42. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit $\alpha \neq \beta$. Sei W_c der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch C mit der Seite $\overline{AB}$. Sei P der Schnittpunkt der Gerade $\ell(A,B)$ mit der Tangente im Punkt C an den Umkreis. Man zeige $|PC| = |PW_c|$. Hinweis: zeige, dass $\angle PCW_c = \angle CW_cP$ (mittels Tangentenwinkelsatz). Dann ist $\triangle CW_cP$ gleichseitig mit Basis $\overline{CW_c}$.
43. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck mit Höhenschnittpunkt H. Sei F der Fußpunkt der Höhe durch C und M der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Sei K der Mittelpunkt der Höhe durch A und L der Mittelpunkt der Höhe durch B. Dann liegen die fünf Punkte F, M, K, H und L auf einem Kreis. Hinweis: Strahlensatz und Satz von Thales.
44. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und F der Fußpunkt der Höhe durch C. Seien P und Q die Fußpunkte der Lote von F auf die Seiten $\overline{AC}$ und $\overline{BC}$. Sei g eine Parallele zur Seite $\overline{AB}$ und U und V ihre Schnittpunkte mit $\ell(B,C)$ und $\ell(A,C)$. Dann liegen die vier Punkte P, Q, U und V auf einem Kreis. Hinweis: verwende, dass die Punkte C, P, F, Q auf einem Kreis liegen und zeige zunächst, dass die Dreiecke $\triangle ABC$ und $\triangle QPC$ ähnlich sind. Sodann mache eine Fallunterscheidung je nach Lage der Geraden g.

Inkreis, Ankreise, Fläche.

Für ein Dreieck $\triangle ABC$ mit den Seitenlängen a, b, c bezeichne im folgenden s immer den halben Umfang $\frac{1}{2}(a+b+c)$, F seine Fläche, ϱ den Inkreisradius, $\varrho_a, \varrho_b, \varrho_c$ die Ankreisradien, r den Umkreisradius.

45. Zeige mittels des Satzes von Pythagoras, dass die Höhe h_a auf a durch a, b, c folgendermaßen ausgedrückt werden kann:
$$h_c = \sqrt{c^2 - \frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4a^2}}.$$
Folgere daraus die Heron'sche Flächenformel:
$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$
46. Es gilt $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$, $\varrho_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$, $\varrho_b = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-c)}{s-b}}$ und $\varrho_c = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$.
47. Für jedes Dreieck gilt $F^2 = \varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c$, also $F = \sqrt{\varrho\varrho_a\varrho_b\varrho_c}$.
48. Für jedes Dreieck gilt $\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c} = \frac{1}{\varrho}$.
49. Für jedes Dreieck gilt $\varrho_a\varrho_b + \varrho_a\varrho_c + \varrho_b\varrho_c = s^2$.
50. Für jedes Dreieck gilt $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$.
51. Seien I_a, I_b und I_c die Ankreismittelpunkte. Mit Hilfe der Umkehrung des Satzes von Carnot zeige man, dass die Senkrechte durch I_a auf $\ell(B,C)$, die Senkrechte durch I_b auf $\ell(A,C)$ und die Senkrechte durch I_c auf $\ell(A,B)$ einander in einem Punkt V (Bevanpunkt) schneiden.
52. Sei V wie im vorigen Beispiel. Durch Berechnen geeigneter Winkel zeige man, dass I_a, I_b und I_c den gleichen Abstand von V haben.
53. Es gilt $abc \geq 8(s-a)(s-b)(s-c)$, wobei $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ ist (Schur-Ungleichung). Hinweis: Sei $x = s-a$, $y = s-b$ und $z = s-c$. Daraus werden a, b und c berechnet. Es gilt $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, etc.
54. Es gilt $r \geq 2\varrho$ (Ungleichung von Euler). Hinweis: $r = \frac{abc}{4F}$, $\varrho = \frac{F}{s}$, $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, voriges Beispiel.
55. Für ein Dreieck gilt $a^2 + b^2 + c^2 \geq 4\sqrt{3}F + (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2$ (Hadwiger-Finsler-Ungleichung). Hinweis: Heronsche Flächenformel, $a = y+z$, $b = x+z$, $c = x+y$ einsetzen und umformen $(x, y, z > 0)$. In weiterer Folge kann die Identität
$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 - x^2yz - xy^2z - xyz^2 = \tfrac{1}{2}(xy-yz)^2 + \tfrac{1}{2}(yz-zx)^2 + \tfrac{1}{2}(zx-xy)^2$$
verwendet werden.