a_k t^k$ über K (i.e. $a_i \in K$, nicht alle $a_i = 0$) mit $m \leq n^2 + 1$, sodaß $p(A) = 0$ gilt.

52. Zeige: die Menge $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ bildet eine Basis von $\mathbb{R}^3$. Finde die Koordinaten der Vektoren der Standardbasis $E = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ bezüglich der geordneten Basis $B = ((1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1))$.

53. Finde die Matrizen zum Basiswechsel $E \to B$ und zum Basiswechsel $B \to E$, E und B wie im obigen Beispiel, E geordnet als $((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1))$.

54. Für den Raum $M_{2,2}(\mathbb{R})$ aller 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$ betrachte die zwei geordneten Basen: $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$, $E = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$.
    (a) Bestimme die Matrizen zum Basiswechsel $B \to E$ und zum Basiswechsel $E \to B$.
    (b) Bestimme die Koordinatenvektoren $[A]_E$ und $[A]_B$ für $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

55. Welche der folgenden Abbildungen sind linear?
    (a) $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(x) = -x + (0, -1, 0, 1)$
    (b) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $f(x_1, x_2) = (0, x_1, x_2, x_2 - x_1)$.
    (c) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + x_2, \sqrt{2}x_1 - x_2, 2x_2)$
    (d) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \to x_1 x_2$
    (e) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, 2x_3, 0)$
    (f) $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (x_1^2, x_1 - x_2)$

56. Sei $B = \{(0, 1, 1), (0, 2, 1), (1, 5, 3)\}$; überprüfe, daß B eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist. Gib eine explizite Formel $f(x_1, x_2, x_3) = ?$ an für die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, für die $f(0, 1, 1) = (1, -3, 2, 4)$, $f(0, 2, 1) = (5, -3, 0, 2)$ und $f(1, 5, 3) = (-2, 0, 1, 1)$ gilt.

57. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ eine beliebige lineare Abbildung und $p, v \in \mathbb{R}^2$, $v \neq 0$. Was kann über das Bild der Geraden $x = p + \lambda v$ ($\lambda \in \mathbb{R}$) gesagt werden?

58. Sei $\{v_1, v_2\}$ linear unabhängig in $\mathbb{R}^2$ und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung gegeben durch $f(e_1) = v_1$, $f(e_2) = v_2$. Bestimme das Bild (unter f) des Rechtecks mit den Eckpunkten $(0, 1)$, $(3, 0)$, $(0, 0)$, $(3, 1)$.

59. Zeige, dass für die Transposition $A \mapsto A^T$ von Matrizen über einem Körper K die folgenden Gesetze gelten (wobei "=" stets so zu verstehen ist, daß eine Seite genau dann definiert ist, wenn die andere definiert ist, und die beiden Seiten in diesem Fall übereinstimmen):
   (a) $(A^T)^T = A$
   (b) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ $(\lambda \in K)$
   (c) $(A+B)^T = A^T + B^T$
   (d) $(AB)^T = B^T A^T$.
60. Finde einen Isomorphismus zwischen $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{P}_2$. Finde einen Teilraum V des Vektorraums $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aller reellen Folgen, der zum Vektorraum $\mathcal{P}$ aller Polynomfunktionen isomorph ist.
61. Finde injektive lineare Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ und $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ und surjektive lineare Abbildungen $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$.
62. Zeige: es gibt keine surjektive [injektive] lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, wenn $n < m$ $[n > m]$.
63. Zeige: für jede lineare Abbildung $f : V \to W$ ist $\mathrm{Ker} f$ ein Teilraum von V und $\mathrm{Im} f$ ein Teilraum von W.
64. Bestimme $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{Im} f$, $\mathrm{rg} f$ und $\mathrm{def} f$ für die folgenden linearen Abbildungen:
   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_2)$
   (b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto x_1 + 2x_2 - 4x_3$
   (c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_2, x_3, 0)$
65. Sei V n-dimensional und $f : V \to V$ linear mit $\mathrm{Ker} f = \mathrm{Im} f$. Zeige, daß n gerade sein muß und finde ein Beispiel einer solchen linearen Abbildung.
66. Seien V ein Vektorraum und $f : V \to V$ linear und $f \circ f = f$. Dann gilt: $V = \mathrm{Ker} f \oplus \mathrm{Im} f$. (Anleitung: jedes $v \in V$ läßt sich darstellen als $v = (v - f(v)) + f(v)$.)
67. Sei $V = U \oplus W$; zu jedem $v \in V$ gibt es eindeutig bestimmte $v_U \in U$ und $v_W \in W$ mit $v = v_U + v_W$. Die Abbildung $p_{U,W} : V \to V$, $v \mapsto v_U$ heißt die *Projektion auf U entlang W*. Zeige: $p_{U,W}$ ist linear und idempotent (d.h. $p_{U,W} \circ p_{U,W} = p_{U,W}$). Verwende das obige Beispiel, um zu zeigen, dass umgekehrt jede lineare, idempotente Abbildung p eine Projektion ist, d.h., wenn $p \circ p = p$, dann $p = p_{U,W}$ für geeignete Teilräume U und W.
68. Seien V endlichdimensional und $f : V \to V$ eine lineare Abbildung; zeige: V wird genau dann von $\mathrm{Im} f \cup \mathrm{Ker} f$ erzeugt, wenn $\mathrm{Im} f \cap \mathrm{Ker} f = \{0\}$.
69. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + 2x_2 + x_3, x_1 - x_2)$. Wie lautet die Matrixdarstellung von f bezüglich
   (a) der Standardbasen in $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$
   (b) der Basen $B = ((0,1,1), (0,2,1), (1,5,3))$ (in $\mathbb{R}^3$) und $C = ((2,-1), (1,0))$ (in $\mathbb{R}^2$)?
70. Sei $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ gegeben durch $(Dp)(t) = p'(t)$. Finde die Matrixdarstellung von D bezüglich
   (a) der (geordneten) Basis $B = (1, x, x^2, \ldots, x^n)$
   (b) der (geordneten) Basis $C = (1, 1+x, 1+x+x^2, \ldots, 1+x+x^2 \cdots + x^n)$.

   Finde die Matrizen zu den Basiswechseln $B \to C$ und $C \to B$.
71. Dasselbe für den Operator $\Delta : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$, gegeben durch $(\Delta p)(x) = p(x+1)$.
72. Verifiziere, dass $[\Delta \circ D]_{B,B} = [\Delta]_{B,B}[D]_{B,B}$ und $[D \circ \Delta]_{C,C} = [D]_{C,C}[\Delta]_{C,C}$ und bestimme $[D \circ \Delta - \Delta \circ D]_{B,B}$.
73. Sei $V = M_{2,2}(\mathbb{R})$ und $A \in V$. Zeige: $f_A : V \to V$, $X \mapsto AX$ ist linear. Finde die Matrixdarstellung von f_A für $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ bezüglich $E = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ und $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.