

Gespiegelt und verkehrt: Über die Kombinatorik von musikalischen Themen

Christian Krattenthaler

Fakultät für Mathematik, Universität Wien

JOHANN SEBASTIAN BACH (1685–1750): *Sinfonia E-Dur BWV 792*
(1723)

Thema und Umkehrung

JOHANN SEBASTIAN BACH (1685–1750): *Sinfonia E-Dur BWV 792*
(1723)

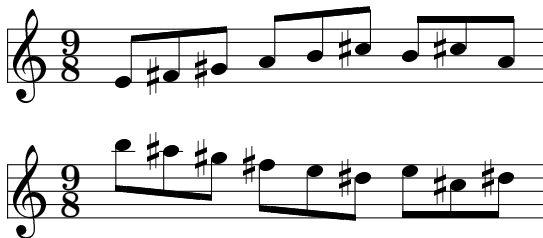
Das **Thema** der Sinfonia:



Thema und Umkehrung

JOHANN SEBASTIAN BACH (1685–1750): *Sinfonia E-Dur BWV 792*
(1723)

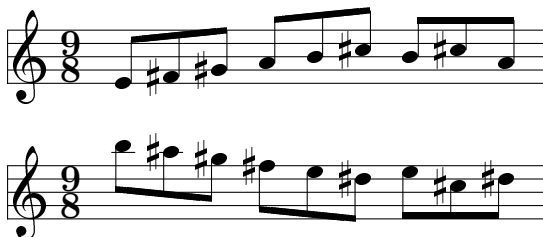
Das **Thema** der Sinfonia:



Thema und Umkehrung

JOHANN SEBASTIAN BACH (1685–1750): *Sinfonia E-Dur BWV 792*
(1723)

Das **Thema** der Sinfonia:



Wird ein Thema „auf den Kopf gestellt“, so nennt man dies
Umkehrung (Spiegel, Inversion).

Thema und Umkehrung

Die Verwendung der **Umkehrung** eines Themas ist und war immer eine oft verwendete Technik der „Verarbeitung“ von Themen, insbesondere in Fugen.

Man findet sie etwa in einigen Fugen des *Wohltemperierten Klaviers*, vermehrt im *Musikalischen Opfer* und in der *Kunst der Fuge* (J. S. Bach), selbstverständlich im Fugensatz der „*Großen Sonate für das Hammerklavier*“ op. 106 (L. v. Beethoven), usw. usw.

Thema und Umkehrung

JOHANN SEBASTIAN BACH (1685–1750): *Sinfonia E-Dur BWV 792*
(1723)

Thema und Umkehrung zugleich:

The image displays the first two staves of the Sinfonia E-Dur BWV 792 by Johann Sebastian Bach. The music is written in E major (three sharps) and 9/8 time. The first staff is in treble clef, and the second staff is in bass clef. The melody in the first staff consists of a sequence of eighth notes: E4, F#4, G4, A4, B4, C5, D5, E5. The second staff shows the inversion of this melody, with notes: E3, D3, C3, B2, A2, G2, F#2, E2. The inversion is marked with a '7' below the notes, indicating a seventh interval from the original melody. The notation includes a brace on the left side of the staves, a key signature of three sharps, and a time signature of 9/8.

Thema und Krebs

Das **Thema** der Sinfonia:



Thema und Krebs

Das **Thema** der Sinfonia:



Warum nicht von hinten nach vorne?



Thema und Krebs

Das **Thema** der Sinfonia:



Warum nicht von hinten nach vorne?



Wird ein Thema von hinten nach vorne gespielt, so nennt man dies **Krebs**.

Der **Krebs** ist ebenfalls eine Technik der „Verarbeitung“ von Themen.

Bei J. S. Bach kommt er allerdings nur selten vor (praktisch nicht im *Wohltemperierten Klavier*; im *Musikalischen Opfer* gibt es einen Krebskanon; der Krebs wird auch in der *Kunst der Fuge* verwendet), sehr wohl aber in der „*Großen Sonate für das Hammerklavier*“ op. 106 von L. v. Beethoven.

Thema und Spiegelkrebs

Das **Thema** der Sinfonia:



Thema und Spiegelkrebs

Das Thema der Sinfonia:



Gespiegelt und von hinten nach vorne:

Thema und Spiegelkrebs

Das **Thema** der Sinfonia:



Gespiegelt **und** von hinten nach vorne: der **Spiegelkrebs**



Thema und Spiegelkrebs

Den **Spiegelkrebs** („**Krebsumkehrung**“) findet man in Fugen der Barockmusik (eigentlich aber nicht bei J. S. Bach).

Thema und Spiegelkrebs

Den **Spiegelkrebs** („**Krebsumkehrung**“) findet man in Fugen der Barockmusik (eigentlich aber nicht bei J. S. Bach).
Zusammen mit **Umkehrung**, **Krebs**, gelangt er zur essentiellen Bedeutung in der **Zwölftonmusik** ARNOLD SCHÖNBERGS.

Die **Postulate** („Axiome“) der Zwölftonmusik:

Die **Postulate** („Axiome“) der Zwölftonmusik:

- Jeder der 12 Töne der wohltemperierten Skala



ist **gleichberechtigt**.

Die **Postulate** („Axiome“) der Zwölftonmusik:

- Jeder der 12 Töne der wohltemperierten Skala



ist **gleichberechtigt**.

- Tonalität (= Bezug auf einen Grundton) hat hier keinen Platz und muß deshalb unter allen Umständen vermieden werden.

Die **Gesetze** der Zwölftonmusik:

Die **Gesetze** der Zwölftonmusik:

- Jedem Musikstück liegt eine **Reihe** zu Grunde.

Zwölftonmusik

Die **Gesetze** der Zwölftonmusik:

- Jedem Musikstück liegt eine **Reihe** zu Grunde.
- Eine Reihe ist eine Folge von 12 Tönen, die jeden Ton der wohltemperierten Skala **genau einmal** enthält.



(ANTON VON WEBERN (1883–1945): *Streichquartett op. 28* (1938))

Zwölftonmusik

Die **Gesetze** der Zwölftonmusik:

- Jedem Musikstück liegt eine **Reihe** zu Grunde.
- Eine Reihe ist eine Folge von 12 Tönen, die jeden Ton der wohltemperierten Skala **genau einmal** enthält.



(ANTON VON WEBERN (1883–1945): *Streichquartett op. 28* (1938))

Zwölftonmusik

Die **Gesetze** der Zwölftonmusik:

- Jedem Musikstück liegt eine **Reihe** zu Grunde.
- Eine Reihe ist eine Folge von 12 Tönen, die jeden Ton der wohltemperierten Skala **genau einmal** enthält.



(ANTON VON WEBERN (1883–1945): *Streichquartett op. 28* (1938))

- Im Ablauf des Stückes erklingt diese Reihe immer wieder, (möglicherweise) in verarbeiteter Form.

Zwölftonmusik

Die **Gesetze** der Zwölftonmusik:

- Jedem Musikstück liegt eine **Reihe** zu Grunde.
- Eine Reihe ist eine Folge von 12 Tönen, die jeden Ton der wohltemperierten Skala **genau einmal** enthält.



(ANTON VON WEBERN (1883–1945): *Streichquartett op. 28* (1938))

- Im Ablauf des Stückes erklingt diese Reihe immer wieder, (möglicherweise) in verarbeiteter Form.
- Neben rhythmischer Verarbeitung sind die fundamentalen Verarbeitungstechniken **Umkehrung**, **Krebs** und **Spiegelkrebs**.

Zwölftonmusik

Die fundamentalen vier Erscheinungsformen („Modi“) eines Themas:

Grundgestalt:



Zwölftonmusik

Die fundamentalen vier Erscheinungsformen („Modi“) eines Themas:

Grundgestalt:



Umkehrung:



Zwölftonmusik

Die fundamentalen vier Erscheinungsformen („Modi“) eines Themas:

Grundgestalt:



Umkehrung:



Krebs:



Zwölftonmusik

Die fundamentalen vier Erscheinungsformen („Modi“) eines Themas:

Grundgestalt:



Umkehrung:



Krebs:



Spiegelkrebs:

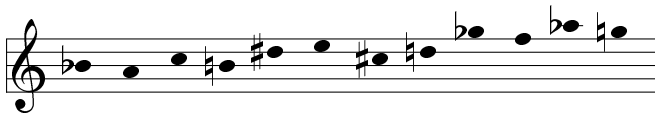


Da alle Töne gleichberechtigt sind, ergibt sich auch zwingendermaßen, daß alle Transponierungen eines Themas als gleichberechtigt zu betrachten sind.

Zwölftonmusik

Da alle Töne gleichberechtigt sind, ergibt sich auch zwingendermaßen, daß alle Transponierungen eines Themas als gleichberechtigt zu betrachten sind.

Also:



ist gleichberechtigt mit:



Eine kombinatorische Fragestellung

Wieviele im Sinne der eben besprochenen Äquivalenzen¹ verschiedene Reihen gibt es?

¹Eine Reihe, die sich von einer anderen nur um eine Kombination von Transponieren, Umkehren, Krebs unterscheidet, wird als äquivalent zur anderen betrachtet.

Wieviele im Sinne der eben besprochenen Äquivalenzen¹ verschiedene Reihen gibt es?

Die Lösung dieses Problems wird durch die sogenannte **Pólya–Redfield Theorie** der Abzählung gefärbter kombinatorischer Objekte geliefert.

¹Eine Reihe, die sich von einer anderen nur um eine Kombination von Transponieren, Umkehren, Krebs unterscheidet, wird als äquivalent zur anderen betrachtet.

György Pólya (1887–1985)



war einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Sein mathematisches Werk umfaßt bedeutende Beiträge in Komplexer Analysis, Kombinatorik, Wahrscheinlichkeitstheorie u.v.a.

Er wurde in Budapest geboren, studierte an der Universität in Budapest zunächst Rechtswissenschaft, dann Sprachen und Literatur (wo er die Lehrberechtigung erwarb), und schließlich Physik und Mathematik (1910/11 verbrachte er ein „Auslandsjahr“ an der Universität Wien), und schloß 1911 mit dem Dokortitel in Mathematik ab. Weitere Stationen waren Göttingen, Frankfurt und Paris, bevor er eine Stelle als Privatdozent (später Professor) in Zürich antrat. 1940 ist er gezwungen in die USA auszuwandern, wo er schließlich an der Stanford University Professor wird und bis zu seinem Tod bleibt.

Pólya–Redfield Theorie

György Pólya (1887–1985)



Der Artikel, der jene Theorie der Abzählung gefärbter kombinatorischer Objekte entwickelt, ist

Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, Acta Mathematica **68** (1937), 145–254.

John Howard Redfield (1879–1944)

wurde in Philadelphia (Pennsylvania, USA) geboren. Er war vielseitigst talentiert. 1895 begann er Studien in Sprachen, Mathematik, Mechanik und Physik am Haverford College und schloß mit einem Bachelor in Science (mechanalia) 1899 ab. Er erlangte einen weiteren Abschluß als Zivilingenieur am M.I.T. in Boston, einen in Études Françaises an der Sorbonne in Paris, und 1914 das Doktorat in Romanischen Sprachen an der Harvard University in Boston. Er beherrschte zahlreiche Sprachen und interessierte sich für eine weite Bandbreite mathematischer Probleme. Einer akademischen Karriere stand jedoch seine Unfähigkeit zu unterrichten entgegen. Er bekleidete zahllose Stellen, als Ingenieur, Übersetzer, und als Lektor am United States Navy Yard in Philadelphia. Er starb an seinem Geburtsort 1944 an einem Krebsleiden.

John Howard Redfield (1879–1944)

1951 entdeckte Frank Harary, daß Redfield in den unten angeführten beiden Artikeln Pólyas Theorie großteils vorweggenommen hatte:

The theory of group-reduced distributions, Amer. J. Math. **49** (1927), 433–455.

Enumeration by frame group and range groups, J. Graph Theory **8** (1984), 205–223.²

²Dieser Artikel war zu Lebzeiten Redfields für eine Veröffentlichung abgelehnt worden, und ist nach seiner Wiederentdeckung 1981 erst posthum durch die Herausgeber des Journal of Graph Theory gedruckt worden.

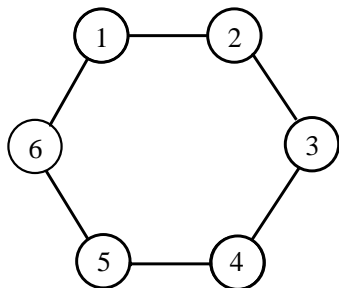
Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der **Zykelindex** einer Gruppe von Transformationen.

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der **Zykelindex** einer Gruppe von Transformationen.

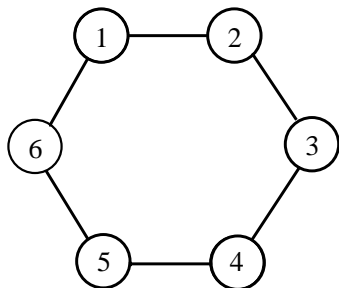
Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.



Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der **Zykelindex** einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.

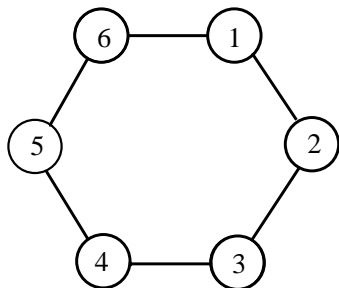


Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der **Zykelindex** einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.

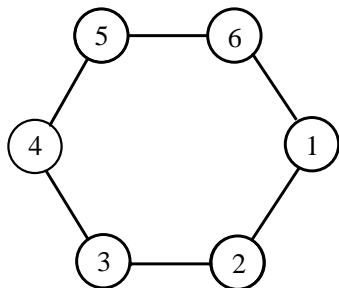


Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der **Zykelindex** einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.

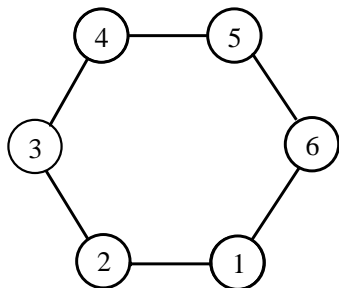


Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der **Zykelindex** einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.

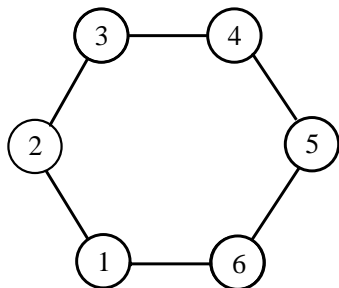


Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der **Zykelindex** einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.

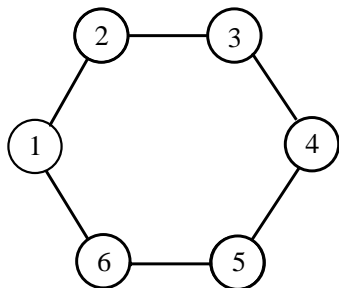


Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der **Zykelindex** einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.

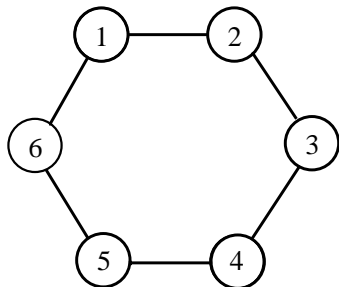


Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der **Zykelindex** einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.

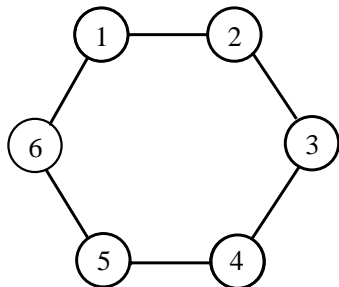


Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Das fundamentale „Werkzeug“ der Pólya–Redfield Theorie ist der **Zykelindex** einer Gruppe von Transformationen.

Beispiel. Gegeben eine Kette mit sechs Perlen.



Betrachten wir alle Rotationen der Kette (die Perlen in Perlen überführen).

Diese bilden eine solche Gruppe von Transformationen.

Definition

Gegeben eine Gruppe G von Transformationen. Der *Zykelindex* Z_G von G ist die Summe aller Werte $X(T)$, wo T alle Transformationen in G durchläuft, dividiert durch die Anzahl der Transformationen.

Definition

Gegeben eine Gruppe G von Transformationen. Der *Zykelindex* Z_G von G ist die Summe aller Werte $X(T)$, wo T alle Transformationen in G durchläuft, dividiert durch die Anzahl der Transformationen.

Was ist dabei $X(T)$?

Definition

Gegeben eine Gruppe G von Transformationen. Der *Zykelindex* Z_G von G ist die Summe aller Werte $X(T)$, wo T alle Transformationen in G durchläuft, dividiert durch die Anzahl der Transformationen.

Was ist dabei $X(T)$?

Jede Transformation teilt die „Grundmenge“ von Zahlen in kleinere Mengen auf, je nachdem, welche Elemente aufeinander abgebildet werden.

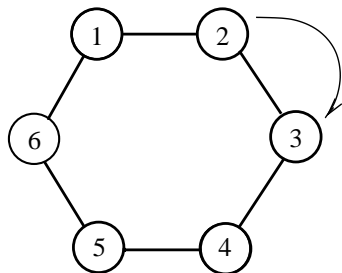
Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Jede Transformation teilt die Grundmenge in kleinere Mengen auf, je nachdem, welche Zahlen aufeinander abgebildet werden.

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Jede Transformation teilt die Grundmenge in kleinere Mengen auf, je nachdem, welche Zahlen aufeinander abgebildet werden.

Beispiel: Einfache Rotation im Uhrzeigersinn:



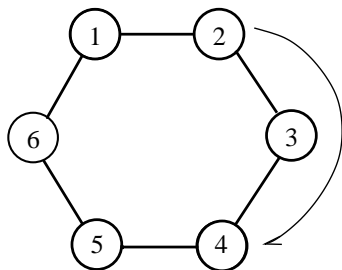
$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1.$$

Also: Alle Zahlen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ „gehören zusammen“.

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Jede Transformation teilt die Grundmenge in kleinere Mengen auf, je nachdem, welche Zahlen aufeinander abgebildet werden.

Beispiel: Zweifache Rotation im Uhrzeigersinn:



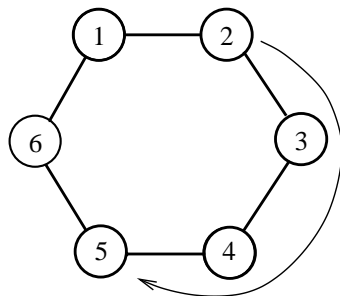
$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2.$$

Also: $\{1, 3, 5\}$ „gehören zusammen“, und $\{2, 4, 6\}$ „gehören zusammen“.

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Jede Transformation teilt die Grundmenge in kleinere Mengen auf, je nachdem, welche Zahlen aufeinander abgebildet werden.

Beispiel: Dreifache Rotation im Uhrzeigersinn:



$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow 5 \rightarrow 2, \quad 3 \rightarrow 6 \rightarrow 3.$$

Also: $\{1, 4\}$ „gehören zusammen“, $\{2, 5\}$ „gehören zusammen“, und $\{3, 6\}$ „gehören zusammen“.

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Wie berechnet man dann $X(T)$?

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

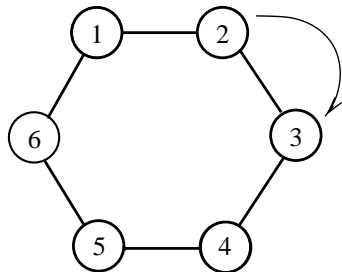
Wie berechnet man dann $X(T)$?

Wenn eine dieser Mengen „zusammengehöriger“ Zahlen die Größe m hat, schreibt man x_m . Man bildet das Produkt aller dieser x_m 's.

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelnindex

Wie berechnet man dann $X(T)$?

Wenn eine dieser Mengen „zusammengehöriger“ Zahlen die Größe m hat, schreibt man x_m . Man bildet das Produkt aller dieser x_m 's. Bei der einfachen Rotation T_1 im Uhrzeigersinn:



$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 5 \rightarrow 6 \rightarrow 1.$$

$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ „gehören zusammen“, daher schreiben wir x_6 . Es ist also

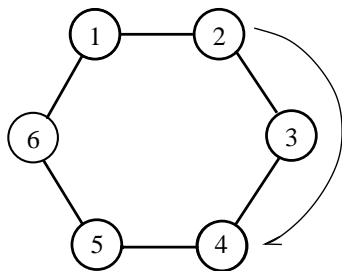
$$X(T_1) = x_6.$$

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykelindex

Wie berechnet man dann $X(T)$?

Wenn eine dieser Mengen „zusammengehöriger“ Zahlen die Größe m hat, schreibt man x_m . Man bildet das Produkt aller dieser x_m 's.

Bei der zweifachen Rotation T_2 im Uhrzeigersinn:



$$1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow 4 \rightarrow 6 \rightarrow 2.$$

Also: $\{1, 3, 5\}$ „gehören zusammen“, da schreiben wir x_3 .

$\{2, 4, 6\}$ „gehören zusammen“, da schreiben wir auch x_3 .

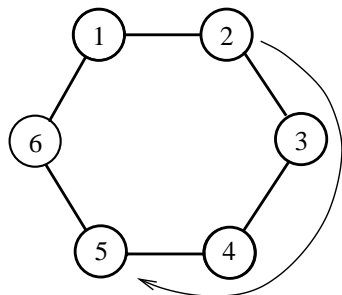
Es ist also

$$X(T_2) = x_3 \cdot x_3 = x_3^2.$$

Pólya–Redfield Theorie: Der Zykkelindex

Wie berechnet man dann $X(T)$?

Wenn eine dieser Mengen „zusammengehöriger“ Zahlen die Größe m hat, schreibt man x_m . Man bildet das Produkt aller dieser x_m 's. Bei der dreifachen Rotation T_3 im Uhrzeigersinn:



$$1 \rightarrow 4 \rightarrow 1, \quad 2 \rightarrow 5 \rightarrow 2, \quad 3 \rightarrow 6 \rightarrow 3.$$

$\{1, 4\}$ „gehören zusammen“, $\{2, 5\}$ „gehören zusammen“, und $\{3, 6\}$ „gehören zusammen“. In jedem Fall schreiben wir x_2 .

Es ist also

$$X(T_3) = x_2 \cdot x_2 \cdot x_2 = x_2^3.$$

Definition

Gegeben eine Gruppe G von Transformationen. Der *Zykelindex* Z_G von G ist die Summe aller Werte $X(T)$, wo T alle Transformationen in G durchläuft, dividiert durch die Anzahl der Transformationen.

Definition

Gegeben eine Gruppe G von Transformationen. Der *Zykelindex* Z_G von G ist die Summe aller Werte $X(T)$, wo T alle Transformationen in G durchläuft, dividiert durch die Anzahl der Transformationen.

Insgesamt für unsere Gruppe G von Rotationen:

Definition

Gegeben eine Gruppe G von Transformationen. Der *Zykelindex* Z_G von G ist die Summe aller Werte $X(T)$, wo T alle Transformationen in G durchläuft, dividiert durch die Anzahl der Transformationen.

Insgesamt für unsere Gruppe G von Rotationen:

$$Z_G = \frac{1}{6}(x_6 + x_6 + x_3^2 + x_3^2 + x_2^3 + x_1^6) = \frac{1}{6}(2x_6 + 2x_3^2 + x_2^3 + x_1^6).$$

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Um das Reihenproblem mathematisch zu formulieren, einigen wir uns zunächst darauf statt der Notennamen c, cis, d, dis, e, f, fis, g, gis, a, b, h, respektive statt



Zahlen zu benutzen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12.

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Wir suchen die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die zwölf Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 in einer Reihe aufzuschreiben, etwa

11 10 1 12 4 5 2 3 7 6 9 8, ³

³ANTON VON WEBERN (1883–1945): *Streichquartett op. 28* (1938) ▶

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Wir suchen die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, die zwölf Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12 in einer Reihe aufzuschreiben, etwa

$$11\ 10\ 1\ 12\ 4\ 5\ 2\ 3\ 7\ 6\ 9\ 8,^3$$

wobei aber Reihen, die durch **Transponieren** (= Dazuzählen derselben Zahl zu allen Zahlen und Reduzieren modulo 12) nicht als verschieden gelten, und ebensowenig jene die durch **Krebs** (= Umkehren der Reihenfolge der Töne) oder **Umkehrung** (= Ersetzen der von 1 durch 12, von 2 durch 11, von 3 durch 10, ..., von 12 durch 1).

³ANTON VON WEBERN (1883–1945): *Streichquartett op. 28* (1938) ▶

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Reihen, die nicht als verschieden gelten:

Die originale Reihe von Webers:

11 10 1 12 4 5 2 3 7 6 9 8

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Reihen, die nicht als verschieden gelten:

Die originale Reihe von Webers:

11 10 1 12 4 5 2 3 7 6 9 8

Transponiert (überall -5):

6 5 8 7 11 12 9 10 2 1 4 3

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Reihen, die nicht als verschieden gelten:

Die originale Reihe von Webers:

11 10 1 12 4 5 2 3 7 6 9 8

Transponiert (überall -5):

6 5 8 7 11 12 9 10 2 1 4 3

Krebs:

8 9 6 7 3 2 5 4 12 1 10 11

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Reihen, die nicht als verschieden gelten:

Die originale Reihe von Weberns:

11 10 1 12 4 5 2 3 7 6 9 8

Transponiert (überall -5):

6 5 8 7 11 12 9 10 2 1 4 3

Krebs:

8 9 6 7 3 2 5 4 12 1 10 11

Umkehrung:

2 3 12 1 9 8 11 10 6 7 4 5

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

„Klauben“ wir das ordentlich auseinander:

„Klauben“ wir das ordentlich auseinander:

- Das Umkehren der Reihenfolge (**Krebs**) der Noten (Zahlen) ist eine Transformation der **Anordnung** der Noten, also des kombinatorischen Objektes.

„Klauben“ wir das ordentlich auseinander:

- Das Umkehren der Reihenfolge (**Krebs**) der Noten (Zahlen) ist eine Transformation der **Anordnung** der Noten, also des kombinatorischen Objektes.
- **Transponieren** und **Umkehrung** sind Transformationen **der Noten** (Zahlen), nicht des kombinatorischen Objektes.

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

„Klauben“ wir das ordentlich auseinander:

- Das Umkehren der Reihenfolge (**Krebs**) der Noten (Zahlen) ist eine Transformation der **Anordnung** der Noten, also des kombinatorischen Objektes.
- **Transponieren** und **Umkehrung** sind Transformationen **der Noten** (Zahlen), nicht des kombinatorischen Objektes.

Wir haben es mit **zwei** Gruppen von Transformationen zu tun:
Eine „wirkt“ auf den kombinatorischen Objekten, die andere „wirkt“ auf den Noten (Zahlen).

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

„Klauben“ wir das ordentlich auseinander:

- Das Umkehren der Reihenfolge (**Krebs**) der Noten (Zahlen) ist eine Transformation der **Anordnung** der Noten, also des kombinatorischen Objektes.
- **Transponieren** und **Umkehrung** sind Transformationen **der Noten** (Zahlen), nicht des kombinatorischen Objektes.

Wir haben es mit **zwei** Gruppen von Transformationen zu tun:
Eine „wirkt“ auf den kombinatorischen Objekten, die andere „wirkt“ auf den Noten (Zahlen).
(In Pólyas Theorie sind letztere **Farben**.)

Satz (Pólya–Redfield)

Sei eine Gruppe G von Transformationen gegeben, die auf kombinatorischen Objekten wirkt, und eine Gruppe H von Transformationen, die Farben transformieren.

Die Anzahl der verschiedenen gefärbten Objekte, wobei zwei gefärbte Objekte nicht als verschieden gelten, wenn sie durch eine der Transformationen aus G oder aus H ineinander übergeführt werden können, ist

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+nx_n) \Big|_{x_1=\dots=x_n=0}.$$

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein,

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an,

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

...

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

.....

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

.....

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

.....

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

.....

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

.....

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

.....

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

.....

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

.....

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

.....

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Für unser Reihenproblem gilt:

$$Z_G = \frac{1}{2}(1 + x_2^6)$$

und

$$Z_H = \frac{1}{24}(4x_{12} + 2x_6^2 + 2x_4^3 + 2x_3^4 + 7x_2^6 + 6x_1^2x_2^5 + x_1^{12}).$$

Wir setzen in der Formel

$$Z_G \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_{12}} \right) Z_H(1+x_1, 1+2x_2, \dots, 1+12x_{12}) \Big|_{x_1=\dots=x_{12}=0}$$

ein, werfen den Computer an, und erhalten

.....

9 985 920.

Die Anzahl der verschiedenen Reihen

Diese und andere Fragen der Kombinatorik von Tönen und Tonreihen (etwa: wieviele verschiedene Akkorde kann man bilden, usw.) sind systematisch für Reihen bestehend aus n Tönen von

HARALD FRIPERTINGER

in

Enumeration in Musical Theory, Séminaire Lotharingien de Combinatoire **B26** (1991), Artikel B26a

behandelt worden. Er weist nach, daß für jedes Problem die **Pólya–Redfield Theorie** die richtigen Werkzeuge zur Verfügung stellt.

Thema und Umkehrung

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

Der Schlußsatz verschmilzt einen langsamen Satz mit einer Fuge.

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

Der Schlußsatz verschmilzt einen langsamen Satz mit einer Fuge.
Der Beginn der Fuge (das Thema):

Allegro ma non troppo

The image shows a musical score for the beginning of the fugue in the final movement of Beethoven's Sonata in A major, Op. 110. The score is in 6/8 time and A major. The right hand (treble clef) has a whole rest followed by a quarter rest, then a whole rest, and finally a quarter rest. The left hand (bass clef) plays a descending eighth-note sequence: A4, G4, F4, E4, D4, C4, B2, A2. A slur covers the first five notes of this sequence.

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

Der Schlußsatz verschmilzt einen langsamen Satz mit einer Fuge.
Der Beginn der Fuge (das Thema):

Allegro ma non troppo



Die „Wiederkehr“ der Fuge:

L'inversione della Fuga



Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

Musical notation for the first system of the 'Thema' section. The score is in 6/8 time and A major. The bass clef part features a melodic line with a slur and a fermata over the first two measures, followed by a repeat sign and a fermata. The treble clef part has a fermata in the first measure, a repeat sign in the second, and a fermata in the third measure.

Allegro ma non troppo

Musical notation for the second system of the 'Thema' section. The score is in 6/8 time and A major. The bass clef part features a melodic line with a slur and a fermata over the first two measures, followed by a repeat sign and a fermata. The treble clef part has a fermata in the first measure, a repeat sign in the second, and a fermata in the third measure.

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

The first system of the musical score shows the beginning of the 'Thema' section. It consists of two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The key signature is one sharp (F#) and the time signature is 6/8. The treble staff begins with a whole rest, followed by a quarter rest, then a series of eighth notes: G4, A4, B4, C5, B4, A4, G4. The bass staff begins with a quarter rest, followed by a quarter note G3, then a quarter rest, and finally a quarter note G3. The music is in a simple, folk-like style.

Allegro ma non troppo

The second system of the musical score shows the beginning of the 'Umkehrung' section. It consists of two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The key signature is two flats (Bb, Eb) and the time signature is 6/8. The treble staff begins with a whole rest, followed by a quarter rest, then a series of eighth notes: G3, F3, E3, D3, C3, B2. The bass staff begins with a quarter note G3, followed by a series of eighth notes: F3, E3, D3, C3, B2, A2. The music is in a simple, folk-like style.

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

The first system of musical notation shows the beginning of the 'Thema' section. It consists of two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The key signature is one sharp (F#) and the time signature is 6/8. The treble staff starts with a quarter rest followed by a quarter note G4. The bass staff starts with a quarter rest followed by a quarter note G2. The music continues with various rhythmic patterns and melodic lines in both hands.

Allegro ma non troppo

The second system of musical notation continues the 'Thema' section. It consists of two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The key signature is one sharp (F#) and the time signature is 6/8. The treble staff starts with a quarter rest followed by a quarter note G4. The bass staff starts with a quarter note G2. The music continues with various rhythmic patterns and melodic lines in both hands.

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

The first system of musical notation consists of two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The key signature is one sharp (F#) and the time signature is 6/8. The treble staff begins with a whole rest, followed by a quarter rest and a quarter note G4. The bass staff begins with a whole rest, followed by a quarter rest and a quarter note G2. The system is divided into three measures. The first measure contains the notes described above. The second measure contains a whole rest in the treble and a quarter rest followed by a quarter note G2 in the bass. The third measure contains a quarter note G4 in the treble, followed by a quarter note A4, and a quarter note B4. The bass staff contains a whole rest.

The second system of musical notation consists of two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The key signature is one flat (Bb) and the time signature is 6/8. The treble staff begins with a quarter note Bb4, followed by a quarter note C5, and a quarter note D5. The bass staff begins with a whole rest, followed by a quarter rest and a quarter note Bb2. The system is divided into three measures. The first measure contains the notes described above. The second measure contains a whole rest in the treble and a quarter rest followed by a quarter note Bb2 in the bass. The third measure contains a whole rest in both staves.

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

The first system of musical notation is in treble and bass clefs with a key signature of one sharp (F#) and a 6/8 time signature. The treble staff contains a whole note chord (F#4, A4, C5) in the first measure, followed by a whole rest in the second measure. The bass staff contains a whole note chord (F#2, A2, C3) in the first measure, followed by a whole rest in the second measure. The third measure shows a whole note chord (F#4, A4, C5) in the treble and a whole note chord (F#2, A2, C3) in the bass. The fourth measure shows a whole rest in the treble and a whole note chord (F#2, A2, C3) in the bass.

The second system of musical notation is in treble and bass clefs with a key signature of one flat (Bb) and a 6/8 time signature. The treble staff contains a whole note chord (Bb4, D5, F5) in the first measure, followed by a whole rest in the second measure. The bass staff contains a whole note chord (Bb2, D3, F3) in the first measure, followed by a whole rest in the second measure. The third measure shows a whole note chord (Bb4, D5, F5) in the treble and a whole note chord (Bb2, D3, F3) in the bass. The fourth measure shows a whole rest in the treble and a whole note chord (Bb2, D3, F3) in the bass.

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

The image displays two systems of musical notation for Ludwig van Beethoven's Sonata in A major, Op. 110. The first system shows the initial theme in the right hand (treble clef) and a corresponding bass line in the left hand (bass clef). The key signature is one sharp (F#), and the time signature is 6/8. The second system shows the inverted version of the theme, where the notes are mirrored across a horizontal axis. The notation includes various musical symbols such as notes, rests, and accidentals, with some notes marked with a '7' indicating a fingering.

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

First system of musical notation for the 'Thema' section. It consists of two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The key signature is one sharp (F#) and the time signature is 6/8. The treble staff begins with a quarter rest, followed by a quarter note G4, a quarter note A4, and a quarter note B4. A slur covers the next three notes: G4, F#4, and E4. The bass staff has a quarter note G2, a quarter note F#2, and a quarter note E2. A slur covers the next three notes: G2, F#2, and E2.

Second system of musical notation for the 'Thema' section. It consists of two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The key signature is one flat (Bb) and the time signature is 6/8. The treble staff begins with a quarter note G4, a quarter note A4, and a quarter note B4. A slur covers the next three notes: G4, F#4, and E4. The bass staff has a quarter note G2, a quarter note F#2, and a quarter note E2. A slur covers the next three notes: G2, F#2, and E2.

Thema und Umkehrung

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)



Allegro ma non troppo

The second system of musical notation is in treble and bass clefs, with a key signature of one flat (B-flat) and a 6/8 time signature. The treble staff contains a sequence of notes: a whole rest, a quarter rest, a whole rest, a whole rest, a whole rest, and a quarter rest. The bass staff contains a sequence of notes: a quarter note G3, a quarter note A3, a quarter note Bb3, a quarter note C4, a quarter note Bb3, a quarter note A3, a quarter note G3, and a quarter note F3. A slur covers the notes in the bass staff from G3 to F3.

LUDWIG VAN BEETHOVEN (1770–1827): *Sonate As-Dur op. 110*
(1821)

Schlußsatz:

*Adagio ma non troppo — Recitativo — Arioso dolente — Fuga:
Allegro ma non troppo — L'istesso tempo di Arioso: perdendo le
forze, dolente — L'istesso tempo della Fuga: l'inversione della Fuga*