Übungen zur Geometrie und Linearen Algebra fürs Lehramt

Sommer-Semester 2015

I. Elementargeometrie

Einleitung

1. Man zeige, dass die Winkelsumme in einem konvexen Viereck gleich 360^0 und in einem konvexen n-Eck gleich $(n-2)\cdot 180^0$ ist. Wie groß sind die Winkel im regelmäßigen n-Eck? (Eine Teilmenge M der Ebene heißt *konvex*, wenn M mit je zwei Punkten A und B auch die Strecke $\overline{AB}$ enthält.).
2. Auf jeder Seite eines unregelmäßigen konvexen Fünfecks, dessen Winkel $> 90^0$ sind, wird ein Dreieck errichtet, dessen Schenkel die Verlängerungen der benachbarten Fünfeckseiten sind. (Es entsteht ein fünfzackiger Stern.) Seien α_1, α_2, α_3, α_4 und α_5 die Winkel an den Spitzen der aufgesetzten Dreiecke. Man zeige $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 180^0$. Was gilt für die analoge Fragestellung im n-Eck?
3. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm, sodass der Winkel α bei A und C spitz ist. Sei M der Mittelpunkt der Diagonale $\overline{AC}$. Wir wählen P auf $\ell(C, D)$ so, dass $\angle MPC = \alpha$ gilt. Man zeige $|AP| = |BP|$.
4. Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Sei P ein beliebiger Punkt der Seite $\overline{CD}$. Sei R der Schnittpunkt der Strecke $\overline{AP}$ mit der Diagonale $\overline{BD}$. Man zeige $\#ADR = \#BRP$. Hinweis: Es gilt $\#CBD = \frac{1}{2}F$ und $\#ADP + \#BCP = \frac{1}{2}F$, wobei F die Fläche des Parallelogramms ist.
5. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Winkeln α, β und γ. Man drücke den Winkel, den die Winkelsymmetralen durch die Eckpunkte B und C miteinander bilden, durch α, β und γ aus.

Strahlensatz

6. Sei M der Schnittpunkt der beiden Diagonalen eines Parallelogramms. Dann ist M der Mittelpunkt beider Diagonalen.
   Es gilt auch die Umkehrung. Hat ein Viereck die Eigenschaft, dass der Schnittpunkt M der Diagonalen der Mittelpunkt beider Diagonalen ist, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.
7. Sei $ABCD$ ein Viereck und M der Schnittpunkt seiner Diagonalen. Man zeige $\frac{|MB|}{|MD|} = \frac{\#ABC}{\#ADC}$. Hat ein Viereck die Eigenschaft, dass beide Diagonalen die Fläche des Vierecks halbieren, dann ist das Viereck ein Parallelogramm.
8. Seien g und g' zwei einander im Punkt S schneidende Gerade und a, b, c drei zueinander parallele Gerade, die weder zu g noch zu g' parallel sind und den Punkt S nicht enthalten. Seien A, B, C ihre Schnittpunkte mit g und A', B', C' jene mit g'. Folgere aus dem Strahlensatz, dass $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$ gilt.
9. Ein beliebiges Dreieck wird durch die Schwerlinien in sechs flächengleiche Teile geteilt. Hinweis: Man suche Dreiecke mit gleich langer Basis und gemeinsamer Höhe.
10. Seien g und h nicht parallele Gerade. Seien P_1, P_2 und P_3 Punkte auf der Gerade g und Q_1, Q_2 und Q_3 Punkte auf der Gerade h, jedoch keiner dieser Punkte liege auf beiden Geraden. Man zeige: Wenn $\ell(P_2, Q_1)$ parallel zu $\ell(P_3, Q_2)$ und $\ell(P_1, Q_2)$ parallel zu $\ell(P_2, Q_3)$ liegt, dann liegt auch $\ell(P_1, Q_1)$ parallel zu $\ell(P_3, Q_3)$. (Satz von Pappos)
11. Seien g_1, g_2 und g_3 verschiedene Gerade, die einander in einem Punkt S schneiden. Seien P_1 und Q_1 Punkte auf g_1, seien P_2 und Q_2 Punkte auf g_2 und seien P_3 und Q_3 Punkte auf g_3. Man zeige: Wenn $\ell(P_1, P_2)$ parallel zu $\ell(Q_1, Q_2)$ und $\ell(P_2, P_3)$ parallel zu $\ell(Q_2, Q_3)$ liegt, dann liegt auch $\ell(P_1, P_3)$ parallel zu $\ell(Q_1, Q_3)$. (Satz von Desargues)