Sehr geehrter Herr Professor Dress!

Ich habe gestern Ihre gemeinsame Arbeit "A simple proof of an identity concerning pfaffians of skew symmetric matrices" mit Walter Wenzel im neuen Heft der Advances in Math. gesehen. Da Pfaffsche Formen eigentlich kombinatorische Objekte sind (nämlich gewisse erzeugende Funktionen für perfekte Matchings), war mir sofort klar, daß Theorem 1 and Theorem 3 einfache kombinatorische Beweise besitzen müssen. Und dem ist auch so. Möglicherweise bin ich auch nicht der erste, der das feststellt. Was nett ist, ist, daß die kombinatorischen Beweise gleich auch Verallgemeinerungen zeigen.

Die kombinatorische Formulierung der Pfaffschen Form einer oberen Dreiecksmatrix $A = (a_{ij})_{1\le i<j\le 2n}$ ist bekanntlich (siehe die von Ihnen zitierte Arbeit von John Stembridge)

$$\operatorname{pf}(A) = \sum_{\pi\in\mathcal{F}_n} \operatorname{sgn}(\pi) \prod_{(i,j)\in\pi} a_{ij}, \tag{1}$$

wobei $\mathcal{F}_n$ die Menge aller perfekte Matchings auf der Menge $\{1,2,\dots,2n\}$ ist, und $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{B(\pi)}$, wo $B(\pi)$ die Anzahl aller „Überkreuzungen" von Bögen des perfekten Matchings π ist.

Das vorausgesetzt, kann man Theorem 1 und Theorem 3 (die Gültigkeit von Theorem 2, nämlich, daß die Abbildung β eine Pfaffsche Form ist, vorausgesetzt) sofort direkt zeigen.

Theorem 1. *Seien I_1, I_2 Teilmengen von $\{1,2,\dots,n\}$ mit ungerader Kardinalität, und sei die symmetrische Differenz $I_1\triangle I_2 = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ mit $i_1 < i_2 < \cdots < i_t$. Dann gilt*

$$\sum_{\tau=1}^{t} (-1)^\tau \cdot p(I_1\triangle\{i_\tau\}) \cdot p(I_2\triangle\{i_\tau\}) = 0. \tag{2}$$

Beweis. Der Bequemlichkeit halber sei $A_\pi = \prod_{(i,j)\in\pi} A_{i,j}$, wenn π irgend ein Matching (nicht notwendigerweise perfekt) ist. Man beginnt, indem man in der linken Seite von (2) die Pfaffschen Formen gemäß (1) expandiert. Man erhält

$$\sum_{(\tau,\pi,\rho)} (-1)^\tau \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\rho) A_\pi A_\rho, \tag{3}$$

wobei $1\le\tau\le t$, π ein perfektes Matching auf $I_1\triangle\{i_\tau\}$, und ρ ein perfektes Matching auf $I_2\triangle\{i_\tau\}$ ist. Die Aufgabe ist also, eine Involution ϕ auf der Menge aller dieser Tripel zu finden, sodaß für $(\bar\tau,\bar\pi,\bar\rho) = \phi((\tau,\pi,\rho))$ die Beziehung

$$(-1)^\tau \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\rho) A_\pi A_\rho = -(-1)^{\bar\tau} \operatorname{sgn}(\bar\pi)\operatorname{sgn}(\bar\rho) A_{\bar\pi} A_{\bar\rho} \tag{4}$$

gilt.

Die Involution kann so definiert werden. Sei (τ,π,ρ) so ein Tripel. Dieses kann als Graph G mit Knotenmenge $I_1\cup I_2$ aufgefaßt werden, mit blauen und roten Bögen. Die blauen Bögen sind genau die Bögen von π, und die roten Bögen sind genau die Bögen von ρ. So ein Graph hat die folgenden 3 Eigenschaften.

(a) Jedes Element von $(I_1\backslash I_2)\triangle\{i_\tau\}$ hängt an genau einem blauen Bogen.
(b) Jedes Element von $(I_2\backslash I_1)\triangle\{i_\tau\}$ hängt an genau einem roten Bogen.
(c) Jedes Element von $(I_1\cap I_2)$ hängt an genau einem blauen und genau einem roten Bogen.

Nun betrachten wir jene Zusammenhangskomponente des Graphen, wo i_τ vorkommt. Wegen (a),(b),(c) ist diese Zusammenhangskomponente ein Pfad $P=(i_\tau=j_1,j_2,\dots,j_k=i_{\bar\tau})$, der i_τ mit einem Element $i_{\bar\tau}\in I_1\triangle I_2$ verbindet, und dessen dazwischenliegende Punkte j_l, $2\le l\le k-1$ alle zu $I_1\cap I_2$ gehören. Sei $\bar G$ der Graph der aus G dadurch entsteht, daß im Pfad P alle roten Bögen blau gemacht werden, und alle blauen rot. Dann sei

$$\phi((\tau,\pi,\rho)):=(\bar\tau,\bar\pi,\bar\rho),$$

wobei $\bar\pi$ jenes perfekte Matching auf $I_1\triangle\{i_{\bar\tau}\}$ ist, das durch alle blauen Kanten in $\bar G$ bestimmt ist, und wo $\bar\rho$ jenes perfekte Matching auf $I_2\triangle\{i_{\bar\tau}\}$ ist, das durch alle roten Kanten in $\bar G$ bestimmt ist.

Es muß nur noch (4) nachgerechnet werden. Es genügt zu zeigen, daß

$$(-1)^\tau\operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\rho)=-(-1)^{\bar\tau}\operatorname{sgn}(\bar\pi)\operatorname{sgn}(\bar\rho)\tag{5}$$

gilt. Sei

$$\begin{aligned}x_l&=\#(\text{Elemente in } I_1\backslash I_2 \text{ zwischen } j_l \text{ und } j_{l+1})\\ y_l&=\#(\text{Elemente in } I_2\backslash I_1 \text{ zwischen } j_l \text{ und } j_{l+1})\\ z_l&=\#(\text{Elemente in } I_1\cap I_2 \text{ zwischen } j_l \text{ und } j_{l+1}).\end{aligned}$$

Eine kurze Überlegung zeigt, daß dann

$$\sum_{l=1}^{k-1}(x_l+y_l)\equiv\tau-\bar\tau-1\pmod 2.\tag{6}$$

Außerdem ist die Anzahl aller Kreuzungen eines Bogens (j_l,j_{l+1}) mit Bögen von π kongruent $x_l+z_l\pmod 2$, und die Anzahl aller Kreuzungen des Bogens (j_l,j_{l+1}) mit Bögen von ρ kongruent $y_l+z_l\pmod 2$. Grob gesprochen, dadurch, daß wir Bögen (j_l,j_{l+1}) von einem Matching entfernen und zum anderen dazugeben, verursacht so ein Bogen einen Unterschied von $(-1)^{x_l+z_l+y_l+z_l}=(-1)^{x_l+y_l}$ im Übergang von $(-1)^\tau\operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\rho)$ auf $(-1)^{\bar\tau}\operatorname{sgn}(\bar\pi)\operatorname{sgn}(\bar\rho)$. Das ist wirklich korrekt: Wenn man eine Kreuzung zwischen zwei gleichfarbigen Bögen des Pfades P hat, dann haben wir in der obigen Abzählung von Vorzeichenwechseln 2 Vorzeichenwechsel gezählt. Das pat genau mit der Tatsache zusammen, da in diesem Fall eine Kreuzung von einem

Matching zum anderen „wanderte“, das Vorzeichen daher insgesamt gleich blieb. Also gilt wegen (6)

$$\begin{aligned}(-1)^\tau \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\rho) &= (-1)^\tau (-1)^{\sum(x_l+y_l)} \operatorname{sgn}(\bar\pi)\operatorname{sgn}(\bar\rho)\\ &= -(-1)^{\bar\tau} \operatorname{sgn}(\bar\pi)\operatorname{sgn}(\bar\rho),\end{aligned}$$

wie gewünscht. □

Dieselbe Idee zeigt die folgende Verallgemeinerung von Theorem 1.

Theorem 1u. *Seien I_1, I_2 Teilmengen von $\{1,2,\dots,n\}$ mit ungerader Kardinalität, und sei die symmetrische Differenz $I_1 \triangle I_2 = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ mit $i_1 < i_2 < \cdots < i_t$. Dann gilt für jedes $s \ge 0$*

(7)
$$\sum_{1\le\tau_1<\cdots<\tau_{2s+1}\le t} (-1)^{\tau_1+\cdots+\tau_{2s+1}} \cdot p(I_1 \triangle \{i_{\tau_1},\dots,i_{\tau_{2s+1}}\}) \cdot p(I_2 \triangle \{i_{\tau_1},\dots,i_{\tau_{2s+1}}\}) = 0.$$

Für gerade Indexmengen gilt bloß:

Theorem 1g. *Seien I_1, I_2 Teilmengen von $\{1,2,\dots,n\}$ mit gerader Kardinalität, und sei die symmetrische Differenz $I_1 \triangle I_2 = \{i_1, i_2, \dots, i_t\}$ mit $i_1 < i_2 < \cdots < i_t$. Dann gilt*

$$\sum_{s=0}^{\lfloor t/2\rfloor} \sum_{1\le\tau_1<\cdots<\tau_{2s}\le t} (-1)^{\tau_1+\cdots+\tau_{2s}} \cdot p(I_1 \triangle \{i_{\tau_1},\dots,i_{\tau_{2s}}\}) \cdot p(I_2 \triangle \{i_{\tau_1},\dots,i_{\tau_{2s}}\}) = 0. \tag{8}$$

Der kombinatorische Beweis von Theorem 3 ist sogar noch einfacher.

Theorem 3.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}(-1)^i p(m_1,\dots,m_{i-1},m_{i+1},\dots,m_k)\cdot p(m_i,n_1,\dots,n_l)&\\ +\sum_{j=1}^{l}(-1)^j p(n_j,m_1,\dots,m_k)\cdot p(n_1,\dots,n_{j-1},n_{j+1},\dots,n_l) &= 0.\end{aligned}$$

Beweis. Man expandiert wieder die linke Seite aufgrund von (1):

$$\sum_{(i,\pi,\rho)} (-1)^i \operatorname{sgn}(\pi)\operatorname{sgn}(\rho) A_\pi A_\rho + \sum_{(j,\pi',\rho')} (-1)^j \operatorname{sgn}(\pi')\operatorname{sgn}(\rho') A_{\pi'} A_{\rho'},$$

wobei π ein perfektes Matching auf $m_1,\dots,m_{j-1},m_{j+1},\dots,m_k$ ist, ρ ein perfektes Matching auf $m_i, n_1, \dots, n_l$, usw.

Wieder findet man eine „vorzeichenumkehrende, gewichtserhaltende“ Bijektion. Sei (i,π,ρ) ein Tripel der ersten Summe. Dann verbindet ρ das Element m_i mit einem n_j.

Dann sei (j, π', ρ') jenes Tripel, wo π' jenes perfekte Matching auf $n_j, m_1, \dots, m_k$ ist, das aus π durch Hinzufügen des Bogens (n_j, m_i) entsteht, und wo ρ' jenes perfekte Matching auf $n_1, \dots, n_{j-1}, n_{j+1}, \dots, n_l$ ist, das aus ρ durch Entfernen des Bogens (m_i, n_j) entsteht.

Wieder ist bloß das Vorzeichen nachzurechnen. Es gilt

$$\begin{aligned}(-1)^i \operatorname{sgn}(\pi) \operatorname{sgn}(\rho) &= (-1)^i \operatorname{sgn}(\pi)(-1)^{j-1} \operatorname{sgn}(\rho') \\ &= -(-1)^i(-1)^{i-1} \operatorname{sgn}(\pi')(-1)^{j-1} \operatorname{sgn}(\rho') \\ &= -(-1)^j \operatorname{sgn}(\pi') \operatorname{sgn}(\rho').\end{aligned}$$

Man bemerke, daß das Minuszeichen auf der rechten Seite dadurch entsteht, daß der Bogen (m_i, n_j) umgedreht wird auf (n_j, m_i). Es gilt ja, daß β schiefsymmetrisch ist, was äquivalent dazu ist, daß alle Eintragungen in den Pfaffschen Formen schiefsymmetrisch sind. Im besonderen ist also $\beta(m_i, n_j) = -\beta(n_j, m_i)$. $\square$

Mit besten Grüßen,
Christian Krattenthaler