Aufgabensammlung zur Differentialgeometrie 2

WS 2005

Andreas Kriegl

1.
Zeige, daß die Komposition glatter Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten glatt ist.

2.
Zeige, daß $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ und S^2 diffeomorph sind.
Hinweis: Verwende die Idee am Ende von (16.13.1) um $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}_\infty = (\mathbb{R}^2)_\infty$ zu zeigen.

3.
Erarbeite Dir den Beweis des Diffeomorphismuses $\mathbb{P}^n \cong G(1, n+1)$ aus dem Skriptum in (16.12.5).

4.
Erarbeite Dir den Beweis der Beschreibung des Tangentialraums via Karten aus dem Skriptum in (20.12).

5.
Studiere die Hopffaserung $S^3 \to S^2$ von (11.7) im Skriptum des vergangenen Semesters und überzeuge Dich insbesonders, daß die Urbilder von Punken in S^2 Kreise in der S^3 sind.

6.
Es sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ein Atlas einer glatten m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine C^∞-Partition der 1 mit $\operatorname{Trg} f_i \subseteq \operatorname{Bild}(\varphi_i)$. Betrachte die Abbildung $\Phi : M \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)^m$, $x \mapsto (f_i(x), f_i(x)\, \varphi_i^{-1}(x))_{i=1}^n$. Zeige, daß diese eine glatte Einbettung ist, d.h. eine injektive Immersion, welche ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

Hinweis: Gib lokale Links-Inverse dazu an.

7.
Zeige, daß der Raum $\mathbb{P}^n$ der Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ in den $\mathbb{R}^{2n}$ einbettbar ist.

Hinweis: Sei $h : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ gegeben durch

$$(x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_n) \mapsto \Big(\sum_{i+j=0; i,j \le n}^{k} x_i y_j \Big)_{k=0}^{2n} =$$
$$= \Big(x_0 y_0, x_0 y_1 + x_1 y_0, \dots, \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}, \dots, x_{n-1} y_n + x_n y_{n-1}, x_n y_n \Big)$$

und sei $g : S^n \to S^{2n}$ gegeben durch $g(x) = \frac{h(x,x)}{|h(x,x)|}$. Dann gilt $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$ (falls $h(x,x) = \lambda^2 h(y,y)$ so ist $h(x + \lambda y, x - \lambda y)$ und damit $x + \lambda y = 0$ oder $x - \lambda y = 0$) und liefert also eine injektive Abbildung $\mathbb{P}^n \to S^{2n}$.

8.
Zeige: $\pi : S^n \to \mathbb{P}^n$, $x \mapsto [x] := \mathbb{R} \cdot x$ ist eine zweiblättrige Überlagerung.
Hinweis: Zeige, daß $\mathbb{R}^n \times \{-1, +1\} \ni (y^1, \dots, y^n; \varepsilon) \mapsto \varepsilon(-1)^i (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n)/\sqrt{|y|^2 + 1} \in S^n$ eine Trivialisierung von π über den Bild der Karte φ_i aus (16.12.5) liefert.

9.
Zeige: Die Hopffaserung $h : S^3 \to S^2$ ist in der Tat ein Faserbündel mit typischer Faser S^1.
Hinweis: Zeige, daß $(z_1, z_2) \mapsto (\frac{z_2}{z_1}, \frac{z_1}{|z_1|})$ eine Trivialisierung von h über dem Bild der stereographischen Karte mit Pol $(0,0,1)$ liefert. Um daraus auch eine Trivialisierung lokal um den Pol $(0,0,1)$ zu machen, betrachte auf $S^3 \subseteq \mathbb{C}^2$ den Diffeomorphismus $\varphi : (z_1, z_2) \mapsto (z_2, z_1)$, auf S^2 den Diffeomorphismus ψ der in der stereographisch Karte durch $z \mapsto 1/z$ gegeben ist und zeige $h \circ \varphi = \psi \circ h$.

10.
Sei G die Untergruppe der Diffeomorphismen von $\mathbb{C}$, welche durch die beiden Translationen $z \mapsto z+2\pi i$ und $z \mapsto z + 2\pi$ erzeugt wird. Welche Mannigfaltigkeit ist $\mathbb{C}/G$?
Hinweis: Hinweis: Betrachte $\{(x, y) : 0 \le x, y \le 2\pi\}$

11.
Sei G die Untergruppe der Diffeomorphismen von $\mathbb{C}$, welche durch die Translationen $z \mapsto z + 2\pi i$ und die Abbildung $z \mapsto \bar{z} + 2\pi$ erzeugt wird. Welche Mannigfaltigkeit ist $\mathbb{C}/G$?
Hinweis: Hinweis: Betrachte $\{(x, y) : |x| \le \pi, 0 \le y \le 2\pi\}$

12. Quaternionen.
Man zeige: Die Menge $\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{C}\right\}$ ist ein Teilring der komplexen 2×2-Matrizen und sogar ein Schiefkörper. Identifiziert man $\mathbb{C}^2$ mit diesen Körper, vermöge der linearen Abbildung $(a, b) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$, so wird auch $\mathbb{C}^2$ ein Schiefkörper, der Körper $\mathbb{H}$ der Quaternionen. Die Norm von (a, b) ist die Determinante von $\left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{smallmatrix}\right)$. Somit gilt für die Multiplikation $|(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)| = |(a_1, b_1)| \cdot |(a_2, b_2)|$ und die Menge $S^3 \subseteq \mathbb{H}$ der Einheitsquaternionen ist eine Untergruppe von $\mathbb{H}$. Identifiziert man $\mathbb{C}^2$ mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, so nimmt die Multiplikation die folgende Gestalt an: $(t, x) \cdot (s, y) = (ts - \langle x, y\rangle, ty + sx + x \times y)$ für $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Zeige weiters, daß $(\forall x \in \{0\} \times \mathbb{R}^3 : xy = yx) \Rightarrow y \in \mathbb{R} \times \{0\}$ und $(\forall x \in \mathbb{H} : xy = zx) \Rightarrow y = z \in \mathbb{R} \times \{0\}$. Durch Differenzieren der Gleichung $xx^{-1} = 1$ berechne die Ableitung der Abbildung $\mathrm{inv} : x \mapsto x^{-1}$.

13. Universelle Überlagerung der $SO(\mathbb{R}^3)$.
Man fasse S^3 auf als Gruppe der Einheitsquaternionen und $\mathbb{R}^3$ als Teilraum $\{0\} \times \mathbb{R}^3$ von $\mathbb{H}$. Zeige, die Abbildung $p : S^3 \ni x \mapsto p(x) \in SO(\mathbb{R}^3)$ definiert durch $p(x)(y) = xyx^{-1}$ ist ein glatter Gruppenhomomorphismus, und hat als Kern $\{x : p(x) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}\} = \{1, -1\}$. Berechne auch die Tangentialabbildung $T_1 p$, und zeige daß sie bijektiv ist und folgere, daß $p : S^3 \to SO(3)$ eine universelle Überlagerung und $\mathbb{P}^3 \cong SO(3)$ ist.

14.Universelle Überlagerung der $SO(\mathbb{R}^4)$.
In Analogie zu Aufgabe (13) betrachte man den Gruppenhomomorphismus $p : S^3 \times S^3 \to SO(4)$ definiert durch $p(x, y)(z) := xzy^{-1}$. Zeige, daß der Kern von p gerade $\{(1, 1), (-1, -1)\}$ ist und daß $T_{(1,1)} p$ bijektiv ist.

15.
Zeige, daß Einschränkung der Wirkung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^2$ aus Beispiel (24.21) auf die diskrete Untergruppe $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$ strikt diskontinuierlich ist, der Orbitraum jedoch nicht Hausdorff ist.

16.
Schränke den Gruppenhomomorphismus von $SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2) \to SO_{\mathbb{C}}(4)$ auf die Diagonale ein um die universelle Überlagerung $SL_{\mathbb{C}}(2) \to SO_{\mathbb{C}}(3)$ zu erhalten.
Hinweis: Diese Einschränkung läßt $\mathrm{id} \in L_{\mathbb{C}}(2)$ invariant und somit auch das orthogonale Komplement $\{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : \mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\} \cong \mathbb{C}^3$ der spurfreien Matrizen.

17.
Bestimme den Orbit von $G := SO(n + 1)$ durch $x := (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ sowie die Untergruppe $G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}$ um ein Faserbündel $SO(n + 1) \to S^n$ mit Faser $SO(n)$ zu erhalten.

18.
Bestimme den Orbit von $G := SU(n+1)$ durch $x := (0,\dots,0,1) \in \mathbb{C}^{n+1}$ sowie die Untergruppe $G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}$ um ein Faserbündel $SU(n+1) \to S^{2n+1}$ mit Faser $SU(n)$ zu erhalten.

19.
Für $T \in L_{\mathbb{C}}(n) \subseteq L_{\mathbb{R}}(2n)$ ist $\det_{\mathbb{R}}(T) = |\det_{\mathbb{C}}(T)|^2$.
Hinweis: Da beide Seiten Polynome (in den Eintragungen der Matrix) von T sind, genügt es dies für T nahe id zu zeigen. Solche T lassen sich als $T = \exp(S) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} S^k$ schreiben. Wegen $\det_{\mathbb{K}}(\exp(S)) = e^{\mathrm{Spur}_{\mathbb{K}}(S)}$ und $\mathrm{Spur}_{\mathbb{R}}(T) = \mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(T) + \overline{\mathrm{Spur}_{\mathbb{C}}(T)}$ folgt die gewünschte Gleichung.

20.
Zeige auf zwei Arten, daß das in (30.3.3) definierte Teilvektorbündel von $T\mathbb{R}^3$ keine Integralmannifaltigkeiten durch 0 zuläßt.

21.
Zeige (30.12): Es sei $f : M \to N$ glatt und $x \mapsto T_x f$ habe konstanten Rang r. Dann ist $\ker(Tf) := \bigsqcup_{x \in M} \ker(T_x f)$ ein integrables Teilvektorbündel und die Zusammenhangskomponenten der Niveauflächen $f^{-1}(q)$ sind die maximalen Integralmannigfaltigkeiten zu $\ker(Tf)$.

22.
Zeige: $SL_{\mathbb{C}}(n)$ ist einfach zusammenhängend. **Hinweis:** Bestimme den Orbit von $G := SL_{\mathbb{C}}(n+1)$ durch $x := (0,\dots,0,1) \in \mathbb{C}^{n+1}$ sowie die Untergruppe $G_x := \{g \in G : g \cdot x = x\}$ um ein Faserbündel $SL_{\mathbb{C}}(n+1) \to \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ mit Faser $SL_{\mathbb{C}}(n) \times \mathbb{C}^n$ zu erhalten. Nun verwende (70.5) für $k = 1$ induktiv.

23.
Zeige, daß Matrizenmultiplikation ein Diffeomorphismus $SO(n) \times D(n) \to SL(n)$ ist, wobei $D(n)$ die Teilmannigfaltigkeit der oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen mit positiven Eintragungen auf der Diagonale und Determinante 1 bezeichnet.
Hinweis: Das Inverse zu $(S,T) \mapsto A = S \cdot T$ ist durch Gram-Schmidt-Orthonormalisierung $A \mapsto S$ gegeben.

24.
Verwende Aufgabe (23) um die universelle Überlagerung von $SL(2)$ als die Mannigfaltigkeit (nicht Lie-Gruppe) $\mathbb{R}^3$ zu erkennen.

25.
Zeige, daß die Zusammenhangskomponente G_0 des neutralen Elements e jeder Liegruppe G ein Normalteiler und parakompakt ist. **Hinweis:** Siehe (66.2).

26.
Die $O(n)$ wirkt auf der Stiefel-Mannigfaltigkeit $V(k,n)$ der orthonormalen k-Beine im $\mathbb{R}^n$ durch Anwenden auf die einzelnen Vektoren. Schließe daraus $V(k,n) \cong O(n)/O(n-k)$.

27.
Die $O(n)$ wirkt auf der Grassmann-Mannigfaltigkeit $G(k,n)$ der k-Ebenen im $\mathbb{R}^n$. Schließe daraus $G(k,n) \cong O(n)/(O(k) \times O(n-k))$.

28.
Die $O(k)$ wirkt auf $V(k,n)$, indem man ein orthonormales k-Bein $(a_1,\dots,a_k)$ als isometrische Abbildung $A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$, $e_i \mapsto a_i$ auffaßt und ein $T \in O(k)$ auf A vermöge $A \circ T$ wirken läßt. Schließe daraus, daß $G(k,n) \cong V(k,n)/O(k) \leftarrow V(k,n)$ ein Faserbündel mit typischer Faser $O(k)$ ist. **Hinweis:** Es sei $M = O(n)$, $G = O(k) \times O(n-k)$ und $H = \{e\} \times O(n-k)$. Zeige, daß G/H auf M/H wirkt und nach (70.4) ein Faserbündel $M/H \to (M/H)/(G/H)$ liefert (verwende die Kompaktheit von M und G). Die Faserbündelabbildung $M \to M/G$ aus Aufgabe (27) induziert eine submersive glatte Bijektion $(M/H)/(G/H) \to M/G$ welche aus Dimensionsgründen sogar ein Diffeomorphismus ist.

29.
Sei G eine Lie-Gruppe. In Analogie zur $\mathcal{L}G$ betrachte die Teilalgebra $\mathcal{R}G$ von $\mathfrak{X}(G)$ der rechtsinvarianten Vektorfelder. Zeige, daß $\nu^* : \mathcal{L}G \to \mathcal{R}G$ ein Lie-Algebraisomorphismus ist, wobei ν die Inversion $g \mapsto g^{-1}$ bezeichnet. Zeige weiters, daß die Lie-Klammer linksinvarianter mit rechtsinvarianten Vektorfeldern 0 ist. **Hinweis:** $\nu \circ R^g = L^{g^{-1}} \circ \nu$, wobei R^g die Rechtsmultiplikation mit g bezeichnet. Für den zweiten Teil betrachte $0 \times \xi$ als Vektorfeld auf $G \times G$ und zeige, daß dieses μ-verwandt mit $\xi \in \mathcal{L}G$ ist und analog für $\eta \times 0$ mit $\eta \in \mathcal{R}G$. Dann ist $0 = [0 \times \xi, \eta \times 0]$ μ-verwandt mit $[\xi, \eta]$ also auch letzteres 0.

30.
Es seien G und H Lie-Gruppen, $f : G \to H$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus und H zusammenhängend. Zeige, daß die Äquivalenz folgender Aussagen:

1. f ist Überlagerungsabbildung;
2. Eine offene Umgebung U von $e \in G$ existiert, s.d. $f(U)$ offen in H und $f : U \to f(U)$ ein Homöomorphismus ist;
3. f ist offen (d.h. Bilder offener Mengen sind offen) und $\ker(f) := f^{-1}(e)$ ist diskret.

Hinweis: (3⇒1) Wähle eine Umgebung W von e mit $(W \cdot W^{-1}) \cap \ker(f) = \{e\}$ und betrachte $\bigcup_{g \in N} g \cdot W$.

31.
Sei G eine zusammenhängende Abel'sche Lie-Gruppe. Zeige, daß $\exp : \mathcal{L}(G) \to G$ eine Überlagerungsabbildung ist und die Lie-Klammer 0 auf $\mathcal{L}(G)$ ist. **Hinweis:** Aufgabe (30) läßt sich anwenden, denn für $\xi, \eta \in T_eG \cong \mathcal{L}(G)$ ist $c : t \mapsto \exp(t\xi) \cdot \exp(t\eta)$ eine 1-Parameter-Untergruppe mit $c'(0) = \xi + \eta$. Für die letzte Aussage verwende Aufgabe (29).

32.
Es sei M eine Teilmannigfaltigkeit der $\mathbb{R}^n$. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Metrik, welche M als Teilraum des metrischen Raums $\mathbb{R}^n$ erbt, und der Metrik, welche von der mittels Einbettung auf M zurückgezogener Riemann-Metrik der euklidischen Metrik induziert wird?

33.
Beweise, daß die in (62.5) definierte kovariante Ableitung wirklich die Derivations-Eigenschaft (3) von (62.4) besitzt.

34. Die Automorphismengruppe der Riemann'schen Sphäre.
Nach (34.5) ist die stereographische Kartendarstellung jedes Automorphismuses der Riemann-Fläche $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ von der Form $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ mit $ad - bc = 1$.
Zeige, daß die Zuordnung die jeder Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_{\mathbb{C}}(2)$ die endsprechende Möbiustransformation der S^2 zuordnet ein Gruppenhomomorphismus mit Kern $\{\pm \mathrm{id}\}$ ist.

35. Die hyperbolische Scheibe.
Es sei $\mathbb{D}$ die offenen Einheitsscheibe in $\mathbb{C}$. Nach (34.5) sind die Automorphismen von $\mathbb{D}$ die Möbiustransformationen der Form $f : z \mapsto \frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$ mit $|a|^2 - |b|^2 = 1$. Zeige, daß die Isometrien von $\mathbb{D}$ genau die Abbildungen der Form $z \mapsto a\,z$ bzw. $z \mapsto a\,\overline{z}$ mit $|a| = 1$ sind. Ersetze weiters die euklidische Metrik durch die konform äquivalente Metrik $g_z(v, w) := \frac{1}{(1-|z|^2)^2} \langle v|w \rangle$ und zeige daß jeder Automorphismus eine Isometrie bzgl. dieser Metrik ist. Unter der hyperbolischen Scheibe versteht man $\mathbb{D}$ mit dieser Riemann-Metrik.
Hinweis: $(1 - |z|^2)|f'(z)v| = (1 - |f(z)|^2)|v|$

36. Die Poincaré'sche Halbebene.
Zeige, daß die Möbiustransformation $h : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ ein Diffeomorphismus mit Inversen $h^{-1} : z \mapsto \frac{1}{i}\frac{z+1}{z-1}$

von der oberen Halbebene $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \subseteq \mathbb{C}$ auf $\mathbb{D}$ ist. Bestimme eine Riemann-Metrik (die Poincaré-Metrik) auf der Halbebene, sodaß h eine Isometrie auf die hyperbolische Scheibe wird. Nun bestimme die Gruppe der konformen Diffeomorphismen und die der isometrischen Diffeomorphismen. **Hinweis:** Aufgabe (35).

37. Fixpunktmenge einer Isometrie als Geodäte.
Es sei die Fixpunktmenge einer Isometrie einer Riemannschen Mannigfaltigkeit als Kurve parametrisierbar. Zeige, daß diese eine Geodäte sein muß. **Hinweis:** Nach (58.7) existieren eindeutig bestimmte kürzeste Geodäten zwischen hinreichend nahen Punkten (der Fixpunktmenge). Schließe, daß das Bild dieser Geodäten in der Fixpunktmenge enthalten sein muß.

38. Geodäten der hyperbolischen Scheibe.
Bestimme die Geodäten der hyperbolischen Scheibe und zeige deren Vollständigkeit. **Hinweis:** Bestimme zuerst die Geodäten durch 0 mittels Aufgabe (35) und (37) und zeige die Transitivität der Wirkung von $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ auf $\mathbb{D}$. Verwende weiters, daß Möbiustransformationen Geraden und Kreise auf Geraden und/oder Kreise abbilden.

39. Geodäten der Poincaré'schen Halbebene.
Zeige, daß die Geodäten der Poincaréschen Halbebene die Geraden parallel zur y-Achse sind und die Halbkreise, welche die x-Achse orthogonal treffen.**Hinweis:** Aufgabe (38).

40. Geodäten der projektiven Ebene.
Man verwende, daß die projektive Ebene $\mathbb{P}^2$ der Orbitraum der Sphäre S^2 bezüglich der Antipodalabbildung ist um die Geodäten auf $\mathbb{P}^2$ bzgl. der induzierten Riemannmetrik zu bestimmen. Als Karten verwende man entweder die Zentralprojektion vom Mittelpunkt der Sphäre auf eine Tangentialebene, oder die stereographische Projektion auf die Einheitsscheibe in einer Tangentialebene.Welche Länge haben alle diese periodischen Geodäten. **Hinweis:** Aufgabe (72.41).

41. Gaußkrümmung der hyperbolischen Scheibe.
Berechne die Gaußkrümmung der hyperbolischen Scheibe (äquivalent der Poincaré Ebene). **Hinweis:** Die Gaußkrümmung einer abstrakten Riemann'schen Fläche ist durch die Determinantenformel aus (53.7) gegeben. Achtung, die symmetrische Formel lautet korrekt:

$$K = -\frac{1}{4\,D^4}\,\det\begin{pmatrix} E & \partial_1 E & \partial_2 E \\ F & \partial_1 F & \partial_2 F \\ G & \partial_1 G & \partial_2 G \end{pmatrix} - \frac{1}{2D}\left(\partial_2 \frac{\partial_2 E - \partial_1 F}{D} + \partial_1 \frac{\partial_1 G - \partial_2 F}{D}\right)$$

42.
Bestimme die Riemann-Metrik der S^3 indem Du (Hyper-)Kugelkoordinaten

$$(\varphi, \theta, \tau) \mapsto (\cos(\varphi)\cos(\theta)\cos(\tau), \sin(\varphi)\cos(\theta)\cos(\tau), \sin(\theta)\cos(\tau), \sin(\tau))$$

oder stereographische Koordinaten

$$\mathbb{R}^3 \ni (x, y, z) \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}(2x, 2y, 2z, x^2 + y^2 + z^2 - 1)$$

verwendest.

43.
Zeige, daß $\otimes : E^* \times F^* \to E^* \otimes F^*$ im Sinne von (38.2) und $\otimes : L(E, \mathbb{R}) \times L(E, \mathbb{R}) \to L(E, F; \mathbb{R})$ im Sinne von (38.1) bis auf den Isomorphismus $E^* \otimes F^* \cong L(E, F; \mathbb{R})$ ident sind.

44.
Überprüfe die Rechung in (38.4) für

$$(T \wedge S) \wedge R : (w, v, u) \mapsto \det\begin{pmatrix} T(w) & S(w) & R(w) \\ T(v) & S(v) & R(v) \\ T(u) & S(u) & R(u) \end{pmatrix}$$

45.
Beschreibe den Isomorphismus $* \circ \sharp : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to \Omega^{m-1}(M,\mathbb{R})$ aus (41.5) im Falle $M = \mathbb{R}^3$ mittels der Basis $(dxdy, dydz, dz \wedge dx)$. **Hinweis:**