75. Setzt man auf die vier Seiten eines beliebigen Parallelogramms gleichschenkelige Dreiecke mit Basiswinkel 45^0, dann bilden die Spitzen dieser vier Dreiecke ein Quadrat. (Satz von Thebault)

76. Über den Seiten $\overline{BC}$ und $\overline{AC}$ eines Dreiecks $\triangle ABC$ wird ein gleichseitiges Dreieck errichtet. Seien S_a und S_b ihre Spitzen und M_a und M_b die Mittelpunkte der Strecken $\overline{S_aC}$ und $\overline{S_bC}$. Weiters sei M_c der Mittelpunkt der Seite $\overline{AB}$. Das Dreieck $\triangle M_aM_bM_c$ ist dann gleichseitig.

77. Sei $ABCDEF$ ein regelmäßiges Sechseck. Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AC}$ und K der Mittelpunkt der Seite $\overline{EF}$. Man zeige, dass das Dreieck $\triangle MDK$ gleichseitig ist.

III. Koordinaten und Vektoren

78. Man berechne die Fläche des Dreiecks mit den Ecken $(-1,2,0)$, $(0,3,3)$ und $(2,2,1)$.

79. Man zeige, dass die Fläche des Dreiecks mit den Ecken (a_1,a_2), (b_1,b_2) und (c_1,c_2) gleich dem Betrag von $\frac{1}{2}\big(a_1(b_2-c_2)+b_1(c_2-a_2)+c_1(a_2-b_2)\big)=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2\\ 1 & b_1 & b_2\\ 1 & c_1 & c_2\end{vmatrix}$ ist.

80. Die Ecken der Grundfläche eines Parallelepipeds bezeichnen wir der Reihe nach mit A, B, C und D, die darüberliegenden Ecken der Deckfläche mit E, F, G und H, wobei E über A liegt. Es sei $A=(4,1,0)$, $B=(3,5,-1)$, $D=(6,0,1)$ und $E=(5,0,6)$. Man berechne die anderen Ecken des Parallelepipeds.

81. Man berechne das Volumen des Parallelepipeds aus dem vorigen Beispiel.

82. Man zeige, dass die Seitenmitten eines beliebigen Vierecks die Eckpunkte eines Parallelogramms sind. Seien M_1 und M_2 die Mittelpunkte der beiden Diagonalen dieses Parallelogramms. Seien D_1 und D_2 die Mittelpunkte der beiden Diagonalen des gegebenen Vierecks. Sei M der Mittelpunkt der Strecke $\overline{D_1D_2}$. Man zeige $M=M_1=M_2$. Hinweis: Seien $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ und $\mathbf{d}$ die Ortsvektoren zu den Eckpunkten des Vierecks. Man kann dann der Reihe nach die gefragten Mittelpunkte berechnen: Sind $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ die Ortsvektoren zu zwei Punkten, dann ist $\frac{1}{2}(\mathbf{u}+\mathbf{v})$ der Ortsvektor zum Mittelpunkt.

83. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und P ein Punkt. Sei $f_a(P)$ die orientierte Fläche des Dreiecks mit Grundlinie $\overline{BC}$ und Spitze P, das heißt die Fläche hat positives Vorzeichen, wenn P auf derselben Seite von $\ell(B,C)$ liegt wie das Dreieck $\triangle ABC$, und negatives Vorzeichen, wenn P auf der anderen Seite von $\ell(B,C)$ liegt. Analog werden $f_b(P)$ und $f_c(P)$ definiert. Seien u, v, w und r beliebige reelle Zahlen. Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Punkte P, für die $uf_a(P)+vf_b(P)+wf_c(P)=r$ gilt. Man zeige, dass $\mathcal{L}$ leer, eine Gerade oder die gesamte Ebene ist. Hinweis: $f_a(P)$, $f_b(P)$ und $f_c(P)$ lassen sich mit Hilfe der Determinante berechnen.

84. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck und P ein Punkt. Sei $d_a(P)$ der orientierte Normalabstand vom Punkt P zur Gerade $\ell(B,C)$, das heißt der Abstand hat positives Vorzeichen, wenn P auf derselben Seite von $\ell(B,C)$ liegt wie das Dreieck $\triangle ABC$, und negatives Vorzeichen, wenn P auf der anderen Seite von $\ell(B,C)$ liegt. Analog werden $d_b(P)$ und $d_c(P)$ definiert. Seien u, v, w und r beliebige reelle Zahlen. Sei $\mathcal{L}$ die Menge aller Punkte P, für die $ud_a(P)+vd_b(P)+wd_c(P)=r$ gilt. Man zeige, dass $\mathcal{L}$ leer, eine Gerade oder die gesamte Ebene ist. Hinweis: Das kann man auf das vorige Beispiel zurückführen.

85. Sei $\triangle ABC$ ein Dreieck. Sei E der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch A mit $\ell(B,C)$ und F der Schnittpunkt der Winkelsymmetrale durch B mit $\ell(A,C)$. Sei P ein Punkt auf $\ell(E,F)$. Dann gilt $d_c(P)=d_a(P)+d_b(P)$. Hinweis: zeige, dass für $(u,v,w,r)=(1,1,-1,0)$ im vorigen Beispiel die Menge $\mathcal{L}$ eine Gerade ist und die Punkte E und F auf dieser Gerade liegen. Der Einfachheit halber kann angenommen werden, dass das Dreieck in Standardlage ist.

Standardlage

86. Für ein Dreieck in Standardlage berechne man die Höhenfußpunkte H_a, H_b und H_c.