DÉMONSTRATION DE L'OBSERVATION 2 D'ALMKVIST ET ZUDILIN

C. KRATTENTHALER ET T. RIVOAL

Le but de cette note est de donner une preuve de l'Observation 2 d'Almkvist et Zudilin [1, p. 487]. Il s'agit de l'observation numérique suivante. Posons

$$A_n = \sum_{0 \le j,k \le n} \binom{n}{j}^2 \binom{n}{k}^2 \binom{n+j}{n} \binom{n+k}{n} \binom{j+k}{n}$$

et

$$w_0(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n = 1 + 12z + 804z^2 + 88680z^3 + \cdots \in \mathbb{Z}[[z]].$$

Observation 2. *Il existe* $u_0(z) \in \mathbb{Z}[[z]]$ *telle que* $w_0(z) = u_0(z)^2$.

On va utiliser le critère suivant de Heninger et al. [2]. On note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble de séries formelles $F(z) \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]]$ telles que $F(z)^{1/n} \in 1 + z\mathbb{Z}[[z]]$ pour un entier $n \ge 1$.

Lemme 1. *Posons* $\mu_n = n \prod_{p|n} p$. *On a*

$$F(z) \in \mathcal{P}_n \iff F(z) \pmod{\mu_n} \in \mathcal{P}_n.$$

Dans le cas de la série $w_0(z)$, on a $n = 2$ et $\mu_2 = 4$. Il suffit donc de prouver que $w_0(z) \pmod 4 \in \mathcal{P}_2$. Or nous allons prouver que $w_0(z) \pmod 4 = 1$, qui est bien dans $\mathcal{P}_2$.

Théorème 1. *Pour des entiers* $j, k, n \ge 0$, *posons*

$$a_n(j,k) = \binom{n}{j}^2 \binom{n}{k}^2 \binom{n+j}{n} \binom{n+k}{n} \binom{j+k}{n}.$$

Pour tous entiers $n \ge 1$ *et* $j, k \ge 0$, *on a*

(a) $v_2\big(a_n(j,k)\big) = 1$ *si, et seulement si,* $\{j,k\} = \{0,n\}$ *et* n *est une puissance de* 2.

(b) $v_2\big(a_n(j,k)\big) \ge 2$ *sinon.*

Pour $n \ge 1$, on a

$$A_n = a_n(0,n) + a_n(n,0) + {\sum_{0 \le j,k \le n}}' a_n(j,k),$$

où le prime signifie que la sommation exclut les couples $(j,k) = (0,n), (n,0)$. Comme $a_n(0,n) = \binom{2n}{n} = a_n(n,0)$ est toujours pair (le pire cas étant donné par (a)), on en déduit le corollaire suivant.

Corollaire 1. *Pour tout entier* $n \ge 1$, *on a* $v_2\big(A_n\big) \ge 2$. *En particulier,* $w_0(z) \pmod 4 = 1$ *et l'Observation 2 est vraie.*

Date: 1er octobre 2008.

Démonstration du Théorème 1. Soit $n \geq 1$. Il n'y a rien à prouver si $j+k<n$ et on suppose maintenant que $j+k \geq n$.

Premier cas : $\{j,k\}=\{0,n\}$**.** On a alors $a_n(0,n)=a_n(n,0)=\binom{2n}{n}$. Or

$$v_2\left(\binom{2n}{n}\right)=\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{2n}{2^\ell}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{n}{2^\ell}\right\rfloor\right)=n-\sum_{\ell=1}^{\infty}\left\lfloor\frac{n}{2^\ell}\right\rfloor.$$

Il est facile de vérifier que l'expression à droite est ≥ 2 sauf si n est une puissance de 2, auquel cas elle vaut 1.

Deuxième cas : $\{j,k\}\neq\{0,n\}$**.** La condition $j+k\geq n\geq 1$ montre que dans ce cas on a alors forcément $j\geq 1$ et $k\geq 1$.

On va tout d'abord montrer que pour entiers m,p tels que $1\leq p\leq m$, on a

$$v_2\left(\binom{m}{p}\binom{m+p}{m}\right)\geq 1. \tag{1}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}v_2\left(\binom{m}{p}\binom{m+p}{m}\right)&=\sum_{\ell=1}^{\infty}\left(\left\lfloor\frac{m+p}{2^\ell}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{p}{2^\ell}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{m-p}{2^\ell}\right\rfloor\right)\\&\geq\left\lfloor\frac{m+p}{2^L}\right\rfloor-2\left\lfloor\frac{p}{2^L}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{m-p}{2^L}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{m+p}{2^L}\right\rfloor-\left\lfloor\frac{m-p}{2^L}\right\rfloor\geq 0,\end{aligned}$$

où L est l'entier ≥ 1 tel que $2^{L-1}\leq p<2^L$. Supposons alors que $\lfloor\frac{m+p}{2^L}\rfloor-\lfloor\frac{m-p}{2^L}\rfloor=0$. On en déduit que

$$0\leq\frac{m+p}{2^L}-\frac{m-p}{2^L}<1$$

et donc que $p<2^{L-1}$, contrairement à l'hypothèse. Donc $\lfloor\frac{m+p}{2^L}\rfloor-\lfloor\frac{m-p}{2^L}\rfloor\geq 1$, ce qui prouve (1).

On applique maintenant (1) aux deux cas $(m,p)=(n,j)$ et $(m,p)=(n,k)$ pour obtenir que

$$v_2\left(\binom{n}{j}\binom{n}{k}\binom{n+j}{n}\binom{n+k}{n}\right)\geq 2.$$

A fortiori, on a donc $v_2\big(a_n(k,j)\big)\geq 2$ lorsque $\{j,k\}\neq\{0,n\}$.

Ceci termine la preuve du théorème. □

Bibliographie

[1] G. Almkvist and W. Zudilin, *Differential equations, mirror maps and zeta values*, in : Mirror Symmetry V, N. Yui, S.-T. Yau, and J.D. Lewis (eds.), AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **38** (2007), International Press & Amer. Math. Soc., 481–515.

[2] N. Heninger, E. M. Rains, N. J. A. Sloane, *On the integrality of n-th roots of generating functions*, J. Combin. Theory Ser. A **113** (2006), 1732–1745.