

# Differentialgeometrie 2

Andreas Kriegl

email:andreas.kriegl@univie.ac.at

250064, WS 2005/2006, Di.–Do. 10<sup>00</sup>-11<sup>00</sup>, D 1.03 im UZA 4

---

- **Sem.Std.** 3
- **Erstmals am** DI, 04.10.2005
- **Inhalt:** Fortsetzung der VO aus dem Sommersemester. Abstrakte Mannigfaltigkeiten, Immersionen und Submersionen, Algebra der Vektorfelder, Kotangentenbündel und Differentialformen, Kohomologie, Integration auf Mannigfaltigkeiten, Riemann-Mannigfaltigkeiten.
- **Ziele:** Einführung in die Theorie abstrakter Mannigfaltigkeiten.
- **Literatur:** Mein Online-Skriptum Differentialgeometrie:  
<http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/diffgeom.pdf>



- 
- **LV-Nr:** 250078
  - **Titel:** Proseminar zur Differentialgeometrie 2
  - **LV-Typ:** PS
  - **Sem.Std.** 2
  - **Erstmals am** MO, 10.10.2005
  - **Termine:** Mo 13:00-15:00 D 1.03 (Mathematik) UZA 4
  - **Inhalt:** Siehe VO Differentialgeometrie 2
  - **Ziele:** Die Konzepte der VO an Hand ausgewählter Beispiele zu klären und zu vertiefen.
  - **Literatur:** Mein Online-Skriptum Differentialgeometrie.

- 
- **LV-Nr:** 250084
  - **Titel:** Seminar (Differentialgeometrie)
  - **LV-Typ:** SE
  - **Sem.Std.** 2
  - **Erstmals am** MI, 05.10.2005
  - **Termine:** Mi 13:00-15:00 D 1.07 (Mathematik) UZA 4
  - **Inhalt:** Vorläufig geplant ist die Verallgemeinerbarkeit der Konzepte der VO auf unendlich dimensionale (Banach-)Mannigfaltigkeiten zu behandeln.
  - **Ziele:** Auseinandersetzung mit aktueller Originalliteratur.
  - **Literatur:** Originalliteratur der Auswahl der Themen entsprechend.

- 
- **LV-Nr:** 250055
  - **Titel:** Seminar (Differentialgeometrie)
  - Gemeinsam mit Peter Michor und Andreas Cap.
  - **LV-Typ:** PJ+SE (UniStG)
  - **Sem.Std.** 3
  - **Erstmals am** DO, 06.10.2005
  - **Termine:** Do 15:00-17:30 D 1.07 (Mathematik) UZA 4
  - Für Details siehe Andreas Cap.
-

## II. Mannigfaltigkeiten

In diesem Kapitel führen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit ein. Wir beginnen dabei spielerisch mit zweidimensionalen Teilmannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^3$ , sogenannten Flächen, verallgemeinern diese dann im zweiten Abschnitt zu Teilmannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$ , und präzisieren im dritten Abschnitt die spielerischen Beispiele vom Anfang. Nach einem Einschub über die Homotopietheorie von höher dimensionalen Sphären behandeln wir noch die klassischen Beispiele von Mannigfaltigkeiten, die eine glatte Gruppenstruktur tragen, also von sogenannten Lie-Gruppen. Nach Einführung des Begriffs der glatten Abbildung haben wir genügend Einsicht, um uns abstrakten Mannigfaltigkeiten zuzuwenden, damit meine ich solche Mannigfaltigkeiten die nicht (von vornherein) in einem umgebenden Euklidischen Raum sitzen. Nach Produkten und disjunkten Vereinigungen von Mannigfaltigkeiten gehen wir dann noch auf die Reichhaltigkeit der glatten Funktionen auf ihnen ein, insbesondere betrifft das Trennungssaxiome wie etwa jenes von Hausdorff, Lokalkompaktheit und vor allem Parakompaktheit und die damit äquivalente Existenz von Partitionen der Eins, die das zentrale Hilfsmittel darstellen um von lokalen Konstruktionen (also z.B. solchen aus der Analysis) zu globalen übergehen zu können.

### 16. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

Unsere vorläufige Definition einer Mannigfaltigkeit ist nicht zufriedenstellend: Bisher verwendeten wir ganz wesentlich die Eigenschaften des umgebenden Raumes, der mit dem Objekt, das wir beschreiben wollen, begrifflich nichts zu tun hat.

In diesen Abschnitt wollen wir nun den umgebenden Euklidischen Raum loswerden, und kommen so zum Begriff der abstrakten Mannigfaltigkeit.

Die Relevanz dieses Ansatzes zeigen bereits folgende

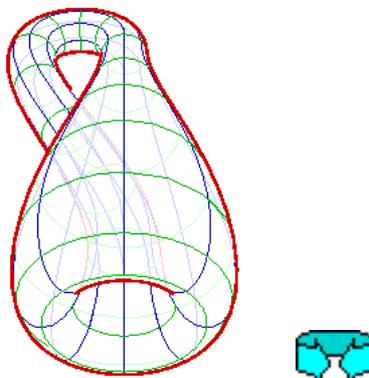
#### 16.1 Beispiele

(Siehe auch Abschnitt (9)).

1. Das Möbiusband entsteht "topologisch", wenn man zwei Seiten eines Rechtecks miteinander identifiziert und das Ganze mit der Quotiententopologie versieht. Denkt man sich dieses Gebilde im  $\mathbb{R}^3$  realisiert und zerschneidet es längs der Mittellinie, so entsteht bekanntlich ein mehrfach verdrehtes Band. Führen wir dasselbe aber "topologisch" durch, entsteht ein einfaches, nicht verdrehtes Band. Die beiden Figuren lassen sich aber im  $\mathbb{R}^3$  nicht stetig ineinander überführen, das geht erst im  $\mathbb{R}^4$ .



2. Der “Klein’schen Flasche” oder vor allem der “projektiven Ebene” sieht man gar nicht ohne weiteres an, in welchen  $\mathbb{R}^n$  sie “passen”, in den  $\mathbb{R}^3$  jedenfalls nicht.



Wir erweitern nun die Definition von Teilmannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  zu einer solchen für abstrakte Mannigfaltigkeiten.

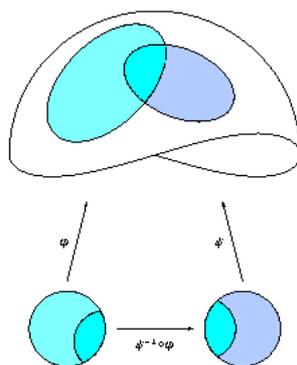
### 16.2 Definition (Abstrakte Mannigfaltigkeit)

Sei  $X$  eine beliebige Menge. Eine KARTE (oder auch LOKALE PARAMETRISIERUNG) von  $X$  ist eine injektive Abbildung  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow X$ , definiert auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^m$ .

Zwei Karten  $\varphi_1, \varphi_2$  heißen  $C^\infty$ -KOMPATIBEL oder VERTRÄGLICH, falls der KARTENWECHSEL

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(\varphi_2(U_2)) \rightarrow \varphi_2^{-1}(\varphi_1(U_1))$$

ein Diffeomorphismus offener Mengen ist. Die Idee dahinter ist, daß jede Karte  $\varphi_1$  glatt sein soll, und nach (15.4) sollte dazu  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  dort wo es definiert ist glatt sein.



Ein  $C^\infty$ -ATLAS einer Menge  $X$  ist eine Familie  $C^\infty$ -kompatibler Karten, deren Bilder ganz  $X$  überdecken. Zwei  $C^\infty$ -Atlanten heißen ÄQUIVALENT, wenn alle ihre Karten miteinander  $C^\infty$ -kompatibel sind.

Eine ABSTRAKTE  $C^\infty$ -MANNIGFALTIGKEIT ist eine Menge zusammen mit einer Äquivalenzklasse glatter Atlanten.

### 16.3 Definition (Topologie einer Mannigfaltigkeit)

Auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit erhält man eine TOPOLOGIE, indem man definiert:  $U \subseteq X$  heißt offen  $:\Leftrightarrow \varphi^{-1}(U)$  ist offen im  $\mathbb{R}^m$  für jede Karte des Atlas.

Die Karten  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M$  werden dann zu Homöomorphismen. Denn stetig sind sie nach Konstruktion der Topologie auf  $M$  und falls  $U_1 \subset U$  offen ist, so ist es auch  $\varphi(U_1) \subset M$  denn  $\psi^{-1}(\varphi(U_1)) = (\varphi^{-1} \circ \psi)^{-1}(U_1)$  ist das Bild unter dem Homöomorphismus  $\varphi^{-1} \circ \psi$ .

Man verlangt üblicherweise auch noch, daß diese Topologie HAUSDORFF ist, d.h.: je zwei disjunkte Punkte lassen sich durch disjunkte offene Umgebungen trennen.

Die folgende Proposition zeigt, daß diese Definition wirklich eine Erweiterung von Definition (10.4) ist.

**16.4 Proposition.** *Jede  $C^\infty$ -Teilmannigfaltigkeit  $M$  eines  $\mathbb{R}^n$  ist in natürlicher Weise eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und ihre Topologie ist die Teilraumtopologie.*

**Beweis.** Einen Atlas auf  $M$  erhält man aus allen lokalen injektiven Parametrisierungen mittels (10.4). Die Kartenwechsel sind dann glatt nach (15.3) und die Topologie von  $M$  ist die induzierte Topologie des umgebenden  $\mathbb{R}^n$ , da die Parametrisierungen lokal Einbettungen sind, siehe den Beweis von (10.4).  $\square$

### 16.5 Proposition (Maximaler Atlas).

Sei  $\mathcal{A}$  ein  $C^\infty$ -Atlas für  $M$ , dann ist

$$\mathcal{A}_{\max} := \{\varphi : \varphi \text{ Karte für } M \text{ und } \varphi \text{ verträglich mit allen } \psi \in \mathcal{A}\}$$

der eindeutig bestimmte maximale Atlas, der  $\mathcal{A}$  umfaßt.

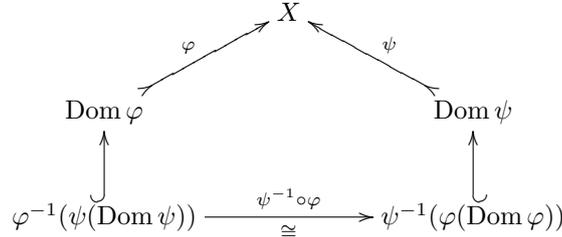
**Beweis.** Wir zeigen zuerst  $\mathcal{A}_{\max}$  ist ein  $C^\infty$ -Atlas: Seien  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_{\max}$ , dann ist zu zeigen, daß  $\varphi^{-1} \circ \psi$  glatt ist. Sei  $x \in \psi^{-1}(\text{Bild } \varphi)$  also  $\psi(x) \in \text{Bild } \varphi \cap \text{Bild } \psi$ . Da  $\mathcal{A}$  ein Atlas ist, folgt die Existenz eines  $\chi \in \mathcal{A}$  mit  $\psi(x) \in \text{Bild } \chi$ . Somit ist  $\varphi^{-1} \circ \chi \circ \chi^{-1} \circ \psi = (\chi^{-1} \circ \varphi)^{-1} \circ (\chi^{-1} \circ \psi)$  lokal um  $x$  definiert. Die beiden geklammerten Teile sind laut Definition von  $\mathcal{A}_{\max}$  glatt und folglich ist auch  $\varphi^{-1} \circ \psi$  glatt.

Sei nun  $\mathcal{B}$  ein  $C^\infty$ -Atlas, der  $\mathcal{A}$  umfaßt, dann ist z.z.:  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\max}$ . Sei  $\varphi \in \mathcal{B}$ , dann ist  $\varphi$  verträglich mit allen  $\psi \in \mathcal{B}$ . Da  $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$ , ist  $\varphi$  verträglich mit allen  $\psi \in \mathcal{A}$ , also ist nach Konstruktion  $\varphi \in \mathcal{A}_{\max}$ .  $\square$

**16.6 Bemerkung.** Um eine Mannigfaltigkeit  $X$  mit Atlas  $\mathcal{A}$  (bis auf Diffeomorphie) zu beschreiben brauchen wir den Zielraum  $X$  gar nicht wirklich, denn die Karten  $\varphi : \text{Dom}(\varphi) \rightarrow X$  induzieren eine surjektive Abbildung

$$f : \bigsqcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \text{Dom}(\varphi) := \bigcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \{\varphi\} \times \text{Dom}(\varphi) \rightarrow X, \quad f : (\varphi, x) \mapsto \varphi(x)$$

und somit eine Bijektion  $X \cong \bigsqcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \text{Dom}(\varphi) / \sim$ , wobei die Äquivalenzrelation  $\sim$  auf  $\bigsqcup_{\varphi \in \mathcal{A}} \text{Dom}(\varphi)$  durch  $(\varphi, x) \sim (\psi, y) :\Leftrightarrow \varphi(x) = \psi(y)$ .



Diese Äquivalenzrelation wird vollständig durch die Kartenwechselabbildungen  $g := \psi^{-1} \circ \varphi : \text{Dom}(\psi^{-1} \circ \varphi) := \varphi^{-1}(\psi(\text{Dom}(\psi))) \rightarrow \psi^{-1}(\varphi(\text{Dom}(\varphi)))$  beschrieben. Diese bilden eine Menge von Diffeomorphismen offener Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume (und sagen wir der Einfachheit halber des  $\mathbb{R}^n$ ) und wir müssen  $x \in \text{Dom}(g)$  mit  $g(x) \in \text{Dom}(g^{-1})$  identifizieren. Wir dürfen  $g := \psi^{-1} \circ \varphi$  und  $k := \chi^{-1} \circ \psi$  zusammensetzen und dann  $x \in \text{Dom}(g)$  mit  $x \in \text{Dom}(k \circ g)$  identifizieren, nicht aber für beliebige Kartenwechsel  $g$  und  $k$ . Somit müssen wir die Kartenwechsel als doppelt indizierte Familie  $\{f_{\psi, \varphi} := \psi^{-1} \circ \varphi : \psi, \varphi \in \mathcal{A}\}$  auffassen und nicht als Menge.

Die folgenden Überlegungen zeigen, daß die Kartenwechsel, also eine Familie von lokalen Abbildungen  $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ , schon die ganze Information über  $M$  enthalten. Sei dazu  $\{g_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in A\}$  eine Familie von Diffeomorphismen offener Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume, sodaß  $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$  und (dort wo die linke Seite definiert ist)  $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \subseteq g_{\alpha\gamma}$  gilt (Das sind offensichtlich Eigenschaften von Kartenwechseln). Es sei  $U_\alpha := \text{Dom } g_{\alpha\alpha}$  und wir definieren eine Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung  $\bigsqcup_\alpha U_\alpha = \bigcup_\alpha \{\alpha\} \times U_\alpha$  durch:  $(\alpha, x) \sim (\beta, y) \Leftrightarrow g_{\alpha\beta}(y) = x$ . Dies ist in der Tat eine Äquivalenzrelation:

**Reflexivität:** Es ist  $g_{\alpha\alpha} = \text{id}_{U_\alpha}$ , denn aus  $(g_{\alpha\alpha})^{-1} = g_{\alpha\alpha}$  folgt  $\text{Bild } g_{\alpha\alpha} = \text{Dom } g_{\alpha\alpha} = U_\alpha$  und aus  $g_{\alpha\alpha} \circ g_{\alpha\alpha} \subseteq g_{\alpha\alpha}$  folgt, da  $g_{\alpha\alpha}$  als Diffeomorphismus injektiv ist,  $g_{\alpha\alpha} = \text{id}$ . Somit ist  $(\alpha, x) \sim (\alpha, x)$ .

**Symmetrie:** Es sei  $(\alpha, x) \sim (\beta, y)$  also  $x = g_{\alpha\beta}(y)$ , d.h.  $y = (g_{\alpha\beta})^{-1}(x) = g_{\beta\alpha}(x)$ , also  $(\beta, y) \sim (\alpha, x)$ .

**Transitivität:** Es sei  $(\alpha, x) \sim (\beta, y) \sim (\gamma, z)$ , also  $g_{\alpha\beta}(y) = x$  und  $g_{\beta\gamma}(z) = y$ . Somit ist  $g_{\alpha\gamma}(z) = (g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma})(z) = g_{\alpha\beta}(y) = x$ , also  $x \sim z$ .

Nun sei  $M := \left(\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) / \sim$  und  $g_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$  durch  $x \mapsto [(\alpha, x)]_\sim$  definiert. Dann ist  $g_\alpha$  injektiv, denn aus  $(\alpha, x) \sim (\alpha, y)$  folgt  $x = g_{\alpha\alpha}(y) = y$ .

Aus  $\text{id}_{U_\alpha} = g_{\alpha\alpha} \supseteq g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha}^{-1} \circ g_{\beta\alpha} = \text{id}_{\text{Dom } g_{\beta\alpha}}$  folgt  $\text{Dom}(g_{\beta\alpha}) \subseteq U_\alpha$  und  $g(\text{Dom}(g_{\beta\alpha})) = \text{Dom}(g_{\alpha\beta}) \subseteq U_\beta$ .

Weiters sind die Kartenwechsel  $g_\beta^{-1} \circ g_\alpha$  durch  $y = (g_\beta^{-1} \circ g_\alpha)(x) \Leftrightarrow g_\beta(y) = g_\alpha(x) \Leftrightarrow (\alpha, x) \sim (\beta, y) \Leftrightarrow x = g_{\alpha\beta}(y) \Leftrightarrow y = g_{\beta\alpha}(x)$  gegeben. Somit ist  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und Kartenwechselabbildungen  $g_{\beta\alpha} = g_\beta^{-1} \circ g_\alpha$ .

### 16.7 Definition (Topologische Mannigfaltigkeit)

Ein topologischer Raum  $M$  heißt **TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEIT**  $:\Leftrightarrow$  es gibt eine Familie von Homöomorphismen zwischen offenen Teilmengen eines endlichdimensionalen Vektorraums und offenen Teilmengen von  $M$ , deren Bilder  $M$  überdecken.

Solche Homöomorphismen heißen **KARTEN** von  $M$ . Und eine Familie von Karten, deren Bilder  $M$  überdecken, heißt **ATLAS**.

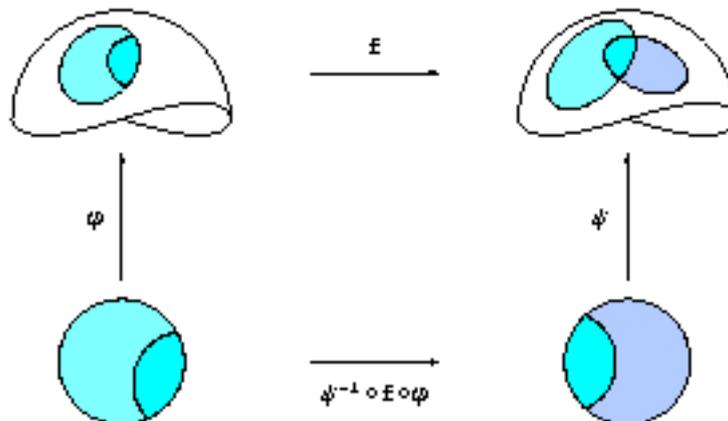
#### Bemerkungen

1. Falls  $M$  eine topologische Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{A}$  ein Atlas für  $M$  ist, so sind alle Kartenwechsel automatisch Homöomorphismen auf offenen Teilen des  $\mathbb{R}^m$ . Man braucht also "nur" genügend viele unter ihnen zu finden, so daß die entsprechenden Kartenwechsel differenzierbar sind, um einen glatten Teilatlas zu erhalten, und somit  $M$  als glatte Mannigfaltigkeit zu erkennen.
2. Nicht jede topologische Mannigfaltigkeit besitzt aber einen  $C^\infty$ -Atlas. Das erste Beispiel [47] war 10-dimensional. Heute ist 4 die niedrigste Dimension, für die es ein Beispiel gibt.

Wir wollen nun unseren Differenzierbarkeitsbegriff für Abbildungen zwischen Teilmannigfaltigkeiten auf abstrakte Mannigfaltigkeiten übertragen. Das Lemma (15.4) legt folgende Definition nahe:

### 16.8 Definition (Glatte Abbildung)

Seien  $(M, \mathcal{A})$  und  $(N, \mathcal{B})$  zwei  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt **GLATT**  $:\Leftrightarrow$   $f$  ist stetig, und für jeden Punkt  $x \in M$  existieren Karten  $\varphi \in \mathcal{A}$  und  $\psi \in \mathcal{B}$ , sodaß  $x \in \text{Bild } \varphi$ ,  $f(x) \in \text{Bild } \psi$  und die **KARTENDARSTELLUNG**  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$  von  $f$  glatt ist. Das gilt dann ebenso für beliebige Karten  $\varphi \in \mathcal{A}$  und  $\psi \in \mathcal{B}$ .



Insbesondere ist die Identität  $\text{id} : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M, \mathcal{B})$  genau dann ein Diffeomorphismus, wenn die beiden Atlanten  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  äquivalent sind.

## 16.9 Bemerkungen

1. Die Stetigkeit von  $f$  setzt man voraus, damit die Kartendarstellung auf einer offenen Menge definiert ist.
2. Da der Kartenwechsel glatt ist, genügt es, obige Eigenschaft bei jedem  $x$  für eine Karte aus  $\mathcal{A}$  und für eine aus  $\mathcal{B}$  um  $f(x)$  zu fordern, sie überträgt sich auf alle Karten.
3. Wenn man  $\mathbb{R}$  als topologische Mannigfaltigkeit auffaßt, lassen sich sehr leicht zwei  $C^\infty$ -Strukturen angeben:  $\mathcal{A}_1 := \{\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ , und  $\mathcal{A}_2 := \{\varphi(x) = x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ . Diese sind nicht verträglich, da  $\varphi^{-1} \circ \text{id} : x \rightarrow \sqrt[3]{x}$  nicht glatt ist (denn  $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x})$  existiert nicht bei 0), definieren also zwei verschiedene  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeitsstrukturen auf  $\mathbb{R}$ . Allerdings sind die beiden Strukturen diffeomorph, also doch gewissermaßen gleich.

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\
 \uparrow \varphi & & \uparrow \text{id} \\
 \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}
 \end{array}
 \quad \begin{array}{l}
 \text{hier Mannigfaltigkeiten} \\
 \\
 \text{hier Vektorräume}
 \end{array}$$

Die Abbildung  $f = \sqrt[3]{x}$  ist ein Diffeomorphismus:  $f, f^{-1}$  sind bijektiv und klarerweise stetig. Ebenso ist  $f$  glatt, da  $(\text{id}^{-1} \circ f \circ \varphi)(x) = f(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$  glatt ist. Analog ist  $f^{-1}$  glatt, da  $(\varphi^{-1} \circ f^{-1} \circ \text{id})(x) = \varphi^{-1}(x^3) = x$  glatt ist.

4. Ab  $\dim M = 4$  gilt nicht mehr allgemein, daß zwei  $C^\infty$ -Atlanten einer topologischen Mannigfaltigkeit bis auf Diffeomorphismus gleich sind. Für Dimension kleiner als 4 wurde es hingegen in [67] gezeigt. Nach [61] trägt zum Beispiel die  $S^7$  mindestens 15 nicht diffeomorphe  $C^\infty$ -Strukturen; die  $S^{31}$  mehr als  $16 \cdot 10^6$ . Genauer gilt:

| dim = $n$            | 7  | 8 | 9 | 10 | 11  | 12 | 13 | 14 | 15    | 16 | 17 | 18 | ... |
|----------------------|----|---|---|----|-----|----|----|----|-------|----|----|----|-----|
| Strukturen auf $S^n$ | 28 | 2 | 8 | 6  | 992 | 1  | 3  | 2  | 16256 | 2  | 16 | 16 | ... |

Für  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \neq 4$  gibt es genau eine glatte Struktur. Für  $n > 4$  wurde das in [79] bewiesen. Ganz überraschend konnte [Kirby1982] beweisen, daß für den  $\mathbb{R}^4$  eine exotische  $C^\infty$ -Struktur existiert. In [81] wurde gezeigt, daß es sogar überabzählbar viele gibt.

5. Die Klasse der  $C^\infty$ -Abbildungen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten bilden eine KATEGORIE. Dabei versteht man unter einer Kategorie eine Klasse von Räumen (Objekten) und Abbildungen (Morphismen), sodaß zu jedem Objekt die Identität ein Morphismus und die Zusammensetzung von Morphismen wieder ein solcher ist. Es ist also für drei  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten  $M, N, P$  und glatte Abbildungen  $f : M \rightarrow N$  und  $g : N \rightarrow P$  zu zeigen:
  - a)  $g \circ f : M \rightarrow P$  ist glatt.
  - b)  $\text{id} : M \rightarrow M$  ist glatt.

**16.10 Lemma (Offene Teilmannigfaltigkeit).** *Sei  $(M, \mathcal{A})$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, und  $U$  offen in  $M$ . Dann ist  $U$  in natürlicher Weise eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Ein Atlas auf  $U$  ist durch die Einschränkungen von Karten von  $M$  gegeben.*

**Beweis.** Klarerweise ist  $(U, \mathcal{A}_U := \{\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi \in \mathcal{A}\})$  eine topologische Mannigfaltigkeit. Bleibt zu zeigen, daß die Kartenwechsel glatt sind:

$$(\psi|_{\psi^{-1}(U)})^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = (\psi^{-1} \circ \varphi)|_{\varphi^{-1}(U)}$$

ist eine Einschränkung von  $C^\infty$ -Funktionen und somit  $C^\infty$ .  $\square$

### 16.11 Bemerkungen

1. Es ist also sinnvoll, von  $C^\infty$ -Abbildungen zu sprechen, die nur auf offenen Teilmengen einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit definiert sind.
2. Die Karten  $\varphi$  einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit sind Diffeomorphismen

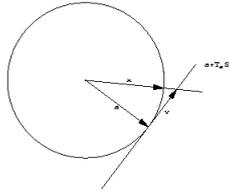
$$\varphi : \underset{\text{off.}}{\mathbb{R}^m} \supseteq \text{Dom } \varphi \rightarrow \underset{\text{off.}}{\text{Bild } \varphi} \subseteq M.$$

Insbesondere besteht  $\mathcal{A}_{\max}$  aus all jenen Karten  $\varphi$ , die Diffeomorphismen auf ihr Bild sind, d.h.  $\varphi^{-1} \circ \psi$  ist ein Diffeomorphismus offener Mengen für alle Karten  $\psi \in \mathcal{A}$ .

### 16.12 Beispiele von Atlanten

1.  $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$

Wir konstruieren Karten durch radial-Projektionen auf die Tangentialebenen ("Radialprojektion").



$$\alpha + v = \lambda x \quad \text{mit} \quad \langle \alpha, v \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \mapsto v := \langle x, \alpha \rangle^{-1} \cdot x - \alpha, \quad v \mapsto x := (\alpha + v) \cdot |\alpha + v|^{-1}.$$

Eine Karte für eine Umgebung von  $\alpha$  ist also

$$\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \cong \alpha^\perp \rightarrow \{x \in S^n : \langle x, \alpha \rangle > 0\} \subseteq M$$

$$\varphi_\alpha(v) := (\alpha + v) \cdot |\alpha + v|^{-1}$$

$$\varphi_\alpha^{-1}(x) = \langle x, \alpha \rangle^{-1} \cdot x - \alpha.$$

Die Menge  $\{\varphi_\alpha : \alpha \in S^n\}$  bildet einen  $C^\infty$ -Atlas für  $S^n$ . Allerdings überdecken auch die Bilder der Karten  $\varphi_{\pm e_i}$  für  $i = 1 \dots n+1$  die  $S^n$ . Da sowohl  $\varphi_\alpha$  als auch  $\varphi_\alpha^{-1}$  glatt auf einer offenen Umgebung im  $\mathbb{R}^{n+1}$  sind, sind klarerweise alle Kartenwechsel glatt.

2. Der Atlas der stereographischen Projektion für  $S^n$  hat als Karten  $\psi_\alpha$  mit  $\alpha \in S^n$ :

$$\psi_\alpha : \begin{cases} \alpha^\perp \rightarrow S^n \setminus \{\alpha\} \\ v \mapsto \alpha + 2(v - \alpha) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1} \end{cases}$$

mit der Umkehrabbildung

$$\psi_\alpha^{-1}(x) = (x - \langle x, \alpha \rangle \cdot \alpha) \cdot (1 - \langle x, \alpha \rangle)^{-1}.$$

Die Karte  $\psi_\alpha$  ist für  $S^n \setminus \{\alpha\}$  definiert. Für einen Kartenwechsel genügt es also, noch eine Karte für  $\alpha$  zu finden, etwa  $\psi_{-\alpha}$ . Den Kartenwechsel für diese beiden Karten erhält man aus elementaren geometrischen Überlegungen: Es seien  $v$  und  $v^*$  die Bilder unter  $\psi_\alpha^{-1}$  und  $\psi_{-\alpha}^{-1}$ . Die Dreiecke  $(\alpha, x, -\alpha)$  und  $(\alpha, 0, v)$  haben zwei gleiche Winkel, je einen rechten und jenen bei  $\alpha$ , also sind sie ähnlich. Die Dreiecke  $(0, v^*, -\alpha)$  und  $(\alpha, x, -\alpha)$  sind aus entsprechenden Gründen ebenfalls ähnlich. Aus dem Strahlensatz erhält man:

$$\frac{|v|}{1} = \frac{1}{|v^*|} \Rightarrow |v| = |v^*|^{-1} \Rightarrow \psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha(v) = v^* = v \cdot |v|^{-2}.$$

**3.** Die naheliegende Frage, wie die beiden durch (1) und (2) gegebenen Strukturen auf  $S^n$  zusammenpassen, ist so zu beantworten: Die Karten sind verträglich (d.h. erzeugen denselben maximalen Atlas), denn

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{-1} &: x \mapsto x \cdot \langle x, \alpha \rangle^{-1} - \alpha \\ \psi_\beta &: v \mapsto \beta + 2(v - \beta) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1} \\ \varphi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta &: v \mapsto \frac{\beta + 2(v - \beta) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1}}{\langle \beta + 2(v - \beta) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1}, \alpha \rangle} - \alpha \end{aligned}$$

ist eine – wenn auch komplizierte –  $C^\infty$ -Funktion. Die Verträglichkeit der Karten kann auch daran erkannt werden, daß die Karten als lokale Diffeomorphismen des umgebenden Raums aufgefaßt werden können.

**4. EINPUNKTKOMPAKTIFIZIERUNG des  $\mathbb{R}^n$ :**

Wir definieren auf  $\mathbb{R}_\infty^n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  einen Atlas durch  $\chi_0$  und  $\chi_\infty$ , diese sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \chi_0 &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n \\ \chi_0(x) &= x \\ \chi_\infty &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_\infty^n \\ \chi_\infty(0) &= \infty \text{ und } \chi_\infty(x) = x \cdot |x|^{-2} \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Die Kartenwechsel  $\chi_0^{-1} \circ \chi_\infty$  und  $\chi_\infty^{-1} \circ \chi_0$  von  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  errechnen sich als:  $x \mapsto x \cdot |x|^{-2}$ . Dieser Kartenwechsel ist uns schon in (2), bei der Sphäre, begegnet.

Behauptung:  $\mathbb{R}_\infty^n \cong S^n$  mittels  $f(\infty) = e_1$  und  $f(x) = \psi_{e_1}(x)$ . Es ist klar, daß  $f$  bijektiv ist; bleibt zu zeigen, daß sowohl  $f$  als auch  $f^{-1}$  glatt ist: Die zu untersuchenden Fälle sind:

1.  $\psi_{e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \chi_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$
2.  $\psi_{e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_\infty = \chi_0^{-1} \circ \chi_\infty$
3.  $\psi_{-e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \chi_\infty^{-1} \circ \chi_0$
4.  $\psi_{-e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_\infty = \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$

Dies sind alles Diffeomorphismen, also ist  $f$  ein Diffeomorphismus.

5. PROJEKTIVE RÄUME

$$P^n := \{ \text{Geraden durch } 0 \text{ im } \mathbb{R}^{n+1} \} = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

wobei  $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , sodaß  $\lambda x = y$ . Als Karten wählt man etwa für  $0 \leq i \leq n$ :

$$\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow P^n \\ (y^1, \dots, y^n) \mapsto [(-1)^i(y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n)] \end{cases}$$

Das Vorzeichen ist dabei so gewählt, daß  $P^n$  so orientiert wie möglich wird, siehe (3) in (46.9). Die  $\varphi_i$  gehen bijektiv von  $\mathbb{R}^n$  nach  $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x^{i+1} \neq 0\} / \sim$ . Der Kartenwechsel berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(y^1, \dots, y^n) &= \\ &= \varphi_j^{-1} [(-1)^i(y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n)] \stackrel{\text{(O.B.d.A. } j > i)}{=} \\ &= (y^j)^{-1} (-1)^i (-1)^j (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^{j-1}, y^{j+1}, \dots, y^n). \end{aligned}$$

Das ist ein Diffeomorphismus (auf dem Definitionsbereich). Also ist  $P^n$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Ganz analoges Vorgehen liefert  $P_{\mathbb{C}}^n$  (komplexe Geraden in  $\mathbb{C}^{n+1}$ ) mit  $\dim P_{\mathbb{C}}^n = 2n$  und  $P_{\mathbb{H}}^n$  mit  $\dim P_{\mathbb{H}}^n = 4n$ .

In (11.9) hatten wir eine weitere Beschreibung der projektiven Räume  $P^n$  als Graßmannmannigfaltigkeit  $G(1, n+1) \subseteq L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$  gegeben. Dabei hatten wir Geraden durch 0 im  $\mathbb{R}^{n+1}$  mit den orthogonal-Projektionen auf sie identifiziert. Wir wollen nun zeigen, daß dies diffeomorphe Räume beschreibt. Sei dazu  $\bar{\varphi}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$  gegeben durch  $(y^1, \dots, y^n) \mapsto (-1)^i(y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n)$ . Dann ist  $\varphi_i = \pi \circ \bar{\varphi}_i$ , wobei  $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n := \mathbb{R}^{n+1} / \sim$  die kanonische Projektion  $x \mapsto [x]$  bezeichnet. Für  $a, b \in E := \mathbb{R}^{n+1}$  sei  $a \otimes b \in L(E, E)$  definiert durch  $(a \otimes b)(x) := \langle a, x \rangle b$  (Für eine Erklärung dieser Notation siehe (38)). Dann ist  $(a \otimes b)^t = b \otimes a$ , denn

$$\langle (a \otimes b)x, y \rangle = \langle a, x \rangle \cdot \langle b, y \rangle = \langle x, (b \otimes a)y \rangle.$$

Und weiters ist

$$(a_1 \otimes b_1) \circ (a_2 \otimes b_2) = \langle a_1, b_2 \rangle a_2 \otimes b_1.$$

Folglich ist  $P := a \otimes b$  genau dann eine ortho-Projektion (d.h.  $P^t = P = P^2$ ), wenn  $a = b$  und  $\langle a, a \rangle = 1$  ist. Die ortho-Projektionen  $P$  vom Rang 1 sind also genau die  $P$  der Gestalt  $P = a \otimes a$  mit  $|a| = 1$ . Die glatte Abbildung  $x \mapsto \frac{x}{|x|} \otimes \frac{x}{|x|}$  ist somit eine surjektive Abbildung  $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow G(1, n+1)$  und faktorisiert zu einer glatten Bijektion  $P^n \rightarrow G(1, n+1)$ . Lokal erhalten wir eine inverse Abbildung, indem wir Abbildungen  $P$  nahe  $a \otimes a$  den Punkt  $\pi(P(a)) \in P^n$  zuordnen. Es ist nämlich  $P(a) = \langle b, a \rangle b$  für  $P = b \otimes b$  und somit  $f(\pi(P(a))) = f(\pi(b)) = b \otimes b = P$ . Also ist  $f$  der gesuchte Diffeomorphismus.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\bar{\varphi}_i} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \twoheadrightarrow & S^n \\ & \searrow \varphi_i & \downarrow & & \downarrow \\ & & P^n & \xrightarrow[\cong]{f} & G(1, n+1) \hookrightarrow L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}) \end{array}$$

**16.13 Bemerkung**

Zwischen projektiven Räumen und Sphären gibt es einige Beziehungen:

(1) Die projektive Gerade  $P^1 \cong S^1$ .

Als Karten für die  $S^1$  wählen wir  $\psi_+ := \psi_{0,1}$  und  $\psi_- := \psi_{0,-1}$ , die stereographischen Projektionen zu den Punkten  $(0, 1)$  und  $(0, -1)$  (vgl. Bsp. (16.12)). Für den Kartenwechsel erhalten wir:

$$(\psi_{0,1}^{-1} \circ \psi_{0,-1})(x) = (\psi_{0,-1}^{-1} \circ \psi_{0,1})(x) = x^{-1} \text{ auf } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Als Karten für  $P^1$  ordnen wir jeder Ursprungsgeraden den Schnittpunkt mit den Geraden  $y = 1$  (bzw.  $x = 1$ ) zu, siehe (16.12.5):

$$\varphi_- : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow P^1 \setminus [(0, 1)] \\ x \mapsto [(1, x)] \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_+ : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow P^1 \setminus [(1, 0)] \\ x \mapsto [(x, 1)] \end{cases}$$

Mit der Karte  $\varphi_-$  erhalten wir alle Klassen bis auf  $[(0, 1)]$  (das entspricht der  $y$ -Achse). Diesen Mangel behebt die Karte  $\varphi_+$ . Wir berechnen die Umkehrabbildungen:

$$\begin{aligned} \varphi_-^{-1} : [(x, y)] &= [(1, y \cdot x^{-1})] \mapsto y \cdot x^{-1} = \frac{y}{x} \\ \varphi_+^{-1} : P^1 \setminus [(1, 0)] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ mit} \\ \varphi_+^{-1} : [(x, y)] &\mapsto x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Nun zum Kartenwechsel:

$$(\varphi_+^{-1} \circ \varphi_-)(x) = \varphi_+^{-1}([(1, x)]) = x^{-1}, \quad (\varphi_-^{-1} \circ \varphi_+)(x) = \varphi_-^{-1}([(x, 1)]) = x^{-1},$$

jeweils auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Sei  $f : P^1 \rightarrow S^1$  gegeben durch:

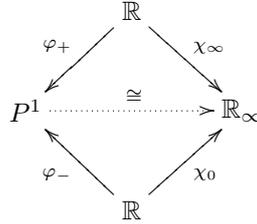
$$f := \begin{cases} \psi_- \circ \varphi_-^{-1} \text{ auf } P^1 \setminus [(0, 1)] \\ \psi_+ \circ \varphi_+^{-1} \text{ auf } P^1 \setminus [(1, 0)]. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da aus  $\psi_-^{-1} \circ \psi_+ = \varphi_-^{-1} \circ \varphi_+$  folgt, daß  $\psi_- \circ \varphi_-^{-1} = \psi_+ \circ \varphi_+^{-1}$ . Sie ist aber auch ein Diffeomorphismus. Dies müssen wir nur für die induzierte Funktion zeigen. Auf  $P^1 \setminus [(0, 1)]$  ist wegen  $f(\text{Bild } \varphi_-) = \text{Bild } \psi_-$  die Kartendarstellung  $\psi_-^{-1} \circ f \circ \varphi_- = \psi_-^{-1} \circ \psi_- \circ \varphi_-^{-1} \circ \varphi_- = \text{id}$  ein Diffeomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} P^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \varphi_{\pm} \uparrow & & \uparrow \psi_{\pm} \\ \mathbb{R} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R} \end{array}$$

Analog für  $x \in P^1 \setminus [(1, 0)]$ .

Einfacher sieht man  $P^1 \cong S^1$  auch mittels (16.12.4):



(2)  $P^1_{\mathbb{C}} \cong S^2$ : Geometrisch läßt sich das wie folgt veranschaulichen: Man parametrisiert die komplexen Ursprungsgeraden in  $P^1_{\mathbb{C}}$  durch ihre eindeutigen Schnitte mit der komplexen Gerade  $g := \{(z, 1) : z \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{R}^2$ . Nur die komplexe Gerade  $h$  parallel zu  $g$  d.h.  $h = \{(z, 0) : z \in \mathbb{C}\} \in P^1_{\mathbb{C}}$  bekommt kein Bild. Jene Geraden, die nahe bei  $h$  liegen, haben ihre Schnittpunkte weit draußen auf  $g$ . Also entspricht die noch fehlende Gerade  $h$  dem Punkt  $\infty$  in der Einpunktkompaktifizierung  $\mathbb{R}^2_{\infty}$  von  $\mathbb{R}^2$ . Daß diese beiden Räume isomorph sind, wissen wir aber (siehe Beispiel (16.12)).

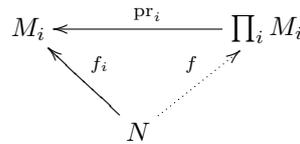
### 17. Produkte und Summen von Mannigfaltigkeiten

Die einfachste Möglichkeit, aus Mannigfaltigkeiten neue zu basteln, ist die Bildung von Produkten und Summen, die wir in diesen Abschnitt behandeln.

**17.1 Proposition (Produkte).** Für  $i = 1, \dots, n$  sei  $(M_i, \mathcal{A}_i)$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Dann ist  $\prod_{i=1}^n M_i$  in natürlicher Weise eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Der Atlas auf  $\prod M_i$  ist gegeben durch

$$\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i := \{\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n : \varphi_i \in \mathcal{A}_i\}.$$

Das Produkt  $\prod M_i$  hat folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $N$  und  $C^\infty$ -Abbildungen  $f_i : N \rightarrow M_i$  existiert eine eindeutige  $C^\infty$ -Abbildung  $f = (f_1, \dots, f_n)$ , sodaß  $\text{pr}_i \circ f = f_i$ . Dabei bezeichnet  $\text{pr}_i : \prod M_i \rightarrow M_i$  die  $C^\infty$ -Abbildung  $(x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$ . Die universelle Eigenschaft kann auch durch folgendes Diagramm ausgedrückt werden:



Die auf  $\prod_i M_i$  induzierte Topologie ist gerade die Produkttopologie.

**Beweis.** Offensichtlich ist durch den Atlas  $\prod_i \mathcal{A}_i$  induzierte Topologie gerade die Produkttopologie, denn das Produkt von Homöomorphismen  $\varphi_i$  ist ebenso ein Homöomorphismus

$$\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n : \text{Dom } \varphi_1 \times \dots \times \text{Dom } \varphi_n \rightarrow \text{Bild } \varphi_1 \times \dots \times \text{Bild } \varphi_n \subseteq \prod M_i.$$

Die Kartenwechsel

$$(\psi_1 \times \dots \times \psi_n)^{-1} \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n) = (\psi_1^{-1} \circ \varphi_1) \times \dots \times (\psi_n^{-1} \circ \varphi_n).$$

sind als Produkte von Diffeomorphismen  $(\psi_i^{-1} \circ \varphi_i)$  selbst Diffeomorphismen, und somit ist  $\prod M_i$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.

Wir behaupten nun  $\text{pr}_i : \prod M_i \rightarrow M_i$  ist glatt.

Sei  $(x^1, \dots, x^n) \in \prod M_i$  und  $\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n$  eine Karte um diesen Punkt. Dann ist  $\varphi_i$  Karte um  $x^i$ . Somit ist

$$\varphi_i^{-1} \circ \text{pr}_i \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n) : \mathbb{R}^{m_1 + \dots + m_n} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}, \quad (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$$

eine lineare Projektion, also glatt. Seien  $f_i \in C^\infty(N, M_i)$ , dann ist  $x \mapsto f(x) = (f_1, \dots, f_n)$  die einzige Abbildung mit  $\text{pr}_i \circ f = f_i$ . Bleibt noch zu zeigen:  $f$  ist  $C^\infty$ . Sei  $\varphi$  eine Karte von  $N$ , dann ist

$$\begin{aligned} & (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n)^{-1} \circ f \circ \varphi = \\ &= (\varphi_1^{-1} \times \dots \times \varphi_n^{-1}) \circ (f_1 \circ \varphi, \dots, f_n \circ \varphi) \\ &= (\varphi_1^{-1} \circ f_1 \circ \varphi, \dots, \varphi_n^{-1} \circ f_n \circ \varphi). \end{aligned}$$

Laut Voraussetzungen waren  $\varphi_i^{-1} \circ f_i \circ \varphi$  glatt (da die  $f_i$  glatt sind), also ist  $f$  glatt.  $\square$

## 17.2 Beispiele von Produkten

1. Der Zylinder  $Z$  ist eine Teilmenge im  $\mathbb{R}^3$ , nämlich das kartesische Produkt aus der  $S^1$  und  $] -1, 1[ \cong \mathbb{R}$ . Also ist der Zylinder eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit.
2. Der  $n$ -dimensionale Torus im  $\mathbb{R}^{2n}$  entsteht durch das  $n$ -fache kartesische Produkt der  $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ :

$$S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 = \prod_{i=1}^n S^1 = (S^1)^n = T^n.$$

Für  $n = 2$  ergibt sich der uns schon bekannte "Fahrradschlauch"  $T^2$  (vgl. (11.6)), allerdings als Teilmenge von  $\mathbb{R}^4$  anstelle von  $\mathbb{R}^3$ . Ein Diffeomorphismus  $f : S^1 \times S^1 \rightarrow T^2$  kann folgendermaßen beschrieben werden:

$$f : (\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos \varphi (R + r \cdot \cos \psi) \\ \sin \varphi (R + r \cdot \cos \psi) \\ r \cdot \sin \psi \end{pmatrix}$$

## 17.3 Proposition (Summen).

Seien  $(M_i, \mathcal{A}_i)$   $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten. Dann ist die disjunkte Vereinigung  $\bigsqcup_i M_i$  in natürlicher Weise eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Ein Atlas  $\mathcal{A}$  auf  $\bigsqcup_i M_i$  ist gegeben durch  $\bigcup_i \mathcal{A}_i$  (hier ist keine Beschränkung der Indexmenge nötig).

Zusätzlich hat  $\bigsqcup M_i$  folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $N$  und für alle  $C^\infty$ -Abbildungen  $f_i : M_i \rightarrow N$  existiert eine eindeutige glatte Abbildung  $f$  mit

$$f := \bigsqcup_i f_i : \bigsqcup M_i \rightarrow N, \quad \text{sodass } f|_{M_i} = f_i.$$

Dies kann auch durch folgendes Diagramm ausgedrückt werden:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \hookrightarrow & \bigsqcup_i M_i \\ & \searrow f_i & \swarrow f \\ & & N \end{array}$$

**Beweis.** Da  $\varphi \in \bigcup \mathcal{A}_i$  folgt, daß  $\varphi \in \mathcal{A}_i$  für zumindest ein  $i$ , d.h.  $\varphi$  ist ein Homöomorphismus. Für  $\varphi, \psi \in \bigcup \mathcal{A}_i$  ist entweder  $\varphi^{-1} \circ \psi = \emptyset$  oder ein  $i$  existiert mit  $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_i$  und somit ist  $\psi^{-1} \circ \varphi$  glatt. Offene Mengen in  $\bigsqcup M_i$  sind Vereinigungen offener Mengen in  $M_i$ . Der Beweis der universellen Eigenschaft erübrigt sich.  $\square$

## 19. Topologisches über Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir die topologischen Eigenschaften von abstrakten Mannigfaltigkeiten besprechen. Insbesondere interessiert uns die Reichhaltigkeit der glatten Funktionen auf ihnen. Das betrifft einerseits Trennungseigenschaften wie Hausdorff oder vollständige Regularität aber auch Begriffe wie Lokalkompaktheit, Separabilität und Parakompaktheit und somit Partitionen der Eins, die wir bereits in (18) kennengelernt haben. Wir werden auch die Existenz endlicher Atlanten skizzieren und damit erhalten, daß jede hinreichend reguläre abstrakte Mannigfaltigkeit sich als konkrete Mannigfaltigkeit in einem Euklidischen Raum realisieren läßt. Dies zeigt zwar, daß der Verzicht auf den umgebenden Raum nicht wirklich nötig war, aber dennoch hilft er klarer zu erkennen, welches die intrinsischen (d.h. nicht vom umgebenden Raum abhängigen) Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten sind.

### 19.1 Lemma (Topologie von Mannigfaltigkeiten).

Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, dann hat  $M$  folgende Eigenschaften:

1.  $M$  ist  $T_1$ , d.h.  $x \neq y \Rightarrow \exists U$  offen mit  $x \in U$  und  $y \notin U$ .
2. Jedes  $x \in M$  hat eine abzählbare Umgebungsbasis.
3.  $M$  ist lokal wegzusammenhängend (d.h.  $x \in M \Rightarrow \exists U_x$ , sodaß  $\forall y \in U_x$  gilt: es gibt eine glatte Kurve, die  $x$  und  $y$  verbindet).

**Beweis.** Ad (1) Sei  $x \neq y$  und  $x \in \text{Bild } \varphi$ . Dann ist entweder  $y \notin \text{Bild } \varphi$  und  $\text{Bild } \varphi$  ist die gesuchte Menge. Oder es ist  $y \in \text{Bild } \varphi$ , dann sind  $\varphi^{-1}(x)$  und  $\varphi^{-1}(y)$  verschiedene Punkte im  $\mathbb{R}^m$ . Der  $\mathbb{R}^m$  ist aber klarerweise  $T_1$ . Also gibt es eine Teilmenge  $O \subseteq \mathbb{R}^m$  mit  $\varphi^{-1}(x) \in O$  und  $\varphi^{-1}(y) \notin O$ . Wenn wir nun  $U = \varphi(O)$  wählen, dann ist  $y \notin U$ . (2) und (3) ergeben sich unmittelbar aus der lokalen Isomorphie von  $M$  und  $\mathbb{R}^m$ . (In (3) wähle im  $\mathbb{R}^m$  ein Geradensegment von  $\varphi^{-1}(x)$  nach  $\varphi^{-1}(y)$ .)  $\square$

### 19.2 Folgerungen (Zusammenhangskomponenten).

1. Die Wegzusammenhangskomponenten  $M_i$  von  $M$  sind offen:  
 $x \in M_i \Rightarrow \exists U_x$ , sodaß für alle  $y \in U_x$  gilt:  $y \in M_i$ .
2. Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $M_i$  die Familie der Wegzusammenhangskomponenten von  $M$ . Dann sind die  $M_i$  offen in  $M$  und also selbst (wegzusammenhängende)  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeiten und  $M = \bigsqcup M_i$  (siehe (17.3)).

**Beweis.** Die Atlanten für  $M_i$  ergeben sich als

$$\mathcal{A}_i = \{\varphi|_{\varphi^{-1}(M_i)} : \varphi \in \mathcal{A}\}.$$

Diese Karten liegen in  $\mathcal{A}_{max}$ , also liegt der kanonische Atlas von  $(\bigsqcup M_i, \bigcup \mathcal{A}_i)$ , in  $\mathcal{A}_{max}$ . Da die Atlanten verträglich sind, ist insbesondere der von ihnen erzeugte maximale Atlas gleich.  $\square$

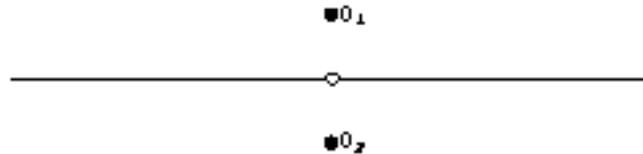
### 19.3 Definition (Dimension)

Bei wegzusammenhängenden glatten Mannigfaltigkeiten kann für jede Karte derselbe Vektorraum verwendet werden, denn die Ableitung des Kartenwechsels ist ein linearer Isomorphismus, also ist die Dimension der modellierenden Vektorräume gleich. Damit ist die DIMENSION DER MANNIGFALTIGKEIT wohldefiniert.

Für topologische Mannigfaltigkeiten ist es sehr viel schwieriger ein analoges Resultat zu erhalten!

### 19.4 Beispiel einer nicht-Hausdorff Mannigfaltigkeit

Die Menge  $M := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0_1, 0_2\}$  mit folgendem Atlas ist eine Mannigfaltigkeit, die nicht HAUSDORFF (kurz  $T_2$ , d.h.  $x \neq y \Rightarrow \exists U_x, \exists U_y$ , sodaß  $U_x \cap U_y = \emptyset$ ) ist.



Der Atlas bestehe aus folgenden zwei Karten  $\varphi_i$  für  $i = 1, 2$ :

$$\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{0_i\}, \varphi_i(0) = 0_i, \varphi_i(t) = t \text{ für } t \neq 0$$

Der Kartenwechsel  $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  ist die Identität auf  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  und damit auch glatt, d.h.  $M$  ist eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Aber  $M$  ist nicht Hausdorff: Eine Umgebungsbasis des Punktes  $0_i$  ist

$$\{]-\varepsilon, 0[ \cup \{0_i\} \cup ]0, \varepsilon[ : \varepsilon > 0\}.$$

Somit enthält der Durchschnitt beliebiger Umgebungen von  $0_1$  und  $0_2$  ein punktiertes Intervall  $]-\varepsilon, \varepsilon[ \setminus \{0\}$ .

So eine Situation kann klarerweise nur dann auftreten, wenn es keine gemeinsame Karte für die in Rede stehenden Punkte gibt. (Sonst verwende man die gemeinsame Karte und die  $T_2$ -Eigenschaft des  $\mathbb{R}^n$ .) In [35] findet sich ein Beispiel für eine nicht Hausdorff Mannigfaltigkeit, auf der jede glatte Funktion konstant ist.

## 18. Zerlegungen der Eins

Um aus lokalen Konstruktionen (wie sie z.B. in der Analysis behandelt werden) auch globale zu erhalten benötigen wir eine Methode, diese lokal zu verkleben. Wir brauchen dazu "Gewichts"-Funktionen, d.h. Funktionen, die nur lokal nicht verschwinden,

größer oder gleich 0 sind und zusammen sich auf 1 summieren. Das sind die sogenannten Partitionen der Eins, die wir in diesen Abschnitt behandeln.

### 18.1 Definition (Partition der Eins)

Sei  $M$  eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit und  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Eine  $\mathcal{U}$  unterordnete GLATTE PARTITION DER EINS ist eine Menge  $\mathcal{F}$  von glatten Abbildungen  $M \rightarrow \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$  mit den Eigenschaften:

1. Die Familie  $\{\text{Trg}(f) : f \in \mathcal{F}\}$  ist lokal endlich, d.h.  $\forall p \in U \exists U(p)$  sodaß  $\{f \in \mathcal{F} : \text{Trg}(f) \cap U(p) \neq 0\}$  endlich ist. Dabei ist  $\text{Trg}(f)$  der Abschluß von  $\{x : f(x) \neq 0\}$ .
2.  $\forall f \in \mathcal{F} \exists U_f \in \mathcal{U} : \text{Trg}(f) \subseteq U_f$
3.  $\sum_{f \in \mathcal{F}} f = 1$

**18.2 Satz (Partition der Eins).** *Sei  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  offen und sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $U$ . Dann gibt es eine  $C^\infty$ -Partition der Eins, die  $\mathcal{U}$  untergeordnet ist.*

**Beweis.** Zuerst wollen wir bemerken, daß es immer Funktionen mit beliebig kleinem Träger gibt. Betrachten wir zum Beispiel die glatte Funktion  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$h(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

Wenn wir dazu nun  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  auf folgende Weise definieren:  $\varphi(x) := h(r^2 - |x|^2)$ ; dann ist  $\varphi$  klarerweise auch glatt und  $\varphi(x) \geq 0$  für alle  $x \in \mathbb{R}^n$ . Weiters gilt

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow h(r^2 - |x|^2) = 0 \Leftrightarrow r^2 - |x|^2 \leq 0 \Leftrightarrow r \leq |x|,$$

das heißt also, der Träger von  $\varphi$  ist gegeben durch  $\text{Trg } \varphi = \{x : |x| \leq r\}$ .

Jetzt wollen wir uns dem eigentlichen Beweis des Satzes zuwenden. Wir zeigen zuerst, daß  $U$  (und in der Tat jeder separable metrische Raum) Lindelöf ist. Dabei heißt ein Raum LINDELÖF, wenn jede offene Überdeckung eine abzählbare Teilüberdeckung besitzt.

Sei dazu  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $U$ . Sei weiters  $W \in \mathcal{U}$  und  $p$  ein Punkt in  $W \cap \mathbb{Q}^n$ . Dann wissen wir: Es existiert ein  $0 < r \in \mathbb{Q}$  mit der Eigenschaft, daß  $U_p(r) := \{x : |x - p| < r\} \subseteq W$ . Es gibt aber nur abzählbar viele Punkte und Radien mit dieser Eigenschaft. Diese Kugeln sind eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$  und sie überdecken  $U$ . Zu jeder solchen Kugel wählen wir ein umfassendes  $W \in \mathcal{U}$ . Diese  $W$  sind eine abzählbare Teilüberdeckung von  $\mathcal{U}$  (d.h.  $U$  ist Lindelöf).

Sei  $\mathcal{U}$  die gegebene offene Überdeckung von  $U$ . Zu jedem  $x \in W \in \mathcal{U}$  wählen wir ein  $r > 0 : \{y : |y - x| \leq r\} \subseteq W$ . Nach obigem wissen wir, daß es ein  $\varphi \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  gibt mit

$$U_\varphi := \{y : |y - x| < r\} = \{y : \varphi(y) \neq 0\}.$$

Diese Mengen bilden eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$ . Da  $U$  Lindelöf ist, können wir schließen, daß bereits abzählbar viele  $U_\varphi$  den Raum  $U$  überdecken. Seien nun  $U_1, U_2, \dots$  diese abzählbar vielen  $U_\varphi$  mit zugehörigen  $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ . Seien weiters  $W_n$  wie folgt definiert:

$$W_n := \{x \in U : \varphi_n(x) > 0 \wedge \varphi_i(x) < \frac{1}{n} \text{ für } 1 \leq i < n\}.$$

Es ist klar, daß die  $W_n$  offen sind (durch stetige Ungleichung gegeben), und Teilmengen von  $U_n$  sind.

Die  $W_n$  bilden eine Überdeckung von  $U$ , denn zu jedem  $x \in U$  existiert ein minimales  $n_0$  mit  $\varphi_{n_0} > 0$ . Dann ist aber  $x \in W_{n_0}$ .

Wir wollen jetzt beweisen, daß die  $W_n$  lokal endlich sind. Wählen wir  $x \in U$  beliebig, dann existiert ein  $n$ , sodaß  $x \in U_n$ . Sei  $n_0$  das kleinste  $n$  mit der Eigenschaft, daß  $x \in U_{n_0}$ . Nun definieren wir eine offene Umgebung um  $x$ :

$$U(x) := \{y : \varphi_{n_0}(y) > \frac{1}{2}\varphi_{n_0}(x)\}.$$

Falls  $W_k \cap U(x) \neq \emptyset$ , dann sei  $y$  im Durchschnitt dieser beiden Mengen gewählt und es folgt:

$$\varphi_i(y) < \frac{1}{k} \text{ für } i < k \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}\varphi_{n_0}(x) < \varphi_{n_0}(y).$$

Falls  $k$  so groß ist, daß  $\frac{1}{k} < \frac{\varphi_{n_0}(x)}{2}$  und  $k$  größer als  $n_0$  ist, dann erhalten wir durch

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{2}\varphi_{n_0}(x) < \varphi_{n_0}(y) < \frac{1}{k}$$

einen Widerspruch. Also existieren nur endlich viele  $k$  mit  $W_k \cap U(x) \neq \emptyset$ .

Wir definieren eine glatte Funktion  $\psi_n : U \rightarrow \{t : 0 \leq t\}$  durch

$$\psi_n(x) := h(\varphi_n(x))h\left(\frac{1}{n} - \varphi_1(x)\right) \cdot \dots \cdot h\left(\frac{1}{n} - \varphi_{n-1}(x)\right),$$

und rechnen wie folgt

$$\psi_n(x) \neq 0 \Leftrightarrow (\varphi_n(x) > 0) \wedge \left(\frac{1}{n} - \varphi_1(x) > 0\right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{1}{n} - \varphi_{n-1}(x) > 0\right) \Leftrightarrow x \in W_n.$$

Da  $\{W_n : n\}$  lokal endlich ist, sind in der Summe  $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n$  lokal nur endlich viele Summanden ungleich 0, und somit ist  $\psi := \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ . Diese Funktion verschwindet nirgends, da die  $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$  eine Überdeckung bilden.

Nun definieren wir  $f_n := \frac{\psi_n}{\psi} \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ .

$$\sum f_n = \frac{\sum \psi_n}{\psi} = \frac{\psi}{\psi} = 1$$

damit hätten wir Punkt (1) und (3) von (18.1) gezeigt.

(2) folgt nun aus:  $\text{Trg}(f_n) \subseteq \bar{W}_n \subseteq \bar{U}_n \subseteq U_f$  für ein  $U_f \in \mathcal{U}$ . □

### Bemerkung

Dieser Beweis funktioniert für Lindelöf-Räume, in denen die Mengen der Gestalt  $\{x : f(x) \neq 0\}$  mit  $f \in C^\infty$  eine Basis der Topologie bilden.

### 18.3 Definition (Parakompaktheit)

Ein topologischer Raum  $X$  heißt PARAKOMPAKT, falls es für jede offene Überdeckung  $\mathcal{U}$  von  $X$  eine lokal-endliche Verfeinerung  $\mathcal{V}$  gibt. D.h.  $\mathcal{V}$  ist eine offene Überdeckung von  $X$  mit den Eigenschaften:

1. Für alle  $V \in \mathcal{V}$  gibt es ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $V \subseteq U$  ("Verfeinerung").
2. Für alle  $x \in X$  gibt es ein  $U_x$ , sodaß höchstens für endlichviele  $V \in \mathcal{V}$  gilt:  $U_x \cap V \neq \emptyset$  (d.h. ist lokal-endlich).

Eine große Klasse von Beispielen für parakompakte Räume liefert uns das

**18.4 Lemma.** *Sei  $X$  ein topologischer Raum mit  $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$ , wobei  $K_n$  kompakt ist in  $X$  und  $K_n \subseteq K_{n+1}^o$ . Dann gilt ist  $X$  parakompakt und Lindelöf.*

**Beweis.** Wir definieren zuerst  $A_n := K_{n+1} \setminus K_n^o$ . Diese Menge ist kompakt. Die Menge

$$\mathcal{U}_n := \left\{ U \cap (K_{n+2}^o \setminus K_{n-1}) : U \in \mathcal{U} \right\}$$

ist eine offene Überdeckung von  $A_n$ . Sei  $\mathcal{U}'_n$  eine endliche Teilüberdeckung, dann ist  $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}'_n$  eine offene Überdeckung von  $X$  und eine Verfeinerung von  $\mathcal{U}$ . Es ist zu zeigen, daß  $\mathcal{V}$  lokal-endlich ist. Für  $x \in X$  gibt es ein  $n$ , sodaß  $x \in A_n$ . Nach Konstruktion von  $\mathcal{V}$  können nur Mengen aus  $\mathcal{U}'_{n-1} \cup \mathcal{U}'_n \cup \mathcal{U}'_{n+1}$  mit  $A_n$  nicht leeren Durchschnitt haben. Dies sind aber nur endlich viele, damit ist  $X$  parakompakt. Aus der abzählbaren offenen Überdeckung  $\mathcal{V}$  gewinnt man auch leicht eine abzählbare Teilüberdeckung von  $\mathcal{U}$ , und somit ist  $X$  Lindelöf.  $\square$

### 19.5 Lemma (Topologie von Hausdorff Mannigfaltigkeiten).

*Sei  $M$  eine Hausdorff  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, dann gilt:*

1.  $M$  ist lokalkompakt (d.h.  $\forall x \in M \exists U_x$ , sodaß  $U_x^-$  kompakt ist; anders gesagt: es gibt relativ-kompakte Umgebungen).
2. Die  $C^\infty$ -Funktionen  $M \rightarrow \mathbb{R}$  trennen Punkte. Sie trennen sogar Punkte von abgeschlossenen Mengen (d.h. für  $x \notin A$ , wo  $A$  abgeschlossen ist, existiert ein glattes  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , sodaß  $f(x) = 1$  und  $f(y) = 0$  für alle  $y \in A$ ). Insbesondere ist  $M$  also vollständig regulär.

**Beweis.** (1) Sei  $x \in M$  und  $\varphi$  ein Karte um  $x$  mit  $\text{Dom } \varphi \subseteq \mathbb{R}^m$  offen. O.B.d.A. gelte  $\varphi(0) = x$ . Sei  $W_x \subseteq \mathbb{R}^m$  eine Kugel um 0, wobei  $W_x^- \subseteq \text{Dom } \varphi$  kompakt ist. Dann ist  $\varphi(W_x)$  eine offene Umgebung von  $x$ , und  $\varphi(W_x^-)$  ist kompakt in  $M$ , da  $\varphi$  ein Diffeomorphismus ist. Also ist  $\varphi(W_x) = \varphi(W_x^-)$  und somit kompakt.

Ad (2) Sei  $x \notin A$  und  $A$  abgeschlossen, dann existiert eine relativ-kompakte Umgebung  $W_x$  von  $x$ , deren Abschluß ganz in einer Karte  $\varphi$  liegt. Somit ist

$$\varphi^{-1}(x) \in \varphi^{-1}(W_x) \subseteq \varphi^{-1}(W_x^-)$$

wobei  $\varphi^{-1}(W_x)$  offen und  $\varphi^{-1}(W_x^-)$  kompakt sind. Da  $\varphi^{-1}(x) \notin \varphi^{-1}(A)$  ist, gibt es ein  $r$ , sodaß

$$\begin{aligned} \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, \varphi^{-1}(x)) \leq r\} &\subseteq \varphi^{-1}(W_x) \text{ und} \\ \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, \varphi^{-1}(x)) \leq r\} \cap \varphi^{-1}(A) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Aus Satz (18.7) wissen wir, daß es eine glatte Abbildung  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  gibt, sodaß

$$f(\varphi^{-1}(x)) = 1 \text{ und } \text{Trg } f \subseteq \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, \varphi^{-1}(x)) \leq r\}.$$

Setzen wir nun  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$g(z) = \begin{cases} f(\varphi^{-1}(z)) & \text{falls } z \in \text{Bild } \varphi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist  $g(x) = 1$  und  $A \subseteq (M \setminus \text{Trg } g)$ , also  $g = 0$  auf  $A$ . Da  $f$  und  $\varphi$  beide glatt sind, ist auch  $g$  glatt. Das war die Behauptung.  $\square$

**19.6 Satz (Parakompakte Mannigfaltigkeiten).** Sei  $M$  eine Hausdorff  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, so ist äquivalent:

1.  $M$  besitzt  $C^\infty$ -Partitionen der Eins.
2.  $M$  ist parakompakt, d.h. zu jeder offenen Überdeckung existiert eine lokal-endliche offene Verfeinerung die  $M$  überdeckt.
3. Jede Zusammenhangskomponente ist  $\sigma$ -KOMPAKT, d.h. sie ist Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen.
4. Jede Zusammenhangskomponente ist LINDELÖF, d.h. zu jeder offenen Überdeckung existiert eine abzählbare Teilüberdeckung.
5.  $M$  ist METRISIERBAR, d.h. es existiert eine Metrik, die die Topologie erzeugt.

Die Äquivalenz mit 5 soll hier nur erwähnt, später bewiesen werden. Für  $(5 \Rightarrow 2)$  siehe [53, 1.3.8] und für  $(3 \Rightarrow 5)$  siehe [53, 3.3.10].

Es wird auch oft Separabilität vorausgesetzt, allerdings wurde in [76] gezeigt, daß es nicht-metrisierbare separable normale Mannigfaltigkeiten gibt.

### Bemerkung

Es besitzt nicht jede Hausdorff  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit die oben genannten Eigenschaften, als Beispiel dient die "Lange Linie": Sei  $\Omega$  die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen,

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, 2\omega, 2\omega + 1, \dots, \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^3, \dots, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}.$$

Betrachtet man  $\Omega \times [0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$ , versehen mit der lexikographischen Ordnung, d.h.  $((\alpha, t) \leq (\beta, s)) \Leftrightarrow (\alpha < \beta \text{ oder } (\alpha = \beta \text{ und } t \leq s))$ . Diese "Linie" kann mit der Ordnungstopologie zu einer  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit gemacht werden, die zwar Hausdorff, aber nicht parakompakt ist. Siehe [78, Vol.I, Appendix A]

**Beweis.** (des Satzes)

$(1 \Rightarrow 2)$  Sei  $\mathcal{U}$  offene Überdeckung und  $f_\alpha$  zugehörige Partition der Eins  $\Rightarrow \forall x$  existiert  $U_x$  sodaß  $I := \{\alpha : \text{Trg } f_\alpha \cap U_x \neq \emptyset\}$  endlich ist (dies entspricht der 2. Bedingung für eine Partition der Eins). Somit ist  $(\text{Trg } f_\alpha)_\alpha$ , für  $\alpha \in I$  eine lokalendliche Verfeinerung von  $\mathcal{U}$ .

$(2 \Rightarrow 3)$  Sei  $M_i$  eine Zusammenhangskomponente. Es existiert eine Überdeckung mit relativ-kompakten Mengen (vgl. Lemma (19.5)). Diese kann, da  $M_i$  parakompakt ist, als lokal-endlich angenommen werden. Sei  $\mathcal{U}$  so eine Überdeckung, dann gilt sogar:

$$\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\} \text{ ist endlich für jedes } W \in \mathcal{U},$$

denn zu jedem  $x \in W$  existiert ein  $V_x$ , sodaß  $V_x$  nur endlich viele  $U \in \mathcal{U}$  trifft. Da  $W$  kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung  $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$ :

$$\bigcup_{i=1}^n V_{x_i} \supseteq W \supseteq W.$$

Nun gilt  $U \cap W \neq \emptyset$ . Somit existiert ein  $i$ , sodaß  $U \cap V_{x_i} \neq \emptyset$ . Für endlich viele  $i$  tritt dieser Fall nur endlich oft ein. Also ist auch

$$\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\}$$

endlich.

Wir wählen nun ein  $W_1 \in \mathcal{U}$ . Sei  $W_2$  die Vereinigung über jene  $U \in \mathcal{U}$ , deren Schnitt mit  $W_1 \neq \emptyset$  ist.

Induktiv sei nun  $W_n$  die Vereinigung über jene  $U \in \mathcal{U}$ , deren Schnitt mit  $W_{n-1} \neq \emptyset$  ist. Jedes  $W_i$  ist Vereinigung endlich vieler relativ-kompakter Mengen, also selbst relativ-kompakt. Ist  $W := \bigcup_n W_n$ , so ist  $W$  offen. Wir wollen zeigen, daß  $W = M_i$ . Dafür genügt es zu zeigen, daß  $M_i \setminus W$  offen ist. Sei also  $x \notin W$ , dann existiert ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $x \in U$ . Klarerweise gilt  $U \cap W = \emptyset$ , sonst gäbe es ein  $n$ , sodaß  $U \cap W_n \neq \emptyset$ , also  $x \in U \subseteq W_{n+1} \subseteq W$ . Dies ist ein Widerspruch.

Nun ist also  $M_i = W \cup (M_i \setminus W)$ , und sowohl  $W$  als auch  $M_i \setminus W$  sind beide offen. Da  $M_i$  zusammenhängend ist, muß  $W$  oder  $M_i \setminus W$  leer sein. Aber  $W \neq \emptyset$ , also  $M_i \setminus W = \emptyset$ , und somit ist  $M_i = W$ . Die Gleichung  $M_i = \bigcup_n W_n$  zeigt die  $\sigma$ -Kompaktheit von  $M_i$ .

(3  $\Rightarrow$  4) Dies folgt aus (18.4) (und (19.5)).

(4  $\Rightarrow$  1) In (18.2) wurde ein Beweis für die Existenz von  $C^\infty$ -Partitionen der Eins gegeben, der als Voraussetzung Lindelöf und die Existenz von  $C^\infty$ -Funktionen mit beliebig kleinen Trägern verwendet. Beides ist hier erfüllt.  $\square$

Zum Abschluß dieses Exkurses in die Topologie noch einige Bemerkungen zur Dimensionstheorie: (Für detailliertere Ausführungen siehe [19, General Topology])

### 19.7 Definition (Überdeckungsdimension)

Sei  $X$  ein parakompakter Hausdorff-Raum. Man sagt die ÜBERDECKUNGSDIMENSION von  $X$  ist höchstens  $n$  (kurz:  $\text{UD-dim } X \leq n$ ), falls es zu jeder offenen Überdeckung von  $X$  eine offene Verfeinerung der Ordnung  $n + 1$  gibt. ( $\mathcal{U}$  heißt VON ORDNUNG  $n + 1$ , wenn der Durchschnitt über  $n + 2$  verschiedene Mengen aus  $\mathcal{U}$  immer leer ist.) Die  $\text{UD-dim } X = n \Leftrightarrow \text{UD-dim } X \leq n$ , aber nicht  $\text{UD-dim } \leq n - 1$ .

### 19.8 Satz (Eigenschaften der Überdeckungsdimension). Es gilt:

1.  $\text{UD-dim}[0, 1]^n = n$ .
2. Wenn  $A$  abgeschlossen in  $X$  ist, dann gilt

$$\text{UD-dim } A \leq \text{UD-dim } X.$$

3. Für eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung  $\mathcal{A}$  von  $X$  gilt:

$$\text{UD-dim } X \leq \sup\{\text{UD-dim } A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Ohne Beweis, siehe [19, S.295,268,278]

### 19.9 Folgerung. Für jede $m$ -dimensionale, parakompakte, Hausdorff Mannigfaltigkeit $M$ ist $\text{UD-dim } M = m$ .

**Beweis.**  $M$  besitzt eine offene Überdeckung durch Mengen  $\varphi((0, 1)^m)$ , wobei  $\varphi$  eine Karte für  $M$  ist. Da  $M$  parakompakt ist, existiert eine lokal-endliche Verfeinerung  $\mathcal{U}$ . Sei  $\mathcal{V} := \{V : V \in \mathcal{U}\}$ , so ist  $\mathcal{V}$  eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung.  $\varphi^{-1}(V) \subseteq [0, 1]^m$ . Da  $\varphi$  Homöomorphismus ist und somit die UD-dim bewahrt, gilt

unter Verwendung von (19.8):

$$\begin{aligned} \text{UD-dim } V &= \text{UD-dim } \varphi^{-1}(V) \stackrel{(2)}{\leq} \text{UD-dim}[0, 1]^m \stackrel{(1)}{=} m, \\ \text{UD-dim } M &\stackrel{(3)}{\leq} \sup\{\text{UD-dim } V : V \in \mathcal{V}\}, \end{aligned}$$

also  $\text{UD-dim } M \leq m$ . Umgekehrt gilt: Ist  $\varphi : [0, 1]^m \rightarrow M$  Karte, so ist  $\varphi([0, 1]^m)$  abgeschlossen in  $M$ , also ist nach (19.8):

$$\text{UD-dim } M \stackrel{(2)}{\geq} \text{UD-dim } \varphi([0, 1]^m) = \text{UD-dim}[0, 1]^m \stackrel{(1)}{=} m.$$

Zusammen folgt die Behauptung:  $\text{UD-dim } M = m$ .  $\square$

**19.10 Folgerung.** *Sei  $M$  eine parakompakte und zusammenhängende Hausdorff-Mannigfaltigkeit. Sei  $\mathcal{O}$  eine offene Überdeckung von  $M$ , dann existiert ein  $p \leq \dim(M) + 1$  und eine Verfeinerung von  $\mathcal{O}$  folgender Gestalt:*

$$\mathcal{V} = \{V_i^n : i \leq p, n \in \mathbb{N}\},$$

sodaß  $V_i^n \cap V_i^m = \emptyset, \forall n \neq m$ .

**Beweis.** Nach (19.9) ist die Überdeckungsdimension von  $M$  gleich  $\dim M$ , also existiert zur offenen Überdeckung  $\mathcal{O}$  eine Verfeinerung  $\mathcal{O}'$  der Ordnung  $p \leq \text{UD-dim } M + 1$ . Da  $M$  parakompakt ist, existiert eine lokal endliche Verfeinerung  $\mathcal{O}''$  und da  $M$  nach (19.6) Lindelöf ist, können wir annehmen, daß diese Überdeckung  $\mathcal{O}''$  abzählbar ist. O.B.d.A. ist also  $\mathcal{O}$  eine abzählbare lokal endliche Überdeckung der Ordnung  $p$ .

Wir zeigen nun mittels Induktion nach  $p$ , daß jede solche Überdeckung eine Verfeinerung der gewünschten Form besitzt.

Dazu schrumpfen wir die Mengen in  $\mathcal{O}$  zu einer kleineren Überdeckung  $\mathcal{U}$ . Das soll heißen, wir konstruieren für jedes  $O \in \mathcal{O}$  ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $\bar{U} \subseteq O$  derart, daß die  $U$  noch immer eine Überdeckung bilden.

Dies kann induktiv geschehen: Sei  $\mathcal{O} := \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$ . Zwischen  $M \setminus \bigcup_{n \geq 2} O_n$  und  $O_1$  (erstere ist abgeschlossen, zweitere offen) schalten wir  $U_1$  und  $\bar{U}_1$  und erhalten eine Überdeckung  $\{U_1\} \cup \{O_n : n > 1\}$ . (Dies kann geschehen, da nach (18.7) eine  $C^\infty$ -Funktion  $f$  existiert mit Träger in  $\bar{O}_1$ , die auf  $M \setminus \bigcup_{n \geq 1} O_n$  identisch 1 ist. Nun erhält man  $U_1$  etwa durch  $U_1 := \{x : f(x) > 1/2\}$ .) Im zweiten Schritt finden wir genauso ein  $U_2$  zwischen  $M \setminus U_1 \cup \bigcup_{n > 2} O_n$  und  $O_2$ ; und so weiter.

Nun betrachten wir die beiden Familien:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_p &:= \text{die Menge der Durchschnitte von je } p \text{ der } O \in \mathcal{O}, \\ \mathcal{A}_p &:= \text{die Menge der Durchschnitte von je } p \text{ der } \bar{U} \text{ für } U \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

und bezeichnen ihre Vereinigungen mit  $V_p := \bigcup \mathcal{V}_p$  und  $A_p := \bigcup \mathcal{A}_p$ .

Im folgenden Bild sind die großen Scheiben die Mengen in  $\mathcal{O}$ , die kleinen Scheiben jene in  $\mathcal{U}$ , die dunklen "6-Ecke" sind die Punkte die in genau einem  $O \in \mathcal{O}$  liegen, die Punkte in den nächst helleren Streifen liegen in genau 2 der  $O$ 's, die nächst helleren "3-Ecke" liegen in genau 3 der  $O$ 's (sind also die Elemente von  $\mathcal{V}_p$ ) und die weißen "Dreiecke" sind die Elemente von  $\mathcal{A}_p$ .



Es ist  $\mathcal{V}_p$  eine Familie offener disjunkter Mengen, denn angenommen zwei verschiedene Mitglieder von  $\mathcal{V}_p$  hätten nichtleeren Durchschnitt, so hätten zumindest  $p + 1$  der  $O \in \mathcal{O}$  nichtleeren Durchschnitt, und das ist ein Widerspruch. Folglich ist  $V_p \subseteq M$  offen.

Die Familie  $\mathcal{A}_p$  besteht aus abgeschlossenen Mengen und ist lokal endlich, da die entsprechenden Elemente von  $\mathcal{V}_p$  disjunkt sind. Somit ist  $A_p$  als lokal endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen und es gilt  $A_p \subseteq V_p$ .

Wir behaupten nun, daß  $\mathcal{U}$  eine abzählbare lokal endliche Überdeckung von  $M \setminus A_p$  der Ordnung kleiner als  $p$  ist.

Angenommen, es gibt  $p$  Mengen in  $\mathcal{U}$ , deren Durchschnitt – eingeschränkt auf  $M \setminus A_p$  – nicht-leer ist, so ist ebendieser Durchschnitt auch im Durchschnitt der nicht eingeschränkten Abschlüsse enthalten und liegt also nach Konstruktion in  $A_p$ . Das ist ein Widerspruch.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert also eine Verfeinerung der Gestalt  $\{V_i^n : i < p, n \in \mathbb{N}\}$  von  $\mathcal{U}$ , welche  $M \setminus A_p$  überdeckt und sodaß  $V_i^n \cap V_i^m = \emptyset \forall i < p \forall n \neq m$ . Zusammen mit der disjunkten Familie  $\mathcal{V}_p =: \{V_p^n : n \in \mathbb{N}\}$  bilden diese Mengen dann die gewünschte Verfeinerung von  $\mathcal{O}$ .  $\square$

**19.11 Folgerung (Endlicher Atlas).** *Jede zusammenhängende, parakompakte,  $m$ -dimensionale, glatte Hausdorff Mannigfaltigkeit von Dimension  $m$  besitzt einen Atlas mit höchstens  $m + 1$  Karten.*

**Beweis.** Sei  $\mathcal{O}$  eine offene Überdeckung einer solchen Mannigfaltigkeit  $M$  mit Bildern  $\varphi(U)$  von Karten  $\varphi : U \rightarrow M$  mit offenen  $U$  im  $\mathbb{R}^m$ . O.B.d.A. sei  $\mathcal{O}$  abzählbar ( $M$  ist Lindelöf), d.h.

$$\mathcal{O} = \{\varphi_i(U_i) : i \in \mathbb{N}\},$$

wobei wir die  $U_i$  als disjunkt annehmen können. Es gibt nach (19.18) eine Verfeinerung der Gestalt:

$$\{O_i^n : i \leq p, n \in \mathbb{N}\},$$

wobei  $p \leq \dim M + 1$  und für  $m \neq n : O_i^n \cap O_i^m = \emptyset$ . Zu  $O_i^n$  gibt es ein diffeomorphes  $U_i^n \subseteq \mathbb{R}^m$ , vermittelt einer gewissen Karte  $\varphi_i^n$ . Wir definieren nun

$$\varphi_i : \begin{cases} \bigcup_n U_i^n \rightarrow \bigcup_n O_i^n \\ x \mapsto \varphi_i^n(x) \in O_i^n, \end{cases}$$

falls  $x \in U_i^n$ . So sind die  $\varphi_i$  Diffeomorphismen, deren Bilder  $M$  überdecken, d.h.:  $\{\varphi_i : 1 \leq i \leq p\}$  ist ein  $C^\infty$ -Atlas.  $\square$

Als einfache Folgerung werden wir in (21.13) zeigen, daß jede solche Mannigfaltigkeit bis auf einen Diffeomorphismus als Teilmannigfaltigkeit eines  $\mathbb{R}^n$  realisiert werden kann.

### III. Tangentialraum

In diesem Kapitel werden wir den Begriff der Ableitung auf Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten übertragen. Da Ableitungen Richtungsvektoren ineinander überführen, wirken sie nicht zwischen den Mannigfaltigkeiten sondern den ebenso zu besprechenden Tangentialräumen. Als Anwendung werden wir dann erste einfache infinitesimale Eigenschaften wie Immersivität und Submersivität von Abbildungen besprechen. Unter zusätzlichen lokalen bis globalen Eigenschaften erhalten wir dann Einbettungen, Faserbündel und als Spezialfall die bereits im ersten Kapitel angerissenen Überlagerungen.

#### 20.1 Satz (Beschreibung des Tangentialraums).

Sei  $M$  eine Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  und  $p \in M$ . Dann sind folgende Teilmengen des  $\mathbb{R}^n$  ident:

1. Bild  $\varphi'(0)$ , wobei  $\varphi$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  mit  $\varphi(0) = p$  ist.
2.  $\{c'(0) : c : I \rightarrow M \text{ glatt, } c(0) = p, I \text{ ein offenes Intervall mit } 0 \in I\}$ .
3.  $\text{Ker } f'(p)$ , wobei  $f$  eine reguläre Gleichung ist, die  $M$  lokal um  $p$  beschreibt.
4.  $\text{Graph } g'(\bar{p})$ , wobei  $M$  lokal um  $p$  als Graph der Funktion  $g$  beschrieben wird mit  $p = (\bar{p}, g(\bar{p}))$ .

#### 20.5 Definition (Derivation)

Eine Abbildung  $\partial : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  heißt DERIVATION über  $x$ , wenn sie linear ist und die Produktregel erfüllt, d.h. für  $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  und  $\alpha \in \mathbb{R}$  gilt:

1.  $\partial(f + g) = \partial f + \partial g$
2.  $\partial(\alpha f) = \alpha \cdot \partial f$
3.  $\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(x) + f(x) \cdot \partial g$

Mit  $\text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  bezeichnen wir die Menge aller Derivationen über  $p \in M$ . Bezüglich der punktweisen Operationen, ist dies ein Vektorraum.

#### 20.6 Satz (Tangentialvektoren als Derivationen). Die Abbildung

$$\begin{aligned} T_p M \times C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, f) &\mapsto (T_p f)(v) \end{aligned}$$

induziert einen linearen Isomorphismus

$$\Phi : \begin{cases} T_p M \rightarrow \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ v \mapsto \partial_v \left( : f \mapsto (T_p f)(v) \right) \end{cases}$$

Für jedes glatte  $f : M \rightarrow N$  entspricht der Tangentialabbildung  $T_x f$  von  $f$  via  $\Phi$  folgende Zuordnung auf der Seite der Derivation:

$$\begin{array}{ccc}
 T_p M & \xrightarrow{\Phi_p} & \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \ni & \partial \\
 \downarrow T_p f & & \downarrow (f^*)^* & & \downarrow \\
 T_{f(p)} N & \xrightarrow{\Phi_{f(p)}} & \text{Der}_{f(p)}(C^\infty(N, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \ni & (g \mapsto \partial(g \circ f)) = \partial \circ f^*
 \end{array}$$

**Beweis. Wohldefiniertheit:** Die Abbildung  $T_p M \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(v, f) \mapsto (T_p f)(v)(f)$  ist klarerweise bilinear, also induziert sie eine lineare Abbildung  $T_p M \rightarrow L(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  durch  $v \mapsto (f \mapsto (T_p f)(v)(f))$ . Diese Abbildung hat Werte im Raum der Derivationen über  $p$ , denn seien  $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$  zwei glatte Funktionen und  $v \in T_p M$  dann gilt nach der Produktregel (20.4):

$$\partial_v(f \cdot g) = T_p(f \cdot g)(v) = f(p) \cdot (T_p g)(v) + g(p) \cdot (T_p f)(v).$$

Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt und  $x \in M$ . Dann kommutiert obiges Diagramm, denn für  $v \in T_x M$  und  $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$  ist  $(\Phi_{f(x)} \circ T_x f)(v)(g) = (T_{f(x)} g)((T_x f)(v)) = (T_x(g \circ f))(v) = \partial(g \circ f)$ , da  $\partial := \Phi_x(v)$  auf  $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  durch  $\partial(h) = (T_x h)(v)$  wirkt.

**Lokalität von Derivationen:** Wir zeigen zuerst, daß jede Derivation  $\partial$  von  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  über  $p \in M$  ein lokaler Operator ist, d.h. der Wert  $\partial(f)$  nur von  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  nahe  $p$  abhängt.

Seien also  $f_1, f_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit  $f_1 = f_2$  nahe  $p$  vorgegeben. Sei  $f := f_1 - f_2$  und sei  $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  so gewählt, daß  $g(p) = 1$  und daß der Träger von  $g$  in der Menge der  $x$  mit  $f(x) = 0$  enthalten ist. Dann gilt:

$$0 = \partial(0) = \partial(g \cdot f) = \underbrace{g(p)}_1 \cdot \partial(f) + \underbrace{f(p)}_0 \cdot \partial(g) = \partial(f).$$

Daraus ergibt sich auch, daß  $\partial(f) = 0$  für alle konstanten Funktionen  $f$ , denn  $\partial(1) = \partial(1 \cdot 1) = 1 \cdot \partial(1) + \partial(1) \cdot 1$ , also  $\partial(1) = 0$ .

**Bijektivität für offene Teilmannigfaltigkeiten:** Wir wollen zuerst für den Spezialfall  $0 = p \in M = U \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$  die Bijektivität von  $\Phi$  beweisen. Sei  $(e_i)_{i=1}^m$  die Standardbasis im  $\mathbb{R}^m$  ist, dann kann jeder Vektor  $v \in T_p M = \mathbb{R}^m$  in der Basis als  $v = \sum_i v^i e_i$  entwickelt werden. Betrachten wir nun

$$\begin{aligned}
 & \Phi : T_p M \ni v \mapsto \partial_v \in \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\
 & \text{mit } \partial_v(f) := (T_p f)(v) = f'(p)(v) = \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(p) \cdot v^i,
 \end{aligned}$$

wobei  $\partial_i f$  die  $i$ -te partielle Ableitung von  $f$  ist, d.h.

$$(\partial_i f)(p) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_0 f(p + t e^i) = f'(p)(e^i).$$

Also ist die Derivation  $\partial_v$  nichts anderes als ‘‘Richtungsableitung  $d_v$  in Richtung  $v$  zu nehmen’’ und  $\Phi$  ist injektiv, denn die Komponenten von  $v$  können vermöge

$$\partial_v(\text{pr}_j) = \sum_{i=1}^m \underbrace{(\partial_i \text{pr}_j)(p)}_{\delta_{i,j}} \cdot v^i = v^j$$

aus  $\partial_v$  eindeutig rekonstruiert werden.

Umgekehrt ist  $\Phi$  aber auch surjektiv, denn für  $\partial \in \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  und  $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  folgendes:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 f'(tx)(x) dt = \int_0^1 \sum_i (\partial_i f)(tx) x^i dt \\ &= \sum_{i=1}^m x^i \underbrace{\int_0^1 (\partial_i f)(tx) dt}_{=: h_i(x)} \text{ für } x \text{ nahe } 0. \end{aligned}$$

und weiters, da  $\partial$  ein lokaler Operator ist,

$$\begin{aligned} \partial(f) &= \partial(f(0)) + \partial\left(\sum_{i=1}^m \text{pr}^i \cdot h_i\right) = 0 + \sum_{i=1}^m \left( \underbrace{\partial(\text{pr}^i)}_{(\partial_i f)(0)} \underbrace{h_i(0)}_{\text{pr}^i(0)} + \underbrace{\text{pr}^i(0)}_{=0} \cdot \partial(h_i) \right) \\ \Rightarrow \partial(f) &= \sum_{i=1}^m \underbrace{\partial(\text{pr}^i)}_{=: v^i} \cdot (\partial_i f)(0). \end{aligned}$$

Also ist  $\partial(f) = \partial_v(f) = \Phi(v)(f)$  für alle  $f$ .

**Bijektivität im Allgemeinen:** Sei nun  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $p \in M$  und  $\varphi$  eine lokale Parametrisierung von  $M$  zentriert bei  $p$ . Folgendes Diagramm zeigt, daß  $\Phi_p$  eine Isomorphismus ist:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m & \xlongequal{\quad} & T_0U & \xrightarrow[\cong]{T_0\varphi} & T_pM \hookrightarrow \mathbb{R}^n \\ & & \Phi_0 \downarrow \cong & & \Phi_p \downarrow \\ & & \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \xrightarrow[\cong]{(\varphi^*)^*} & \text{Der}_p(C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R}), \mathbb{R}) \xrightarrow[\cong]{(\text{incl}^*)^*} \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{array}$$

Dabei ist  $T_0\varphi$  ein Isomorphismus nach (20.4);  $\Phi_0$  ist einer wegen des Spezialfalls;  $(\varphi^*)^* : \partial \mapsto (f \mapsto \delta(f \circ \varphi))$  ist einer, da  $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$  ein Diffeomorphismus ist; und schließlich ist der rechte untere ein solcher, da Derivationen lokale Operatoren sind; Also ist auch  $\Phi_p$  ein Isomorphismus, und somit der Satz bewiesen.  $\square$

Wir können den Satz (20.6) nun dazu verwenden um den Tangentialraum abstrakter Mannigfaltigkeiten wie folgt zu definieren:

**20.7 Definition (Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit)**

Unter dem TANGENTIALRAUM einer abstrakten Mannigfaltigkeit  $M$  bei  $p$  versteht man den Vektorraum

$$T_p M := \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}).$$

Ist  $f \in C^\infty(M, N)$  und  $p \in M$ , dann heißt die durch

$$\partial \mapsto ((T_p f)(\partial) : g \mapsto \partial(g \circ f)) \text{ für } \partial \in T_p M \text{ und } g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$$

definierte Abbildung  $T_p f = (f^*)^* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , die TANGENTIALABBILDUNG von  $M$  bei  $p$ .

**20.8 Basen des Tangentialraums**

Wenn wir wie für Abbildungen zwischen  $\mathbb{R}^m$ 's die Ableitung einer Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten als Matrix (also als Jacobimatrix) schreiben wollen so benötigen wir eine Basis. Aber selbst wenn wir im umgebenden Vektorraum eine Basis gewählt haben, so bekommen wir noch lange keine ausgezeichnete Basis des Tangentialraums. Wir können aber wie folgt vorgehen. Sei dazu  $M$  eine Mannigfaltigkeit,  $p \in M$  und  $\varphi$  eine Karte von  $M$  zentriert bei  $p$ . Dann ist  $T_0 \varphi : T_0 \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$  ein linearer Isomorphismus nach (20.4) falls  $M$  eine Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$  ist, aber auch im allgemeinen Fall einer abstrakten Mannigfaltigkeit, da (20.4) für diese ganz leicht zu zeigen ist. Die Standardbasis  $(e_i)_{i=1}^m$  des  $\mathbb{R}^m$  wird durch den Isomorphismus  $\Phi : \mathbb{R}^m \cong \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  auf die Basis der partiellen Ableitungen  $(\partial_i)_{i=1}^m$  in  $T_0 U = T_0 \mathbb{R}^m$  abgebildet. Der Isomorphismus  $T_0 \varphi$  bildet diese Basis weiter auf eine Basis  $(\partial_i^\varphi|_p := T_0 \varphi(e_i))_{i=1}^m$  in  $T_p M$  ab. Im Fall einer Teilmannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^n$ , sind dies gerade die partiellen Ableitungen  $(T_0 \varphi)(e_i) = (\partial_i \varphi)(0) = \varphi'(0)(e_i)$  der Parametrisierung  $\varphi$ . Seien  $(u^1, \dots, u^m) := \varphi^{-1}$  die zu  $\varphi$  gehörenden lokalen Koordinaten, dann bezeichnen wir  $\partial_i^\varphi|_p \in T_p M = \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  auch als  $\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p$ . Es drückt die Schreibweise  $\partial_i^\varphi$  zwar deutlicher aus, daß diese Derivation von der Karte  $\varphi$  abhängt und nicht, wie man der Bezeichnungsweise  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  fälschlicherweise entnehmen könnte, nur von der  $i$ -ten Komponente  $u^i$  der Umkehrfunktion  $\varphi^{-1} = (u^1, \dots, u^m)$ . Die Bezeichnung  $\frac{\partial}{\partial u^i}$  ist allerdings die üblichere und macht auch keine Probleme, falls man sie nur als  $(\frac{\partial}{\partial u})_i$  und nicht als  $\frac{\partial}{\partial(u^i)}$  interpretiert. Es gilt:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p\right)(f) = (T_0 \varphi)(\partial_i|_0)(f) = \partial_i(f \circ \varphi)(0).$$

Also wirkt  $\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p$  auf  $f$  durch partielles Ableiten der Kartendarstellung  $f \circ \varphi$  von  $f$  in die  $i$ -te Richtung  $e_i$ . Ist  $\varphi$  nicht bei  $p$  zentriert, dann ist

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (f) = \partial_i^\varphi|_p(f) = \partial_i(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \text{ für } f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

und insbesondere ist

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (u^j) = \partial_i(u^j \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i(\text{pr}^j)(0) = \delta_i^j.$$

**20.9 Transformationsverhalten von Tangentialvektoren**

Sei nun  $g \in C^\infty(M, N)$  und seien  $\varphi^{-1} = u = (u^1, \dots, u^m)$  lokale Koordinaten von  $M$  bei  $p$ , ebenso seien  $\psi^{-1} = v = (v^1, \dots, v^n)$  lokale Koordinaten von  $N$  bei  $g(p)$ . Wir wissen, daß  $T_p g : T_p M \rightarrow T_{g(p)} N$  linear ist und  $(\frac{\partial}{\partial u^i} \big|_p)$  eine Basis von  $T_p M$  sowie  $(\frac{\partial}{\partial v^i} \big|_{f(p)})$  eine von  $T_{f(p)} N$  ist. Wie sieht nun die Matrixdarstellung  $[T_p g]$  von  $T_p g$  bezüglich dieser Basen aus?

Da nach Definition von  $T_p g$  und wegen (20.6) das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(\bar{g})'(0)} & \mathbb{R}^n \\
 & \Phi \downarrow \cong & & \Phi \downarrow \cong \\
 U & \xrightarrow{\bar{g}} & V & \\
 \varphi \downarrow & & \psi \downarrow & \\
 M & \xrightarrow{g} & N & \\
 & \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \xrightarrow{T_0 \bar{g}} & \text{Der}_0(C^\infty(V, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\
 & T_0 \varphi \downarrow \cong & & T_0 \psi \downarrow \cong \\
 & \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \xrightarrow{T_p g} & \text{Der}_{g(p)}(C^\infty(N, \mathbb{R}), \mathbb{R})
 \end{array}$$

werden die entsprechenden Basen wie folgt abgebildet:

$$\begin{array}{ccc}
 e_i & \xrightarrow{(\bar{g})'(0)} & \bar{g}'(0)(e_i) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot e_j \\
 \Phi \downarrow \cong & & \Phi \downarrow \cong \\
 \partial_i & \xrightarrow{T_0 \bar{g}} & (T_0 \bar{g})(\partial_i) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j \\
 T_0 \varphi \downarrow \cong & & T_0 \psi \downarrow \cong \\
 \partial_i^\varphi & \xrightarrow{T_p g} & (T_p g)(\partial_i^\varphi) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi
 \end{array}$$

Für die Komponenten von Tangentialvektoren erhalten wir also folgendes: Es sei  $\xi = \sum_i \xi^i \partial_i^\varphi \in T_p M$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
 (T_p g)(\xi) &= (T_p g)\left(\sum_i \xi^i \cdot \partial_i^\varphi\right) \\
 &= \sum_i \xi^i \cdot (T_p g)(\partial_i^\varphi) = \sum_i \xi^i \cdot \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi \\
 &= \sum_j \left(\sum_i \xi^i \cdot \partial_i \bar{g}^j(0)\right) \cdot \partial_j^\psi
 \end{aligned}$$

Die Komponenten von  $\eta = \sum_j \eta^j \partial_j^\psi := (T_p g)(\xi) \in T_{g(p)} N$  sind somit durch

$$\eta^j = \sum_i \xi^i \cdot \partial_i \bar{g}^j(0)$$

geben, bzw. in Matrizen-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{g}^1(0) & \dots & \partial_m \bar{g}^1(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \bar{g}^n(0) & \dots & \partial_m \bar{g}^n(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix},$$

also gerade durch Multiplikation mit der Jacobi-Matrix der Koordinatendarstellung  $\bar{g} = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$  von  $g$ .

Wählen wir insbesondere  $g = \text{id}_M$  und zwei Karten  $\varphi$  und  $\psi$  zentriert bei  $p \in M$ . Dann ist  $g$  der Kartenwechsel von den Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m) := \varphi^{-1}$  zu den Koordinaten  $(v^1, \dots, v^m) = \psi^{-1}$ . Wenn wir die Formel  $(T_p g)(\partial_i^\varphi) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi$  formal als Multiplikation von Matrizen auffassen, dann ist

$$\begin{pmatrix} \partial_1^\varphi \\ \vdots \\ \partial_m^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{g}^1(0) & \dots & \partial_1 \bar{g}^m(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_m \bar{g}^1(0) & \dots & \partial_m \bar{g}^m(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1^\psi \\ \vdots \\ \partial_m^\psi \end{pmatrix}$$

also erhalten wir die Basis  $(\partial_i^\varphi)$  aus der Basis  $(\partial_j^\psi)$  indem wir mit der transponierten Jacobimatrix des inversen Kartenwechsels von  $\varphi$  zu  $\psi$  multiplizieren.

Wenn wir nun  $\frac{\partial}{\partial u^i} := \partial_i^\varphi$ ,  $\frac{\partial}{\partial v^j} := \partial_j^\psi$  und  $\frac{\partial f}{\partial u^i} := \frac{\partial f}{\partial u^i}$  setzen und beachten, daß  $(\partial_i^\varphi)|_p(f) = \partial_i(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))$  ist und somit

$$\partial_i(\bar{g}^j)(0) = \partial_i((\psi^{-1} \circ g \circ \varphi)^j)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i(v^j \circ g \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i^\varphi(v^j \circ g)(p)$$

gilt, dann besagt obige Formel, daß

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_j \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial v^j}$$

bzw. in Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial v^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \dots & \frac{\partial u^m}{\partial v^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u^1}{\partial v^m} & \dots & \frac{\partial u^m}{\partial v^m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u^m} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial v^1}{\partial u^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v^m}{\partial u^1} & \dots & \frac{\partial v^m}{\partial u^m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix}.$$

### 20.10 Beispiel

Sei  $M = \mathbb{R}^3$ . Wir wählen 3 verschiedene Koordinatensysteme:

- (1) KARTESISCHEN KOORDINATEN  $x, y, z$  mit zugehörigen Basisvektoren:  $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ .
- (2) ZYLINDERKOORDINATEN  $r, \varphi, z$  mit zugehörigen Basisvektoren:  $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}$ .
- (3) KUGELKOORDINATEN  $R, \varphi, \psi$  mit zugehörigen Basisvektoren:  $\frac{\partial}{\partial R}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \psi}$ .

Für den Kartenwechsel und die Jacobimatrizen der Kartenwechsel erhalten wir für

(2)  $\rightarrow$  (1):  $x = r \cdot \cos \varphi, y = r \cdot \sin \varphi, z = z$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für (3)  $\rightarrow$  (2):  $r = R \cdot \cos \psi$ ,  $z = R \cdot \sin \psi$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \frac{\partial r}{\partial \psi} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \psi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \psi & 0 & -R \cdot \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \psi & 0 & R \cdot \cos \psi \end{pmatrix},$$

und schließlich für (1)  $\rightarrow$  (3):  $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ,  $\varphi = \arctan(y/x)$ ,  $\psi = \arccos(z/y)$ . Das Ausrechnen der Jacobimatrizen des Kartenwechsels überlassen wir dem Leser als Übung.

Es gibt auch die Möglichkeit, den Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit geometrischer zu beschreiben.

### 20.11 Lemma (Tangentialvektoren via Kurven).

Sei  $C_x^\infty(\mathbb{R}, M) := \{c \in C^\infty(\mathbb{R}, M) : c(0) = x\}$  die Menge der glatten Kurven durch  $x \in M$ . Für eine solche glatte Kurve  $c$  und eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $\partial_c(f) := (f \circ c)'(0)$ . Dann definiert  $c \mapsto \partial_c$  eine surjektive Abbildung

$$\partial : C_x^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}).$$

Wir können also  $T_x M$  mit  $C_x^\infty(\mathbb{R}, M) / \sim$  identifizieren, wobei  $\sim$  folgende Äquivalenzrelation auf  $C_x^\infty(\mathbb{R}, M)$  ist:

$$c_1 \sim c_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : (f \circ c_1)'(0) = (f \circ c_2)'(0).$$

Die Tangentialabbildung einer glatten Funktion  $g : M \rightarrow N$  sieht in dieser Beschreibung so aus:

$$(T_x g)(\partial_c) = \partial_{g \circ c}.$$

Dies entspricht also der Beschreibung von  $T_x M$  für Teilmannigfaltigkeiten des  $\mathbb{R}^n$  in (2) von (20.1). Sie hat allerdings den Nachteil, die Vektorraumstruktur von  $T_p M$  nicht erkennen zu lassen.

**Beweis.** Die folgende Rechnung zeigt, daß  $\partial_c$  eine Derivation über  $x$  ist:

$$\begin{aligned} \partial_c(f + g) &= \left( (f + g) \circ c \right)'(0) = \left( (f \circ c) + (g \circ c) \right)'(0) \\ &= (f \circ c)'(0) + (g \circ c)'(0) = \partial_c f + \partial_c g \\ \partial_c(\lambda f) &= \left( (\lambda f) \circ c \right)'(0) = \left( \lambda(f \circ c) \right)'(0) \\ &= \lambda(f \circ c)'(0) = \lambda \cdot \partial_c f \\ \partial_c(f \cdot g) &= \left( (f \cdot g) \circ c \right)'(0) = \left( (f \circ c) \cdot (g \circ c) \right)'(0) \\ &= (f \circ c)'(0) \cdot (g \circ c)(0) + (f \circ c)(0) \cdot (g \circ c)'(0) \\ &= (\partial_c f) \cdot g(x) + (\partial_c g) \cdot f(x) \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß die Zuordnung  $c \mapsto \partial_c$  surjektiv ist, wählen wir lokale Koordinaten  $\varphi^{-1} = (u^1, \dots, u^m)$  zentriert um  $x \in M$ . Jedes Element von  $T_x M = \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  hat dann die Gestalt  $\sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ . Wir definieren nun eine (lokale) Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  durch  $c(t) := \varphi(t\xi^1, \dots, t\xi^m)$ , d.h.  $u^i(c(t)) := t\xi^i$  für  $i = 1, \dots, m$ ,

dann gilt für  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ :

$$\begin{aligned} (f \circ c)'(0) &= \left( (f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ c) \right)'(0) = (f \circ \varphi)'(0) \left( (\varphi^{-1} \circ c)'(0) \right) \\ &= (f \circ \varphi)'(0)(\xi^1, \dots, \xi^m) = \sum_{i=1}^m \partial_i (f \circ \varphi)(0) \xi^i \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i} (f) \xi^i = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} (f). \end{aligned}$$

Somit ist  $\partial_c$  das vorgegebene Element von  $T_x M$ , mit dem einzigen Schönheitsfehler, daß  $c$  nur lokal definiert ist. Da aber obige Rechnung nur vom Aussehen von  $c$  nahe 0 abhängt, können wir  $c$  so umparametrisieren, daß sich nahe 0 nichts ändert, aber  $c(t)$  ganz in  $\text{Dom}(\varphi)$  bleibt.

Daß  $T_x g$  die angegebene Gestalt hat ergibt sich sofort aus:

$$\begin{aligned} \left( (T_x g)(\partial_c) \right) (f) &= \partial_c (f \circ g) = \left( (f \circ g) \circ c \right)'(0) \\ &= \left( f \circ (g \circ c) \right)'(0) = \partial_{g \circ c} (f). \quad \square \end{aligned}$$

Vor allem unter Physikern ist auch folgende Beschreibung des Tangentialraums üblich:

**20.12 Lemma (Tangentialvektoren via Koordinaten).** *Für jede lokale Parametrisierung  $\varphi$  von  $M$  zentriert um  $x$  seien die Koordinaten  $(\xi_\varphi^i)_{i=1}^m$  eines Vektors  $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$  so vorgegeben, daß sie sich richtig transformieren, d.h. für je zwei Karten  $\varphi_1$  und  $\varphi_2$  mit Kartenwechsel  $\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$  gelte  $\xi_{\varphi_2} = \psi'(0) \xi_{\varphi_1}$ , oder in Koordinaten  $\xi_{\varphi_2}^i = \sum_{j=1}^m \partial_j \psi^i(0) \xi_{\varphi_1}^j$ . Dann entspricht diesem Koordinaten-Schema ein eindeutiger Tangentialvektor in  $T_p M$  und umgekehrt.*

*Ist  $g : M \rightarrow N$  eine glatte Funktion, so bildet  $T_x f$  solch ein Schema  $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$  auf das Schema  $\eta_\psi \in \mathbb{R}^n$  ab, mit  $\eta_\psi = (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)'(0)(\xi_\varphi)$ .*

**Beweis.** Sei  $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$  für eine lokale Parametrisierung  $\varphi$  vorgegeben und seien  $(u^1, \dots, u^m) := \varphi^{-1}$  die zugehörigen lokalen Koordinaten. Dann definieren wir eine Derivation  $\partial_\xi \in T_x M$  durch  $\partial_\xi := \sum_{i=1}^m \xi_\varphi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ . Diese Definition macht Sinn, d.h. ist unabhängig von der Wahl der Karte  $\varphi$ , denn die  $\xi_\varphi$  transformieren sich genauso wie die Koeffizienten einer Derivation bezüglich der Basen  $(\frac{\partial}{\partial u^i})$ .

Umgekehrt bilden die Koeffizienten  $\xi_\varphi^i$  einer Derivation  $\partial \in T_x M$  bezüglich der zu  $\varphi = (u^1, \dots, u^m)^{-1}$  gehörenden Basis  $(\frac{\partial}{\partial u^i})$ , genau ein richtig transformierendes Koordinaten-Schema.

Daß  $T_x g$  diese Schemata auf angegebene Weise abbildet, folgt sofort aus der Koordinatendarstellung von  $T_x f$  bezüglich der Basen  $(\frac{\partial}{\partial u^i})$  und  $(\frac{\partial}{\partial v^j})$  von  $T_x M$  und  $T_{g(x)} N$ .  $\square$

## 21. Immersionen

Wir wollen in den verbleibenden Abschnitten dieses Kapitels die Tangentialabbildung verwenden, um spezielle Eigenschaften von glatten Abbildungen zu studieren. Insbesondere interessieren wir uns für den richtigen Begriff von “Unterobjekten” sowie “Quotientenobjekten” von Mannigfaltigkeiten.

### 21.1 Definition (Immersionen und Submersionen)

Es sei  $f \in C^\infty(M, N)$ , wo  $M, N$  Mannigfaltigkeiten sind. Dann heißt:

$f$  REGULÄR  $:\Leftrightarrow \text{rang}(T_x f)$  ist maximal, d.h.  $= \max\{\dim T_x M, \dim T_{f(x)} N\}$ ,  $\forall x \in M$ ;

$f$  IMMERSIV  $:\Leftrightarrow T_x f$  ist injektiv  $\forall x \in M$ ;

$f$  SUBMERSIV  $:\Leftrightarrow T_x f$  ist surjektiv  $\forall x \in M$ .

Man beachte, daß eine Abbildung genau dann immersiv ist, wenn sie regulär ist und  $\dim M \leq \dim N$  gilt. Ebenso ist sie genau dann submersiv, wenn sie regulär ist und  $\dim M \geq \dim N$  gilt.

**21.2 Rangsatz.** *Es sei  $f \in C^\infty(M, N)$  und sei  $\text{rang } T_x f = r \quad \forall x \in M$ .*

*Dann existiert eine Karte  $\varphi$  um  $x$  und eine Karte  $\psi$  um  $f(x)$ , sodaß die lokal definierte Abbildung:*

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

*die Gestalt  $(x, y) \mapsto (x, 0)$  hat.*

**Beweis.** O.B.d.A. sei  $M = \mathbb{R}^m$ ,  $N = \mathbb{R}^n$ ,  $x = 0$  und  $f(x) = 0$ . Die Idee des Beweises besteht darin, daß  $f$  lokal ungefähr wie die Ableitung  $f'(0)$  aussieht, und diese ist als lineare Abbildung vom Rang  $r$  bis auf Basiswechsel von der Form  $(x, y) \mapsto (x, 0)$ . Sei nämlich  $F_1 := \text{Bild}(f'(0))$ ,  $F_2 := F_1^\perp$ ,  $E_2 := \text{Ker}(f'(0))$  und  $E_1 := E_0^\perp$ . Es ist  $r = \text{rang } f'(0) = \dim(F_1)$  und somit  $\dim(E_1) := m - \dim(E_2) = \dim(F_1)$  und die Komponenten-Darstellung von  $f'(0) : E_1 \oplus E_2 \rightarrow F_1 \oplus F_2$  hat folgende Gestalt:

$$f'(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mit invertierbaren  $A \in L(E_1, F_1)$ . Wenn wir  $f = (f_1, f_2)$  schreiben, dann ist  $A = \partial_1 f_1(0, 0)$ .

Wir versuchen nun durch lokale Diffeomorphismen die Abbildung  $f$  auf die gewünschte Form zu bringen. Dazu betrachten wir zuerst eine leicht modifizierte Variante von  $f$  nämlich die durch  $\varphi^{-1} : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), x_2)$  gegebene glatte Abbildung  $\varphi^{-1} : E_1 \oplus E_2 \rightarrow F_1 \oplus E_2$  (die Bezeichnungsweise als Inverse werden wir gleich rechtfertigen). Die Jacobi-Matrix von  $\varphi^{-1}$  in 0 sieht wie folgt aus:

$$(\varphi^{-1})'(0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(0, 0) & 0 \\ \partial_1 f_2(0, 0) & \text{id} \end{pmatrix}.$$

Also ist  $(\varphi^{-1})'(0)$  invertierbar und wegen dem inversen Funktionen Satz (10.2) ist  $\varphi^{-1}$  ein lokaler Diffeomorphismus. Sei  $\varphi$  der zu  $\varphi^{-1}$  inverse lokale Diffeomorphismus und sei  $g := f \circ \varphi$ , dann hat  $g = (g_1, g_2)$  folgende Gestalt:

$$g(y_1, y_2) = (y_1, g_2(y_1, 0)).$$

Denn

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2) := \varphi(y_1, y_2) \Rightarrow \\ y &= (y_1, y_2) = \varphi^{-1}(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), x_2) \Rightarrow \\ y_1 &= f_1(x_1, x_2) = (f_1(\varphi(y_1, y_2))) = g_1(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Weiters gilt  $\text{Rang } g'(y) = \text{Rang } f'(\varphi(y)) = r$ , da  $\varphi$  ein lokaler Diffeomorphismus ist. Also ist in der Komponenten-Darstellung von  $g'(y)$

$$g'(y) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ \partial_1 g_2 & \partial_2 g_2 \end{pmatrix}$$

die rechte untere Ecke  $\partial_2 g_2 = 0$  und somit  $g_2(y_1, y_2) = g_2(y_1, 0)$ . Um nun die zweite Komponente von  $g$  zu 0 zu machen setzen wir mir der Abbildung  $\psi^{-1} : F_1 \oplus F_2 \rightarrow F_1 \oplus F_2$  (die Bezeichnungsweise als Inverse werden wir ebenfalls gleich rechtfertigen) definiert durch

$$\psi^{-1}(y_1, y_2) = (y_1, y_2 - g_2(y_1, 0))$$

zusammen. Die Komponenten-Darstellung von  $(\psi^{-1})'(x)$  ist gegeben durch

$$(\psi^{-1})'(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ \partial_1 g_2(y_1, 0) & \text{id} \end{pmatrix}$$

und somit ist  $\psi^{-1}$  ein lokaler Diffeomorphismus, also wirklich das Inverse eines  $\psi$ . Weiters gilt

$$\begin{aligned} (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(x_1, x_2) &= \psi^{-1}(y_1, g_2(x_1, 0)) \\ &= (x_1, g_2(x_1, 0) - g_2(x_1, 0)) = (x_1, 0) \quad \square \end{aligned}$$

**21.3 Folgerung (Charakterisierung von Diffeomorphismen).** Für glatte Abbildungen  $f$  gilt:

$$f \text{ ist Diffeomorphismus} \Leftrightarrow f \text{ und alle } T_x f \text{ sind bijektiv.}$$

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Die Abbildung  $f$  ist klarerweise bijektiv. Daß auch  $T_x f$  bijektiv ist, haben wir in (20.4) bereits gezeigt.

( $\Leftarrow$ ) Die Abbildung  $g := f^{-1}$  ist wohldefiniert und stetig, da  $f$  als lokaler Diffeomorphismus offen ist. Nach dem Rangsatz existieren also Karten  $\varphi$  und  $\psi$  um  $x$  bzw.  $f(x)$ , sodaß  $f(\text{Im}(\varphi)) \subseteq \text{Im}(\psi)$  und  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \text{id}$ . Es kann O.B.d.A. folglich  $\text{Dom } \psi = \text{Dom } \varphi$  gewählt werden.

$$\begin{array}{ccc} \text{Bild } \varphi & \xrightarrow{f} & \text{Bild } \psi \\ \cong \uparrow \varphi & & \psi \uparrow \cong \\ \mathbb{R}^m \hookrightarrow \text{Dom } \varphi & \xrightarrow{\text{id}} & \text{Dom } \psi \hookrightarrow \mathbb{R}^m \end{array}$$

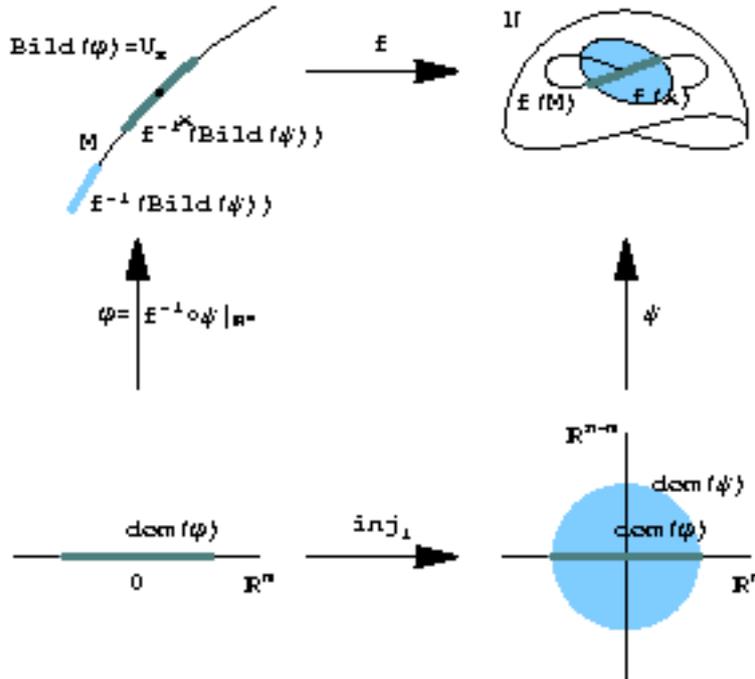
Somit ist  $z \mapsto f^{-1}(z) = (\varphi \circ \psi^{-1})(z)$  glatt auf Bild  $\psi$  und  $f$  ein Diffeomorphismus, da  $\psi^{-1}$  eingeschränkt auf Bild  $\varphi$  einer ist.  $\square$

Nach dem Rangsatz (21.2) sehen Immersionen bzgl. geeigneter Karten  $\varphi$  zentriert bei  $x \in M$  und  $\psi$  zentriert bei  $f(x) \in N$  mit  $f(\text{Bild } \varphi) \subseteq \text{Bild } \psi$  wie die Inklusion  $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$  aus, also ist  $f$  am Bild von  $\varphi$  injektiv und  $f(\text{Bild } \varphi) = \psi(\text{Bild } \text{incl}) =: \psi(\mathbb{R}^m)$ ,

und damit  $\varphi = f|_{\text{Bild } \varphi}^{-1} \circ f \circ \varphi = f|_{\text{Bild } \varphi}^{-1} \circ \psi \circ \text{incl} = f|_{\text{Bild } \varphi}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}$ . Dies zeigt mit  $U_x := \text{Bild } \varphi$  die Richtung ( $\Rightarrow$ ) von

**21.4 Proposition (Charakterisierung von Immersionen).**

Sei  $f \in C^\infty(M, N)$ , dann ist  $f$  immersiv  $\Leftrightarrow \forall x \in M \exists U_x$  offen in  $M$  und eine Karte  $\psi$  zentriert bei  $f(x)$  in  $N$ , sodaß  $f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow U_x$  ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte von  $M$ ) ist.



**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) habe wir eben gezeigt.

( $\Leftarrow$ ) Zu zeigen ist, daß  $T_x f$  injektiv ist. Die Kartendarstellung von  $f$  bezüglich der Karte  $f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}$  von  $M$  um  $x$  und der Karte  $\psi$  von  $N$  um  $f(x)$  ist aber gerade die immersive Inklusion  $\text{incl} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ , denn  $f \circ f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} = \psi|_{\mathbb{R}^m} = \psi \circ \text{incl}$  weil nach Voraussetzung  $f|_{U_x} : U_x \rightarrow \psi(\mathbb{R}^m)$  bijektiv ist.  $\square$

**21.5 Folgerung.** Es sei  $f \in C^\infty(M, N)$  eine Immersion und  $g : P \rightarrow M$  eine stetige Abbildung mit  $f \circ g \in C^\infty(P, N)$ .  
 $\Rightarrow g$  ist glatt.

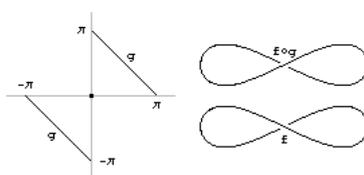
**Beweis.** Sei  $z \in P$  und  $\psi$  eine Karte um  $f(g(z))$  wie in (21.4) mit zugehöriger Umgebung  $U_x$  von  $x = g(z)$ . Die stetige Abbildung  $g$  hat lokal Werte im Bild der Karte  $\varphi := f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}$  und somit gilt:  $f \circ g \in C^\infty \Rightarrow \text{incl} \circ \varphi^{-1} \circ g = \psi^{-1} \circ f \circ g$  ist  $C^\infty$  lokal um  $x \Rightarrow \varphi^{-1} \circ g$  ist  $C^\infty$  lokal um  $x \Rightarrow g$  ist  $C^\infty$  lokal um  $x$ .  $\square$

### 21.6 Bemerkungen

(1) Dabei ist die Stetigkeit von  $g$  wesentlich: Sei nämlich  $g : ]-\pi, \pi[ \rightarrow ]-\pi, \pi[$ , definiert durch

$$g : t \mapsto \begin{cases} \pi - t & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \\ -\pi - t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

und  $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$  definiert durch  $f(t) := (\sin t, -\sin 2t)$



Dann ist  $f \circ g$  glatt, aber  $g$  ist nicht stetig, ergo auch nicht glatt.

(2) Eine Mannigfaltigkeit  $M$ , die Teilmenge einer Mannigfaltigkeit  $N$  ist, heißt IMMERSIVE TEILMANNIGFALTIGKEIT, falls die Inklusion  $\text{incl} : M \rightarrow N$  eine Immersion ist. Eine immersive Teilmannigfaltigkeit ist im allgemeinen keine Teilmannigfaltigkeit im Sinn von (21.12):  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  aus (21.6.1) ist eine injektive Immersion, aber  $f(\mathbb{R})$  ist keine Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^2$ . Die Umkehrung stimmt schon, siehe (21.11).

(3) Die Mannigfaltigkeitsstruktur einer immersiven Teilmannigfaltigkeit ist im allgemeinen nicht durch die von  $N$  festgelegt wie (1) zeigt.

### 21.7 Definition (Initiale und finale Abbildungen)

Sei  $f \in C^\infty(M, N)$ . Die Abbildung  $f$  heißt INITIAL  $:\Leftrightarrow$  für jede Abbildung  $g : P \rightarrow M$  mit der Eigenschaft, daß  $f \circ g$  glatt ist,  $g$  selbst glatt ist.

Die Abbildung  $f$  heißt FINAL  $:\Leftrightarrow$  für jedes  $g : N \rightarrow P$  mit der Eigenschaft, daß  $g \circ f$  glatt ist,  $g$  selbst glatt ist.

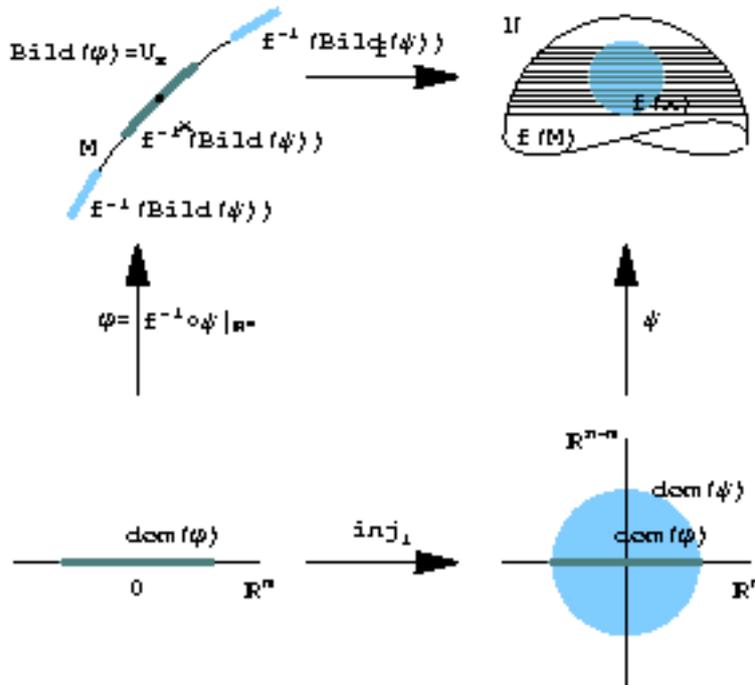
### 21.8 Satz (Charakterisierung initialer Immersionen).

Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt. Dann ist  $f$  eine initiale Immersion  $\Leftrightarrow$  für jedes  $x \in M$  existiert eine Karte  $\psi$  zentriert um  $f(x) \in N$ , sodaß

$$f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi))$$

ein wohldefinierter Diffeomorphismus ist.

Dabei sei  $C^\infty\text{-Wegkomp}_x(A) := \{c(1) : c \in C^\infty(\mathbb{R}, A) \text{ mit } c(0) = x\}$  für  $A \subseteq N$ .



**Beweis.** Man bemerke zuerst, daß

$$f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi))$$

genau dann eine wohldefinierte Bijektion ist, wenn  $f$  injektiv auf dem Urbild von  $\psi(\mathbb{R}^m)$  ist und  $\psi(\mathbb{R}^m) = C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi)$  gilt.

( $\Leftarrow$ ) Wir beweisen zuerst, daß  $f$  Immersion ist, dabei genügt es zu zeigen:

$$U_x := f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi)) \subseteq M \text{ ist offen}$$

(wegen der Charakterisierung von Immersionen).

Sei  $z \in f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi))$ . Wir zeigen, daß die offene Umgebung  $C^\infty\text{-Wegkomp}_z(f^{-1}(\text{Bild } \psi))$  in dieser Menge enthalten ist. Sei dazu  $y \in C^\infty\text{-Wegkomp}_z(f^{-1}(\text{Bild } \psi))$ , d.h. eine glatte Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow f^{-1}(\text{Bild } \psi)$  existiert mit  $c(0) = z$  und  $c(1) = y$ . Die Abbildung  $f \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \text{Bild } \psi \cap \text{Bild } f$  ist glatt, und es gilt

$$(f \circ c)(0) = f(z) \in C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi), \text{ also auch } f(y) = (f \circ c)(1).$$

Wir zeigen nun, daß  $f$  initial ist. Sei dazu  $g : P \rightarrow M$  sodaß  $f \circ g$  glatt ist. Dann ist wegen (21.5) nur die Stetigkeit von  $g$  zu zeigen. Sei dazu  $p \in P$  und  $\psi$  Karte um  $(f \circ g)(p)$  wie oben. Wir wählen eine  $C^\infty$ -wegzusammenhängende Umgebung  $U_p$  um

$p$  mit  $U_p \subseteq (f \circ g)^{-1}(\text{Bild } \psi)$ .

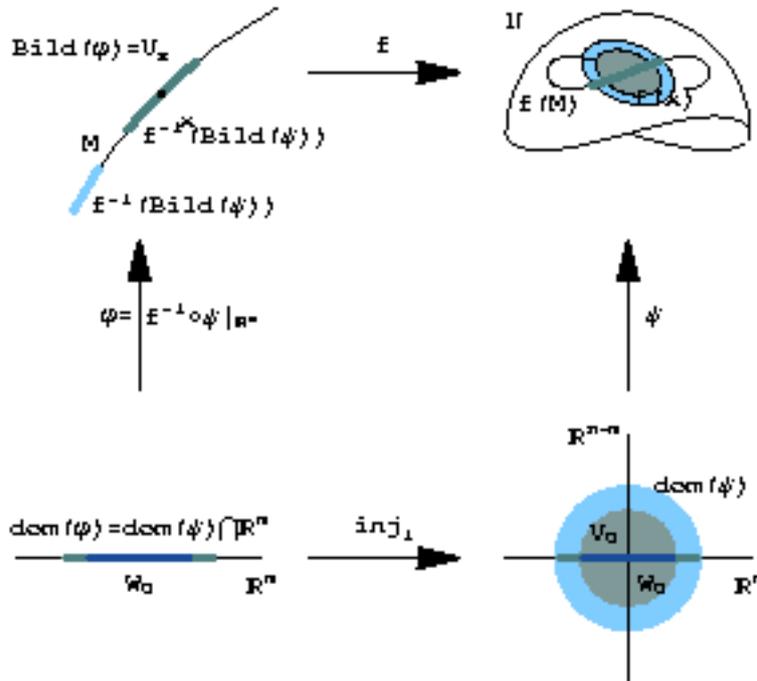
$$\begin{aligned} &\Rightarrow (f \circ g)(U_p) \subseteq \text{Bild } \psi \cap \text{Bild } f, \text{ } C^\infty\text{-wegzusammenhängend} \\ &\Rightarrow (f \circ g)(U_p) \subseteq C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(g(p))}(\text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi) \\ &\Rightarrow \psi^{-1} \circ f \circ g = \text{incl} \circ (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} \circ g \text{ ist stetig,} \\ &\text{also auch } (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} \circ g|_{U_p} \end{aligned}$$

und somit  $g|_{U_p}$ , da

$$g(U_p) \subseteq \text{Bild}(f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}) = f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(g(p))}(\text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi))$$

und  $f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}$  Homöomorphismen sind.

( $\Rightarrow$ ) Sei  $f$  eine Immersion. Dann existiert ein  $U_x \subseteq M$  offen und eine Karte  $\psi$  um  $f(x)$  mit der Eigenschaft für Immersionen, d.h.  $(f|_{U_x})^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow U_x$  ist ein Diffeomorphismus. Wir wollen  $U_x$  und  $\text{Bild } \psi$  so verkleinern, daß  $U_x = f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi))$  wird.



Wir wählen dazu eine offene  $C^\infty$ -wegzusammenhängende Umgebung  $U_0$  von  $x_0$  in  $M$ , welche  $U_0 \subseteq U_x$  erfüllt.

Sei  $W_0 := (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U_0) \subseteq \mathbb{R}^m$ . Dann ist  $W_0$  offen und sei  $V_0 \subseteq \text{Dom } \psi$  so gewählt, daß  $W_0 = V_0 \cap \mathbb{R}^m$ . Weil  $f$  injektiv ist, genügt es zu zeigen, daß

$$f(U_0) = C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap \psi(V_0)).$$

( $\subseteq$ ) Folgt unmittelbar aus  $f(U_0) \subseteq \text{Bild } f$  und  $f(U_0) = \psi(W_0) \subseteq \psi(V_0)$ , weil  $f(U_0)$   $C^\infty$ -wegzusammenhängend ist.

( $\supseteq$ ) Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow \text{Bild } f \cap \psi(V_0)$  und  $c(0) = f(x)$ ; dann ist zu zeigen:

$$c(1) \in f(U_0).$$

Wir definieren  $\bar{c} := (f|_{U_x})^{-1} \circ c : \mathbb{R} \rightarrow M$ . Da  $f$  eine initiale Immersion ist folgt, daß  $\bar{c}$  glatt ist. Es genügt zu zeigen:  $\bar{c}([0, 1]) \subseteq U_0$ . Angenommen:  $\bar{c}([0, 1]) \not\subseteq U_0$ . Wegen  $\bar{c}(0) = x$  kann  $t_0 > 0$  minimal gewählt werden, sodaß  $\bar{c}(t_0) \notin U_0$ , d.h. für  $t < t_0$  ist  $\bar{c}(t) \in U_0$  und damit  $\bar{c}(t_0) \in U_0^- \subseteq U_x$ . Somit ist  $((f|_{U_x})^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} \circ \bar{c}(t) \in (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U_0) = W_0$  für  $t < t_0$  aber nicht für  $t = t_0$ .

Andererseits gilt  $((f|_{U_x})^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(\bar{c}(t)) = \psi^{-1}(c(t)) \in V_0$  für alle  $t \leq t_0$  und damit ist  $((f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} \circ \bar{c})(t_0) \in V_0 \cap \mathbb{R}^m = W_0$ , ein Widerspruch.  $\square$

### 21.9 Bemerkungen

1. In dieser Situation (d.h. falls es eine initiale Immersion  $f : M \rightarrow N$  gibt) ist die Mannigfaltigkeitsstruktur auf  $M$  eindeutig durch jene auf  $N$  bestimmt: In der Tat seien zwei Mannigfaltigkeitsstrukturen auf der Menge  $M$  gegeben, s.d. eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  initial bzgl. beider Strukturen ist. Zwecks Unterscheidung bezeichnen wir mit  $M_1$  und  $M_2$  die Menge  $M$  mit der jeweiligen Mannigfaltigkeitsstruktur und betrachten die Identität  $\text{id} : M_1 \rightarrow M_2$ . Dann ist  $\text{id} \in C^\infty$ , denn  $f \circ \text{id} = f : M_1 \rightarrow N$  ist glatt und  $f : M_2 \rightarrow N$  initial. Genauso folgt auch  $\text{id}^{-1} : M_2 \rightarrow M_1$  ist glatt, also  $\text{id} : M_1 \rightarrow M_2$  ein Diffeomorphismus.
2. Eine Teilmenge  $M$  von  $N$  mit obiger Eigenschaft, d.h.  $\forall x \in M \exists \psi : C^\infty\text{-Wegkomp}_x(M \cap \text{Bild } \psi) = \psi(\mathbb{R}^m)$ , trägt eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur, sodaß  $\text{incl} : M \rightarrow N$  eine initiale Immersion wird, nämlich jene die als Atlas die Einschränkungen  $\psi|_{\mathbb{R}^m}$  dieser Karten hat. So eine Teilmenge mit dieser Mannigfaltigkeitsstruktur heißt INITIALE TEILMANNIGFALTIGKEIT.
3. Jede initiale  $C^\infty$ -Abbildung ist injektiv. Sei  $f$  initial,  $f(x) = f(y)$ ,  $x \neq y$ ;  $g(t) = x$  für  $t > 0$ ,  $g(t) = y$  sonst, so ist  $g$  nicht stetig, aber  $f \circ g$  ist konstant, also  $C^\infty \Rightarrow g$  ist  $C^\infty$  (Widerspruch)!
4. In [45] wurde bewiesen, daß  $f : t \rightarrow (t^2, t^3)$ ,  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  eine initiale  $C^\infty$ -Abbildung ist. Sie ist aber klarerweise nicht immersiv, da  $f'(0) = (0, 0)$ .
5. Ein wichtiges Beispiel einer initialen Teilmannigfaltigkeit ist eine nichtperiodische Spirallinie auf dem Torus  $S^1 \times S^1$  gegeben durch

$$f : t \mapsto (\exp(2\pi it), \exp(2\pi i\alpha t))$$

mit irrationalem Anstieg  $\alpha$ .

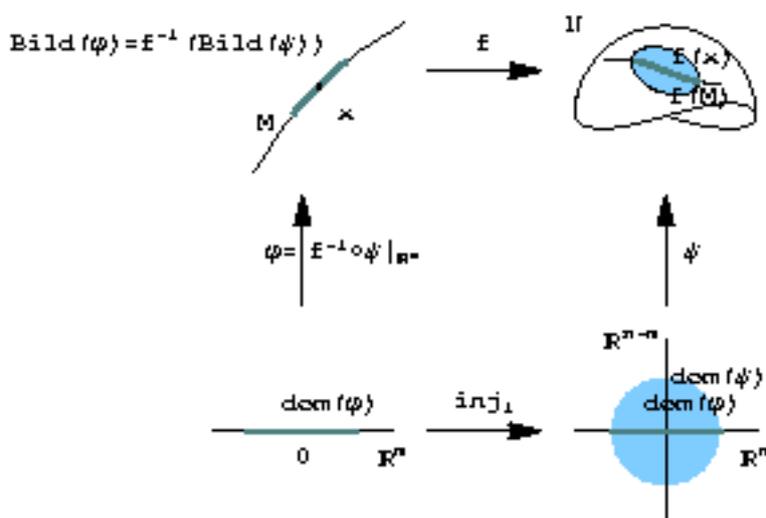
Hier zeigt sich, daß eine initiale Teilmannigfaltigkeit nicht die Spurtopologie tragen muß. Denn kein offene Intervall  $I \subset \mathbb{R}$  gibt es ein offenes  $U \subseteq S^1 \times S^1$ , sodaß  $I = f^{-1}(U)$  (äquivalent  $f(I) = U \cap \text{Bild}(f)$ ), da  $f(t)$  immer wieder in  $U$  liegt für  $t \rightarrow \pm\infty$ . Das motiviert die folgende restriktivere Definition.

**21.10 Definition (Einbettung)**

Es sei  $f : M \rightarrow N$  glatt, dann heißt  $f$  **EINBETTUNG**  $:\Leftrightarrow f$  ist injektive Immersion und  $f : M \rightarrow f(M)$  ist ein Homöomorphismus, dabei trage  $f(M)$  die Spurtopologie von  $N$ .

**21.11 Satz (Charakterisierung von Einbettungen).**

Ist  $f \in C^\infty(M, N)$ , dann ist  $f$  Einbettung  $\Leftrightarrow$  für jedes  $x \in M$  gibt es eine Karte  $\psi$  von  $N$  zentriert bei  $f(x)$ , sodaß  $f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow f^{-1}(\text{Bild } \psi)$  ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte) ist.



**Beweis.** Man bemerke zuerst, daß für ein injektives  $f$  die Zusammensetzung

$$f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow f^{-1}(\text{Bild } \psi)$$

genau dann eine wohldefinierte Bijektion ist, wenn  $\psi(\mathbb{R}^m) = \text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi = f(f^{-1}(\text{Bild } \psi))$ . Dann ist  $(f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} = \psi^{-1} \circ f$ .

( $\Leftarrow$ )  $f$  muß injektiv sein. Andernfalls sei  $\psi$  eine Karte um  $f(x_1) = f(x_2)$ , mit  $x_1 \neq x_2$ , dann sind  $x_1, x_2 \in f^{-1}(\text{Bild } \psi)$ , aber  $(\psi^{-1} \circ f)(x_1) = (\psi^{-1} \circ f)(x_2)$ , also ist  $\psi^{-1} \circ f$  nicht injektiv.

Weiters ist  $f$  immersiv nach (21.4).

Schließlich ist  $f$  ein Homöomorphismus aufs Bild: Sei  $U \subseteq M$  offen. Wir müssen zeigen:  $f(U) \subseteq f(M)$  ist offen bezüglich der Spurtopologie von  $N$  auf  $f(M)$ . O.B.d.A. sei  $U \subseteq f^{-1}(\text{Bild } \psi)$  für ein  $\psi$  mit obiger Eigenschaft. Dann ist

$$(f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U) \subseteq \mathbb{R}^m$$

offen, also existiert ein  $W \subseteq \text{Dom } \psi$  offen, mit

$$W \cap \mathbb{R}^m = (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U),$$

und es ist  $f(U) = \psi(W) \cap \text{Bild } f$ , also offen in der Spurtopologie, denn

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^m \cap \text{Dom } \psi &\rightarrow \text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi \text{ ist bijektiv} \Rightarrow \\ \Rightarrow \psi(W) \cap \text{Bild } f &= \psi(W \cap \mathbb{R}^m) = \psi((f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U)) = \\ &= (\psi \circ \psi^{-1} \circ f)(U) = f(U). \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$ ) Sei  $f$  eine Einbettung. Da  $f$  eine Immersion ist, existiert für  $x \in M$  ein  $U_x \subseteq M$  offen und eine Karte  $\psi$  um  $f(x)$ , sodaß

$$f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow U_x$$

ein wohldefinierter Diffeomorphismus ist. Da  $f$  ein Homöomorphismus auf das Bild ist, gibt es  $W \subseteq \text{Bild } \psi$  offen mit  $W \cap \text{Bild } f = f(U_x)$ . O.B.d.A. sei  $\text{Bild } \psi = W$ , dann ist  $U_x = f^{-1}(\text{Bild } \psi)$ , denn

$$U_x = (f^{-1} \circ f)(U_x) = f^{-1}(W \cap \text{Bild } \psi) = f^{-1}(\text{Bild } \psi). \quad \square$$

### 21.12 Definition (Teilmannigfaltigkeit)

Eine Teilmenge  $M$  einer Mannigfaltigkeit  $N$ , die selbst Mannigfaltigkeit ist und die obige Eigenschaft bezüglich der Inklusion  $\text{incl} : M \hookrightarrow N$  besitzt, heißt (REGULÄRE) TEILMANNIGFALTIGKEIT. Diese Definition stimmt für  $N = \mathbb{R}^n$  mit der in (10.1) gegebenen überein, denn eine Teilmenge  $M \subseteq N$  die für jeden Punkt  $x \in M$  eine Karte  $\psi$  von  $N$  zentriert bei  $x$  besitzt für welche  $M \cap \text{Bild } \psi = \psi(\mathbb{R}^m)$  gilt ist selbst eine Mannigfaltigkeit mit dem Atlas gebildet durch diese Einschränkungen  $\psi|_{\mathbb{R}^m}$  und die Inklusion  $\text{incl} : M \hookrightarrow N$  ist dann nach Konstruktion eine Einbettung.

Umgekehrt ist das Bild jeder Einbettung  $f$  offensichtlich eine reguläre Teilmannigfaltigkeit und die Einbettung ist ein Diffeomorphismus aufs Bild, denn sowohl  $f$  als auch  $\text{incl} : f(M) \hookrightarrow N$  sind initial, also  $f : M \rightarrow f(M)$  ein Diffeomorphismus.

### 21.13 Whitney'scher Einbettungssatz.

*Es sei  $M$  eine zusammenhängende  $\sigma$ -kompakte (und somit parakompakte)  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit der Dimension  $m$ , dann existiert eine Einbettung von  $M$  in einen endlichdimensionalen Vektorraum. Jede abstrakte Mannigfaltigkeit läßt sich also als Teilmannigfaltigkeit eines  $\mathbb{R}^n$  realisieren.*

Für elementare Beweise siehe z.B. [9, S.73] mit  $n > 2m$  oder [40, S.55] mit  $n = 2m+1$ .

**Beweis.** Sei  $\{\psi_i : 0 \leq i \leq m\}$  ein endlicher Atlas ((19.11)) und sei  $f_i$  eine zu  $\{\text{Bild } \psi_i\}$  gehörige Partition der Eins. Setzen  $f : M \rightarrow \prod_{i=0}^m (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$  durch

$$x \mapsto (f_i(x), f_i(x)\psi_i^{-1}(x))_{i=0}^m.$$

Diese Abbildung  $f$  ist dann glatt.

$f$  ist injektiv:

Angenommen  $f(x) = f(\bar{x})$ , dann gibt es ein  $i$ , sodaß  $f_i(x) > 0$ . Falls  $\bar{x}$  derart ist, daß  $f_i(\bar{x}) > 0$  so liegt  $x, \bar{x} \in \text{Bild } \psi_i$  und es ist  $f_i(x)\psi_i^{-1}(x) = f_i(\bar{x})\psi_i^{-1}(\bar{x})$ . Da  $f_i(x) > 0$  ist folgt  $\psi_i^{-1}(x) = \psi_i^{-1}(\bar{x})$  und schließlich  $x = \bar{x}$  wegen der Bijektivität von  $\psi_i$ .

$f$  besitzt eine lokale Linksinverse:  
Sei dazu

$$\begin{aligned} V_i &:= \{(t, y) : t_i > 0, \frac{1}{t_i} y_i \in \text{Dom } \psi_i\}, \\ g_i : V_i &\rightarrow M, \quad (t, y) \mapsto \psi_i(t_i^{-1} \cdot y_i) \\ U_i &:= f^{-1}(V_i) = \{x \in M : f_i(x) > 0\}. \end{aligned}$$

Dann ist  $g_i \circ f = \text{id}$  auf  $U_i$ , denn

$$U_i \ni x \mapsto g_i \circ f(x) = \psi_i \left( \frac{f_i(x) \psi_i^{-1}(x)}{f_i(x)} \right) = \psi_i(\psi_i^{-1}(x)) = x$$

$f$  ist Immersion:

$$T_x(g_i \circ f) = T_x(\text{id}) = T_{f(x)}g_i \circ T_x f$$

impliziert, daß  $T_x f$  injektiv ist und somit  $f$  eine Immersion ist.

$f$  ist ein Homöomorphismus aufs Bild:

Sei nämlich  $(x_n) \in M$  eine Folge mit  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Dann gilt  $(g_i \circ f)(x_n) \rightarrow (g_i \circ f)(x)$  für alle  $i$ . Da ein  $i$  existiert mit  $f_i(x) > 0$ , ist  $x \in U_i$  und ebenso fast alle  $x_n$ . Also gilt  $x_n = (g^{-1} \circ f)(x_n) \rightarrow (g^{-1} \circ f)(x) = x$ .  $\square$

### 21.14 Bemerkungen

- Es sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit, dann läßt sich  $M$  in  $\mathbb{R}^n$  einbetten, wobei
  - für  $n = 2m + 1$  der Beweis relativ einfach ist, siehe [40, S.55];
  - für  $n = 2m$  stammt er von [91].
 Vermutung: Das minimale  $n = 2m - \alpha(m) + 1$ , wobei  $\alpha(m)$  die Anzahl der Einsen in der Dualentwicklung von  $m$  ist.  
Welches  $n$  ist nötig für Immersion?
  - für  $n = 2m$  ist der Beweis relativ einfach, siehe [40, S.24]
  - für  $n = 2m - 1$  stammt er von [91] Vermutung: Das minimale  $n = 2m - \alpha(m)$  um Immersionen zu erhalten. Diese Vermutung konnte schließlich bewiesen werden! Auf kompakten Mannigfaltigkeiten von [15] und allgemein von [10].
- Der Rang-Satz liefert uns auf einfachste Weise weitere reguläre Teilmannigfaltigkeiten:  
Sei  $f \in C^\infty(M, N)$ . Dann gilt  $\text{rang}(T_x f) = r \quad \forall x \in M \Rightarrow f^{-1}(y)$  ist reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $M$ .  
Bew.: Dies ist lokale Eigenschaft, wir können also o.B.d.A. annehmen, daß  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  offen, dann folgt aus (21.2), daß  $f$  lokal wie  $(x, y) \mapsto (x, 0)$  aussieht und das Urbild  $f^{-1}(0)$  somit wie  $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-r}$ .

**21.15 Folgerung (Retrakte sind Mannigfaltigkeiten).** Sei  $f \in C^\infty(M, M)$ , sodaß  $f \circ f = f$ . Dann ist  $A := f(M)$  reguläre Teilmannigfaltigkeit. D.h. glatte Retrakte von Mannigfaltigkeiten sind wieder Mannigfaltigkeiten.

**Beweis.** Man beachte, daß  $x \in A := f(M)$  genau dann wenn  $f(x) = x$  gilt: Denn  $x = f(y) \Rightarrow f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$ , und umgekehrt  $x = f(x) \in f(M)$ .

Sei  $x_0 \in M$  und  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$  eine um  $x_0$  zentrierte Karte. Für alle  $y$  in der Umgebung  $V := f^{-1}(\varphi(U)) \cap \varphi(U)$  gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(M) &\Leftrightarrow f(y) = y \\ &\Leftrightarrow (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)^{-1}(\varphi(y)) = (\varphi^{-1} \circ f)(y) = \varphi^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow (\text{id} - \tilde{f})(\varphi^{-1}(y)) = 0, \end{aligned}$$

wobei  $\tilde{f} := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \supseteq \varphi^{-1}(V) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ .

Für  $z$  nahe 0 gilt:

$$\begin{aligned} (\tilde{f} \circ \tilde{f})(z) &= (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(z) = \\ &= (\varphi^{-1} \circ f^2 \circ \varphi)(z) = (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(z) = \tilde{f}(z), \end{aligned}$$

d.h. o.B.d.A. sei  $0 \in U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  erfülle  $f(0) = 0$  und  $f \circ f = f$  lokal um 0, und wir haben zu zeigen, daß  $\text{id} - f$  eine reguläre Gleichung lokal um 0 ist.

Es ist  $\text{rang } T_z(\text{id} - f) \geq \text{rang } T_0(\text{id} - f) =: r$ . Aus  $f \circ (\text{id} - f) = 0$  folgt  $T_{(\text{id} - f)(z)} f \circ (\text{id} - T_z f) = 0$  und somit  $\text{Bild}(\text{id} - T_z f) \subseteq \text{Ker}(T_{(\text{id} - f)(z)} f)$ . Also ist lokal

$$\begin{aligned} \text{rang}(T_z(\text{id} - f)) &\leq \dim \text{Ker}(T_{(\text{id} - f)(z)} f) = m - \dim \text{Bild}(T_{(\text{id} - f)(z)} f) \leq \\ &\leq m - \dim \text{Bild}(T_0 f) = \dim \text{Bild}(\text{id} - T_0 f) = r, \end{aligned}$$

wobei wir für die lineare Projektion  $T_0 f$  die offensichtliche Gleichung  $T_0 \mathbb{R}^m = \text{Bild}(T_0 f) \oplus \text{Bild}(\text{id} - T_0 f)$  verwendet haben.  $\square$

### 21.16 Bemerkung

Man kann umgekehrt zeigen, daß jede Teilmannigfaltigkeit  $M$  einer Mannigfaltigkeit  $N$  das Retrakt einer offenen Menge in  $N$  ist. Siehe [40, S.110]. Zusammen mit dem Einbettungssatz besagt das, daß zusammenhängende  $\sigma$ -kompakte Mannigfaltigkeiten - bis auf Diffeomorphismen - genau die Retrakte offener Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume sind.

Für  $f \in C^\infty(M, N)$  sei der Graph von  $f$  definiert als

$$\text{Graph}(f) := \{(x, f(x)) : x \in M\} \subseteq M \times N.$$

Dann ist  $\text{Graph}(f)$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit. Der Beweis bleibt als Übung. Hinweis:  $\text{Graph}(f) \cong M$

**21.17 Satz von Sard.** Die Menge der kritischen Werte einer glatten Abbildung zwischen  $\sigma$ -kompakten Mannigfaltigkeiten hat Lebesgue-Maß 0.

Siehe auch [9, S.58] und [40, p.68].

Dieses Resultat gilt auch noch, wenn  $f \in C^r(M, N)$  mit  $r > \dim M - \dim N$  ist. In [91, A function not constant on a connected set of critical points, Duke Math. J. 1(1935) 514-517] wurde eine  $C^1$ -Abbildung  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  konstruiert, die auf einem Bogen  $I$  kritisch, aber nicht konstant ist. Der Graph von  $f$  ist also eine Fläche  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ , auf welcher ein Bogen  $f(I)$  liegt, sodaß die Tangentialebene an  $S$  in jeden Punkt horizontal ist, aber dennoch hat  $f(I)$  nicht konstante Höhe.

**Definition.** Dabei heißt für eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  ein Punkt  $x \in M$  KRITISCH, falls  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  nicht maximalen Rang hat. Ein Punkt  $y \in N$  heißt KRITISCHER WERT, falls ein kritischer Punkt  $x \in f^{-1}(y)$  existiert. Manchmal wir für kritische Punkte nur verlangt, daß  $T_x f$  nicht surjektiv ist. Zumindestens für den Satz von Sard macht das aber keinen Unterschied, denn nur im Fall  $\dim M < \dim N$  erhalten wir mehr kritische Werte (nämlich alle im Bild). Diese bilden aber nach der Folgerung in (21.18) ebenfalls eine Lebesgue-Null-Menge.

Eine Menge  $N \subseteq \mathbb{R}^n$  heißt LEBESGUE-NULL-MENGE, falls für jedes  $\varepsilon > 0$  eine Folge von Würfeln ( oder Quadern oder Kugeln)  $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$  existiert mit  $N \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$  und  $\sum_{k \in \mathbb{N}} |Q_k| < \varepsilon$ .

Eine Teilmenge  $N \subseteq M$  einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit  $M$  heißt LEBESGUE-NULL-MENGE, wenn daß Urbild unter jeder Karte eine Lebesgue-Null-Menge ist.

**21.18 Lemma.** *Es sei  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $N \subseteq U$  eine Lebesgue-Null-Menge. Weiters sei  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  eine  $C^1$ -Abbildung. Dann ist auch  $f(N)$  eine Lebesgue-Null-Menge.*

**Beweis.** Da  $U$  die Vereinigung abzählbar vieler kompakter konvexer Mengen ist (z.B. der Kugeln mit rationalen Mittelpunkts-Koordinaten und rationalem Radius, die in  $U$  enthalten sind), und weil die abzählbare Vereinigung von Lebesgue-Null-Mengen wieder eine Lebesgue-Null-Menge ist, dürfen wir annehmen, daß  $N$  in einer kompakten konvexen Teilmenge von  $U$  enthalten ist. Weiters können wir auch annehmen, daß die Würfel einer Überdeckung von  $N$  ebenfalls in einer (etwas größeren) kompakten konvexen Teilmenge  $K \subseteq U$  enthalten sind.

Da  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$   $C^1$  ist, ist  $\kappa := \sup\{\|f'(x)\| : x \in K\} := \|f'|_K\|_\infty < \infty$ . Sei  $Q$  ein Quader in  $K$  mit Seitenlänge  $a$ . Dann ist nach dem Hauptsatz

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_0)| &= \left| \int_0^1 f'(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) dt \right| \\ &\leq \kappa \cdot |x_1 - x_0| \leq \kappa a \sqrt{m}. \end{aligned}$$

für alle  $x_1, x_0 \in Q$ . Also ist  $f(Q)$  enthalten in einem Quader mit Seitenlänge  $2\kappa a \sqrt{m}$  und Volumen  $(2\kappa a \sqrt{m})^m = (2\kappa \sqrt{m})^m |Q|$ . Das Bild einer abzählbaren Überdeckung mit Quadern von Gesamt-Volumen kleiner als  $\delta = \frac{1}{(2\kappa \sqrt{m})^m} \varepsilon > 0$  ist also in einer Überdeckung mit Quadern von Gesamt-Volumen kleiner als  $(2\kappa \sqrt{m})^m \cdot \delta = \varepsilon$  enthalten.  $\square$

Es ist also eine Teilmenge  $N \subseteq M$  einer Mannigfaltigkeit genau dann eine Lebesgue-Null-Menge, wenn die Urbilder unter den Karten eines festen Atlases Lebesgue-Null-Mengen sind.

**Folgerung.** *Es sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$   $C^1$  und  $n < m$ , dann ist  $f(\mathbb{R}^n)$  eine Lebesgue-Null-Menge.*  $\square$

Wir benötigen noch den

**21.19 Satz von Fubini.** *Es sei  $N \subseteq \mathbb{R}^m$  kompakt und  $N \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{m-1})$  eine Lebesgue-Null-Menge für alle  $t \in \mathbb{R}$ . Dann ist  $N$  eine Lebesgue-Null-Menge in  $\mathbb{R}^m$ .*

Für einen Beweis siehe [9, S.59].

**Beweis des Satzes von Sard (21.17).** Es genügt den Fall  $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$  zu betrachten. Sei  $D$  die Menge der kritischen Punkte. Wir machen Induktion nach  $m$ . Für  $m = 0$  ist der Satz trivial. Sei

$$D_k := \{x \in U : \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) = 0 \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}.$$

Die  $D_k$  sind abgeschlossen und erfüllen  $D \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots$

Es ist  $f(D \setminus D_1)$  eine Lebesgue-Null-Menge:

Sei dazu  $x \in D \setminus D_1$ . OBdA. ist  $\frac{\partial}{\partial x^1} f_1(x) \neq 0$ . Dann ist  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m, (x^1, \dots, x^n) \mapsto (f_1(x), x^2, \dots, x^n)$  ein Diffeomorphismus und  $g := f \circ h^{-1}$  hat die Gestalt

$$\begin{aligned} g : (f_1(x), x^2, \dots) &\mapsto (x^1, \dots, x^n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \\ g : (z^1, \dots, z^m) &\mapsto (z^1, g^2(z), \dots, g^m(z)). \end{aligned}$$

Die Hyperebene  $H_t := \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1}$  bleibt invariant, und die Einschränkung  $g_t(x) = (g^2(t, x), \dots, g^n(t, x))$  hat  $x$  als kritischen Punkt genau dann, wenn  $(t, x)$  ein kritischer Punkt von  $g$  ist. Nach Induktionsvoraussetzung, sind die kritischen Werte von  $g_t$  eine Lebesgue-Null-Menge, und nach dem Satz von Fubini auch jene von  $g$ . Und damit auch jene von  $f = g \circ h$ , da  $h$  ein Diffeomorphismus ist.

Es ist auch  $f(D_k \setminus D_{k+1})$  eine Lebesgue-Null-Menge:

Sei  $x \in D_k \setminus D_{k+1}$ . OBdA. ist  $\frac{\partial^{k+1} f_1}{\partial x^1 \partial x^{m_1} \dots \partial x^{m_k}}(x) \neq 0$  und sei  $w := \frac{\partial^k f_1}{\partial x^{m_1} \dots \partial x^{m_k}}$ . Dann ist  $w|_{D_k} = 0$  und  $\frac{\partial w}{\partial x^1}(x) \neq 0$ . Es sei  $h(x) := (w(x), x_2, \dots, x_m)$ . Dann ist  $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  ein Diffeomorphismus und  $h(D_k \cap U) \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$ . Wir betrachten die Abbildung  $g := f \circ h^{-1}$  und ihre Einschränkung  $g_0 : \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Die kritischen Werte von  $g_0$  sind nach Induktions-Voraussetzung eine Lebesgue-Null-Menge und jeder Punkt aus  $h(D_k \cap U)$  ist kritisch für  $g_0$ , weil alle partiellen Ableitungen von  $g$  der Ordnung  $\leq k$  und insbesondere die der Ordnung 1 von  $g_0$  verschwinden. Also ist  $f(D_k \cap U) = g_0(h(D_k \cap U))$  eine Lebesgue-Null-Menge.

Für  $k > \frac{m}{n} - 1$  ist  $f(D_k)$  eine Lebesgue-Null-Menge:

Es sei  $Q$  ein Würfel der Seitenlänge  $a$ . Aus der Taylor-Formel erhalten wir  $|f(x+h) - f(x)| \leq \tau |h|^{k+1}$  für alle  $x \in D_k \cap Q$ . Wir zerlegen  $Q$  in  $r^m$  Würfel der Seitenlänge  $\frac{a}{r}$ . Sei  $Q'$  solch ein Würfel, der einen Punkt  $x \in D_k$  enthält. Dann ist jeder Punkt in  $Q'$  von der Form  $x+h$  mit  $|h| \leq \frac{\sqrt{n}a}{r}$  und somit ist  $f(Q')$  enthalten in einem Würfel der Kantenlänge  $2\tau \left(\frac{\sqrt{n}a}{r}\right)^{k+1} =: \frac{b}{r^{k+1}}$ . Alle Würfel zusammen haben Gesamtvolumen höchstens  $r^m \frac{b^n}{r^{n(k+1)}}$  und für  $n(k+1) > m$  konvergiert dieser Ausdruck gegen Null für  $r \rightarrow \infty$ .  $\square$

### 21.20 Definition (Transversale Abbildungen)

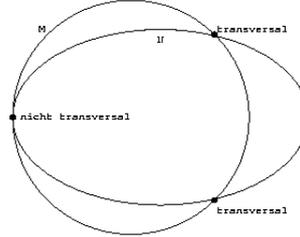
Es seien  $M, N$  Mannigfaltigkeiten,  $A \subseteq N$  eine Teilmannigfaltigkeit. Eine Abbildung  $f : M \rightarrow N$  heißt TRANSVERSAL zu  $A$ , falls

$$T_x f(T_x M) + T_{f(x)} A = T_{f(x)} N \quad \forall x \in M \text{ mit } f(x) \in A$$

gilt.

### 21.21 Beispiel

Sei  $A := S^1$  in  $N := \mathbb{R}^2$  und  $M := \mathbb{R}$  sowie  $f : M \rightarrow N$  wie im folgenden Bild.



Es ist aber nicht gefordert, daß die Summe “direkt” ist; Z.B. ist die Identität  $f : M := N \rightarrow N$  transversal zu jeder Teilmannigfaltigkeit  $A \subseteq N$  aber im allgemeinen ist  $\text{Bild}(T_x f) \cap T_{f(x)} A \neq \{0\}$ .

**21.22 Satz (Urbilder von Teilmannigfaltigkeiten).** *Es sei  $f \in C^\infty(M, N)$  und  $K$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit  $N$ . Ist  $f$  transversal zu  $K$ , so ist  $f^{-1}(K)$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $M$ .*

Insbesondere wenn  $f$  die Inklusion einer zweiten Teilmannigfaltigkeit  $M$  von  $N$  ist, dann ist unter der Transversalitätsbedingung  $T_x M + T_x K = T_x N$  für  $x \in K \cap M$  der Durchschnitt  $K \cap M$  selbst eine Teilmannigfaltigkeit.

**Beweis.** Sei  $x \in f^{-1}(K)$  und  $\psi$  eine Karte zentriert bei  $f(x)$ , die  $K$  trivialisiert. Dann gilt für  $x'$  nahe  $x$ :

$$x' \in f^{-1}(K) \Leftrightarrow f(x') \in K \Leftrightarrow \psi^{-1}(f(x')) \in \mathbb{R}^k \Leftrightarrow (\text{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f)(x') = 0.$$

Wir können somit (10.4) anwenden, um  $f^{-1}(K)$  als Teilmannigfaltigkeit von  $M$  zu erkennen, wenn wir zeigen, daß die lokale Gleichung  $\text{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f$  regulär ist. Es ist  $T_x(\text{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f) = \text{pr}_{n-k} \circ (T_0 \psi)^{-1} \circ T_x f$ , und da wegen der Transversalität  $T_{f(x)} N = \text{Bild}(T_x f) + T_{f(x)} K = \text{Bild}(T_x f) + \text{Bild}(T_0 \psi)(\mathbb{R}^k)$  ist, ist  $T_x(\text{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f)$  surjektiv, denn für  $w \in \mathbb{R}^{n-k}$  sei  $T_0 \psi(w) = T_x f(v) + k$  mit  $v \in T_x M$  und  $k \in T_{f(x)}(K)$  und somit ist

$$\begin{aligned} T_x(\text{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f)(v) &= \text{pr}_{n-k}((T_0 \psi)^{-1}(T_x f(v))) \\ &= \text{pr}_{n-k}(w - (T_0 \psi)^{-1}(k)) = w, \end{aligned}$$

da  $(T_0 \psi)^{-1}(T_{f(x)} K) = \mathbb{R}^k$ . □

In (24.46) wird ein Beispiel gegeben, das zeigt, daß dieser Satz “stärker” ist als (2) in (21.14).

### 21.23 Folgerung (Pull-back von Mannigfaltigkeiten).

Sei  $f_i \in C^\infty(M_i, N)$ , ( $i = 1, 2$ ); und  $f_1$  transversal zu  $f_2$ , (d.h.  $f_1(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow \text{Bild } T_{x_1} f_1 + \text{Bild } T_{x_2} f_2 = T_y N$ ). Dann ist das PULL-BACK

$$\{(x_1, x_2) : f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$$

eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $M_1 \times M_2$ .

**Beweis.** Die Abbildung  $f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow N \times N$  ist glatt.  $K := \{(x, x) : x \in N\}$  ist reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $N \times N$ , da  $K$  etwa als Graph von  $\text{id} : N \rightarrow N$

aufgefaßt werden kann. Gelingt es uns zu zeigen, daß  $f_1 \times f_2$  transversal zu  $K$  ist,

$$\begin{aligned} \text{d.h. } (f_1(x_1), f_2(x_2)) = (y, y) \in K &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Bild } T_{(x_1, x_2)}(f_1, f_2) + T_{(y, y)}K = T_{(y, y)}(N \times N), \end{aligned}$$

so sind wir nach dem vorigen Satz fertig. Die zweite Bedingung wollen wir zur besseren Handhabung erst noch etwas umformen:

$$\text{Bild } T_{x_1}f_1 \times \text{Bild } T_{x_2}f_2 + T_{(y, y)}K = T_yN \times T_yN.$$

Sei  $(w_1, w_2) \in T_yN \times T_yN$ , dann ist  $(w_1 - w_2) \in T_yN$ , und da  $f_1$  transversal zu  $f_2$  ist, existieren  $v_1, v_2$  mit  $w_1 - w_2 = T_{x_1}f_1(v_1) + T_{x_2}f_2(v_2)$ . Nun geben wir einfach an, wie das Paar  $(w_1, w_2)$  in der gewünschten Weise dargestellt wird:

$$(T_{x_1}f_1, T_{x_2}f_2)(v_1, -v_2) + (T_{x_2}f_2(v_2) + w_2, T_{x_2}f_2(v_2) + w_2) = (w_1, w_2). \quad \square$$

Um die Bedeutung des Begriffs “transversal” zu unterstreichen, sei noch folgendes Theorem ohne Beweis angegeben:

**21.24 Transversalitätssatz.** *Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt und  $K \subseteq N$  eine reguläre Teilmannigfaltigkeit. Dann existiert “beliebig nahe” an  $f$  eine Abbildung  $g : M \rightarrow N$ , die transversal zu  $K$  ist.*

(“Beliebig nahe” heißt dabei “in jeder Umgebung von  $f$ ”. Wobei die Umgebungen der zugrundeliegenden Topologie wie folgt beschrieben werden können: Sei  $\{\varphi_i\}$  ein Atlas von  $M$ ,  $\{K_i\}$  eine Überdeckung mit kompakten Mengen  $K_i \subseteq \text{Bild}(\varphi_i)$ ,  $\psi_i$  eine Familie von Karten auf  $N$  mit  $f(K_i) \subseteq \text{Bild}(\psi_i)$ , zuletzt seien noch  $\delta_i > 0$  und  $r \in \mathbb{N}$  gegeben. Eine Umgebung von  $f$  hat dann die Gestalt:

$$\begin{aligned} \{g : g(K_i) \subseteq \text{Bild}(\psi_i) \text{ und } |(\psi_i^{-1} \circ g \circ \varphi_i)^{(k)}(x) - (\psi_i^{-1} \circ f \circ \varphi_i)^{(k)}(x)| < \delta_i \\ \text{für } k \leq r \text{ und } x \in K_i\}. \end{aligned}$$

Für einen Beweis siehe [40, S.74] oder [9, S.158].

Nach der Diskussion von Immersionen und initialen Abbildungen nun zu den dualen Begriffen:

## 22. Submersionen

### 22.1 Proposition (Charakterisierung von Submersionen).

Sei  $f \in C^\infty(M, N)$ , dann gilt

$$f \text{ Submersion} \Leftrightarrow f \text{ besitzt lokale Schnitte.}$$

(D.h.  $\forall x \in M \exists U_{f(x)} \subseteq N \exists g^x \in C^\infty(U_{f(x)}, M) : g^x(f(x)) = x$  und  $f \circ g^x = \text{id}$  auf  $U_{f(x)}$ , also dort, wo  $g^x$  definiert ist. Lokal gibt es also ein Rechtsinverses.)

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) Seien  $U_{f(x)}$  und  $g^x$  wie vorausgesetzt, dann gilt:

$$T_{f(x)} \text{id} = \text{id}_{T_{f(x)}N} = T_{f(x)}(f \circ g^x) = T_x f \circ T_{f(x)}g^x \Rightarrow T_x f \text{ ist surjektiv.}$$

( $\Rightarrow$ ) Nach dem Rangsatz existieren Karten  $\varphi$  um  $x$ ,  $\psi$  um  $f(x)$ , sodaß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Bild } \varphi & \xrightarrow{f} & \text{Bild } \psi \\ & \uparrow \varphi & & \uparrow \psi \\ \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \cong \mathbb{R}^m \supseteq & \text{Dom } \varphi & \xrightarrow{\text{pr}_1} & \text{Dom } \psi \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

Dabei ist  $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  die Projektion. Setzen wir jetzt:  $U_{f(x)} := \text{Bild}(\psi)$  und  $g^x := \varphi \circ \text{incl} \circ \psi^{-1}$ , dann ist  $g^x$  glatt mit  $g^x(f(x)) = x$ . Bleibt also noch folgendes nachzurechnen:

$$f \circ g^x = f \circ \varphi \circ \text{incl} \circ \psi^{-1} = \psi \circ \text{pr} \circ \text{incl} \circ \psi^{-1} = \text{id}_{U_{f(x)}}. \quad \square$$

**22.2 Folgerung (Submersionen sind offen und final).** *Jede Submersion  $f : M \rightarrow N$  ist eine offene Abbildung. Jede surjektive Submersion  $f$  ist zusätzlich final.*

**Beweis.** - $f$  ist offen: Sei  $U \subseteq M$  offen,  $x \in U$ ,  $y = f(x) \Rightarrow \exists U_y, g^x$  mit  $g^x(y) = x$  und  $f \circ g^x = \text{id}$ . O.B.d.A. sei  $(g^x)^{-1}(U) \supseteq U_y \Rightarrow f(U) \supseteq (f \circ g^x)(U_y) = U_y \Rightarrow f(U)$  ist offen.

- $f$  ist final: Sei  $g : N \rightarrow P$ , sodaß  $g \circ f$  glatt ist. Da  $f$  surjektiv ist, gibt es zu  $y \in N$  ein  $x \in M$  mit  $f(x) = y$ , dazu haben wir noch  $U_y$  und das glatte  $g^x : U_y \rightarrow M$  zur Verfügung, sodaß

$$f \circ g^x = \text{id}_{U_y} \Rightarrow g|_{U_y} = g \circ f \circ g^x$$

glatt ist, also auch  $g$ . □

### 23. Faserbündel

Eine stärkere Eigenschaft als Submersivität werden wir jetzt kennenlernen:

#### 23.1 Definition (Faserbündel)

Eine glatte Abbildung  $p : P \rightarrow M$  heißt FASERBÜNDEL  $:\Leftrightarrow p$  ist lokal trivial, d.h.  $\forall y \in M$  existiert eine offene Umgebung  $U \subset M$  und eine TRIVIALISIERUNG  $\psi$  von  $p$  über  $U$ , d.h. eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $F$  sowie ein Diffeomorphismus  $\psi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$ , sodaß folgendes Diagramm kommutiert:

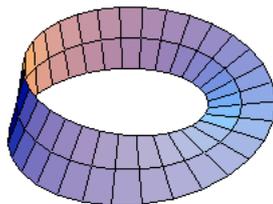
$$\begin{array}{ccccc} U \times F & \xrightarrow[\cong]{\psi} & p^{-1}(U) & \hookrightarrow & P \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow p & & \swarrow p \\ & & U & \hookrightarrow & M \end{array}$$

dabei heißt  $F$  TYPISCHE FASER (Auf Zusammenhangskomponenten von  $M$  sind alle Fasern diffeomorph).

Ein Faserbündel  $p$  ist eine ÜBERLAGERUNG  $:\Leftrightarrow$  die typische Faser  $F$  von  $p$  ist diskret. Dies ist die glatte Version von der Definition, die wir in (3.5) gegeben haben.

### 23.2 Beispiele von Faserbündeln

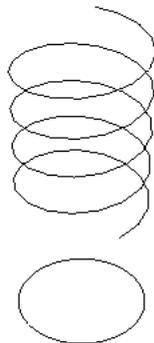
1. Für zwei Mannigfaltigkeiten  $M$  und  $N$  ist  $\text{pr}_1 : M \times F \rightarrow M, (x, y) \mapsto x$  ein Faserbündel mit typischer Faser  $F$ . So geartete Faserbündel heißen GLOBAL TRIVIAL (oder kurz trivial).
2. Die Projektion  $\text{Möb} \rightarrow S^1$  des Möbiusbandes auf die Mittellinie ist ein Faserbündel mit typischer Faser  $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$ .



3. Die Hopffaserung:  $S^3 \rightarrow \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^1 \cong S^2$  ist Faserbündel mit typischer Faser  $S^1$ , siehe (11.7).

Beispiele von Überlagerungen sind:

4. Die Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow S^1$  gegeben durch  $t \mapsto (\cos t, \sin t)$  ist eine abzählbarblättrige Überlagerung.



5. Folgende Abbildung  $\mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \text{Möb}$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (\cos 2\varphi)(1 + t \cos \varphi) \\ (\sin 2\varphi)(1 + t \cos \varphi) \\ t \sin \varphi \end{pmatrix}$$

ist eine abzählbarblättrige Überlagerung. Daraus erhält man eine zweiblättrige Überlagerung des Möbiusbandes durch den Zylinder  $S^1 \times (-1, 1)$  mittels

$$(x, y, t) \mapsto \left( (x^2 - y^2)(1 + tx), 2xy(1 + tx), ty \right).$$

6.  $S^n \rightarrow P^n$  ist eine zweiblättrige Überlagerung, siehe Aufgabe (72.53).
7.  $S^3 \rightarrow SO(3)$  und  $S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$  sind zweiblättrige Überlagerungen, siehe Aufgabe (72.66) und (72.67).

## 24. Überlagerungen

Wir wollen in diesem Abschnitt die grundlegenden Dinge aus der (Homotopie-)Theorie der Überlagerungen vorstellen. Diese sind durchwegs topologischer Natur. Da aber für eine topologische Überlagerung  $p : Y \rightarrow X$  im Sinn von (3.5) die Basis  $X$  genau dann zu einer glatten Mannigfaltigkeit gemacht werden kann, wenn es der Totalraum  $Y$  gemacht werden kann, und  $p$  dann eine glatte Überlagerung im Sinn von (23.1) ist, kann der Leser durchaus annehmen, daß alle Räume (bis auf Ausnahmen in den Beispielen) glatte Mannigfaltigkeiten sind, und alle auftretenden stetigen Abbildungen glatt sind.

Eine Überlagerungsabbildung  $p : Y \rightarrow X$  ist also eine surjektive stetige Abbildung, so daß jedes  $x \in X$  eine offene Umgebung  $U \subseteq X$  hat, für welche  $p|_{p^{-1}(U)} : p^{-1}(U) \rightarrow U$  bis auf einen Homöomorphismus gerade die Projektion  $\text{pr} : \bigsqcup_J U \rightarrow U$  für irgendeine Menge  $J \neq \emptyset$  ist. D.h. wir haben folgendes kommutatives Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xleftarrow{\quad} & p^{-1}(U) & \xleftarrow{\cong} & \bigsqcup_J U \\
 & \searrow p & & \searrow \text{pr} & \uparrow \text{inj}_j \\
 & & X & \xleftarrow{\quad} & U \\
 & & & & \xleftarrow{\text{id}} U
 \end{array}$$

Die Bilder der Summanden  $U$  in  $p^{-1}(U) \subseteq Y$  haben wir Blätter genannt und  $U$  trivialisierende Umgebung. Die inversen Bilder von Punkten unter  $p$  sind die Fasern.

### 24.1 Beispiele und Bemerkungen.

1. Es sei  $Y := \{(\sin(2\pi t), \cos(2\pi t), t) : t \in \mathbb{R}\} \cong \mathbb{R}$  und  $p = \text{pr}_{1,2} : Y \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$ . Dann ist  $p$  eine Überlagerungsabbildung. Siehe (3.5) und auch (24.19) für  $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ .
2. Die Abbildung  $z \mapsto z^n : S^1 \rightarrow S^1$  ist eine  $n$ -fache Überlagerungsabbildung. Siehe auch (24.19) für  $S^1 \cong S^1/\mathbb{Z}_n$ .
3. Die Abbildung  $S^n \rightarrow P^n$  ist eine zweifache Überlagerungsabbildung. Siehe Aufgabe (72.53) und (24.19) für  $P^n \cong S^n/\mathbb{Z}_2$ .
4. Es seien  $p_1 : Y_1 \rightarrow X_1$  und  $p_2 : Y_2 \rightarrow X_2$  zwei Überlagerungsabbildungen, dann ist auch  $p_1 \times p_2 : Y_1 \times Y_2 \rightarrow X_1 \times X_2$  eine. Beispiele dafür sind  $\mathbb{R}^2 \rightarrow S^1 \times S^1$ ,  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \times S^1$  und  $\mathbb{R} \times S^1 \rightarrow S^1 \times S^1$ .
5. Es gibt eine zweifache Überlagerungsabbildung des Möbius Streifen durch  $I \times S^1$ . Siehe (46.11), (11.10) und (24.19) für die Wirkung von  $\mathbb{Z}_2$  auf  $[-1, 1] \times S^1$  gegeben durch  $(t, \varphi) \mapsto (-t, \varphi + \pi)$ .
6. Der Torus ist eine zweifache Überlagerung der Kleinschen Flasche. Vergleiche mit (24.19) für die Wirkung von  $\mathbb{Z}_2$  auf  $S^1 \times S^1$  gegeben durch  $(\varphi, \psi) \mapsto (-\varphi, \psi + \pi)$ .
7.  $S^3$  ist eine zweifache Überlagerung von  $SO(3)$ . Vergleiche mit den Aufgaben (72.66) und (72.67) sowie mit (24.19) für die Wirkung von  $S^3$  auf  $\mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$  gegeben durch  $x \mapsto (y \mapsto \text{conj}_x(y))$ . Insbesondere haben wir  $P^3 \cong SO(3)$ .

8. Es seien  $q : Z \rightarrow Y$  und  $p : Y \rightarrow X$  zwei Überlagerungsabbildungen. Ist dann  $p \circ q$  eine Überlagerungsabbildung? – Ja, wenn  $X$  lokal einfach zusammenhängend ist, da Blätter von  $p$  über einer einfachzusammenhängenden Umgebung  $U$  wieder einfach zusammenhängend und daher trivialisierende Umgebungen von  $q$  also ist  $(p \circ q)^{-1}(U) = q^{-1}(p^{-1}(U)) = q^{-1}(\bigsqcup_j V_j) = \bigsqcup_j q^{-1}(V_j)$  und  $q^{-1}(V_j) \cong \bigsqcup_{j'} V_{j'}$  (vgl. mit der Folgerung in (24.31)).
9. Es sei  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerungsabbildung und  $A \subseteq X$ . Dann ist  $p|_{p^{-1}(A)} : p^{-1}(A) \rightarrow A$  eine Überlagerungsabbildung.

**24.2 Lemma.** *Es sei  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung. Dann gilt:*

1. Die Fasern sind diskret in  $Y$ .
2. Jede offene Teilmenge einer trivialisierenden Menge ist trivialisierend.
3. Wenn  $B \subseteq Y$  zusammenhängend ist und  $p(B) \subseteq U$  für irgendeine trivialisierende Menge  $U$  ist, dann ist  $B$  in irgendeinem Blatt enthalten.
4. Die Projektion ist ein surjektiver offener lokaler Homöomorphismus und daher eine Quotientenabbildung.

**Beweis.** (1) Punkte in der Faser sind durch die Blätter separiert.

(2) Nimm die Einschränkung des obigen Diagramms.

(3)  $B$  wird überdeckt durch die Blätter. Da jedes Blatt offen und abgeschlossen in  $p^{-1}(U)$  ist, ist die Spur auf  $B$  ebenfalls offen und abgeschlossen, und daher ist der Durchschnitt mit  $B$  genau für ein Blatt nicht leer.

(4) Offensichtlich ist die Projektion ein lokaler Homöomorphismus. Daher ist sie offen und eine Quotientenabbildung.  $\square$

### 24.3 Bemerkungen

- (1) Es sei  $f : M \rightarrow N$  eine Submersion, nach dem Rangsatz gibt es Karten  $\varphi$  um  $x$  und  $\psi$  um  $f(x)$ , sodaß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n \supseteq & \text{Dom } \varphi & \xrightarrow{\cong} & \text{Bild } \varphi & \subseteq M \\ & \text{pr} \downarrow & & f|_{\text{Bild } \varphi} \downarrow & \\ \mathbb{R}^m \supseteq & \text{Dom } \psi & \xrightarrow{\cong} & \text{Bild } \psi & \subseteq N \end{array}$$

Trifft man o.B.d.A. folgende Annahmen:  $\text{Dom } \varphi = U_1 \times U_2$  mit  $U_1 \subseteq \mathbb{R}^m$  und  $U_2 \subseteq \mathbb{R}^{n-m}$  beide offen, sowie  $\text{Dom } (\psi) = \text{pr}(\text{Dom}(\varphi)) = U_1$ . Dann ist  $\text{Bild } \psi = \psi(U_1) = \psi(\text{pr}(U_1 \times U_2)) = f(\varphi(U_1 \times U_2)) = f(\text{Bild}(\varphi))$  folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccccc} \psi(U_1) \times U_2 & \xrightarrow{\psi^{-1} \times \text{id}} & U_1 \times U_2 & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U_1 \times U_2) \\ \text{pr}_1 \downarrow & & \text{pr}_1 \downarrow & & f \downarrow \\ \psi(U_1) & \xrightarrow{\psi^{-1}} & U_1 & \xrightarrow{\psi} & \psi(U_1) \end{array}$$

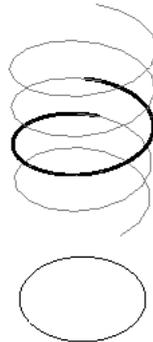
Sei  $U := \varphi(U_1 \times U_2)$ , so gilt  $f(U) = (f \circ \varphi)(U_1 \times U_2) = \psi(U_1)$  und

$$\begin{array}{ccc} f(U) \times U_2 & \xrightarrow{\cong} & U \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow f \\ & & f(U) \end{array}$$

Dieses Bild ist dem für Faserbündel geforderten schon recht ähnlich. Kann nämlich  $U = f^{-1}(f(U))$  gewählt werden, dann ist  $f$  ein Faserbündel mit trivialisierender Umgebung  $V := f(U)$ .

$$\begin{array}{ccc} V \times F & \xrightarrow[\cong]{\psi} & f^{-1}(V) = U \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow f \\ & & V \end{array}$$

(2) Nicht jeder surjektive lokale Diffeomorphismus ist eine Überlagerung. Zum Beispiel kann man ein endliches offenes Intervall  $I \subseteq \mathbb{R}$  der Länge größer als  $2\pi$  nehmen. Dann ist die Einschränkung  $I \rightarrow S^1$  der Überlagerung aus (1) in (24.1) keine Überlagerung mehr.



Andererseits haben wir das folgende:

**Lemma.** *Es seien  $X$  und  $Y$  wegzusammenhängend und Hausdorff. Weiters sei  $Y$  kompakt und  $f : Y \rightarrow X$  sei ein lokaler Homöomorphismus. Dann ist  $f$  eine Überlagerung.*

**Beweis.** Da  $f$  ein lokaler Homöomorphismus ist, ist das inverse Bild von jedem Punkt  $x \in X$  diskret und abgeschlossen und daher auch endlich, da  $Y$  kompakt ist.

Wir zeigen zunächst, daß  $f$  surjektiv ist. In der Tat ist das Bild offen in  $X$ , da  $f$  ein lokaler Homöomorphismus ist. Es ist abgeschlossen, da  $Y$  kompakt und  $X$  Hausdorff ist. Da  $X$  (Weg)zusammenhängend angenommen ist, muß es ganz  $X$  sein.

Es sei  $x \in X$ . Für jedes  $y \in f^{-1}(x)$  sei  $U_y$  eine Umgebung, welche homöomorph abgebildet wird auf irgendeine Umgebung von  $x$ . Da  $f^{-1}(x)$  endlich ist, dürfen wir die  $U_y$  als disjunkt voraussetzen. Indem wir die inversen Bilder des (endlichen) Durchschnitts der entsprechenden Umgebungen von  $x$  nehmen, dürfen wir annehmen, daß

das Bild die selbe Umgebung  $U$  ist für alle  $y \in U_y$ . Daher ist  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerung.  $\square$

### Liftungseigenschaften

Es sei  $p : (Y, y_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Überlagerung und  $f : (Z, z_0) \rightarrow (X, x_0)$  eine Abbildung. Nimm eine trivialisierende Umgebung  $U$  von  $x_0$  und es sei  $\tilde{U}$  das Blatt von  $p$  über  $U$ , welches  $y_0$  enthält. Dann ist  $(p|_{\tilde{U}}) : \tilde{U} \rightarrow U$  ein Homöomorphismus und daher ist  $(p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ f : Z \supseteq f^{-1}(U) \rightarrow \tilde{U} \subseteq Y$  ein stetiger lokaler Lift von  $f$ .

Es sei  $\tilde{f}$  irgendein stetiger (lokaler) Lift von  $f$  mit  $\tilde{f}(z_0) = y_0$ . Dann ist  $W := \tilde{f}^{-1}(\tilde{U})$  eine Umgebung von  $z_0$  und  $\tilde{f}(W) \subseteq \tilde{U}$ , daher impliziert  $f = p \circ \tilde{f}$ , daß  $(p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ f = (p|_{\tilde{U}})^{-1} \circ p|_{\tilde{U}} \circ \tilde{f} = \tilde{f}$  auf  $W$ , d.h. lokal ist der Lift von  $f$  eindeutig.

Wir können nun zeigen, daß der Lift global eindeutig ist und wir wollen bestimmen wann er existiert.

**24.4 Proposition.** *Es sei  $p : Y \rightarrow X$  eine Überlagerungsabbildung und  $f : Z \rightarrow X$  sei stetig mit zusammenhängendem  $Z$  und  $Y$  Hausdorff. Dann stimmen zwei Lifte von  $f$ , welche in einem Punkte gleich sind, überein.*

**Beweis.** Es seien  $f^1, f^2$  zwei Lifte von  $f$ . Dann ist die Menge  $\{z \in Z : f^1(z) = f^2(z)\}$  offen-abgeschlossen. In der Tat, wenn  $U^j$  das Blatt über  $U$  ist, welches  $f^j(z)$  enthält, dann ist  $f^j = (p|_{U^j})^{-1} \circ f$  auf der Umgebung  $(f^1)^{-1}(U^1) \cap (f^2)^{-1}(U^2)$ . Daher gilt  $f^1 = f^2$  lokal um  $z$  genau dann wenn  $f^1(z) = f^2(z)$ .  $\square$

**24.5 Proposition.** *Jeder Weg  $w : I \rightarrow X$  hat einen eindeutigen Lift  ${}^y\tilde{w}$  mit Startwert  ${}^y\tilde{w}(0) = y$  für gegebenes  $y \in p^{-1}(w(0))$ . Wege, die homotop sind relativ ihren initialen Werten, haben homotope Lifte. Insbesondere haben wir eine Wirkung von  $\pi_1(X, x_0)$  auf  $p^{-1}(x_0)$ , welche durch  $[u] : y \mapsto {}^y\tilde{u}(1)$  gegeben ist.*

Siehe auch (3.8).

**Beweis.** Nach (24.4) haben wir die Existenz eines Lifts zu zeigen. Indem wir einen Weg  $w$  als Homotopie, welche im zweiten Faktor konstant ist, ansehen, genügt es zu zeigen, daß Homotopien  $h : I \times I \rightarrow X$  geliftet werden können.

Dafür wählen wir eine Partition von  $I^2$  in Quadrate  $Q_{i,j}$ , sodaß  $h(Q_{i,j})$  enthalten ist in einer trivialisierenden Umgebung  $U_{i,j}$  von  $X$ . Nun konstruieren wir induktiv einen Lift  $\tilde{h}^1$  längs  $\bigcup_i Q_{i,1}$ , indem wir das Blatt  $\tilde{U}_{i,1}$  über der trivialisierenden Umgebung von  $Q_{i,1}$  nehmen, welches das Bild unter  $\tilde{h}^1$  der rechten unteren Ecke von  $Q_{i-1,1}$  enthält und daher auch jenes der rechten Kante von  $Q_{i-1,1}$  (nach (24.2.3)). Dann kann  $\tilde{h}^1|_{Q_{i,1}}$  definiert werden als  $(p|_{\tilde{U}_{i,1}})^{-1} \circ h|_{Q_{i,1}}$ . Nun setzen wir die Induktion in der selben Art fort und erhalten Lifte  $\tilde{h}^j$  für alle Streifen  $\bigcup_i Q_{i,j}$ . Nach Induktion können wir zeigen, daß die Lifte auf den horizontalen Linien übereinstimmen: In der Tat ist das Bild von  $h$  auf einer horizontalen Kante enthalten im Durchschnitt der trivialisierenden Mengen, welches das Bild des oberen und unteren Quadrats enthalten. Und da die Lifte  $\tilde{h}^j$  und  $\tilde{h}^{j-1}$  enthalten sind in den diesbezüglichen Blättern, und also auch in dem Blatt über dem Durchschnitt, sind sie gleich. Wir nennen die eben konstruierte geliftete Homotopie  ${}^{y_0}\tilde{h}$ .

Angenommen,  $h$  sei eine Homotopie rel.  $\dot{I}$  zwischen zwei Wegen  $w_0$  und  $w_1$  von  $x_0$  nach  $x_1$  und es sei  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Die Homotopie  ${}^{y_0}\tilde{h}$  hat als Randwerte Lifte  $\tilde{w}_0$  und  $\tilde{w}_1$  mit  $\tilde{w}_0(0) = y_0$ . Da  $s \mapsto {}^{y_0}\tilde{h}(0, s)$  ein Lift des konstanten Wegs  $x_0$  ist, muß er konstant sein, daher gilt  $\tilde{w}_1(0) = y_0$ . Also sind diese genau die Lifte von  $w_j$ . Da  $s \mapsto {}^{y_0}\tilde{h}(1, s)$  ein Lift des konstanten Wegs  $x_1$  ist, ist er selbst konstant, d.h.  ${}^{y_0}\tilde{h}$  ist eine Homotopie rel.  $\dot{I}$ .

Kompositionsgesetz: Der Lift  ${}^{y_0}\tilde{u} \cdot \tilde{v}$  ist  ${}^{y_0}\tilde{u} \cdot {}^{y_1}\tilde{v}$ , wo  $y_1 := {}^{y_0}\tilde{u}(1)$ .  $\square$

**13.11a Bemerkung. Fundamentalgruppe.** Wir betrachten die Menge der geschlossenen stetigen Kurven durch einen fixen Punkt  $x_0 \in X$ , also  $C((I, \dot{I}), (X, x_0)) \cong C((S^1, 1), (X, x_0))$  mit  $I := [0, 1]$  und  $\dot{I} := \{0, 1\}$ , wobei

$$C((X, A), (Y, B)) := \{f \in C(X, Y) : f(A) \subseteq B\} \text{ für } A \subseteq X \text{ und } B \subseteq Y$$

und wir kurz  $(X, x)$  für  $(X, \{x\})$  schreiben.

Wir haben eine Multiplikation auf dieser Menge gegeben durch die Verkettung

$$(c_1, c_2) \mapsto c_1 \cdot c_2 : t \mapsto \begin{cases} c_1(2t) & \text{für } t \leq 1/2 \\ c_2(2t - 1) & \text{für } t \geq 1/2 \end{cases}$$

Diese ist allerdings nur fast assoziativ, denn  $(c_1 \cdot c_2) \cdot c_3$  läuft längs  $c_2$  auf  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$  und  $c_1 \cdot (c_2 \circ c_3)$  auf  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}]$ . Bis auf stückweise affine Umparametrisierung, welche  $0 \mapsto 0$ ,  $\frac{1}{4} \mapsto \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2} \mapsto \frac{3}{4}$  und  $1 \mapsto 1$  abbildet und dazwischen linear ist, stimmen diese beiden 3-fach Produkte also überein.

Die konstante Kurve  $x_0 : t \mapsto x_0$  wirkt beinahe als neutrales Element, denn  $x_0 \cdot c = c \circ h$ , wobei  $h$  die affine Abbildung  $0 \mapsto 0$ ,  $\frac{1}{2} \mapsto 0$  und  $1 \mapsto 1$  und dazwischen linear ist. Hier ist allerdings  $h$  keine Umparametrisierung mehr, da nicht injektiv.

Auch einen Kandidaten für die Inverse zu einer geschlossenen Kurve  $c$  finden wir, nämlich die umgekehrt durchlaufene Kurve  $c^i : t \mapsto c(1 - t)$ . Dann ist zwar  $c \cdot c^i$  nicht konstant, wohl aber homotop zu  $x_0$  vermöge  $c \circ h$  mit

$$h(t, s) := \begin{cases} 2t & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{s}{2} \\ 2 - 2t & \text{für } 1 - \frac{s}{2} \leq t \leq 1 \\ s & \text{sonst} \end{cases}$$

Folglich betrachten wir den Quotientenraum

$$\pi_1(X, x_0) := C((I, \dot{I}), (X, x_0)) / \sim$$

bzgl. der Äquivalenzrelation "Homotopie relativ  $\dots I$ ", wobei zwei Abbildungen  $f_0, f_1 : X \rightarrow Y$  homotop relativ  $A \subseteq X$  heißen, wenn eine stetige Abbildung  $H : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  existiert mit

- $H(x, i) = f_i(x) \quad \forall x \in X \quad \forall i \in \{0, 1\}$
- $H(a, t) = f_0(a) \quad \forall a \in A \quad \forall t \in [0, 1]$ .

Da die Multiplikation von Kurven mit dieser Äquivalenzrelation verträglich ist induziert sie eine Multiplikation auf  $\pi_1(X, x_0)$ , welche  $\pi_1(X, x_0)$  zu einer Gruppe, der sogenannten FUNDAMENTALGRUPPE oder ERSTEN HOMOTOPIEGRUPPE macht. Beachte dazu, daß jede Abbildung  $h : I \rightarrow I$  welche am Rand  $\dot{I}$  die Identität ist vermöge  $H(t, s) := (1 - s)h(t) + st$  homotop relativ  $\dot{I}$  zur Identität ist.

Diese Gruppe hängt nicht wesentlich vom Anfangspunkt ab, denn seien  $x_0$  und  $x_1$  durch eine Kurve  $e$  verbindbar. Dann definiert  $[c] \mapsto [e^i \cdot c \cdot e]$  eine wohldefinierte Abbildung  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_1)$ . Diese ist multiplikativ, denn  $e^i \cdot (c_1 \cdot c_2) \cdot e \sim (e^i \cdot c_1) \cdot (c_2 \cdot e) \sim e^i \cdot c_1 \cdot (e \cdot e^i) \cdot c_2 \cdot e = (e^i \cdot c_1 \cdot e) \cdot (e^i \cdot c_2 \cdot e)$ , und bijektiv mit inverser  $[c] \mapsto [e \cdot c \cdot e^i]$ . Also sind  $\pi_1(X, x_0)$  und  $\pi_1(X, x_1)$  isomorph zueinander.

Diese Zuordnung erweitert sich zu einem Funktor, d.h. zu  $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$  definiert  $\pi_1(f) : \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ,  $[c] \mapsto [f \circ c]$  einen Gruppen-Homomorphismus und es gilt  $\pi_1(g \circ f) = \pi_1(g) \circ \pi_1(f)$  und  $\pi_1(\text{id}_X) = \text{id}_{\pi_1(X, x_0)}$ .

Dies ist eine der grundlegenden Methoden der algebraischen Topologie um mittels algebraischer Betrachtungen Rückschlüsse auf topologische Räume zu ziehen. Insbesondere können topologische Räume nicht homöomorph sein falls ihr Fundamentalgruppen nicht isomorph sind.

Ein topologischer Raum heißt EINFACH ZUSAMMENHÄNGEND, falls er wegzusammenhängend ist und seine Fundamentalgruppe trivial (d.h. nur aus dem neutralen Element besteht) ist. Jede sternförmige Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  ist einfach zusammenhängend, denn für solche Teilmengen  $A$  existiert nach Voraussetzung ein Punkt  $x_0$  (o.B.d.A.  $x_0 = 0$ ), sodaß mit  $x \in A$  auch die Verbindungsstrecke mit  $x_0$  zu  $A$  gehört. Dann ist aber  $H : A \times I \rightarrow A$ ,  $(x, t) \mapsto tx$  eine Homotopie relativ 0 zwischen 0 und  $\text{id}_A$ , also  $A$  kontrahierbar. Dabei heißt ein topologischer Raum  $X$  kontrahierbar, wenn die Identität auf  $X$  homotop zu einer konstanten Abbildung  $x_0 : X \rightarrow X$  relativ  $\{x_0\}$  ist. Jeder kontrahierbare Raum ist offensichtlich einfach-zusammenhängend, denn wenn  $H : \text{id} \rightarrow x_0$  die geforderte Homotopie ist, dann ist  $(t, s) \mapsto H(c(t), s)$  eine Homotopie zwischen  $c$  und  $x_0$ . Die Umkehrung gilt nicht wie die  $S^2$  zeigt.

### 13.11 Transitive Gruppenwirkungen

Wir wollen nun noch die Situation untersuchen, wo  $N$  nur eine Untergruppe (und nicht ein Normalteiler) von  $G$  ist. Dann können wir zwar wieder die Menge  $G/N$  der Nebenklassen  $\{g \cdot N : g \in G\}$  betrachten. Dies ist aber keine Gruppe mehr. Allerdings haben wir eine Wirkung von  $G$  auf  $G/N$  durch

$$g' \cdot gN := (g'g)N,$$

denn

$$(g_1g_2) \cdot gN = ((g_1g_2)g)N = (g_1(g_2g))N = g_1 \cdot (g_2g)N = g_1 \cdot (g_2 \cdot gN).$$

Offensichtlich ist diese Wirkung transitiv, d.h. für je zwei Nebenklassen  $g_0N$  und  $g_1N$  existiert ein  $g \in G$  mit  $g \cdot g_0N = g_1N$  (wähle  $g := g_1g_0^{-1}$ ).

Umgekehrt wirke  $G$  auf einer Menge  $H$  transitiv (das können wir immer erreichen, indem wir uns auf einen Orbit  $G \cdot h_0$  beschränken). Und sei  $h_0 \in H$  fix. Dann ist  $G_{h_0} := \{g \in G : g \cdot h_0 = h_0\}$  eine Untergruppe von  $G$ , die sogenannte Isotropiegruppe bei  $h_0$ , und  $G/G_{h_0}$  ist isomorph zu  $H$  als  $G$ -Raum, d.h. es gibt eine Bijektion  $\varphi : G/G_{h_0} \rightarrow H$ , welche mit der Wirkung vertauscht ( $\varphi(g \cdot x) = g \cdot \varphi(x)$ ). In der Tat ist  $\varphi$  durch  $\varphi(gG_{h_0}) := g \cdot h_0$  gegeben.

**Bemerkung.** Die Liftungseigenschaft (24.32) liefert eine Abbildung von  $\pi_1(X, x_0)$  in die Bijektionen von  $p^{-1}(x_0)$  indem wir  $[u](y) := {}^y\tilde{u}(1)$  setzen. Diese ist wohldefiniert, denn Kurven  $u$  homotop relativ  $\dot{I}$  haben Lifte  ${}^y\tilde{u}$  homotop relativ  $\dot{I}$ , und daher haben sie den selben Endpunkt.

Weiters haben wir  $[u \cdot v](y) = {}^y \widetilde{u \cdot v}(1) = ({}^y \widetilde{u} \cdot {}^{y_1} \widetilde{v})(1) = {}^{y_1} \widetilde{v}(1) = [v](y_1) = [v]([u](y))$ , wo  $y_1 = {}^y \widetilde{u}(1) = [u](y)$ . Daher betrachten wir diese Abbildung als Rechtswirkung, d.h. wir schreiben  $y \cdot [u]$  für  $[u](y)$ . Dann haben wir  $y \cdot ([u] \cdot [v]) = (y \cdot [u]) \cdot [v]$ .

Beachte, daß  $Y$  genau dann wegzusammenhängend ist, wenn  $X$  wegzusammenhängend ist und diese Wirkung transitiv ist (d.h. es existiert ein  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$  mit  $y_0 \cdot \pi_1(X, x_0) = p^{-1}(x_0)$ , oder äquivalent: Für alle  $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$  existiert ein  $g \in \pi_1(X, x_0)$  mit  $y_1 \cdot g = y_2$ ): In der Tat, wenn  $Y$  wegzusammenhängend ist, dann ist es auch das surjektive Bild  $X$ . Und weiters hat eine Kurve  $v$ , die  $y_1, y_2 \in p^{-1}(x_0)$  verbindet, eine geschlossene Kurve  $u := p \circ v$  als Bild und es gilt  $v = {}^{y_1} \widetilde{u}$  und somit  $y_1 \cdot [u] = y_2$ .

Umgekehrt sei  $y_1 \in Y$  beliebig. Da  $X$  wegzusammenhängend ist, haben wir eine Kurve  $u$ , die  $p(y_1)$  mit  $x_0$  verbindet. Ihr Lift  ${}^{y_1} \widetilde{u}$  verbindet  $y_1$  mit  $y := {}^{y_1} \widetilde{u}(1) \in p^{-1}(x_0)$ . Da  $\pi_1(X, x_0)$  transitiv auf  $p^{-1}(x_0)$  wirkt, gibt es ein  $[u'] \in \pi_1(X, x_0)$  mit  $y \cdot [u'] = y_0$ , d.h. die Kurve  ${}^y \widetilde{u}'$  verbindet  $y$  mit  $y_0$ .

Wir werden diesen Gruppen-Homomorphismus  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Bij}(p^{-1}(x_0))$  in (24.15) und in (24.17) studieren.

**24.16 Folgerung.** *Wenn  $p : Y \rightarrow X$  eine einfachzusammenhängende Überlagerung mit lokal wegzusammenhängend Basis ist, dann ist die Gruppe der Decktransformationen isomorph zu  $\pi_1(X, x_0)$ .*

**Beweis.** Es sei  $y_0 \in p^{-1}(x_0)$ . Für  $[c] \in \pi_1(X, x_0)$  definieren wir eine Decktransformation  $\varphi_c : Y \rightarrow Y$  durch  $\varphi_c(y) := {}^y \widetilde{c}(1)$  für  $y \in p^{-1}(x_0)$  und für allgemeine  $y \in Y$  wählen wir eine Kurve  $d$  in  $Y$  welche  $y$  mit der Faser  $p^{-1}(x_0)$  verbindet und setzen  $\varphi_c(y) := {}^y ((p \circ d) \cdot c \cdot (p \circ c)^{-1}) \sim (1)$ . Dies liefert einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus  $\pi_1(X, x_0) \rightarrow \text{Aut}(p)$ .

Dieser ist surjektiv, denn zu  $\varphi \in \text{Aut}(p)$  wähle eine Kurve  $c$  von  $y_0$  nach  $\varphi(y_0)$ . Dann ist wegen (24.4)  $\varphi = \varphi_{[p \circ c]}$ .

Es ist auch injektiv, denn seien  $c_0, c_1 \in \pi_1(X, x_0)$  mit  $\varphi_{c_0} = \varphi_{c_1}$ . Dann haben  ${}^y \widetilde{c}_i$  die gleichen Endpunkte, sind also homotop, da  $Y$  einfach zusammenhängend ist. Damit sind auch  $c_i$  homotop, also  $[c_1] = [c_0]$ .  $\square$

**24.18 Proposition.** *Es sei  $p : Y \rightarrow X$  eine normale Überlagerung mit wegzusammenhängendem  $Y$  und es sei  $X$  lokal wegzusammenhängend. Dann faktorisiert  $p$  über  $Y \rightarrow Y/\text{Aut}(p)$  und gibt einen Homöomorphismus  $Y/\text{Aut}(p) \cong X$ .*

**Beweis.** Da jedes  $\Phi \in \text{Aut}(p)$  fasererhaltend ist, haben wir, daß  $p$  konstant auf den  $\text{Aut}(p)$ -Bahnen ist und daher zu einer surjektiven Abbildung  $Y/\text{Aut}(p) \rightarrow X$  faktorisiert. Wenn  $\text{Aut}(p)$  transitiv wirkt (d.h.  $p$  normal ist), dann ist diese Faktorisierung injektiv, da je zwei Punkte in der selben Faser im selben Orbit unter  $\text{Aut}(p)$  sind. Da  $Y \rightarrow X$  und  $Y \rightarrow Y/\text{Aut}(p)$  Quotientenabbildungen sind muß diese Bijektion ein Homöomorphismus sein.  $\square$

Wir haben also für gewisse auf einem Raum  $Y$  wirkende Gruppen  $G$ , daß  $Y \rightarrow Y/G$  eine Überlagerung ist. Es sei  $G$  eine Gruppe so, daß  $\pi : Y \rightarrow Y/G$  eine Überlagerung ist. Dann muß für jedes  $y \in Y$  eine offene Umgebung  $U \subseteq Y/G$  existieren, sodaß  $\pi^{-1}$  eine disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen  $\tilde{U}$  ist, welche homöomorph via  $\pi$  zu  $U$  sind. Somit ist  $U = \pi(\tilde{U})$  und  $\pi^{-1}(U) = \pi^{-1}(\pi(\tilde{U})) = G(\tilde{U})$ . Also hätten wir

gerne, daß  $g(\tilde{U}) \cap g'(\tilde{U}) = \emptyset$  für alle  $g \neq g'$  gilt. Man sagt, daß eine Gruppe, die diese Bedingungen erfüllt, STRIKT UNSTETIG auf  $Y$  wirkt, d.h. jedes  $y \in Y$  eine Umgebung  $V$  hat, sodaß  $g(V) \cap V = \emptyset$  für alle  $g \neq e$ .

Offensichtlich hat die Wirkung der Decktransformationen diese Eigenschaft, denn  $\Phi(\tilde{U}) \cap \tilde{U} \neq \emptyset$  impliziert, daß irgendein  $y \in \tilde{U}$  mit  $\Phi(y) \in \tilde{U}$  existiert. Aus  $p(\Phi(y)) = p(y)$  und weil  $p|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \rightarrow U$  injektiv ist schließen wir, daß  $\Phi(y) = y$ , aber dann gilt  $\Phi = \text{id}$  nach (24.4).

Umgekehrt gilt:

**24.19 Proposition.** *Es sei  $G$  eine Gruppe, welche strikt unstetig auf einem Raum  $Y$  wirkt. Dann ist  $p : Y \rightarrow Y/G$  eine Überlagerung. Wenn  $Y$  wegzusammenhängend ist, dann gilt  $\text{Aut}(p) = G$ . Ist  $Y$  einfach zusammenhängend, dann ist  $\text{Aut}(p) = \pi_1(Y/G)$ . Ist  $Y$  zusätzlich eine  $C^\infty$ -MF und  $G$  wirke strikt unstetig durch Diffeomorphismen, dann ist auch  $Y/G$  eine  $C^\infty$ -MF (die nicht Hausdorff zu sein braucht) und  $p : Y \rightarrow Y/G$  eine  $C^\infty$ -Überlagerung.*

**Beweis.** Wir bezeichnen mit  $p : Y \rightarrow Y/G$  die Quotientenabbildung. Im ersten Schritt versuchen wir  $p : Y \rightarrow Y/G$  zumindest mengentheoretisch als Überlagerung zu erkennen. Für jeden Punkt  $p(x) = Gx \in Y/G$  existiert nach Voraussetzung eine offene Umgebung  $V$  in  $Y$  mit  $gV \cap V = \emptyset \forall g \neq 1$ . Also ist

$$p^{-1}(p(V)) = GV = \bigsqcup_{g \in G} gV,$$

und jedes  $gV$  ist offen in  $Y$ . Weiters ist  $p|_{gV} : gV \rightarrow p(V)$  offensichtlich bijektiv. Also haben wir das folgende kommutative Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} Y & \longleftarrow & p^{-1}(p(V)) & = & \bigsqcup_{g \in G} gV & \xrightarrow[p \cong]{} & \bigsqcup_{g \in G} p(V) \\ & \searrow p & & & & & \swarrow \text{pr} \\ & & Y/G & \longleftarrow & p(V) & & \end{array}$$

Wir haben also, daß  $p(V)$  trivialisierend mit Blättern  $\Phi V$  für  $\Phi \in G$  ist.

Offensichtlich wirkt jedes  $\Phi \in G$  wie eine Decktransformation. Umgekehrt sei  $\Phi : Y \rightarrow Y$  eine Decktransformation. Dann gilt  $p(y) = p(\Phi(y))$  und daher gibt es irgendein  $\Phi_y \in G$  mit  $\Phi_y \cdot y = \Phi(y)$ . Da die zwei Abbildungen  $\Phi$  und  $\Phi_y$  die Identität überdecken und auf  $y$  übereinstimmen, sind sie gleich. Die restlichen Resultate über  $\text{Aut}(p)$  finden sich in (24.15) und (24.16).

Es wirke nun  $G$  auf der  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit  $Y$  durch Diffeomorphismen. Wir können o.B.d.A. annehmen, daß obiges  $V$  Bild einer Karte  $\mathbb{R}^m \subseteq \underline{V} \xrightarrow{\varphi} V \subseteq Y$  ist.

Als Karten von  $Y/G$  verwenden wir nun die bijektiven Abbildungen  $\mathbb{R}^m \subseteq \underline{V} \xrightarrow{\varphi} V \xrightarrow[p \cong]{} p(V) \subseteq Y$ .

Der Kartenwechsel für zwei derartige Karten  $p \circ \varphi : \underline{V} \rightarrow p(V)$  und  $p \circ \psi : \underline{W} \rightarrow p(W)$  ist auf der Menge

$$\begin{aligned} \{x \in \underline{V} : p(\varphi(x)) \in p(\psi(\underline{W}))\} &= \{x \in \underline{V} : \varphi(x) \in G(\psi(\underline{W}))\} \\ &= \{x \in \underline{V} : \exists g \in G, \exists y \in \underline{W} \text{ mit } \varphi(x) = g(\psi(y))\}. \end{aligned}$$

Da  $\varphi$ ,  $\psi$  und  $g$  Homöomorphismen sind, ist diese Menge offen. Und die Kartenwechsellabbildung  $(p \circ \psi)^{-1} \circ (p \circ \varphi)$  ist gerade durch  $x \mapsto y$  gegeben, d.h. durch  $\psi^{-1} \circ g^{-1} \circ \varphi$  und ist somit glatt.

In der durch diesen Atlas definierte Mannigfaltigkeit  $Y/G$  sind folglich die Kartenbilder  $p(V)$  offen, und  $p|_V : V \rightarrow p(V)$  ein Diffeomorphismus. Somit auch  $p \circ g : V \rightarrow gV \rightarrow p(V)$ , also ist  $p : Y \rightarrow Y/G$  eine Überlagerungsabbildung.

Wenn  $Y$  Lindelöf ist und  $Y/G$  Hausdorff, dann ist auch  $Y/G$  Lindelöf.  $\square$

### 24.20 Beispiele.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}/\mathbb{Z} &\cong S^1 \\ \mathbb{R}^2/(\mathbb{Z} \times \{1\}) &\cong S^1 \times \mathbb{R} \\ \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2 &\cong S^1 \times S^1 \\ (S^1 \times \mathbb{R})/\mathbb{Z}_2 &\cong \text{Möbius-Band, wo } \mathbb{Z}_2 = \langle (z, s) \mapsto (-z, -s) \rangle \\ \mathbb{R}^2/\mathbb{Z} &\cong \text{Möbius-Band, wo } \mathbb{Z} = \langle (t, s) \mapsto (t+1, -s) \rangle \\ (S^1 \times S^1)/\mathbb{Z}_2 &\cong \text{Kleinsche-Flasche, wo } \mathbb{Z}_2 = \langle (z, w) \mapsto (-z, -w) \rangle \\ (\mathbb{R} \times \mathbb{R})/(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}) &\cong \text{Kleinsche-Flasche,} \\ &\text{wo } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{ (t, s) \mapsto (t+k, (-1)^k s + l) : k, l \in \mathbb{Z} \} \\ S^n/\mathbb{Z}_2 &\cong \mathbb{P}^n, \text{ wo } \mathbb{Z}_2 = \langle z \mapsto -z \rangle \\ S^{2k-1}/\mathbb{Z}_q &\cong L(q; p_1, \dots, p_k) \dots \text{ dem Linsenraum,} \\ &\text{wo } \mathbb{Z}_q = \{ (z_1, \dots, z_k) \mapsto (w^{p_1} z_1, \dots, w^{p_k} z_k) : w^q = 1 \} \\ (\mathbb{C}_* \times SL_{\mathbb{C}}(n))/\mathbb{Z}_n &\cong GL_{\mathbb{C}}(n), \text{ wo } \mathbb{Z}_n = \{ (\frac{1}{z}, z \text{ id}) : z^n = 1 \} \\ S^3/\mathbb{Z}_2 &\cong SO(3), \text{ wo } \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\} \text{ und } q \mapsto (x \mapsto qxq^{-1} \in \mathbb{R}^\perp \subseteq \mathbb{H}) \\ (S^3 \times S^3)/\mathbb{Z}_2 &\cong SO(4), \text{ wo } \mathbb{Z}_2 = \{1, -1\} \text{ und } (q', q) \mapsto (x \mapsto q'xq^{-1} \in \mathbb{H}) \end{aligned}$$

### 14.16 Quaternionisch lineare Abbildungen

Man kann analoges auch für den Schiefkörper der Quaternionen machen. Als Vektorraum können wir ihn mit  $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$  identifizieren. Die Multiplikation läßt sich zum Beispiel für  $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{H}$  so einführen:

$$(t, x) \cdot (s, y) := (ts - \langle x, y \rangle, ty + sx + x \times y).$$

Wir können eine Konjugation durch

$$\overline{(t, x)} := (t, -x)$$

definieren. Dann gilt  $\bar{q} \cdot q = |q|^2$  und somit ist  $1/q = \bar{q}/|q|^2$ . Es gelten dann alle Körperaxiome bis auf das Kommutativgesetz der Multiplikation (siehe Aufgabe (72.65) auch für andere Beschreibungen). Wenn wir die Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  mit  $i, j, k$  bezeichnen, dann ist  $1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$  eine Einheit und es gilt  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ;  $ij = k = -ji$ ,  $jk = i = -kj$ ,  $ki = j = -ik$ . Damit Matrizen mit quaternionischen Eintragungen aber quaternionisch linear auf Vektoren wirken, müssen wir quaternionische **rechts**-Vektorräume  $E$  betrachten. Mit  $L_{\mathbb{H}}(E)$  bezeichnen wir den reellen Vektorraum aller

$T : E \rightarrow E$ , welche  $\mathbb{H}$ -linear sind. D.h.  $L_{\mathbb{H}}(E) = \{T \in L(E) : T(xi) = (Tx)i, T(xj) = (Tx)j, T(xk) = (Tx)k\} = \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : T(xj) = (Tx)j\}$ , wobei die komplexe Struktur auf  $E$  durch  $\mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \{0\} \subseteq \mathbb{H}$  gegeben ist. Wir erhalten dann die Gruppen

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{H}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : T \text{ ist invertierbar}\} = GL(E) \cap L_{\mathbb{H}}(E) \\ SL_{\mathbb{H}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : \text{Det}_{\mathbb{R}}(T) = 1\} = SL(E) \cap L_{\mathbb{H}}(E) \end{aligned}$$

Es sei also  $(e_l)_{l=1}^n$  eine Basis des quaternionischen Rechtsvektorraums  $E$ , d.h. jedes  $q \in E$  hat eine eindeutige Darstellung

$$q = \sum_{l=1}^n e_l q^l$$

und wenn wir  $q^l =: z^l + jz^{n+l}$  mit  $z^l, z^{n+l} \in \mathbb{C}$  darstellen, erhalten wir  $q = \sum_{l=1}^n e_l z^l + (e_l j) z^{n+l} = \sum_{l=1}^{2n} e_l z^l$ , wobei wir  $e_{n+l} := e_l j$  gesetzt haben. D.h. die  $(e_j)_{j=1}^{2n}$  sind eine komplexe Basis von  $E$  als komplexer Vektorraum. Man beachte, daß  $qj$  als quaternionische Koordinaten natürlich  $q^l j$  hat, aber als komplexe Koordinaten

$$qj = \sum_{l=1}^n e_l (z^l + jz^{n+l})j = \sum_{l=1}^n e_l (j\bar{z}^l + j^2\bar{z}^{n+l}) = \sum_{l=1}^n e_l (-\bar{z}^{n+l}) + \sum_{l=1}^n (e_l j)\bar{z}^l,$$

d.h. die Koeffizienten von  $qj$  ergeben sich durch

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{z}^1 \\ \vdots \\ \bar{z}^{2n} \end{pmatrix}.$$

Sei nun  $A + Bj$  die Matrixdarstellung von  $T$  bezüglich dieser Basis mit komplexen Matrizen  $A$  und  $B$ , d.h.  $T(e_l) = \sum_k e_k T_l^k = \sum_k e_k (A_l^k + B_l^k j)$  und somit

$$\begin{aligned} T(q) &= T\left(\sum_l e_l q^l\right) = \sum_l T(e_l)q^l = \sum_l \sum_k e_k T_l^k q^l \\ &= \sum_k e_k \left(\sum_l T_l^k q^l\right) \\ &= \sum_k e_k \left(\sum_l (A_l^k + B_l^k j) \cdot (z^l + jz^{n+l})\right) \\ &= \sum_k \left(e_k \sum_l (A_l^k z^l - B_l^k z^{n+l}) + e_k j \sum_l (\bar{B}_l^k z^l + \bar{A}_l^k z^{n+l})\right). \end{aligned}$$

Also hat  $T$  bezüglich der komplexen Basis  $(e_1, \dots, e_n, e_1 j, \dots, e_n j)$  folgende Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir nun die komplexe Basis zur reellen Basis

$$(e_1, \dots, e_n; e_1 j, \dots, e_n j; e_1 i, \dots, e_n i; e_1 j i, \dots, e_n j i)$$

ergänzen, dann hat  $T$  folgende Matrixdarstellung nach dem bereits oben gezeigten, wobei wir  $A$  und  $B$  in Real- und Imaginärteil zerlegen, d.h.  $A = A_1 + iA_2$  und

$B = B_1 + iB_2$ :

$$\begin{pmatrix} A_1 & -B_1 & -A_2 & B_2 \\ B_1 & A_1 & B_2 & A_2 \\ A_2 & -B_2 & A_1 & -B_1 \\ -B_2 & -A_2 & B_1 & A_1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir diese Basis noch auf die natürlichere Form

$$(e_1, \dots, e_n; e_1i, \dots, e_ni; e_1j, \dots, e_nj; e_1k, \dots, e_nk)$$

bringen, dann hat  $T$  folgende Darstellung

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 & -B_1 & -B_2 \\ A_2 & A_1 & -B_2 & B_1 \\ B_1 & B_2 & A_1 & -A_2 \\ B_2 & -B_1 & A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \text{ mittels Konjugation mit } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen mit  $L_{\mathbb{H}}(n)$  den Teilraum von  $L_{\mathbb{C}}(2n)$  bzw.  $L(4n)$  mit den so beschriebenen quaternionischen Strukturen auf  $\mathbb{C}^{2n}$  bzw.  $\mathbb{R}^{4n}$  bezeichnen.

Da  $\mathbb{H}$  ein schief-Körper ist, geht nun aber so manches schief. So gibt die übliche Formel für die Determinante nichts vernünftiges, da sie nicht  $\mathbb{H}$ -linear in den Spalten ist. Wir behaupten als nächstes, daß die komplexe Determinante auf  $L_{\mathbb{H}}(E)$  positiv ist, und somit  $\text{Det}_{\mathbb{C}}(T) = +\sqrt{\text{Det}(T)}$  gilt. Dazu rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Det}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} &= \text{Det}_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} A_1 + iA_2 & -B_1 - iB_2 \\ B_1 - iB_2 & A_1 - iA_2 \end{pmatrix} \\ &= \text{Det} \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix} + i^2 \text{Det} \begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ -B_2 & -A_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + i \text{Det} \begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix} - i \text{Det} \begin{pmatrix} A_1 & -B_2 \\ -B_1 & A_2 \end{pmatrix} \\ &= \text{Det} \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix} + \text{Det} \begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + i \left( \text{Det} \begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix} - (-1)^2 \text{Det} \begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \text{Det}_{\mathbb{R}}(A_1 + iB_1) + \text{Det}_{\mathbb{R}}(A_2 + iB_2) \geq 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$GL_{\mathbb{H}}(E) \subseteq GL_{\mathbb{C}}^+(E) := \{T \in GL_{\mathbb{C}}(E) : \text{Det}_{\mathbb{C}}(T) > 0\}$$

$$GL_{\mathbb{H}}(E) \cong \mathbb{R}^+ \times SL_{\mathbb{H}}(E)$$

$$SL_{\mathbb{H}}(E) = \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : \text{Det}_{\mathbb{C}}(T) = 1\} \subseteq SL_{\mathbb{C}}(E),$$

wobei der Isomorphismus wie im reellen Fall durch  $T \mapsto (\text{Det}(T)^{1/n}, \text{Det}(T)^{-1/n} \cdot T)$  gegeben ist.

**24.21 Beispiel.** Betrachte die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{dx}{dt} = \cos^2 x, \quad \frac{dy}{dt} = \sin x.$$

Da dieses Vektorfeld beschränkt ist, existieren die Lösungen global und wir erhalten eine glatte Funktion  $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , welche zu jedem  $t \in \mathbb{R}$  und  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  die Lösung mit Werten  $(x, y)$  bei 0 zur Zeit  $t$  assoziiert.

Wenn der initiale Wert  $\cos^2 x = 0$  erfüllt, dann ist die Lösung  $y(t) = y(0) + t \cdot \sin x$ . Andernfalls haben wir  $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \frac{d}{dx} \frac{1}{\cos x}$ , daher muß sie enthalten sein in Translaten von  $\{(y, x) : y(x) = \frac{1}{\cos x}\}$ . Weiters ist die Zeit, die man benötigt um von  $x = x_0$  zu  $x = x_1$  zu gelangen, durch  $t(x_1) - t(x_0) = \int_{x_0}^{x_1} \frac{dt}{dx} dx = \int_{x_0}^{x_1} \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x \Big|_{x=x_0}^{x_1}$  gegeben. Man kann diese Differentialgleichung sogar explizit lösen, denn

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} = \cos^2 x &\Rightarrow d \tan x = \frac{dx}{\cos^2 x} = dt \\ &\Rightarrow \tan x(t) = t + c \Rightarrow x(t) = \arctan(t + c_1) \\ \frac{dy}{dt} = \sin x &= \sin(\arctan(t + c_1)) = \pm \frac{\tan(t + c)}{\sqrt{1 + \tan^2(t + c_1)}} \\ &\Rightarrow y(t) = c_2 \pm \sqrt{1 + (t + c_1)^2}. \end{aligned}$$

Beachte, daß der Quotientenraum  $\mathbb{R}^2/\mathbb{R}$  nicht Hausdorff ist. Er besteht aus einer abzählbaren Vereinigung  $\bigsqcup_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$  von  $\mathbb{R}$ 's zusammen mit den Punkten  $\pi/2 + \pi \cdot \mathbb{Z}$ . Ein Umgebungsbasis von  $\pi/2 + k\pi$  wird durch Endintervalle der zwei umgebenden  $\mathbb{R}$ 's gegeben.

Wenn wir die Wirkung der Untergruppe  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$  auf  $\mathbb{R}^2$  betrachten, dann ist diese strikt diskontinuierlich, denn hinreichend schmale Streifen, welche keine der Achsen  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$  für  $k \in \mathbb{Z}$  enthält werden unter dieser Wirkung nach rechts verschoben. und hinreichend kleine Bälle um Punkte auf diesen Achsen werden vertikal verschoben und nach rechts verzerrt.

Der Orbitraum  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$  ist allerdings nicht Hausdorff, denn  $[(-\pi/2, 0)]$  und  $[(\pi/2, 0)]$  lassen sich nicht trennen.

Wir können den Raum  $X := ([-\pi/2, \pi/2] \times \mathbb{R})/\sim$  bilden, wobei  $(-\pi/2, -t) \sim (\pi/2, t)$ . Da die Wirkung von  $\mathbb{R}$  verträglich mit dieser Äquivalenz-Relation ist, wirkt  $\mathbb{R}$  ebenso fixpunktfrei auf diesem Möbius-Streifen  $X$ . Die Bahnen der diskreten Untergruppe  $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}$  sind offensichtlich abgeschlossene Teilmengen. Jedoch ist die Wirkung nicht strikt unstetig, da für irgendeine Umgebung von  $[(\pi/2, 0)]$  irgendein Translat um  $t \in \mathbb{Z}$  es wieder trifft.

**24.22 Lemma.** *Es sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $G < \text{Diff}(M)$  eine strikt diskontinuierlich wirkende Untergruppe. Dann ist die Topologie von  $M/G$  genau dann regulär (oder Hausdorff), wenn  $\{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$  endlich ist für jede kompakte Menge  $K \subseteq M$ .*

**Beweis.** Wenn  $G$  strikt diskontinuierlich wirkt, dann ist der Orbit  $Gx$  eine diskrete Teilmenge, da aus  $gU \cap U = \emptyset \forall g \neq 1$  folgt, daß  $U \cap Gx = \{x\}$ , also ist jeder Punkt in  $Gx$  offen. Somit ist für jede kompakte Menge  $K$  die Menge  $Gx \cap K$  diskrete und kompakt also endlich.

( $\Rightarrow$ ) Wir behaupten, daß jeder Punkt  $x \in M$  eine Umgebung  $U_x \subseteq U$  besitzt, s.d.  $\{g \in G : gU_x \cap K \neq \emptyset\}$  endlich ist. Sei  $\{g \in G : gx \cap K \neq \emptyset\} = \{g_1, \dots, g_n\}$  und  $K' := K \setminus \bigcup_{i=1}^n g_i U$ . Dann ist  $K'$  kompakt und  $Gx \cap K' = \emptyset$ , also  $p(x) \notin p(K')$ . Wenn  $M/G$  regulär ist, so finden wir eine offene Umgebung  $V$  von  $p(x)$ , die  $p(K')$  nicht trifft. Dann ist  $U_x := U \cap p^{-1}(V)$  die gesuchte Umgebung, denn für alle  $g \in G$  gilt:  $gU_x$  trifft  $K'$  nicht, und für  $g \notin \{g_1, \dots, g_n\}$  gilt:  $gU_x \subseteq gU$  trifft  $\bigcup_{i=1}^n g_i U$  nicht also auch nicht  $K \subseteq K' \cup \bigcup_{i=1}^n g_i U$ .

Die Familie  $\{U_k : k \in K\}$  bildet eine offene Überdeckung der kompakten Menge  $K$ , also reichen endlich viele, sagen wir  $\{U_{k_1}, \dots, U_{k_n}\}$ , aus. Dann ist

$$\begin{aligned} \{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\} &\subseteq \{g \in G : g(\bigcup_{i=1}^n U_{k_i}) \cap K \neq \emptyset\} = \\ &= \bigcup_{i=1}^n \{g \in G : g(U_{k_i}) \cap K \neq \emptyset\} \text{ endlich.} \end{aligned}$$

( $\Leftarrow$ ) Wir müssen wegen (19.5) nur zeigen, daß  $M/G$  Hausdorff ist. Sei dazu  $y_1 \neq y_2$  in  $N := M/G$ . Falls  $y_1, y_2$  in einer trivialisierenden Menge  $V \subseteq N$  liegen, dann können wir ein Blatt  $U$  über  $V$  wählen, die beiden Punkte  $x_1 := (p|_U)^{-1}(y_1)$  und  $x_2 := (p|_U)^{-1}(y_2)$  dort durch offene Umgebungen trennen, und da  $p|_U : U \rightarrow V$  ein Homöomorphismus ist, trennen die Bilder  $y_1$  von  $y_2$ . Falls  $y_2$  nicht in einer trivialisierenden Umgebung  $V$  von  $y_1$  liegt. Dann wählen wir ein Urbild  $x_1$  von  $y_1$  und eine relativ kompakte Umgebung  $U_1$  von  $x_1$ , deren Abschluß  $K := \bar{U}_1$  im Blatt über  $V$  von  $x_1$  enthalten ist. Dann ist  $G \cdot K$  abgeschlossen, denn falls  $x \notin G \cdot K$ , dann existiert eine (relativ kompakte) Umgebung  $U$  von  $x$ , s.d.  $\{g \in G : gU \cap K \neq \emptyset\}$  endlich ist, denn nach Voraussetzung ist  $\{g \in G : g(U) \cap K \neq \emptyset\} \subseteq \{g \in G : g(\bar{U} \cup K) \cap (\bar{U} \cup K) \neq \emptyset\}$  endlich. Und indem wir für diese endlich vielen  $g_i \in G$ , die Menge  $U$  so verkleinern, daß  $g_i U \cap K = \emptyset$  (geht, da  $g_i x \notin K$ ), dann ist  $GU \cap K = \emptyset$  und damit auch  $U \cap GK = \emptyset$ . Somit ist  $U_2 := M \setminus GK$  offen und disjunkt von  $G \cdot U_1$  und die Bilder  $V_j := p(U_j)$  sind offene Mengen, die  $y_1$  und  $y_2$  trennen.  $\square$

Wir haben in (24.21) ein Beispiel angegeben, welches zeigt, daß es nicht genügt zu fordern, daß die Bahnen diskret sind (und die  $g \neq 1$  fixpunktfrei sind) um eine Überlagerung zu erhalten.

Es genügt auch nicht, daß  $G$  strikt diskontinuierlich wirkt um einen Hausdorff-Quotienten zu erhalten.

In den meisten unserer Beispiele ist aber  $M$  eine Lie-Gruppe, und  $G$  ist eine Untergruppe von  $M$ , die durch Linksmultiplikation auf  $M$  wirkt.

**24.23 Lemma.** *Es sei  $M$  eine Lie-Gruppe und  $G < M$  eine Untergruppe. Dann sind äquivalent*

- $G$  ist diskret;
- $G$  wirkt auf  $M$  durch Linksmultiplikation strikt diskontinuierlich;
- $\{g : gK \cap K \neq \emptyset\}$  ist endlich für alle kompakten  $K \subseteq M$ .

**Beweis.** (1 $\Rightarrow$ 3) Sei  $K \subseteq M$  kompakt. Da  $(g, h) \mapsto gh^{-1}$  stetig ist, ist  $KK^{-1} := \{k'k^{-1} : k', k \in K\}$  kompakt und somit der Durchschnitt mit der diskreten Teilmenge  $G$  endlich. D.h.  $\{g \in G : g \in KK^{-1}\} = \{g \in G : gK \cap K \neq \emptyset\}$  ist endlich.

(2 $\Leftarrow$ 3) Sei  $K$  eine kompakte Umgebung von  $x$ . Dann existieren nur endlich viele  $g \in G$  mit  $gK \cap K \neq \emptyset$  und wir können  $K$  so verkleinern, daß  $gK \cap K = \emptyset$  für alle diese  $g \neq e$ .

(1 $\Leftarrow$ 2) Aus  $gU \cap U = \emptyset$  folgt insbesondere  $g \notin U$ .  $\square$

Bekanntlich kann man den Raum  $G/M$ , bzw. den Raum der linken Nebenklassen  $Gx$ , genau dann zu einer Gruppe und  $p : M \rightarrow G/M$  zu einen Gruppenhomomorphismus machen, wenn  $G$  ein Normalteiler in  $M$  ist, d.h.  $xGx^{-1} \subseteq G$  für alle  $x \in M$ .

**24.24 Lemma.** *Falls  $M$  eine zusammenhängende Liegruppe ist, dann ist eine diskrete Untergruppe  $G < M$  genau dann ein Normalteiler, wenn sie im Zentrum  $Z(M) := \{z \in M : xz = zx \forall x \in M\}$  liegt.*

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) ist trivial.

( $\Rightarrow$ ) Da die Abbildung  $z \mapsto zxz^{-1}$  stetig ist und für  $x \in G$ , Werte in der diskreten Teilmenge  $G$  hat, ist sie konstant und somit ist gleich  $zxz^{-1} = 1x1^{-1} = x$ , d.h.  $x \in Z(M)$ .  $\square$

Wenn  $G$  ein Normalteiler ist, dann ist klarerweise  $M/G$  eine Lie-Gruppe, lokal isomorph zu  $M$  ist. Umgekehrt folgt aus den Liftungseigenschaften einer Überlagerung sofort, daß die universelle Überlagerung  $\tilde{H}$  einer Lie-Gruppe  $H$  ebenfalls Lie-Gruppe ist. Und es läßt sich ebenso zeigen, daß lokal isomorphe Lie-Gruppen isomorphe universelle Überlagerungen besitzen. Wir erhalten also bis auf Isomorphie alle lokal isomorphen Gruppen, indem wir aus der entsprechenden universellen Überlagerung  $\tilde{G}$  alle diskreten zentralen Untergruppen herausfaktorisieren. Falls das Zentrum  $Z(\tilde{G})$  selbst diskret ist (was z.B. bei allen halbeinfachen Gruppen der Fall ist), dann haben wir als anderen Extremfall  $\text{ad}(\tilde{G}) := \tilde{G}/Z(\tilde{G})$ , die sogenannte adjungierte Gruppe.

**24.25 Lemma.** *Es sei  $N \hookrightarrow G \rightarrow H$  eine Überlagerung von Gruppen und  $G$  zusammenhängend (dann ist es auch  $H$ ). Dann ist  $Z(H)$  genau dann diskret, wenn  $Z(G)$  es ist, und  $Z(H) \cong Z(G)/(Z(G) \cap N)$  und  $\text{ad}(G) = G/Z(G) \cong H/Z(H) = \text{ad}(H)$ .*

**Beweis.** Für jeden surjektiven Gruppenhomomorphismus  $p : G \rightarrow H$  gilt, daß  $p(Z(G)) \subseteq Z(H)$ . Sei nun  $g \in G$  so, daß  $q(g) \in Z(H)$ . Dann liegt  $xgx^{-1}g^{-1}$  in dem diskreten Normalteiler  $\text{Ker}(p) =: N$ , und da  $G$  zusammenhängend ist, ist dies gerade  $x1x^{-1}1^{-1} = 1$ , d.h.  $g \in Z(G)$ . Also ist  $Z(G) = p^{-1}(Z(H))$  und  $N \subseteq Z(G)$ . Daraus folgen die übrigen Eigenschaften mittels Isomorphiesatz:

$$H/Z(H) = (G/N)/(Z(G)/N) \cong (G/Z(G)) \quad \square$$

Wir wollen nun für einige Gruppen die diskreten Untergruppen, bzw. das Zentrum bestimmen. Falls  $G$  abelsch ist, dann ist  $Z(G) = G$ . Wir werden in (71.8) zeigen, daß in diesem Fall die universelle Überlagerung  $(\mathbb{R}^n, +)$  ist. Weiters gilt

**24.26 Lemma.** *Die diskreten Untergruppen von  $\mathbb{R}^n$  sind genau die von linear unabhängigen Vektoren erzeugten Untergruppen.*

**Beweis.** Wir beweisen das mittels Induktion nach  $n$ . Für  $n = 0$  ist es trivial. Sei nun  $n > 0$  und  $H < G$  eine diskrete Untergruppe. Wir wählen eine maximal linear unabhängige Teilmenge  $H_0 := \{h_1, \dots, h_k\}$  von  $H$ . Falls  $k < n$  ist, dann liegt  $H$  in der von  $H_0$  aufgespannte Hyperebene, und ist somit nach Induktionsvoraussetzung von  $H_0$  erzeugt. Andernfalls ist  $k = n$  und wir betrachten die von  $\{h_1, \dots, h_{n-1}\}$  aufgespannte Hyperebene  $E$ . Dann ist  $H \cap E$  eine diskrete Untergruppe von  $E$  und wird somit nach Induktionsvoraussetzung von linear unabhängigen  $\{h'_1, \dots, h'_{k'}\}$  erzeugt. Da für  $j < n$  die  $h_j \in H \cap E$  liegen, muß  $k' = k - 1$  sein, und wir können o.B.d.A. annehmen, daß die  $\{h_1, \dots, h_{k-1}\}$  diese Erzeuger sind. Sei nun  $Q$  der kompakte Quader  $\{\sum_{j \leq n} t_j h_j : 0 \leq t_j \leq 1\}$ . Dann ist  $H \cap Q$  endlich, und wir wählen ein  $h' = \sum_{j \leq n} t_j h_j \in H \cap Q$  mit minimalen  $t_n > 0$  (solche gibt es, z.B.  $h_n$ ). Wir behaupten, daß  $H$  von  $\{h_1, \dots, h_{n-1}, h'\}$  erzeugt wird. Jedes  $h \in H$  läßt sich natürlich als

$h = \sum_{j < n} s_j h_j + s_n h'$  schreiben mit  $s_j \in \mathbb{R}$ . Für geeignet gewählte  $k_j \in \mathbb{Z}$  betrachten wir

$$\begin{aligned} H \ni h'' &:= h - \sum_{j < n} k_j h_j - k_n h' = \sum_j (s_j - k_j) h_j + (s_n - k_n) \left( \sum_j t_j h_j \right) \\ &= \sum_j \left( s_j - k_j + (s_n - k_n) t_j \right) h_j + (s_n - k_n) h_n. \end{aligned}$$

Wenn wir  $k_n := [s_n]$  und  $k_j := [s_j + (s_n - k_n) t_j]$  setzen, dann ist  $h'' \in Q$  und der Koeffizient von  $h_n$  kleiner als jener von  $h'$ , also muß er 0 sein, d.h.  $s_n \in \mathbb{Z}$ . Dann ist aber auch  $h - s_n h' \in H \cap E$  und somit nach Induktionsvoraussetzung auch alle anderen  $s_j \in \mathbb{Z}$ .  $\square$

**24.27 Folgerung.** Die einzigen  $n$ -dimensionalen zusammenhängenden abelschen Lie-Gruppen sind  $(S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$  für ein  $0 \leq k \leq n$ .

**Beweis.** Jede abelsche Lie-Gruppe ist von der Form  $A \cong \mathbb{R}^n / D$ , wobei  $D$  von  $k$  linear unabhängigen Vektoren erzeugt wird. Nach Anwenden einer linearen Abbildung (uns somit eines Gruppenautomorphismus) können wir o.B.d.A. annehmen, daß  $D = \langle e_1, \dots, e_k \rangle_{\mathbb{R}} = \mathbb{Z}^k \times \{0\}$  ist, und somit ist  $A = \mathbb{R}^n / D = (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}) / (\mathbb{Z}^k \times \{0\}) = (\mathbb{R}^k / \mathbb{Z}^k) \times (\mathbb{R}^{n-k} / \{0\}) = (S^1)^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ .  $\square$

Um nun für einige nicht Abelsche Gruppen  $G$  das Zentrum zu bestimmen, beachten wir folgendes: Falls  $G < \text{Diff}(M)$  ist, und für  $g \in G$  wir mit  $\text{Fix}_g := \{x \in M : gx = x\}$  bezeichnen, dann gilt für  $h \in Z(G)$ , daß  $h(\text{Fix}_g) \subseteq \text{Fix}_g$ , denn  $h(x) = h(g(x)) = g(h(x))$ .

**24.28 Proposition.** Die Gruppe  $G := \{ax + b : a > 0, a, b \in \mathbb{R}\}$  hat als Zentrum  $Z = 1 = \{x\}$ . Die Gruppen  $SL(n)$ ,  $SO(n)$ ,  $SO(n, k)$ ,  $Sp(2m)$ ,  $SL_{\mathbb{C}}(n)$ ,  $SO_{\mathbb{C}}(n)$ ,  $Sp_{\mathbb{C}}(2m)$ ,  $SL_{\mathbb{H}}(n)$  haben als Zentrum alle Vielfachen der Identität, die zu diesen Gruppen gehören. Im Detail heißt das:

$$Z(SO(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & n \equiv 0 \pmod{2} \\ 1 & n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

Ebenso gilt

$$Z(SL_{\mathbb{C}}(n)) = \mathbb{Z}_n.$$

Die Gruppen  $Spin(n)$  haben als Zentrum

$$Z(Spin(n)) = \begin{cases} \mathbb{Z}_2 & n \equiv 1 \pmod{2} \\ \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 & n \equiv 0 \pmod{4} \\ \mathbb{Z}_4 & n \equiv 2 \pmod{4} \end{cases}$$

**Beweis.** Die  $ax + b$ -Gruppe  $G$  ist eine Untergruppe der Diffeomorphismen von  $\mathbb{R}$ . Für jedes  $t \in \mathbb{R}$  existiert ein  $g \in G$  mit  $\text{Fix}_g = \{t\}$  (z.B.  $a := 2, b := -t$ ). Also hält  $h \in Z(G)$  jedes  $t \in \mathbb{R}$  fix, d.h.  $h = \text{id}$ .

Für die Gruppen  $G \in \{SL(n), \dots, SL_{\mathbb{H}}(n)\}$  gehen wir wie folgt vor. Jede Hyperebene tritt als Fixpunktmenge  $\text{Fix}(g) = \{x : g \cdot x = x\}$  eines  $g \in G$  auf. Also ist jeder eindimensionale Teilraum ein Durchschnitt von Fixpunkt Mengen  $\text{Fix}(g_i)$  und somit muß für  $h \in Z(G)$  und jedem Vektor  $x \neq 0$  die Gleichung  $g_i \cdot h \cdot x = h \cdot x$  gelten, also

$x$  ein Eigenvektor von  $h$  sein. Dies ist aber nur dann möglich, wenn  $h$  ein Vielfaches der Identität ist.

Für die  $SO(n)$  erhalten wir folglich: Es ist  $\langle x, y \rangle = \langle \lambda x, \lambda y \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle \forall x, y$  genau dann, wenn  $\lambda^2 = 1$  ist.

Für die  $SL_{\mathbb{C}}(n)$  muß  $1 = \det(\lambda) = \lambda^n$  sein, d.h.  $\lambda$  eine  $n$ -te Einheitswurzel sein.

Für die  $Spin(3)$  und  $Spin(4)$  erhält man das Zentrum direkt aus den Isomorphismen mit  $S^3$  und  $S^3 \times S^3$ . Für die allgemeinen Spin-Gruppen  $Spin(n)$  folgt es mittels des Zentrums der Clifford-Algebren  $Cliff(n)$ .  $\square$

### 14.18 Übersicht

| Gruppe                    | Dim        | kompakt | komplex | Kurzbeschreibung                                    |
|---------------------------|------------|---------|---------|---|
| $GL(n)$                   | $n^2$      | –       | –       | $\text{Det}_{\mathbb{R}} \neq 0$                    |
| $SL(n)$                   | $n^2 - 1$  | –       | –       | $\text{Det}_{\mathbb{R}} = 1$                       |
| $SO(n)$                   | $n(n-1)/2$ | +       | –       | sym,lin,pos-def                                     |
| $SO(n, k)$                | $n(n-1)/2$ | –       | –       | sym,lin,def   |
| $Sp(n)^{1)}$              | $n(n+1)/2$ | –       | –       | alt,lin,def   |
| $U(n)$                    | $n^2$      | +       | –       | konj-sym,pos-def                                    |
| $U(n, k)$                 | $n^2$      | –       | –       | konj-sym,def  |
| $SU(n)$                   | $n^2 - 1$  | +       | –       | konj-sym,pos-def, $\text{Det}_{\mathbb{C}} = 1$     |
| $SU(n, k)$                | $n^2 - 1$  | –       | –       | konj-sym,def, $\text{Det}_{\mathbb{C}} = 1$         |
| $GL_{\mathbb{C}}(n)$      | $2n^2$     | –       | +       | $\mathbb{C}$ -lin, $\text{Det}_{\mathbb{C}} \neq 0$ |
| $SL_{\mathbb{C}}(n)$      | $2n^2 - 2$ | –       | +       | $\mathbb{C}$ -lin, $\text{Det}_{\mathbb{C}} = 1$    |
| $O_{\mathbb{C}}(n)$       | $n(n-1)$   | –       | +       | sym, $\mathbb{C}$ -lin,def                          |
| $Sp_{\mathbb{C}}(n)^{1)}$ | $n(n+1)$   | –       | +       | alt, $\mathbb{C}$ -lin,def                          |
| $Q(n)$                    | $n(2n+1)$  | +       | –       | konj-sym, $\mathbb{H}$ -lin,pos-def                 |
| $Q(n, k)$                 | $n(2n+1)$  | –       | –       | konj-sym, $\mathbb{H}$ -lin,def                     |
| $Q_-(n)$                  | $n(2n-1)$  | –       | –       | schief-konj-sym, $\mathbb{H}$ -lin,def              |
| $GL_{\mathbb{H}}(n)$      | $4n^2$     | –       | –       | $\mathbb{H}$ -lin, $\text{Det}_{\mathbb{R}} \neq 0$ |
| $SL_{\mathbb{H}}(n)$      | $4n^2 - 1$ | –       | –       | $\mathbb{H}$ -lin, $\text{Det}_{\mathbb{R}} = 1$    |

<sup>1)</sup> In diesen Fällen ist  $n = 2m$  gerade.

### 24.30 Universelle Überlagerung

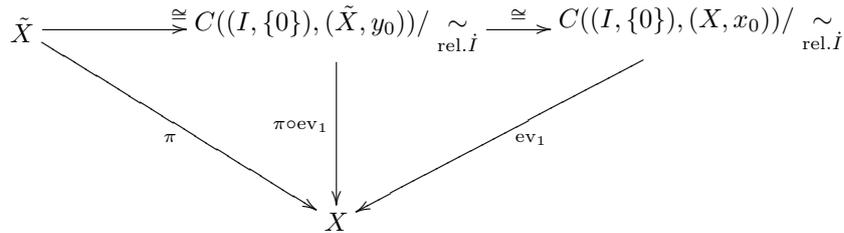
Wir wenden uns nun der Frage der Surjektivität von  $\text{Cov}_{pc}(X) \rightarrow \text{Act}_{tr}(G)$  mit  $G = \pi_1(X, x_0)$  zu. Dazu versuchen wir zuerst "maximale" Elemente zu finden. Für transitive Wirkungen ist das maximale Objekt  $G$  mit der Rechtsmultiplikation auf sich selbst nach (24.6), denn für jede solche Wirkung von  $G$  auf irgendeinem  $F$  haben wir eine  $G$ -äquivariante Abbildung  $G \rightarrow F$ .

Die entsprechende maximale Überlagerung  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  sollte also  $G = \pi_1(X, x_0)$  als Faser haben und die Wirkung sollte durch Rechtsmultiplikation gegeben sein. Insbesondere müssen wir  $G_y = \{1\}$  für alle  $y \in G$  haben. Sei  $y_0 \in \tilde{X}$  ein Basispunkt und  $x_0 := p(y_0)$ . Da  $G_{y_0} = \pi(p)\pi(\tilde{X}, y_0)$  ist, haben wir, daß  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend sein sollte.

Für jeden Punkt  $y \in \tilde{X}$  finden wir einen Weg  $v_y$  von  $y_0$  nach  $y$  und, da  $\tilde{X}$  einfach zusammenhängend ist, ist die Homotopie-Klasse  $[v_y]$  rel.  $\dot{I}$  ist unabhängig von der Wahl des Weges  $v_y$  definiert. Also haben wir eine Bijektion

$$\tilde{X} \cong C((I, \{0\}), (\tilde{X}, y_0)) / \sim_{\text{rel.}\dot{I}}.$$

Wegen der Liftungseigenschaft (24.5) entsprechen diesen Homotopie-Klassen bijektiv die Homotopie-Klassen von Wegen startend bei  $x_0$ , d.h.



Es sei  $U$  eine trivialisierende wegzusammenhängende Umgebung von  $x_1 \in X$ . Wir berechnen  $p^{-1}(U)$ . Beachte dazu, daß

$$p^{-1}(x_1) = \{[u] : u \text{ ist ein Weg in } X \text{ von } x_0 \text{ nach } x_1\} \text{ gilt.}$$

$$\begin{aligned}
 p^{-1}(U) &= \{[w] : w(1) \in U\} \quad (\text{schreibe } w = w \cdot u^{-1} \cdot u) \\
 &= \{[v] \cdot [u] : v(0) = x_0, v(1) = x_1, u(0) = x_1, u(I) \subseteq U\} \\
 &= \{[v] \cdot [u] : [v] \in p^{-1}(x_1), u(0) = x_1, u(I) \subseteq U\} \\
 &= \bigcup_{[v] \in p^{-1}(x_1)} [v]\tilde{U},
 \end{aligned}$$

wobei  $[v]\tilde{U} := \{[v] \cdot [u] : u(0) = x_1, u(I) \subseteq U\}$ . Wenn  $U$  wegzusammenhängend ist, dann ist  $\pi|_{[v]\tilde{U}} : [v]\tilde{U} \rightarrow U$  surjektiv. Um zu zeigen, daß sie injektiv ist, brauchen wir:  $u_0(1) = u_1(1) \Rightarrow [u_0] = [u_1]$ , d.h. jede geschlossene Kurve in  $U$  durch  $x_1$  sollte 0-homotop in  $X$  sein. Ein Raum  $X$ , der eine Umgebungsbasis von Mengen mit dieser Eigenschaft hat, heißt SEMI-LOKAL EINFACHZUSAMMENHÄNGEND. Jede Mannigfaltigkeit hat offensichtlich diese Eigenschaft, den sie hat sogar kontrahierbare Umgebungen (sternförmige Bilder der Karten).

Für einen wegzusammenhängenden, lokal wegzusammenhängenden und semi-lokal einfachzusammenhängenden Raum  $X$  definieren wir also die Menge  $\tilde{X}$  als  $C((I, \{0\}), (X, x_0)) / \sim_{\text{rel.}\dot{I}}$

und  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  durch  $\pi([u]) := u(1)$ . Da wir für jedes  $U$  wie oben wollen, daß  $[u]\tilde{U}$  ein Blatt über  $U$  ist, erklären wir jene Mengen in  $\tilde{X}$  als offen. Um zu zeigen, daß diese Mengen die Basis einer Topologie bilden, müssen zwei solche Umgebungen  $U_0$  und  $U_1$  mit  $y \in {}^{y_0}\tilde{U}_0 \cap {}^{y_1}\tilde{U}_1$  nehmen. Dann ist  $\pi(y) \in U_0 \cap U_1$  und daher können wir eine solche Umgebung  $U \subseteq U_0 \cap U_1$  von  $\pi(y)$  finden. Dann ist  $y \in {}^y\tilde{U}$  und  ${}^y\tilde{U} \subseteq \tilde{U}_0^{y_0} \cap \tilde{U}_1^{y_1}$ . Offensichtlich haben wir, daß  $\pi|_{{}^y\tilde{U}} : {}^y\tilde{U} \rightarrow U$  ein Homöomorphismus ist, und daher  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  eine Überlagerungsabbildung ist.

Beachte, daß wir für irgendeinen Weg  $u$ , der bei  $x_0$  startet, haben, daß  $t \mapsto [u_t]$  der Lift mit Startwert  $[\text{const}_{x_0}] =: y_0$  ist, wobei  $u_t(s) := u(ts)$ .

Also ist  $\tilde{X}$  wegzusammenhängend, da für  $[u] \in \tilde{X}$  der Weg  $[u_t]$  den Punkt  $[\text{const}_{x_0}]$  mit  $[u]$  in  $\tilde{X}$  verbindet.

Schließlich ist  $\tilde{X}$  einfachzusammenhängend: Es sei dafür  $v$  eine geschlossene Kurve durch  $y_0$ . Dann ist  $u := p \circ v$  eine geschlossene Kurve durch  $x_0$ . Es gilt  $v(t) = [s \mapsto u(ts)]$ , da beide Seiten Lifte von  $u$  mit Startpunkt  $y_0$  sind. Daher ist  $[\text{const}_{x_0}] = v(0) = v(1) = [u]$ . Da Homotopien geliftet werden können, haben wir  $\text{const}_{y_0} \sim v$  rel.  $\dot{I}$ .

**24.31 Theorem.** *Es sei  $X$  wegzusammenhängend, lokal wegzusammenhängend und semi-lokal einfachzusammenhängend. Dann existiert eine wegzusammenhängende, einfachzusammenhängende Überlagerung von  $X$ .*

*Ist  $X$  eine Lindelöf Mannigfaltigkeit so auch die universelle Überlagerung.*

*Jede einfache-zusammenhängende und wegzusammenhängende Überlagerung von  $X$  überlagert jede andere wegzusammenhängende Überlagerung.*

**Beweis.** Wir müssen für den ersten Teil nur die Lindelöf-Eigenschaft der universellen Überlagerung  $\tilde{X}$  beweisen falls  $X$  eine Lindelöf Mannigfaltigkeit ist. Dazu genügt es die  $\sigma$ -Kompaktheit zu zeigen: Sei  $X = \bigcup_i U_i$ , wo die  $U_i$  trivialisierende relativ-kompakte Umgebungen sind. Da  $X$  Lindelöf ist, kann die Indexmenge als abzählbar angenommen werden. Sei  $x_0 \in \tilde{X}$ , sodaß  $p(x_0) \in U_0$ . Es sei  $W_0$  jenes Blatt über  $U_0$ , welches  $x_0$  enthält. Wir definieren rekursiv die Menge  $W_n$  als die Vereinigung aller Blätter über  $U_i$  mit  $i \leq n$  die einen Punkt aus  $W_{n-1}$  enthalten. Jedes  $W_n$  besteht nur aus endlich vielen Blättern und ist somit kompakt. Damit ist  $\{W_i\}$  eine abzählbare Familie relativ kompakter Mengen, die  $\tilde{X}$  überdecken.

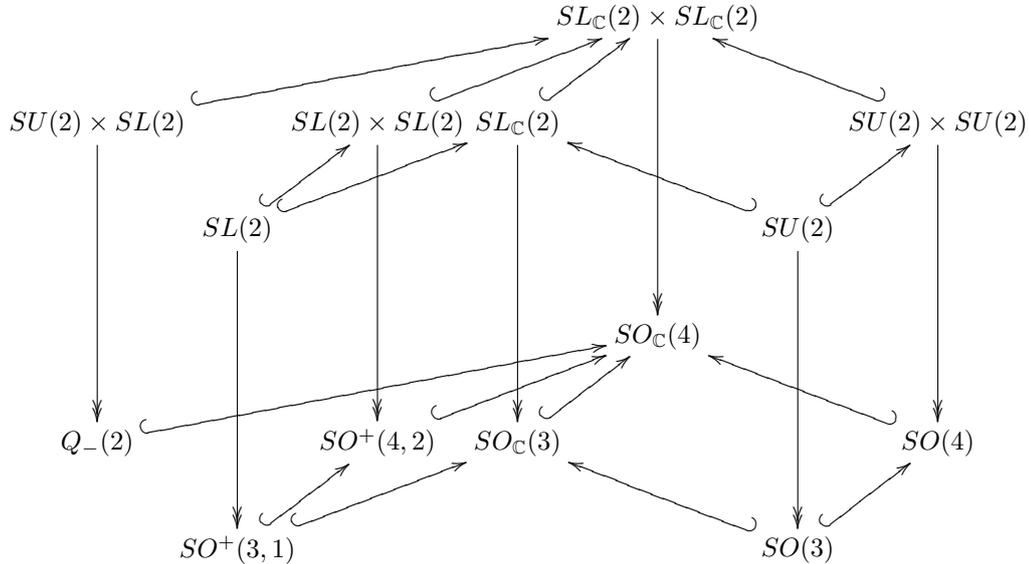
Die letzte Aussage folgt, da wir die Projektion von irgendeiner einfach-zusammenhängenden Überlagerung nach (24.7) liften können, und der Lift eine Überlagerung ist nach (24.11).  $\square$

**Folgerung.** *Es sei  $X$  einfachzusammenhängend und lokal wegzusammenhängend und  $Y \rightarrow X$  sei eine wegzusammenhängende Überlagerung. Dann ist  $p$  ein Homöomorphismus. Insbesondere ist jede einfachzusammenhängende offene Teilmenge der Basis einer Überlagerung ein trivialisierende Umgebung.*

**Beweis.** Da  $\pi_1(X, x_0) = \{1\}$  transitiv auf  $p^{-1}(x_0)$  wirkt, muß die Faser ein Punkt sein.  $\square$

**24.40 Die Überlagerungen mittels  $SL_{\mathbb{C}}(2)$**

Wir wollen nun die folgenden Überlagerungen, die im Zusammenhang mit der  $SL_{\mathbb{C}}(2)$  auftauchen beschreiben:



**Beweis von (24.40).** Es ist  $SL_{\mathbb{C}}(2)$  (und damit auch  $SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2)$ ) **einfach zusammenhängend**, denn die Auswertung  $p := \text{ev}_{x_0}$  mit  $x_0 := (1, 0)$  liefert eine Abbildung von  $G := SL_{\mathbb{C}}(2)$  nach  $\mathbb{C}^2$  und diese ist surjektiv auf  $M := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \cong S^3 \times \mathbb{R}$ ,  $e^t v \leftarrow (v, t)$  mit Rechtsinverser

$$\sigma : (a, c) \mapsto \frac{1}{a\bar{a} + c\bar{c}} \begin{pmatrix} a & -\bar{c} \\ c & \bar{a} \end{pmatrix}$$

Das Urbild unter  $p$  von  $x_0$  ist die Untergruppe

$$H := G_{x_0} := \{g : g \cdot x_0 = x_0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : b \in \mathbb{C} \right\} \cong \mathbb{C}.$$

$$G_{x_0} \hookrightarrow G \longrightarrow M$$

Folglich ist  $G$  diffeomorph zu  $H \times M \cong \mathbb{R}^3 \times S^3$  vermöge

$$g \mapsto (\sigma(p(g))^{-1}g, p(g)) \text{ und } \sigma(x) \cdot h \leftarrow (h, x),$$

denn  $p(g) \in M$ ;  $p(\sigma(p(g))^{-1}g) = \sigma(g \cdot x_0)^{-1} \cdot g \cdot x_0 = x_0$ , da  $x = p(\sigma(x)) = \sigma(x) \cdot x_0$ , also  $\sigma(p(g))^{-1}g \in H$ ;  $\sigma(p(g)) \cdot \sigma(p(g))^{-1} \cdot g = g$ ; weiters  $p(\sigma(x) \cdot h) = \sigma(x) \cdot h \cdot x_0 = \sigma(x) \cdot x_0 = x$  und schließlich  $\sigma(p(g))^{-1}g = \sigma(x)^{-1} \cdot \sigma(x) \cdot h = h$ .

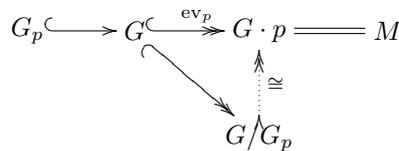
**70.1 Satz (Homogene Räume).** Sei  $H$  eine abgeschlossene Unter-Lie-Gruppe von  $G$ . Dann existiert auf der Menge der rechten Nebenklassen  $G/H := \{gH : g \in G\}$  eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur, für die  $G \rightarrow G/H$  eine Submersion ist. Es ist dann  $G \rightarrow G/H$  sogar ein Hauptfaserbündel.

**70.2 Bemerkungen**

1. Ist  $H$  zusätzlich normal in  $G$ , dann ist  $G/H$  eine Lie-Gruppe und  $G \rightarrow G/H$  ein Lie-Gruppen-Homomorphismus.
2. Die Gruppe  $G$  wirkt transitiv auf  $M := G/H$  und die Fixgruppen  $G_{\dot{g}} = \{k \in G : k \cdot \dot{g} = \dot{g}\}$  für  $\dot{g} \in M$  sind konjugiert zu  $H$ , denn

$$p(g) = \dot{g} = k \cdot \dot{g} = k \cdot p(g) = p(kg) \Leftrightarrow \exists h \in H : kg = gh \Leftrightarrow k \in gHg^{-1}$$

**70.3 Satz.** *Wirkt umgekehrt eine Lie-Gruppe  $G$  transitiv auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ , und sei  $G_p := \{g \in G : g \cdot p = p\}$  für ein beliebiges  $p \in M$ , dann gilt:  $G_p$  ist eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$  und  $G/G_p$  ist diffeomorph zu  $M$  vermöge  $gG_p \mapsto gp$ . Der Wirkung auf  $M$  entspricht die Linksmultiplikation auf  $G/G_p$ .*



**70.5 Lemma.** *Es sei  $M \rightarrow N$  ein Faserbündel mit typischer Faser  $F$ . Falls  $N$  und  $F$  zusammenhängend sind, dann ist es auch  $M$ . Falls  $N$  und  $F$  einfach zusammenhängend ist, so auch  $M$ . Allgemeiner hat man die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung (siehe [?, p.187, IV.8.6])*

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_k(F) \rightarrow \pi_k(M) \rightarrow \pi_k(N) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F) \rightarrow \dots$$

**Beweis der 1. Aussage.** Ist für ein Faserbündel  $p : M \rightarrow N$  sowohl die Basis  $N$  als auch die typische Faser  $F$  zusammenhängend, so auch der Totalraum  $M$ . Denn seien  $U$  und  $V$  nicht leer und offen in  $M$  mit  $U \cup V = M$ , dann ist  $p(U)$  und  $p(V)$  nicht leer und offen in  $N$  mit  $p(U) \cup p(V) = N$ . Weil  $N$  zusammenhängend ist, gilt  $p(U) \cap p(V) \neq \emptyset$ , also gibt es einen Punkt  $m \in p(U) \cap p(V)$ , und  $U \cap F$  und  $V \cap F$  überdecken die Faser  $F$  über  $m$  mit nicht-leeren Mengen. Da  $F$  zusammenhängend ist, haben  $U$  und  $V$  nicht-leeren Durchschnitt in  $F$  über  $m$ . Also ist  $M$  zusammenhängend. Die Aussage betreffend des einfachen Zusammenhangs sieht man wie folgt ein: Sei  $c$  ein geschlossene Kurve in  $M$ . Da  $N$  einfach zusammenhängend ist existiert eine Homotopie relativ  $\dot{I}$  zwischen  $p \circ c$  und der konstanten Kurve. Nun lifte diese Homotopie zu einer Homotopie relative  $\{0\}$  zwischen  $c$  und der konstante Kurve. Die Endwerte der Homotopie bilden eine geschlossene Kurve in der Faser, die sich dort homotop zur konstanten Abbildung verformen läßt. Verklebt man diese beiden Homotopien, so erhält man eine Homotopie relativ  $\dot{I}$ , also ist  $M$  einfach zusammenhängend.  $\square$

Daß  $SO_{\mathbb{C}}(n)$  **zusammenhängend** ist, sieht man induktiv aus der Wirkung von  $SO(n)$  auf  $\mathbb{C}^n$  mit Orbit

$$\begin{aligned}
 M &:= \{z = x + iy \in \mathbb{C}^n : b(z, z) = 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} : |x|^2 - |y|^2 = 1, \langle x, y \rangle = 0\} \\
 &\cong \{(x, y) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 0\} = TS^{n-1}
 \end{aligned}$$

und somit folgenden Bündel

$$SO_{\mathbb{C}}(n-1) \hookrightarrow SO_{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow M$$

und Induktionsanfang  $SO_{\mathbb{C}}(2) = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  nach (14.19):

$$SO_{\mathbb{C}}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}_* \right\} \cong \mathbb{C}_*,$$

denn wie für  $SO(2)$  erhalten wir die Gleichheit aus der Matrixgleichung  $g^t \cdot g = \text{id}$  und den Isomorphismus durch Konjugation mit  $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ . Dann ist

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix}$$

und  $(a + ib)(a - ib) = 1$ .

Offensichtlich haben wir eine **Wirkung**  $\rho : GL_{\mathbb{C}}(2) \times GL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow L_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}}(2))$  gegeben durch  $(T, S) \mapsto (R \rightarrow T R S^{-1})$ .

Wird diese auf  $SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2)$  eingeschränkt, so erhält sie die **quadratische Form**  $\det_{\mathbb{C}} : L_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow \mathbb{C}$  und somit auch die zugehörige **nicht degenerierte symmetrische  $\mathbb{C}$ -Bilinearform**  $b : L_{\mathbb{C}}(2) \times L_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $b(T, S) := \text{Trace}(T \cdot S^{\text{ad}})$ , wobei  $S^{\text{ad}}$  die Matrix der algebraischen Komplemente von  $S$  bezeichnet, denn  $S \cdot S^{\text{ad}} = \det(S)^2 \cdot \text{id}$ . Für  $2 \times 2$ -Matrizen ist

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{\text{ad}} = \begin{pmatrix} d & -b \\ c & a \end{pmatrix}$$

und somit diese Bilinearform durch

$$\left( \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} \right) \mapsto \text{Trace} \left( \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_2 & -b_2 \\ -c_2 & a_2 \end{pmatrix} \right) = a_1 d_2 - b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2$$

gegeben. Durch Konjugation  $A \mapsto h^{-1} \circ A \circ h$  mit dem Isomorphismus  $h : \mathbb{C}^4 \rightarrow L_{\mathbb{C}}(2)$ ,

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a = z_1 + iz_4 & b = z_2 + iz_3 \\ c = -z_2 + iz_3 & d = z_1 - iz_4 \end{pmatrix}$$

erhalten wir einen **Lie-Gruppen-Isomorphismus**  $O_b(L_{\mathbb{C}}(2))$  mit  $O_{\mathbb{C}}(4)$

Die Ableitung von  $\rho$  bei  $(\text{id}, \text{id})$  ist durch

$$\rho'(\text{id}, \text{id})(V, W)(R) = V R \text{id}^{-1} - \text{id} R \text{id}^{-1} W \text{id}^{-1} = V R - R W$$

gegeben. Diese ist **injektiv**, denn aus  $V R = R W \forall R$  folgt  $V = W \in Z(GL_{\mathbb{C}}(2)) = \{\mathbb{C} \cdot \text{id}\}$  (Wähle  $R := \text{id}$ ) nach (24.28). Wegen  $T_{\text{id}}SL_{\mathbb{C}}(2) = \{A \in L_{\mathbb{C}}(2) : \text{Trace}(A) = 0\}$  ist somit  $U = V = 0$ . Die Dimension von  $SL_{\mathbb{C}}(2) = 8 - 2 = 6$  und jene von  $SO_{\mathbb{C}}(4) = 4(4 - 1) = 12$ , denn  $T_{\text{id}}SL_{\mathbb{C}}(n) = \{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : \text{Trace}(T) = 0\}$  und  $T_{\text{id}}SO_{\mathbb{C}}(n) = \{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^t + T = 0\}$ , also ist  $\rho'(\text{id}, \text{id})$  **bijektiv**.

Damit ist aber  $\rho$  ein **lokaler Diffeomorphismus**, denn  $\rho(x) = \rho(xx_0^{-1}x_0) = \rho(xx_0^{-1}) \circ \rho(x_0)$  und Linksmultiplikation mit  $x_0^{-1}$  (bzw. mit  $\rho(x_0)$ ) ist ein Diffeomorphismus.

Folglich ist das Bild von  $\rho$  eine offene (und damit auch abgeschlossene) Untergruppe und da  $SO_{\mathbb{C}}(4)$  die Zusammenhangskomponente von  $\text{id} \in O_{\mathbb{C}}(4)$  ist, ist  $\rho$  somit **surjektiv**.

Der Kern von  $\rho$  ist durch  $\{(T, S) : T R = R S \forall R\} = \mathbb{C} \cdot (\text{id}, \text{id})$  gegeben also durch den diskreten Normalteiler  $\{\pm(\text{id}, \text{id})\} \cong \mathbb{Z}_2$  und somit ist  $\rho$  eine **2-blättrige Überlagerung** die universell ist.

**Die Überlagerung**  $SL_{\mathbb{C}}(2) = Sp_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow SO_{\mathbb{C}}(3) = SO^+(4, 1)$

Die Wirkung  $\rho$  eingeschränkt auf die Diagonale  $SL_{\mathbb{C}}(2) \subseteq SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2)$  läßt die Identität  $\text{id} \in L_{\mathbb{C}}(2)$  invariant und somit auch das Komplement der spurfreien Matrizen  $\{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : \text{Spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\} \cong \mathbb{C}^3$ .

Die Wirkung  $\rho_1 : SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow L_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}}(2))$ ,  $(T, S) \mapsto (R \mapsto TRS^*)$  läßt ebenfalls  $\det_{\mathbb{C}}$  und somit auch  $b$  invariant. Eingeschränkt auf  $SL_{\mathbb{C}}(2)$  läßt sie den Teilraum der hermite'schen und der anti-hermite'schen Matrizen invariant. Die Bilinearform  $b$  hat auf  $\{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : T^* = T\}$  Signatur 3 und somit ist  $SO_b(\{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : T^* = T\}) \cong SO^+(4, 3) = SO^+(4, 1)$ .

**Die Überlagerung**  $SL(2) \times SL(2) \rightarrow SO^+(4, 2)$

Da das Bild der Wirkung  $\rho$  in  $L_{\mathbb{C}}$  liegt, und die Einschränkung auf die Untergruppe  $SL(2) \times SL(2)$  den Real- und den Imaginärteil invariant läßt, ist  $\rho$  eine Komplexifizierung dieser Einschränkung. Die Form  $b$  ist reellwertig auf  $L(2)$  und hat Signatur 2. Also ist  $SO_b(L(2)) \cong SO^+(4, 2)$ .

**Die Überlagerung**  $SL(2) = SU(2, 1) = Sp(2) \rightarrow SO^+(3, 1)$

Die Einschränkung der Wirkung auf die Diagonale  $SL(2)$  läßt ebenfalls den Realteil invariant. Die Form  $b$  ist reellwertig auf  $\{T \in L(2) : \text{Spur}(T) = 0\}$  und hat Signatur 2. Also ist  $SO_b(\{T \in L(2) : \text{Spur}(T) = 0\}) = SO^+(3, 2) \cong SO^+(3, 1)$ .

**Die Überlagerung**  $SU(2) \times SU(2) \rightarrow SO(4)$

Der Raum  $\mathbb{H}$  der Quaternionen ist ein Teilraum von  $L_{\mathbb{C}}(2)$  und wird von  $SU(2) \times SU(2)$  invariant gelassen. Die Bilinearform  $b$  ist positiv definit auf  $\mathbb{H}$  und somit ist  $SO_b(\mathbb{H}) \cong SO(4)$ .

**Die Überlagerung**  $SU(2) = SL_{\mathbb{H}}(1) = Q(1) = S^3 \rightarrow SO(3)$

Die Einschränkung der Wirkung auf die Diagonale  $SU(2)$  läßt  $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$  invariant und somit auch das  $b$ -orthogonale Komplement. Es ist  $SO_b(\mathbb{H}/\mathbb{R}) \cong SO(3)$ .

**Die Überlagerung**  $SU(2) \times SL(2) \rightarrow Q_-(2)$

Es ist  $SU(2, 1) = \{T \in SL_{\mathbb{C}}(2) : T^*JT = J\}$  und das Bild von  $SU(2, 1) \times SU(2)$  unter der Wirkung  $\rho$  läßt zusätzlich die sesquilinearform  $q : (R_1, R_2) \mapsto \frac{1}{2i} \text{Spur}(JR_1R_2^*)$  invariant, denn

$$\begin{aligned} q(TR_1S^{-1}, TR_2S^{-1}) &= \text{Spur}(JTR_1S^{-1}(TR_2S^{-1})^*) \\ &= \text{Spur}(JTR_1S^{-1}(S^*)^{-1}R_2^*T^*) \\ &= \text{Spur}(JTR_1(S^*S)^{-1}R_2^*T^*) \\ &= \text{Spur}(T^*JTR_1R_2^*) = \text{Spur}(JR_1R_2^*) \\ &= q(R_1, R_2). \end{aligned}$$

Die Matrizen

$$e_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad e_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}; \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

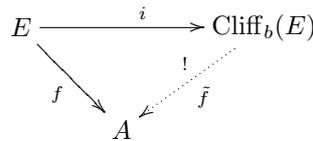
bilden eine orthonormal Basis bezüglich  $q$ . Und somit hat  $SU(2) \times SL(2)$  Werte in  $SO_{\mathbb{C}}(4) \cap L_{\mathbb{H}}(2) = Q_-(2)$ .

Als nächstes wollen wir die universelle (zweiblättrige) Überlagerung der  $O(n, k)$  beschreiben. Dazu benötigen wir die folgende Algebra:

**24.41 Die Clifford-Algebra.** *Es sei  $b : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  eine symmetrische Bilinearform auf einem endlich dimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $E$ . Dann existiert eine Lösung folgenden universellen Problems: Es ist  $\text{Cliff}_b(E)$  eine assoziative Algebra mit 1 zusammen mit einer linearen Abbildung  $i : E \rightarrow \text{Cliff}_b(E)$  die*

$$i(x)^2 = b(x, x) 1$$

erfüllt. Und für jede andere lineare Abbildung  $f : E \rightarrow A$  die (\*) erfüllt mit Werten in einer assoziativen Algebra  $A$  mit 1, existiert ein eindeutiger Algebra-Homomorphismus  $\tilde{f}$ , welcher folgendes Diagramm kommutativ macht:



Ist  $(e_i)_{i=1}^m$  eine Basis von  $E$ , so ist  $(e_{i_1} \cdots e_{i_k})_{i_1 < \dots < i_k}$  eine Basis von  $\text{Cliff}_b(E)$ .

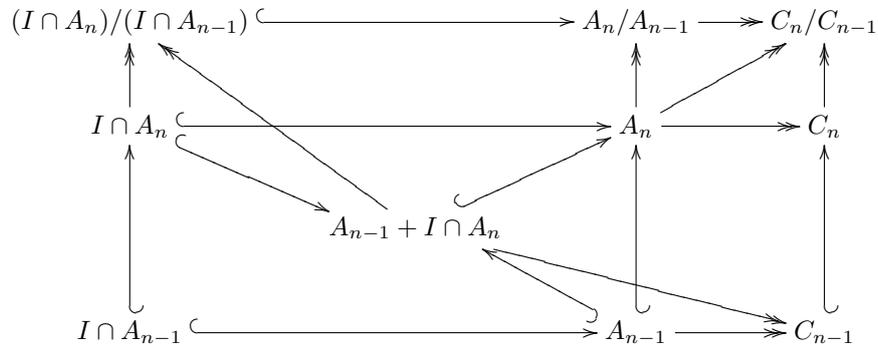
**Beweis.** Wir wählen das Ideal  $I$  in der Tensoralgebra  $\otimes E = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_{k=1}^n E$ , welches von  $\{v \otimes v - b(v, v) 1 : v \in E\}$  erzeugt wird, und definieren  $\text{Cliff}_b(E) := \otimes E / I$  und  $i : E \rightarrow \text{Cliff}_b(E)$  durch  $E \subseteq \otimes E \rightarrow \otimes E / I$ . Dann ist offensichtlich  $\text{Cliff}_b(E)$  eine assoziative Algebra mit 1 und  $i : E \rightarrow \text{Cliff}_b(E)$  erfüllt (\*), da wir die Relationen  $v \otimes v \sim b(v, v) 1$  für alle  $v \in E$  herausfaktorisiert haben.

Wegen  $4b(v, w) 1 = b(v + w, v + w) 1 - b(v - w, v - w) 1 \sim (v + w)^2 - (v - w)^2 = 2(v \cdot w + w \cdot v)$  haben wir die Relation  $v \cdot w + w \cdot v = 2b(v, w) \cdot 1$  in  $\text{Cliff}_b(E)$  und somit ist klar, daß die  $e_{i_1} \cdots e_{i_k}$  mit  $i_1 < \dots < i_k$  bereits  $\text{Cliff}_b(E)$  erzeugen.

Um die lineare Unabhängigkeit zu zeigen, beachte man zuerst, daß  $\text{Cliff}_0(E)$  die äußere Algebra  $\bigwedge E$  ist. Wenn wir mit  $C_n$  das Bild von  $\bigoplus_{k=0}^n \otimes^k E$  in  $\text{Cliff}_b(E)$  bezeichnen. So ist  $\text{Cliff}_b(E) = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$  und die Abbildung  $\bigwedge^n E \rightarrow \otimes^n E \subseteq C_n \rightarrow C_n / C_{n-1}$  ist eine Bijektion. In der Tat ist nach den Isomorphiesätzen

$$\begin{aligned} C_n / C_{n-1} &\cong (A_n / I \cap A_n) / (A_{n-1} / I \cap A_{n-1}) \\ &\cong (A_n / I \cap A_n) / ((A_{n-1} + I \cap A_n) / I \cap A_n) \\ &\cong A_n / (A_{n-1} + I \cap A_n) \\ &\cong A_n / (A_{n-1} + J_n) \cong \bigwedge^n E, \end{aligned}$$

wobei  $J_n \subseteq \otimes^n E$  gerade jenes Ideal ist, welches  $\bigwedge^n E = \otimes^n E / J_n$  beschreibt.



Somit ist  $\text{Cliff}_b(E)$  als Vektorraum isomorph zu  $\bigoplus_{n=1}^{\infty} C_n / C_{n-1} \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigwedge^n E = \bigwedge E$ , und somit bilden die angegebenen Elemente eine Basis.

Die universelle Eigenschaft folgt nun sofort, da  $f$  zu einem Algebra-Homomorphismus  $\otimes E \rightarrow A$  fortgesetzt werden kann, und diese die Erzeuger des Ideals annihiliert.  $\square$

**24.42 Definition.** Es gibt eine Antiinvolution  $*$  :  $\text{Cliff}_b(E) \rightarrow \text{Cliff}_b(E)$ , welche durch  $v_1 \cdots v_k \mapsto (-1)^k v_k \cdots v_1$  gegeben ist, also durch die Zusammensetzung von

$$\alpha : v_1 \cdots v_k \mapsto (-1)^k v_1 \cdots v_k$$

mit

$$\tau : v_1 \cdots v_k \mapsto v_k \cdots v_1.$$

Wir identifizieren  $E$  mit seinem Bild in  $\text{Cliff}_b(E)$  und bezeichnen mit  $\text{Pin}_b(E)$  die Gruppe

$$\text{Pin}_b(E) := \{x \in \text{Cliff}_b(E) : x \cdot x^* = \pm 1 = x^* \cdot x, \quad x \cdot E \cdot x^* \subseteq E\}.$$

Dabei darf  $\pm 1$  nur für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  und  $b$  mit Signatur auch den Wert  $-1$  annehmen. Weiters sei  $\rho : \text{Pin}_b(E) \rightarrow GL(E)$  definiert durch  $\rho(x)(v) := \alpha(x) \cdot v \cdot x^*$ . Mit  $\text{Spin}_b(E)$  bezeichnen wir dann die Gruppe

$$\text{Spin}_b(E) := \rho^{-1}(SO_b(E)).$$

**24.43 Theorem.** Die Abbildung  $\rho : \text{Pin}_b(E) \rightarrow O_b(E)$ , sowie ihre Einschränkung  $\rho : \text{Spin}_b(E) \rightarrow SO_b(E)$  sind zweiblättrige Überlagerungen.

**Proof.** Wir zeigen zuerst, daß  $\rho(x) \in O_b(E)$  gilt:

$$\begin{aligned} b(\rho(x)(v), \rho(x)(v)) &= \rho(x)(v) \cdot \rho(x)(v) = -\rho(x)(v) \cdot \rho(x)(v)^* \\ &= -\alpha(x) \cdot v \cdot x^* \cdot (\alpha(x) \cdot v \cdot x^*)^* \\ &= -\alpha(x) \cdot v \cdot x^* \cdot x \cdot v^* \alpha(x)^* = -\alpha(x) \cdot v \cdot v^* \alpha(x)^* \\ &= b(v, v) \alpha(x \cdot x^*) = b(v, v). \end{aligned}$$

Es wird  $O_b(E)$  nach (14.10) durch Spiegelungen  $T_x : v \mapsto v - 2 \frac{b(v,x)}{b(x,x)} x$  mit  $b(x, x) \neq 0$  erzeugt. Falls  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  ist oder  $-b$  positiv definit ist, so können wir  $b(x, x) = -1$  voraussetzen. Dann liegt  $x \in \text{Pin}_b(E)$ , denn  $x \cdot x^* = -x \cdot x = -b(x, x) = 1$ . Falls  $-b$  Signatur hat, dann haben wir in der Definition von  $\text{Pin}_b(E)$  die Gleichung  $x \cdot x^* = \pm 1$  verwendet. Es ist  $\rho(x)(x) = \alpha(x) \cdot x \cdot x^* = \alpha(x) = -x$  und für  $b(v, x) = 0$  ist

$\rho(x)(v) = \alpha(x) \cdot v \cdot x^* = -x \cdot v \cdot x^* = v \cdot x \cdot x^* = v$ , also ist  $T_x = \rho(x)$ .

Es sei  $x \in \text{Ker } \rho$ , dann setzen wir  $x = x_+ + x_- \in \text{Cliff}_b^+(E) \oplus \text{Cliff}_b^-(E)$ . Aus  $x \cdot x^* = 1$  folgt  $1 = x_+ \cdot x_+^* + x_- \cdot x_-^*$  und  $0 = x_+ \cdot x_-^* + x_- \cdot x_+^*$ ; und aus  $\alpha(x) \cdot v \cdot x^* = v$  für alle  $v \in E$  folgt  $v = x_+ \cdot v \cdot x_+^* - x_- \cdot v \cdot x_-^*$  und  $0 = x_+ \cdot v \cdot x_-^* - x_- \cdot v \cdot x_+^*$ . Somit ist  $v \cdot x_+ = x_+ \cdot v$  und damit liegt  $x_+$  im Zentrum von  $\text{Cliff}_b(E)$ , und  $v \cdot x_- = -x_- \cdot v$ . Somit ist  $x_+ \in \mathbb{K}$  und  $x_- = 0$ . Aus  $1 = x^2 = x_+^2$  folgt  $x = \pm 1$ .

Es ist  $\text{Pin}_b(E)$  und  $\text{Spin}_b(E)$  zusammenhängend, denn  $t \mapsto (\cos(t)v + \sin(t)w) \cdot (\cos(t)v - \sin(t)w)$  für  $t \in [0, \pi/2]$  verbindet  $-1$  mit  $1$  falls  $v, w \in E$  so gewählt werden daß  $b(v, w) = 0$  und  $b(v, v) = -1 = b(w, w)$  ist.  $\square$

## IV. Vektorfelder

Gewöhnliche Differentialgleichungen werden auf Mannigfaltigkeiten durch Vektorfelder beschrieben. Um von der Glattheit jener sprechen zu können, benötigen wir das Tangentialbündel als Mannigfaltigkeit bzw. besser als Vektorbündel und diese beiden Dinge stellen wir in den ersten beiden Abschnitten bereit. Die nächsten beiden sind den Differentialgleichungen und ihren Lösungen, den lokalen Flüssen, gewidmet. Es wird dann die Lie-Klammer als Obstruktion gegen das Vertauschen der lokalen Flüsse zweier Vektorfelder behandelt. Schließlich folgt noch die Verallgemeinerung zu Integralmannigfaltigkeiten von Teilvektorbündeln und der zentrale Satz von Frobenius über deren Existenz.

### 25. Tangentialbündel

#### 25.2 Definition (Tangentialbündel)

Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit, so ist der TANGENTIALRAUM von  $M$  definiert durch:

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_p M := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M.$$

Auf  $TM$  existiert eine Abbildung  $\pi_M : TM \rightarrow M$ , definiert durch  $\pi_M : \{p\} \times T_p M \ni (p, v) \mapsto p \in M$ , die sogenannte FUSSPUNKTABBILDUNG. Jedes glatte  $f : M \rightarrow N$  mit der TANGENTIALABBILDUNG von  $f$  bei  $p$ :  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  induziert eine Abbildung  $Tf : TM \rightarrow TN$ , die sogenannte TANGENTIALABBILDUNG von  $f$ , die durch  $(Tf)(p, v) := (f(p), T_p f(v))$  definiert ist. Es ist also  $Tf|_{T_p M} = T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$  linear.

#### 25.5 Definition (Vektorbündel)

Ein Faserbündel  $p : E \rightarrow M$  heißt VEKTORBÜNDEL (VB), falls alle Fasern  $p^{-1}(x) =: E_x$  Vektorräume sind und für jedes  $x_0 \in M$  eine offene Umgebung  $U \subseteq M$  sowie eine lokale Trivialisierung  $\psi$  existiert,

$$\begin{array}{ccc} U \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow[\cong]{\psi} & p^{-1}(U) \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow p \\ & & U \end{array}$$

die faserweise linear ist, d.h.  $\psi_x := \psi(x, \cdot) : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$  ist linear für jedes  $x \in U$ . So eine lokale Trivialisierung heißt dann VEKTORBÜNDELKARTE.

Unter einem Vektorbündel  $E \rightarrow M$  kann man sich eine Familie  $\{E_x : x \in M\}$  von Vektorräumen vorstellen, welche durch  $M$  in einen gewissen Sinn glatt parametrisiert ist.

**25.6 Satz (Tangentialbündel als Vektorbündel).**

Das Tangentialbündel  $TM \rightarrow M$  jeder Mannigfaltigkeit  $M$  ist ein Vektorbündel.

**Beweis.** Sei  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \xrightarrow{\cong} V \subseteq M$  eine lokale Trivialisierung von  $M$ . Dann erhalten wir eine lokale Parametrisierung  $\Psi$  von  $TM$  als oberste Zeile des folgenden kommutativen Diagramms:

$$\begin{array}{ccccc}
 V \times \mathbb{R}^m & \xleftarrow[\cong]{\varphi \times \text{id}} & U \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow[\cong]{T\varphi} & TM|_V \\
 \text{pr}_1 \downarrow & & \text{pr}_1 \downarrow & & \downarrow \pi \\
 V & \xleftarrow[\cong]{\varphi} & U & \xrightarrow[\cong]{\varphi} & V
 \end{array}$$

Bleibt zu zeigen, daß  $v \mapsto \Psi(x, v)$  von  $\mathbb{R}^m \rightarrow \{x\} \times T_x M$  linear ist. Diese Abbildung ist aber

$$v \mapsto (\varphi^{-1}(x), v) \mapsto T\varphi(\varphi^{-1}(x), v) = \underbrace{(\varphi(\varphi^{-1}(x)), \varphi'(\varphi^{-1}(x))(v))}_{=x}$$

und als Ableitung klarerweise linear. □

**25.7 Bemerkungen**

1. Zu zwei Vektorbündelkarten  $\psi_U : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow p^{-1}(U)$  und  $\psi_V : V \times \mathbb{R}^M \rightarrow p^{-1}(V)$  ist der Vektorbündelkartenwechsel

$$\psi_V^{-1} \circ \psi_U : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U \cap V) \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$$

von der Form

$$(x, v) \mapsto \left( \underbrace{(\text{pr}_1 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, v)}_{=x}, \underbrace{(\text{pr}_2 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, v)}_{=: \psi_{VU}(x) \cdot v} \right).$$

Die wesentliche Komponente  $(\text{pr}_2 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U) : (U \cap V) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  haben wir dabei durch  $\psi_{UV} := (\text{pr}_2 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U)^\vee : U \cap V \rightarrow L(k, k)$  beschrieben (beachte dabei, daß  $\psi_V^{-1} \circ \psi_U$  faserweise linear ist). Diese Abbildung  $\psi_{UV}$  heißt TRANSITIONSFUNKTION. Es hat  $\psi_{UV}$  Werte in  $GL(k) \subset L(k, k)$ , denn die Inverse zu  $\psi_{UV}(x)$  ist  $\psi_{UV}(x)$ .

2. Im Falle des Tangentialbündels  $TM \rightarrow M$  erhalten wir Transitionsfunktionen wie folgt:

$$\begin{aligned}
 \psi_i(x, v) &:= (x, \varphi_i'(\varphi_i^{-1}(x))(v)) \quad \Rightarrow \\
 (x, \psi_{i,j}(x)(v)) &:= (\psi_i^{-1} \circ \psi_j)(x, v) \\
 &= \left( x, (\varphi_i'(\varphi_i^{-1}(x)))^{-1} (\varphi_j'(\varphi_j^{-1}(x)))(v) \right) \\
 &= (x, (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)'(\varphi_j^{-1}(x))(v)) \quad \Rightarrow \\
 \psi_{i,j}(x) &:= (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)'(\varphi_j^{-1}(x)).
 \end{aligned}$$

Also sind diese im Wesentlichen die Ableitung des Kartenwechsels  $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$  von  $M$ .

3. Die Transitionsfunktionen erfüllen allgemein die Kozykel-Gleichungen:

$$\begin{aligned}\psi_{U_3 U_2}(x) \circ \psi_{U_2 U_1}(x) &= \psi_{U_3 U_1}(x) \text{ für alle } x \in U_1 \cap U_2 \cap U_3 \\ \psi_{UU}(x) &= \text{id}_{\mathbb{R}^n} \text{ für alle } x \in U\end{aligned}$$

4. Nach Konstruktion ist die Abbildung  $\hat{\psi}_{UV} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  mit  $\hat{\psi}_{UV} : (x, v) \mapsto \psi_{VU}(x) \cdot v$  glatt. Und wir behaupten nun, daß dies dazu äquivalent ist, daß  $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow GL(k) \subseteq L(k, k)$  selbst glatt ist. Um das zu beweisen, bezeichnen wir mit  $ev$  die glatte (da bilineare) Evaluationsabbildung  $ev : L(k, k) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k, (A, v) \mapsto A \cdot v$ .

( $\Leftarrow$ ) gilt, da

$$\hat{\psi}_{VU} = ev \circ (\psi_{VU} \times \text{id}_{\mathbb{R}^k}) : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow L(k, k) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

( $\Rightarrow$ ) Es ist  $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow L(k, k) C^\infty$ , falls  $ev_y \circ \psi_{VU}$  glatt ist  $\forall y \in \mathbb{R}^k$ . Das ist der Fall, denn

$$\begin{aligned}(ev_y \circ \psi_{VU})(x) &= \psi_{VU}(x) \cdot y = \hat{\psi}_{VU}(x, y) \\ \Rightarrow ev_y \circ \psi_{VU} &= \hat{\psi}_{VU}(-, y) \text{ ist } C^\infty \quad \forall y.\end{aligned}$$

5. Sei nun  $M$  eine Mannigfaltigkeit und  $p : E \rightarrow M$  eine auf einer Menge  $E$  definierte Abbildung so, daß eine Familie von fasertreuen Abbildungen  $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U)$  existiert, wobei die  $U$  eine offene Überdeckung von  $M$  bilden und die zugehörigen Transitionsfunktionen  $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow GL(k)$  wohldefiniert und glatt sind.

Dann können wir  $E$  auf eindeutige Weise zu einer Mannigfaltigkeit machen, sodaß  $p : E \rightarrow M$  ein Vektorbündel mit Vektorbündelkarten  $\psi_U$  wird:

Als Parametrisierungen von  $E$  können wir  $\psi_U \circ (\varphi \times \mathbb{R}^k)$  verwenden, wobei die  $\psi_U$  die gegebenen fasertreuen Abbildungen und  $\varphi$  Parametrisierungen von  $M$  sind. Die Kartenwechselabbildungen sind dann  $(\psi_V \circ (\varphi_2 \times \mathbb{R}^k))^{-1} \circ (\psi_U \circ (\varphi_1 \times \mathbb{R}^k)) = (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1, \hat{\psi}_{VU} \circ ((\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1) \times \mathbb{R}^k))$ . Nach Konstruktion sind somit die  $\psi_U$  Faserbündelkarten und wir können die Fasern  $E_x$  vermögen diesen zu Vektorräumen machen und zwar so, daß die  $\psi_U$  faserlinear werden.

6. Aus (16.7) wissen wir, daß sich eine Mannigfaltigkeit aus ihren Kartenwechseln zurückgewinnen läßt. Bei Transitionsfunktionen eines VB haben wir eine ähnliche Situation: Sei  $\mathcal{U}$  eine offene Überdeckung von  $M$ . Ein Kozykel von Transitionsfunktionen, d.h. eine Familie von glatten Funktionen  $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow GL(k)$  für  $U, V \in \mathcal{U}$ , welche die Kozykel-Gleichungen erfüllt, definiert ein bis auf Isomorphie eindeutiges Vektorbündel.

Um das zu zeigen, definieren wir:  $E_x := \{(U, w) : x \in U, w \in \mathbb{R}^k\} / \sim$ , wobei

$$(U, w) \sim (V, w') \Leftrightarrow w' = \psi_{UV}(x) \cdot w.$$

Es ist  $E_x$  ein Vektorraum, da  $\psi_U(x) : w \mapsto [(U, w)]$ , ein Vektorraum-Isomorphismus ist  $\mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ . Die disjunkte Vereinigung

$$E := \bigsqcup_{x \in M} E_x := \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times E_x)$$

ist ein Vektorbündel über  $M$  mit der Fußpunktabbildung  $E \ni (x, v) \mapsto x \in M$ . Es ist  $E|_U := p^{-1}(U) = \bigsqcup_{x \in U} E_x \cong U \times \mathbb{R}^k$ . Wir erhalten folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} (x, \psi_U(x) \cdot v) & \xleftarrow{\psi_U} & (x, v) \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow \text{pr}_1 \\ & x & \end{array}$$

und sehen, daß  $\psi_U$  Trivialisierung ist. Für den Kartenwechsel gilt:

$$(\psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, w) = \psi_V^{-1}(x, \psi_U(x) \cdot w) = (x, w'),$$

wobei aus  $[(V, w')] = [(U, w)]$  folgt, daß  $(x, w) \mapsto (x, \psi_{VU}(x) \cdot w)$ .

## 29. Lie-Klammer

In (20.6) haben wir gesehen, daß wir  $T_p M$  mit  $\text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  identifizieren können. Und zwar war für lokale Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m)$  die Wirkung eines Tangentialvektors  $v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \in T_p M$  auf  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  gegeben durch:

$$\begin{aligned} v(f) &= \left( \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right) (f) = \sum_i v^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (f) \text{ und insbesondere} \\ v(u^j) &= \sum_i v^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (u^j) = v^j, \text{ denn} \\ \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (u^j) &= \partial_i(u^j \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i(\text{pr}_j)(\varphi^{-1}(p)) = \delta_i^j. \end{aligned}$$

**29.1 Satz (Vektorfelder als Derivationen).** *Es gibt eine bilineare Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}), \\ (\xi, f) &\mapsto \xi \cdot f = \xi(f) \quad (: p \mapsto \xi_p(f) \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

*Beachte, daß  $\xi \cdot f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  wohingegen  $f \cdot \xi \in \mathfrak{X}(M)$ . Diese bilineare Abbildung induziert einen  $\mathbb{R}$ -linearen Isomorphismus von  $\mathfrak{X}(M)$  mit*

$$\text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R})) := \{ \partial \in L(C^\infty(M, \mathbb{R})) : \partial(f \cdot g) = \partial(f) \cdot g + f \cdot \partial(g) \}.$$

*Außerdem gilt:  $(f \cdot \xi) \cdot g = f \cdot (\xi \cdot g)$ , d.h. dieser Isomorphismus ist sogar  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear, wobei  $\text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$  durch  $(f \cdot \partial)(g) := f \cdot \partial(g)$  zu einem Modul über der kommutativen Algebra  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  gemacht wird.*

**Beweis.** Wir definieren:

$$\xi(f)(x) = (\xi(f))(x) := \xi(x)(f) = (T_x f)(\xi(x)) = (\text{pr}_2 \circ T f \circ \xi)(x).$$

Also ist  $\xi(f) = \text{pr}_2 \circ T f \circ \xi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

Die Zuordnung  $(\xi, f) \mapsto \xi(f)$  ist linear in  $\xi$ , da  $T_x f$  linear ist. Sie ist linear in  $f$ , da  $\xi(x) \in \text{Der}_x$ , also linear ist.

Die induzierte Abbildung  $f \mapsto \xi(f)$  ist eine Derivation, denn

$$\begin{aligned}\xi(fg)(x) &= \xi(x)(fg) = \xi(x)(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \xi(x)(g) \\ &= \xi(f)(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \xi(g)(x) \\ &= (\xi(f) \cdot g)(x) + (f \cdot \xi(g))(x) \\ &= (\xi(f)g + f\xi(g))(x).\end{aligned}$$

Die induzierte Abbildung  $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$  ist surjektiv:

Sei  $\partial \in \text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$  gegeben. Wir suchen ein Vektorfeld  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ , welches  $\xi(x)(f) = \partial(f)(x)$  erfüllt. Also ist

$$\xi(x) = \text{ev}_x \circ \partial \in \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \cong T_x M.$$

Verbleibt zu zeigen, daß  $\xi$  glatt ist. Seien dazu  $(u^1, \dots, u^m)$  lokale Koordinaten. Dann ist  $\xi(x) = \sum_i \xi(x)^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x$ , und die Komponenten  $\xi(x)^i = (\text{ev}_x \circ \partial)(u^i) = \partial(u^i)(x)$  sind glatt in  $x$ . Also ist  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ . Daß die beiden Abbildungen  $\xi \leftrightarrow \partial$  invers zueinander sind, ist klar.

Schließlich können wir noch folgende Umformung durchführen:

$$\begin{aligned}(f \cdot \xi)(g)|_p &= (f \cdot \xi)_p \cdot g = (f_p \cdot \xi_p) \cdot g = f(p) \cdot (\xi_p \cdot g) \\ &= f(p) \cdot (\xi \cdot g)_p = (f \cdot \xi(g))|_p. \quad \square\end{aligned}$$

## 29.2 Folgerung (Raum der Vektorfelder als Lie-Algebra).

Durch die Zuordnung:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M), \\ (\xi, \eta) &\rightarrow [\xi, \eta] \\ [\xi, \eta] : f &\mapsto (\xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))),\end{aligned}$$

wird eine bilineare Abbildung definiert, die den Raum  $\mathfrak{X}(M)$  zu einer LIE-ALGEBRA macht. D.h.:

1. *Schiefsymmetrie:*  $[\xi, \eta] + [\eta, \xi] = 0$ ;
2. *“Jacobi-Identität”:*  $[\xi, [\eta, \chi]] + [\eta, [\chi, \xi]] + [\chi, [\xi, \eta]] = 0$ ;
3. *Zusätzlich gilt:*  $[f\xi, g\eta] = fg \cdot [\xi, \eta] + f\xi(g) \cdot \eta - g\eta(f) \cdot \xi$ .

**Beweis.** Wir führen den Beweis für den Raum  $\text{Der}(A)$  der Derivationen einer allgemeinen assoziativen Algebra  $A$ . Dazu definieren wir für  $\xi, \eta \in \text{Der}(A)$  die LIE-KLAMMER von  $\xi$  mit  $\eta$  als  $[\xi, \eta] := \xi \circ \eta - \eta \circ \xi$ .

Dann gilt  $[\xi, \eta] \in \text{Der}(A)$ , denn klarerweise ist  $[\xi, \eta]$  linear und es gilt:

$$\begin{aligned}[\xi, \eta](f \cdot g) &= \xi(\eta(f \cdot g)) - \eta(\xi(f \cdot g)) \\ &= \xi(f \cdot \eta(g)) + \xi(\eta(f) \cdot g) - \eta(f \cdot \xi(g)) - \eta(\xi(f) \cdot g) \\ &= f \cdot \xi(\eta(g)) + \xi(f)\eta(g) + \eta(f)\xi(g) + \xi(\eta(f)) \cdot g \\ &\quad - f \cdot \eta(\xi(g)) - \eta(f)\xi(g) - \xi(f)\eta(g) - \eta(\xi(f)) \cdot g \\ &= f \cdot [\xi, \eta](g) + [\xi, \eta](f) \cdot g.\end{aligned}$$

Die Abbildung  $(\xi, \eta) \mapsto [\xi, \eta]$  ist bilinear, denn die Komposition in  $L(A, A)$  ist bilinear und die Subtraktion in  $L(A, A)$  ist linear.

Sie ist schiefsymmetrisch, denn

$$[\xi, \eta] = \xi \circ \eta - \eta \circ \xi = -(\eta \circ \xi - \xi \circ \eta) = -[\eta, \xi]$$

und erfüllt die Jacobi-Gleichung, denn:

$$\begin{aligned} & [\xi, [\eta, \chi]] + [\eta, [\chi, \xi]] + [\chi, [\xi, \eta]] \\ &= [\xi, \eta \circ \chi - \chi \circ \eta] + [\eta, \chi \circ \xi - \xi \circ \chi] + [\chi, \xi \circ \eta - \eta \circ \xi] \\ &= \xi \circ (\eta \circ \chi - \chi \circ \eta) - (\eta \circ \chi - \chi \circ \eta) \circ \xi \\ &\quad + \eta \circ (\chi \circ \xi - \xi \circ \chi) - (\chi \circ \xi - \xi \circ \chi) \circ \eta \\ &\quad + \chi \circ (\xi \circ \eta - \eta \circ \xi) - (\xi \circ \eta - \eta \circ \xi) \circ \chi \\ &= 0 \end{aligned}$$

Zuletzt zeigen wir noch Punkt (3). Dazu rechnen wir:

$$\begin{aligned} ([f \cdot \xi, g \cdot \eta])(h) &= ((f \cdot \xi) \circ (g \cdot \eta) - (g \cdot \eta) \circ (f \cdot \xi))(h) = \\ &= (f \cdot \xi)((g \cdot \eta)(h)) - (g \cdot \eta)((f \cdot \xi)(h)) \\ &= (f \cdot \xi)(g \cdot \eta(h)) - (g \cdot \eta)(f \cdot \xi(h)) \\ &= f \cdot \xi(g) \cdot \eta(h) + f \cdot g \cdot \xi(\eta(h)) \\ &\quad - g \cdot \eta(f) \cdot \xi(h) - g \cdot f \cdot \eta(\xi(h)) \\ &= (f \cdot g \cdot [\xi, \eta] + f \cdot \xi(g) \cdot \eta - g \cdot \eta(f) \cdot \xi)(h). \quad \square \end{aligned}$$

### Bemerkung

Bezüglich der VB-Kartendarstellung sieht  $[\xi, \eta]$  folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= \left[ \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_k \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right] \underline{\underline{\text{Bilinearität}}} \\ &= \sum_{i,k} \left[ \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right] \\ &= \sum_{ik} \left( \xi^i \eta^k \left[ \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right] + \xi^i \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \cdot \eta^k \right) \frac{\partial}{\partial u^k} - \eta^k \left( \frac{\partial}{\partial u^k} \cdot \xi^i \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\ &= \sum_k \sum_i \left( \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \eta^k - \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^k \right) \frac{\partial}{\partial u^k}, \quad \text{da } \left[ \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right] = 0. \end{aligned}$$

Es ist der Koeffizient von  $[\xi, \eta]$  bezüglich  $\frac{\partial}{\partial u^k}$  gerade  $[\xi, \eta]^k = \sum_i \left( \xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^k}{\partial u^i} \right)$ .

Man kann umgekehrt diese lokale Formel dazu verwenden, die Lieklammer zu definieren. Man muß dazu aber die Verträglichkeit mit Kartenwechsel nachrechnen. Dies

geht wie folgt:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\bar{i}, \bar{j}} \left( \bar{\xi}^{\bar{i}} \frac{\partial \bar{\eta}^{\bar{j}}}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} - \bar{\eta}^{\bar{i}} \frac{\partial \bar{\xi}^{\bar{j}}}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \\
 &= \sum_{\bar{i}, \bar{j}} \left( \sum_i \xi^i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \left( \sum_j \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \eta^j \right) - \sum_i \eta^i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \left( \sum_j \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \xi^j \right) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \\
 &= \sum_j \left( \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \sum_j \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \eta^j \right) - \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \sum_j \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \xi^j \right) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \\
 &= \sum_j \left( \sum_i \xi^i \sum_j \left( \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^i \partial u^j} \eta^j + \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \eta^j \right) \right. \\
 &\quad \left. - \sum_i \eta^i \sum_j \left( \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^i \partial u^j} \xi^j + \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^j \right) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \\
 &= \sum_{i,j} \left( \xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}
 \end{aligned}$$

Für offenes  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  gilt also:  $[\xi, \eta]_x^k = \sum_i (\xi_x^i \partial_i \eta^k|_x - \eta_x^i \partial_i \xi^k|_x) = (\eta^k)'(x)(\xi_x) - (\xi^k)'(x)(\eta_x)$ , d.h.  $[\xi, \eta](x) = \eta'(x) \cdot \xi_x - \xi'(x) \cdot \eta_x$ .

### Beispiel

Es gilt:  $[\xi, \eta]$  ist nicht vollständig, wenn  $\xi$  und  $\eta$  wie in Punkt (3) der Bemerkung (28.6) sind:

$$\begin{aligned}
 [\xi, \eta] &= y \frac{\partial}{\partial x} \circ \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} \circ y \frac{\partial}{\partial x} = yx \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial x} \\
 c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \text{ ist Lösungskurve} &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} c_1(t) = -c_1^2(t)/2 \\ \frac{d}{dt} c_2(t) = c_1(t) \cdot c_2(t) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Es folgt:  $c_1(t) = \frac{2}{(t+A)}$  und  $c_2(t) = (t+A)^2 \cdot B$ . Aus der Anfangsbedingung  $c(0) = (x, y)$  ergibt sich  $A = \frac{2}{x}$  und  $B = \frac{x^2 y}{4}$ . Somit ist

$$c_{(x,y)}(t) = \text{Fl}^{[\xi, \eta]}(t; x, y) = \left( \frac{2x}{2+tx}, \left( t + \frac{2}{x} \right)^2 \frac{x^2 y}{4} \right).$$

Für  $t = -\frac{2}{x}$  ist der Fluß nicht definiert, d.h.  $[\xi, \eta]$  ist nicht vollständig.

### 29.3 Definition (Verwandtschaft von Vektorfeldern)

Es sei  $f : M \rightarrow N$  glatt,  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\eta \in \mathfrak{X}(N)$ . Das Vektorfeld  $\xi$  heißt  $f$ -**VERWANDT** mit  $\eta$  : $\Leftrightarrow Tf \circ \xi = \eta \circ f$

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\
 \xi \uparrow & & \uparrow \eta \\
 M & \xrightarrow{f} & N \xrightarrow{g} \mathbb{R}
 \end{array}$$

Es gilt dann, daß  $\xi$  genau dann  $f$ -verwandt mit  $\eta$  ist, wenn  $\xi(g \circ f) = (\eta g) \circ f$  für alle glatten  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ .

$$\begin{aligned} (\Rightarrow) \quad \xi(g \circ f)(p) &= \xi_p(g \circ f) = (T_p f \cdot \xi_p)g = \eta_{f(p)}g = \eta(g)(f(p)) = (\eta(g) \circ f)(p) \\ (\Leftarrow) \quad (Tf \circ \xi)_p g &= (Tf \cdot \xi_p)g = \xi_p(g \circ f) = \xi(g \circ f)(p) = (\eta g \circ f)(p) = \eta g(f(p)) = \eta_{f(p)}(g) \end{aligned}$$

**29.4 Bemerkung (Push-forward von Vektorfeldern)**

Für ein allgemeines  $f$  läßt sich zu einem gegebenen Vektorfeld kein  $f$ -verwandtes Vektorfeld finden. Ist jedoch  $f$  ein Diffeomorphismus, dann ist  $Tf \circ \xi \circ f^{-1}$  ein Vektorfeld  $f_*\xi$  auf  $N$  für jedes Vektorfeld  $\xi$  auf  $M$ .

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \xi \uparrow & & \uparrow f_*\xi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Es folgt für  $\xi$  aus der Konstruktion, daß es  $f$ -verwandt mit  $f_*\xi$  ist. Umgekehrt hat man folgende Aussage:

**29.5 Lemma (Pull-back von Vektorfeldern).** *Es sei  $f : M \rightarrow N$  eine Immersion,  $\eta \in \mathfrak{X}(N)$  und  $\eta_{fp} \in \text{Bild}(T_p f)$  für alle  $p \in M$ , dann folgt daraus:  $\exists !$  Vektorfeld  $\xi (= f^*\eta)$ , sodaß  $\xi$   $f$ -verwandt mit  $\eta$  ist.*

**Beweis.** Da  $Tf$  injektiv ist, kann jedem  $\eta_{fp}$  in  $\text{Bild}(T_p f)$  ein eindeutig bestimmtes Element  $\xi_p \in T_p M$  zugeordnet werden, es bleibt zu zeigen,  $\xi : M \rightarrow TM$  ist  $C^\infty$ . Da  $f$  eine Immersion ist, existieren Karten  $\varphi$  und  $\psi$  um  $p$  bzw.  $f_p$ , sodaß  $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \text{incl}_{\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n}$ . Sei  $\xi = \sum \xi_\varphi^i \partial_i^\varphi$ . Es genügt zu zeigen, daß  $\xi_\varphi^i : M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt sind. Da

$$\begin{aligned} (\xi_\varphi^i)_p &= \xi_p(\text{pr}_i \circ \varphi^{-1}) = \xi_p(\text{pr}_i \circ \psi^{-1} \circ f) = (Tf \circ \xi_p)(\text{pr}_i \circ \psi^{-1}) \\ &= \eta_{f(p)}(\text{pr}_i \circ \psi^{-1}) = (\eta_\psi^i)_{f(p)} = (\eta_\psi^i \circ f)_p \text{ in } p \text{ glatt ist,} \end{aligned}$$

folgt, daß  $\xi_p$  lokal um  $p$  glatt ist. Die  $f$ -Verwandtschaft folgt unmittelbar aus der Konstruktion von  $\xi$ . □

**29.6 Bemerkung**

Wir haben gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen Vektorfelder durch geeignete glatte Abbildungen transportiert werden können. Dabei bezeichne  $f^*\eta = Tf^{-1} \circ \eta \circ f$  (siehe Lemma (29.5)):

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \xi \uparrow & & \uparrow f_*\xi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \quad \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ f^*\eta \uparrow & & \uparrow \eta \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Wobei das linke Diagramm existiert, falls  $f$  ein Diffeomorphismus ist und das rechte, falls  $f$  eine Immersion ist und  $\eta$  Werte im Bild von  $Tf$  hat. Es gilt dann:

$$f_*(f^*\eta) = Tf \circ (f^*\eta) \circ f^{-1} = Tf \circ Tf^{-1} \circ \eta \circ f \circ f^{-1} = \eta$$

sowie  $f^*(f_*\xi) = \xi$ , wobei  $f$ ,  $\xi$  und  $\eta$  die oben genannten Voraussetzungen erfüllen. Insgesamt haben wir gezeigt:  $f^* = (f_*)^{-1} : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$  und  $f_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$ .

**29.7 Proposition.** Die Vektorfelder  $\xi_i$  seien  $f$ -verwandt mit  $\eta_i$  für  $i = 1, 2$ . Dann gilt:

1.  $\xi_1 + \xi_2$  ist  $f$ -verwandt mit  $\eta_1 + \eta_2$ .
2.  $[\xi_1, \xi_2]$  ist  $f$ -verwandt mit  $[\eta_1, \eta_2]$ .
3.  $(g \circ f) \cdot \xi$  ist  $f$ -verwandt mit  $g \cdot \eta$ , wobei  $g : N \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist.

**Beweis.**

(1) folgt aus der Linearität von  $T_x f$ .

(2) folgt, da

$$\begin{aligned} [\xi_1, \xi_2](g \circ f) &= \xi_1(\xi_2(g \circ f)) - \xi_2(\xi_1(g \circ f)) \\ &= \xi_1((\eta_2 g) \circ f) - \xi_2((\eta_1 g) \circ f) \\ &= (\eta_1(\eta_2 g)) \circ f - (\eta_2(\eta_1 g)) \circ f = ([\eta_1, \eta_2]g) \circ f. \end{aligned}$$

(3) folgt, wegen

$$\begin{aligned} (Tf \circ ((g \circ f) \cdot \xi))(p) &= Tf(g(f(p)) \cdot \xi_p) = g(f(p)) \cdot (T_p f)\xi_p \\ &= g(f(p)) \cdot \eta_{f(p)} = ((g \cdot \eta) \circ f)(p). \quad \square \end{aligned}$$

**29.8 Lemma.** Seien  $\xi$  und  $\eta$  zwei Vektorfelder, dann ist  $\xi$   $f$ -verwandt mit  $\eta \Leftrightarrow f \circ \text{Fl}^\xi = \text{Fl}^\eta \circ (\text{id} \times f)$  lokal um  $\{0\} \times M$ .

**Beweis.**

( $\Leftarrow$ ) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} f(\text{Fl}^\xi(t, p)) &= Tf(\text{Fl}^\xi(\cdot, p)'(0)) = Tf(\xi_p) \text{ und} \\ \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \text{Fl}^\eta(t, f(p)) &= \eta(\text{Fl}^\eta(0, f(p))) = \eta(f(p)). \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$ ) Die Kurve  $\text{Fl}^\eta(\cdot, f(p))$  ist eine Integralkurve zu  $\eta$  mit Startwert  $f(p)$ . Es ist  $f(\text{Fl}^\xi(t, p))|_{t=0} = f(p)$  und durch Differenzieren folgt:

$$\left( f \circ \text{Fl}^\xi(\cdot, p) \right)'(t) = Tf\left( (\text{Fl}^\xi(\cdot, p))'(t) \right) = (Tf \cdot \xi)|_{\text{Fl}^\xi(t, p)} = \eta|_{f(\text{Fl}^\xi(t, p))}.$$

Die Gleichheit der beiden Ausdrücke folgt nun aus der Eindeutigkeit der Integralkurven.  $\square$

### 29.9 Definition (Lie-Ableitung)

1. Für  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  ist die LIE-ABLEITUNG  $\mathcal{L}_\xi$  in Richtung  $\xi$  auf Funktionen  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  definiert durch

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi : C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ f &\mapsto \left( p \mapsto \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (f \circ \text{Fl}^\xi)(t, p) \right). \end{aligned}$$

2. Es seien  $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ , dann definiert  $\mathcal{L}_\xi(\eta)$  wieder ein Vektorfeld durch folgende Zuordnung:

$$\mathcal{L}_\xi(\eta) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\text{Fl}_t^\xi)^*\eta = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(T\text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi).$$

Dabei beachte man, daß  $T\text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi : M \rightarrow TM$  für alle  $t$  lokal ein Schnitt ist, und somit  $t \mapsto (T\text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)(x)$  eine lokal definierte Kurve im Vektorraum  $T_xM$  für jedes  $x$  ist ( $t \mapsto (T\text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)$  ist hingegen keine Kurve  $\mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ), und somit die Ableitung  $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(T\text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)(x)$  ebenfalls in  $T_xM$  liegt.

Der folgende Satz zeigt, daß wir die Lie-Ableitung von Funktionen und Vektorfeldern schon kennen.

### 29.10 Satz (Beschreibungen der Lie-Ableitung).

1. Sei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  und  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ , dann gilt:

$$(\mathcal{L}_\xi f)_p = (f \circ \text{Fl}^\xi(\cdot, p))'(0) = (\xi f)_p.$$

2. Seien  $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ , dann gilt:

$$[\xi, \eta]_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (T\text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)(t, p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^*\eta|_p = \mathcal{L}_\xi(\eta)_p.$$

**Beweis.** (1) Da  $\xi_p = [c_p]$ , wobei bei  $c_p = \text{Fl}^\xi(\cdot, p)$ , also  $c_p(0) = p$  und  $c'_p(0) = \xi_p$  ist, gilt  $(f \circ \text{Fl}^\xi(\cdot, p))'(0) = (f \circ c_p)'(0) = \xi_p(f) = (\xi f)_p$ .

- (2) Sei  $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  durch

$$(t, s) \mapsto (\eta|_{\text{Fl}^\xi(t, p)})(f \circ \text{Fl}^\xi(s, \cdot)) = T\text{Fl}^\xi(s, \cdot)(\eta|_{\text{Fl}^\xi(t, p)})(f) = (T\text{Fl}_s^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)_p(f)$$

lokal definiert. Dann ist

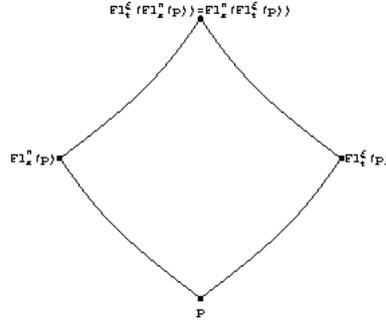
$$\begin{aligned} \alpha(t, 0) &= (\eta|_{\text{Fl}^\xi(t, p)})f \\ \alpha(0, s) &= \eta_p(f \circ \text{Fl}^\xi(s, \cdot)) \\ \Rightarrow \partial_1 \alpha|_{(0,0)} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\eta|_{\text{Fl}^\xi(t, p)})f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\eta f)(\text{Fl}^\xi(t, p)) = \xi_p(\eta f) \\ \partial_2 \alpha|_{(0,0)} &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta_p(f \circ \text{Fl}^\xi(t, \cdot)) = \eta_p \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \text{Fl}^\xi(t, \cdot)) = \eta_p(\xi f), \end{aligned}$$

da  $\eta_p$  linear ist. Es gilt also

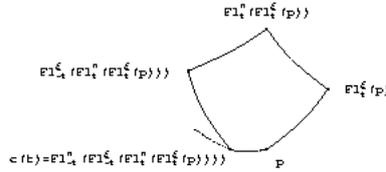
$$\begin{aligned} \text{einerseits: } \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha(-t, t) &= \partial_2 \alpha(0, 0) - \partial_1 \alpha(0, 0) \\ &= \xi_p(\eta f) - \eta_p(\xi f) = [\xi, \eta]_p f \\ \text{andererseits: } \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \alpha(t, -t) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\eta|_{\text{Fl}^\xi(t, p)})(f \circ \text{Fl}^\xi(-t, \cdot)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (T\text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)_p f. \quad \square \end{aligned}$$

**29.11 Satz.** Die Lie-Klammer ist eine Obstruktion gegen Kommutativität der Flüsse. Genauer heißt das:

1. Es ist  $[\xi, \eta] = 0 \Leftrightarrow \text{Fl}_t^\xi \circ \text{Fl}_s^\eta = \text{Fl}_s^\eta \circ \text{Fl}_t^\xi$  (Diese Abbildungen sind lokal für kleine  $t$  und  $s$  definiert).



2. Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  mit  $c(t) := (Fl_{-t}^\eta \circ Fl_{-t}^\xi \circ Fl_t^\eta \circ Fl_t^\xi)_p$  lokal definiert. Dann gilt:  
 $c(0) = p$ ,  $c'(0) = 0$ ,  $c''(0) \in T_p M$  ist wohldefiniert und  $c''(0) = 2[\xi, \eta]_p$ .



**Beweis.** (1) ( $\Leftarrow$ ) Es gilt

$$\begin{aligned}
 Fl^\xi(t, Fl^\eta(s, p)) &= Fl_t^\xi Fl_s^\eta(p) = Fl_s^\eta Fl_t^\xi(p) = Fl_0^\eta(s, Fl_t^\xi(p)), \\
 \text{d.h. } Fl_t^\xi \circ Fl^\eta &= Fl^\eta(1 \times Fl_t^\xi) \\
 \xrightarrow{(29.8)} \quad \eta &\text{ ist } Fl_t^\xi\text{-verwandt mit } \eta, \text{ also } T Fl_t^\xi \circ \eta = \eta \circ Fl_t^\xi. \\
 \Rightarrow \eta &= T Fl_{-t}^\xi \circ \eta \circ Fl_t^\xi, \text{ da } (Fl_t^\xi)^{-1} = Fl_{-t}^\xi \text{ ein lokaler Diffeom.} \\
 \Rightarrow 0 &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \eta = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} T Fl_{-t}^\xi \circ \eta \circ Fl_t^\xi \stackrel{(29.10)}{=} [\xi, \eta].
 \end{aligned}$$

( $\Rightarrow$ ) Aus  $[\xi, \eta] = 0$  folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} (T Fl_{-t}^\xi \circ \eta \circ Fl_t^\xi)(p) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (T Fl_{-t}^\xi \circ T Fl_{-s}^\xi \circ \eta \circ Fl_s^\xi \circ Fl_t^\xi)(p) \\
 &= (T Fl_{-t}^\xi \circ \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (T Fl_{-s}^\xi \circ \eta \circ Fl_s^\xi) \circ Fl_t^\xi)(p) \\
 &= (T Fl_{-t}^\xi \circ [\xi, \eta] \circ Fl_t^\xi)(p) = 0
 \end{aligned}$$

Also ist  $\eta = T Fl_0^\xi \circ \eta \circ Fl_0^\xi = T Fl_{-t}^\xi \circ \eta \circ Fl_t^\xi$  konstant in  $t$ , d.h.  $\eta \circ Fl_t^\xi = T Fl_t^\xi \circ \eta$  Und somit ist  $\eta$  ist  $Fl_t^\xi$ -verwandt mit  $\eta$ . Nach (29.8) ist schließlich  $Fl_s^\eta \circ Fl_t^\xi = Fl_t^\xi \circ Fl_s^\eta$ .

(2) Es sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  lokal definiert und  $C^\infty$  und  $c' : \mathbb{R} \rightarrow TM$  der kanonische Lift von  $c$ . Die Kurve  $c'' : \mathbb{R} \rightarrow T(TM)$  kann ebenfalls als Lift aufgefaßt werden.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R} \\ \downarrow c & & \downarrow c' & & \downarrow c'' \\ M & \xleftarrow{\pi_M} & TM & \xleftarrow{\pi_{TM}} & T(TM) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} c = \pi_M \circ c' \\ c' = \pi_{TM} \circ c'' \end{array} \right\} \Rightarrow c = \pi_M \circ \pi_{TM} \circ c''$$

Falls  $c'(0) = 0$ , läßt sich  $c''(0)$  als Derivation auffassen:  $f \mapsto c''(0)f := (f \circ c)''(0)$  ist linear und

$$\begin{aligned} c''(0)(fg) &= ((fg) \circ c)''(0) = ((f \circ c)(g \circ c))''(0) \\ &= (f \circ c)''(0)(g \circ c)(0) + 2(f \circ c)'(0)(g \circ c)'(0) + (f \circ c)(0)(g \circ c)''(0) \\ &= (c''(0)f)g(c(0)) + f(c(0))(c''(0)g). \end{aligned}$$

Also ist  $c''(0)$  eine Derivation über  $c(0) = p$ , d.h.  $c''(0) \in T_p M$ .

$$\begin{aligned} \text{Es sei } \alpha_0(t, s) &:= (\text{Fl}_t^\eta \circ \text{Fl}_s^\xi)(p) \\ \alpha_1(t, s) &:= (\text{Fl}_{-t}^\xi \circ \text{Fl}_s^\eta \circ \text{Fl}_s^\xi)(p) \\ \alpha_2(t, s) &:= (\text{Fl}_{-t}^\eta \circ \text{Fl}_{-s}^\xi \circ \text{Fl}_s^\eta \circ \text{Fl}_s^\xi)(p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Dann gilt: } c(t) &= \alpha_2(t, t) \\ \alpha_2(0, s) &= \alpha_1(s, s) \\ \alpha_1(0, s) &= \alpha_0(s, s). \end{aligned}$$

Sei  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \partial_1(f \circ \alpha_0) &= (\eta f) \circ \alpha_0 \\ \partial_1(f \circ \alpha_1) &= -(\xi f) \circ \alpha_1 \\ \partial_1(f \circ \alpha_2) &= -(\eta f) \circ \alpha_2 \\ \partial_2(f \circ \alpha_0)(0, s) &= (\xi f)(\alpha_0(0, s)) \\ \partial_2(f \circ \alpha_1)(0, s) &= \partial_1(f \circ \alpha_0)(s, s) + \partial_2(f \circ \alpha_0)(s, s) \\ \partial_2(f \circ \alpha_2)(0, s) &= \partial_1(f \circ \alpha_1)(s, s) + \partial_2(f \circ \alpha_1)(s, s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow c'(0)f &= (f \circ c)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha_2)(t, t) \\
&= \partial_1(f \circ \alpha_2)(0, 0) + \partial_2(f \circ \alpha_2)(0, 0) \\
&= -(\eta f)_p + \partial_1(f \circ \alpha_1)(0, 0) + \partial_2(f \circ \alpha_1)(0, 0) \\
&= -(\eta f)_p - (\xi f)_p + \partial_1(f \circ \alpha_0)(0, 0) + \partial_2(f \circ \alpha_0)(0, 0) = 0 \\
c''(0)f &= (f \circ c)''(0) = \left. \left( \frac{d}{dt} \right)^2 \right|_{t=0} (f \circ \alpha_2)(t, t) \\
&= \partial_1^2(f \circ \alpha_2)(0, 0) + 2\partial_2\partial_1(f \circ \alpha_2)(0, 0) + \partial_2^2(f \circ \alpha_2)(0, 0)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_1^2(f \circ \alpha_2)(0, 0) &= \partial_1(-(\eta f) \circ \alpha_2)(0, 0) \\
&= (-\eta(-\eta f))\alpha_2(0, 0) = (\eta(\eta f))_p \\
\partial_2\partial_1(f \circ \alpha_2)(0, 0) &= \partial_2((-\eta f) \circ \alpha_2)(0, 0) \\
&= \partial_1((-\eta f) \circ \alpha_1)(0, 0) + \partial_2((-\eta f) \circ \alpha_1)(0, 0) \\
&= (\xi\eta f)_p + \partial_1(-\eta f \circ \alpha_0)(0, 0) + \partial_2(-\eta f \circ \alpha_0)(0, 0) \\
&= (\xi\eta f)_p - (\eta\eta f)_p - (\xi\eta f)_p = -(\eta\eta f)_p
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_2^2(f \circ \alpha_2)(0, 0) &= \partial_1^2(f \circ \alpha_1)(0, 0) + 2\partial_1\partial_2(f \circ \alpha_1)(0, 0) \\
&\quad + \partial_2^2(f \circ \alpha_1)(0, 0) \\
\partial_1^2(f \circ \alpha_1)(0, 0) &= (\xi\xi f)_p \\
\partial_2\partial_1(f \circ \alpha_1)(0, 0) &= \partial_2((-\xi f) \circ \alpha_1)(0, 0) \\
&= \partial_1(-\xi f \circ \alpha_0)(0, 0) + \partial_2(-\xi f \circ \alpha_0)(0, 0) \\
&= -(\eta\xi f)_p - (\xi\xi f)_p \\
\partial_2^2(f \circ \alpha_1)(0, 0) &= \partial_1^2(f \circ \alpha_0)(0, 0) + 2\partial_1\partial_2(f \circ \alpha_0)(0, 0) + \partial_2^2(f \circ \alpha_0)(0, 0) \\
&= (\eta\eta f)_p + 2(\xi\eta f)_p + (\xi\xi f)_p
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
c''(0)f &= \eta\eta f - 2\eta\eta f + \xi\xi f - 2\eta\xi f - 2\xi\xi f + \eta\eta f + 2\xi\eta f + \xi\xi f \\
&= 2(\xi\eta f - \eta\xi f) = 2[\xi, \eta]f \quad \square
\end{aligned}$$

**29.12 Satz (Kommutierende Flüsse kommen von Karten).**

Es seien  $\{\xi_i\}_{i=1}^k$  linear unabhängige Vektorfelder auf  $M$ , und  $[\xi_i, \xi_j] = 0 \forall i, j$ . Dann existiert eine Karte  $\varphi$ , sodaß lokal gilt:  $\xi_i = \partial_i^\varphi$  für  $i = 1 \dots k$ .

**Beweis.** O.B.d.A. sei  $M \subseteq \mathbb{R}^n$  offen,  $p = 0$  und  $\xi_i(0) = e_i$  für  $i = 1, \dots, k$ . Es sei

$$\begin{aligned}
\varphi(t_1, \dots, t_n) &:= \text{Fl}^{\xi_1} \left( t_1, \text{Fl}^{\xi_2} (t_2, \dots, \text{Fl}^{\xi_k} (t_k; 0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \dots) \right) \\
&= \left( \text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n).
\end{aligned}$$

Es gilt  $\varphi(0) = p$  und  $\varphi$  ist ein lokaler Diffeomorphismus, da die partiellen Ableitungen für  $i \leq k$  folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi(t_1, \dots, t_n) &= \frac{\partial}{\partial t_i} \left( \text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_i}^{\xi_i} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_i} \left( \text{Fl}_{t_i}^{\xi_i} \circ \text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \dots \circ \overline{\text{Fl}_{t_i}^{\xi_i}} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &= \xi_i \left( \left( \text{Fl}_{t_i}^{\xi_i} \circ \text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \dots \circ \overline{\text{Fl}_{t_i}^{\xi_i}} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \right) \\ &= \xi_i \left( \left( \text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \right) \\ &= \xi_i \left( \varphi(t_1, \dots, t_n) \right), \end{aligned}$$

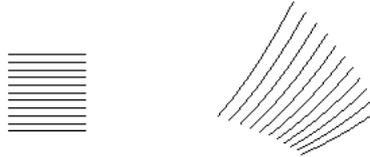
dabei bedeutet  $\overline{\dots}$ , daß der entsprechende Term ausgelassen wird. Also ist  $\xi_i = \partial_i^\varphi$  für  $i \leq k$ . Für  $i > k$  und  $t_1 = \dots = t_k = 0$  gilt nach Voraussetzung:

$$\partial_i|_{t_i=0} \varphi(0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0) = \left( \frac{\partial}{\partial t_i} \right) (0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0) = e_i.$$

Somit ist  $\varphi'(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$  und  $\partial_i^\varphi(q) = \partial_i(\varphi)(\varphi^{-1}q) = \xi_i(q)$  für  $i \leq k$ .  $\square$

### 29.13 Bemerkungen

1. Es gilt auch die Umkehrung: Ist  $\varphi$  eine Karte, dann verschwinden die Lie-Klammern der Basisvektorfelder  $\partial_i^\varphi$ , also kommutieren ihre Flüsse paarweise.
2. Es sei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\xi_p \neq 0$ . Dann existiert nach (29.12) für  $k = 1$  eine Karte  $\varphi$  mit  $\xi = \partial_1^\varphi$ . Da offensichtlich  $\partial_1$   $\varphi$ -verwandt mit  $\partial_1^\varphi$  ist, ist  $\varphi(\text{Fl}^{\partial_1}(t, x)) = \text{Fl}^\xi(t, \varphi(x))$  nach (29.8) und somit ist  $\text{Fl}^\xi(t, p) = \varphi(\text{Fl}^{\partial_1}(t, \varphi^{-1}(p))) = \varphi(\varphi^{-1}(p) + te_1)$ . Der Fluß jedes nicht-stationären Vektorfeldes ist also bis auf Diffeomorphismen  $\varphi$  durch die Translation  $x \mapsto x + te_1$  mit konstanten Geschwindigkeit-Vektor  $e_1$  gegeben.



3. Es sei  $\xi_p = 0$  (also  $p$  eine Nullstelle des Vektorfeldes) und somit  $\text{Fl}^\xi(t, p) = p$ , d.h.  $p$  ist ein Fixpunkt (stationärer Punkt) des lokalen Flusses. O.B.d.A. ist  $U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen und  $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$  mit  $\xi(0) = 0$ . Dann ist  $\xi'(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear, und die Eigenwerte von  $\xi'(0)$  bestimmen generisch das lokale Verhalten des Flusses (Siehe Bücher über dynamische Systeme).

## 30. Integriermannigfaltigkeiten

### 30.1 Bemerkung

Wir haben in (28.6) gesehen, daß Integralkurven von Vektorfeldern nicht immer global definiert sind. Anschaulich gesprochen sind sie nicht für alle  $t \in \mathbb{R}$  definiert, weil sie

bereits in endlicher Zeit nach “unendlich” entweichen. Es sind also die Lösungskurven “zu schnell”, d.h. die Geschwindigkeitsvektoren zu groß. Wir können aber den Fluß global machen, indem wir seine Geschwindigkeit verkleinern.

Abstrakter:

- i) An Stelle von Vektorfeldern betrachten wir eindimensionale Teilräume  $E_p \subseteq T_p M \forall p \in M$ , also Teilvektorbündel.
- ii) An Stelle von Lösungskurven betrachten wir Integralmannigfaltigkeiten, das sind 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeiten  $N$  von  $M$ , für die  $T_p N = E_p$  gilt. Wir können diese Begriffe auch im mehrdimensionalen Fall formulieren:

### 26.1 Definition (Teilvektorbündel)

Es seien  $p : E \rightarrow M$ ,  $q : F \rightarrow M$  zwei Vektorbündel, sodaß  $F_x$  Teilvektorraum von  $E_x$  ist  $\forall x \in M$ . Dann heißt  $q : F \rightarrow M$  TEILVEKTORBÜNDEL von  $p : E \rightarrow M$ , falls zu  $E$  ein VB-Atlas  $\{\psi_U\}$  existiert, der  $F|_U$  auf  $U \times \mathbb{R}^n$  abbildet, d.h.  $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \cong E|_U = p^{-1}(U)$  und  $\psi|(U \times \mathbb{R}^n) : U \times \mathbb{R}^n \cong F|_U$ .

Das bedeutet, daß  $\psi_U(x)$  den “konstanten” Teilraum  $\mathbb{R}^n$  genau auf  $F_x$  abbildet.

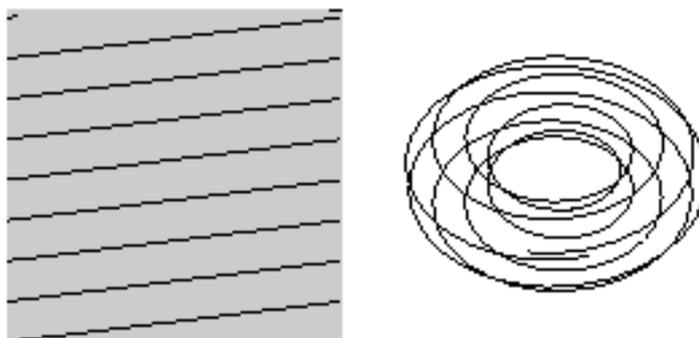
### 30.2 Definition (Integralmannigfaltigkeit)

Es sei  $E$  ein Teilvektorbündel von  $\pi : TM \rightarrow M$  (in der (älteren) Literatur auch als DISTRIBUTION bezeichnet). Dann versteht man unter einer INTEGRALMANNIGFALTIGKEIT  $N$  zu  $E$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeitsstruktur auf einer Teilmenge  $N \subseteq M$ , sodaß  $\text{incl} : N \rightarrow M$  eine Immersion ist und  $T \text{incl} : T_p N \rightarrow E_p$  für alle  $p \in N$  eine Bijektion ist.

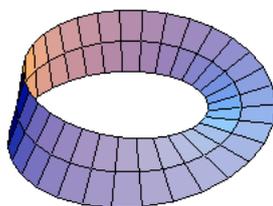
### 30.3 Beispiele

- 1) Für eindimensionale Teilvektorbündel, die ja lokal von einem Vektorfeld aufgespannt werden, existieren immer Integralkurven zu diesem Vektorfeld, und damit auch Integralmannigfaltigkeiten des Bündels.

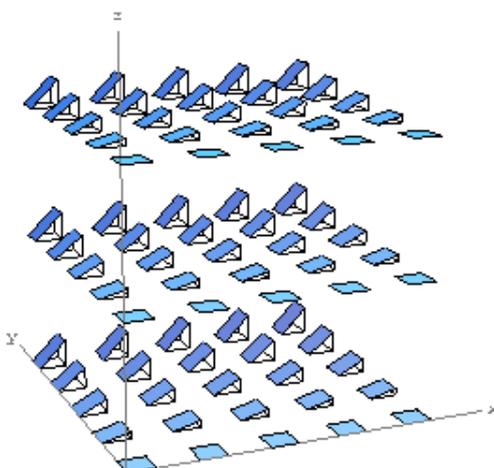
Z.B.: Hat ein “konstantes” Vektorfeld am Torus irrationalen Anstieg, dann liegt jede ihrer Integralmannigfaltigkeiten dicht.



2) Man bemerke allerdings, daß das Teilvektorbündel  $E$  im allgemeinen nicht global durch ein VF aufgespannt wird. Ein Beispiel ist das Möbiusband, wo  $E$  alle Vektoren sind, die von Kurven in der Faser herrühren.



3) Im mehrdimensionalen Fall gilt im allgemeinen nicht, daß jedes Teilvektorbündel eine Integralmannigfaltigkeit erzeugt. Betrachte das folgende Beispiel:  $M = \mathbb{R}^3$  mit  $E_{xyz} = \langle \{ \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \} \rangle \subseteq T_{(x,y,z)}\mathbb{R}^3$ .



Sei  $N$  eine Integralmannigfaltigkeit durch  $(0,0,0)$ . Für ein fixes  $y_0$  betrachte man den Schnitt  $N \cap \{(x, y_0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$ . Wegen  $T_0N = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$  ist dieser Schnitt lokal eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Tangentialraum  $\langle (1, 0, y_0) \rangle$  im Punkt  $(x, y_0, z)$ , also die Gerade durch  $(0, y_0, 0)$ , gegeben durch  $\{(x, y_0, xy_0) : x \in \mathbb{R}\}$ . Somit ist  $N$  lokal durch  $\{(x, y, xy) : x, y \in \mathbb{R}\}$  gegeben. Betrachtet man aber den Tangentialraum in  $(1, 0, 0)$ , so enthält dieser Vektoren, deren 2. und 3. Komponente  $\neq 0$  ist:  $T_{(x,y,xy)}N = \langle (1, 0, y), (0, 1, x) \rangle$ . Dies stimmt aber mit  $E_{(x,y,z)}$  nur dort überein, wo  $x = 0$ . Eine Integralmannigfaltigkeit durch 0 existiert also nicht.

### 30.4 Bemerkung

Angenommen  $E$  ist ein Teilbündel von  $TM$ , das durch jeden Punkt eine Integralmannigfaltigkeit besitzt. Sei  $p \in M$  und  $N$  die Integralmannigfaltigkeit durch  $p$  und seien

$\xi, \eta$  Vektorfelder auf  $M$  mit  $\xi_x, \eta_x \in E_x$  für alle  $x$ . Wegen Lemma (29.5) existieren Vektorfelder  $\xi_1, \eta_1$  auf  $N$ , sodaß  $\xi_1, \eta_1$  bezüglich incl verwandt sind mit  $\xi, \eta$ . Dann ist  $[\xi_1, \eta_1]$  ein Vektorfeld auf  $N$  und  $[\xi_1, \eta_1]$  ist incl-verwandt mit  $[\xi, \eta]$ . Wir erhalten  $[\xi, \eta]_p = T \text{incl} [\xi_1, \eta_1]_p \in E_p$ .

**30.5 Definition (Integrable Teilbündel)**

Ein Teilvektorbündel  $E$  von  $TM$  heißt INTEGRABEL  $:\Leftrightarrow$  für je zwei glatte Vektorfelder  $\xi, \eta$  auf  $M$  mit  $\xi_p, \eta_p \in E_p \forall p$  folgt:  $[\xi, \eta]_p \in E_p \forall p$ .

Übung: Man zeige, daß das Teilbündel von (30.3) nicht integrabel ist.

**30.6 Lokales Integrabilitätstheorem von Frobenius.**

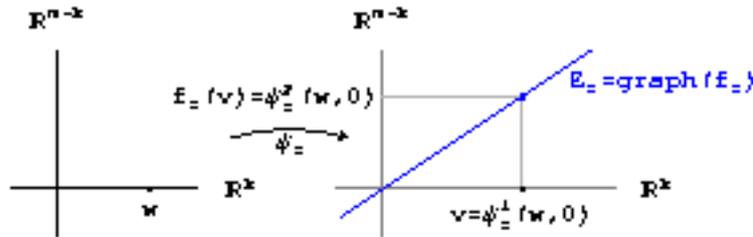
Es sei  $E$  ein Teilvektorbündel von  $\pi: TM \rightarrow M$ . Dann ist  $E$  genau dann integrabel, wenn zu jedem  $p$  eine Integralmannigfaltigkeit durch  $p$  existiert (genauer: es existiert eine Karte  $\varphi$  mit  $\varphi(0) = p$ , sodaß  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  eine Integralmannigfaltigkeit für jedes  $a$  ist).

Die Bilder  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  heißen auf englisch PLAQUES, also frei übersetzt Blättchen.

**Beweis.** ( $\Leftarrow$ ) Bereits oben gezeigt.

( $\Rightarrow$ ) O.B.d.A. sei  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  offen,  $\psi: M \times \mathbb{R}^m \rightarrow M \times \mathbb{R}^m$  sei eine VB-Karte, die  $E$  trivialisiert, d.h.  $\psi_z := \psi(z, \cdot): \mathbb{R}^k \times \{0\} \rightarrow E_z$  ist ein Isomorphismus. Sei o.B.d.A.  $\psi_0 = \text{id}$  und  $E_0 = \mathbb{R}^k$  (wobei  $\mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^m$ ).

Dann folgt  $\text{pr}_k \circ \psi_0 \circ \text{incl}_k = \text{id} \in GL(k)$  und somit  $\text{pr}_k \circ \psi_z \circ \text{incl}_k \in GL(k)$  für alle  $z$  nahe 0.



Wir wollen nun jeden der Teilräume  $E_z$  als Graph einer linearen Abbildung  $f_z: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$  darstellen. Wegen  $\text{Graph}(f_z) := \{(v, f(z)v) : v \in \mathbb{R}^k\}$  und  $E_z = \{(\psi_z^1(w, 0), \psi_z^2(w, 0)) : w \in \mathbb{R}^k\}$  muß  $f_z(v) = \psi_z^2(w, 0)$  mit  $\psi_z^1(w, 0) = v$  sein, also  $f_z$  gegeben sein durch:

$$f: M \rightarrow L(k, m - k) \text{ mit}$$

$$f: z \mapsto \psi_z^2 \circ (\psi_z^1|_{\mathbb{R}^k})^{-1} = \text{pr}_{m-k} \circ \psi_z \circ (\text{pr}_k \circ \psi_z \circ \text{incl}_k)^{-1}$$

Was sagt nun in diesem Zusammenhang die Integrabilität aus?

Es gilt für  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ :  $\xi_p \in E_p \Leftrightarrow \xi_p \in \text{Graph } f(p) \Leftrightarrow \xi_p = (\xi_1|_p, \xi_2|_p)$ , mit  $f(p)(\xi_1|_p) = (\xi_2|_p)$ . Seien  $\xi_p, \eta_p \in E_p$ ,  $\xi, \eta: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k$ . Wegen

$[\xi, \eta]_p \in E_p$  ist

$$\begin{aligned} [\xi, \eta] &= ([\xi, \eta]_1(p), f(p)([\xi, \eta]_1(p))) \quad \text{und auch} \\ [\xi, \eta] &= \eta'(p)(\xi(p)) - \xi'(p)(\eta(p)) \\ &= \left( \eta'_1(p)(\xi(p)) - \xi'_1(p)(\eta(p)), \eta'_2(p)(\xi(p)) - \xi'_2(p)(\eta(p)) \right) \\ &= \left( \eta'_1(p)(\xi(p)) - \xi'_1(p)(\eta(p)), f'(p)(\xi(p)) \cdot \eta_1(p) \right. \\ &\quad \left. + f(p)\eta'_1(p)(\xi(p)) - f'(p)(\eta(p)) \cdot \xi_1(p) - f(p)\xi'_1(p)\eta(p) \right) \end{aligned}$$

Daraus folgt für  $v_1 := \xi_1(p)$  und  $v_2 := \eta_1(p)$  mit  $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^k$ :

$$f'(p)(v_1, f(p)v_1)v_2 = f'(p)(v_2, f(p)v_2)v_1.$$

Wir wollen ein  $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  finden, sodaß  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  (für alle  $a$ ) eine Integralmannigfaltigkeit ist. D.h.  $(\partial_1 \varphi)(z) : \mathbb{R}^k \rightarrow E_{\varphi(z)}$  soll ein Isomorphismus sein. O.B.d.A. (wie sich zeigen wird) schränken wir das Aussehen von  $\varphi$  durch folgende Bedingung noch weiter ein:

$$\varphi(0, y) = (0, y), \quad (\partial_1 \varphi)(z) \cdot v = (v, f(\varphi(z))v).$$

Ist  $\varphi(z) =: (\varphi_1(z), \varphi_2(z))$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \partial_1 \varphi(z) \cdot v &= (\partial_1 \varphi_1(z) \cdot v, \partial_1 \varphi_2(z) \cdot v) = (v, f(\varphi(z)) \cdot v), \quad \text{d.h. } \varphi_1(z) = \text{pr}_1(z) \\ \Rightarrow \varphi(x, y) &= (x, g_y(x)), \quad \text{wobei } g_y(0) = y, \quad g'_y(x) = f(x, g_y(x)). \end{aligned}$$

Es folgt nun alles aus dem folgenden Satz. □

### 30.7 Satz von Frobenius für totale Differentialgleichungen.

Es sei  $f : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow L(k, n)$  eine lokale  $C^\infty$ -Abbildung. Dann gilt: Es existiert genau dann eine lokale  $C^\infty$ -Abbildung  $g : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $(x, y) \mapsto g_y(x)$  mit  $g'_y(x)v = f(x, g_y(x))v$  und  $g_y(0) = y$  wenn  $f'(z)(v_1, f(z)v_1)v_2$  symmetrisch in  $v_1, v_2$  ist.

#### Bemerkung

Sei  $\{e_1, \dots, e_m\}$  eine Basis für  $\mathbb{R}^m$ ,  $f_i(z) := f(z)e_i$ . Dann ist  $f(z)v = \sum_{i=1}^k f_i(z)v^i$  und  $\partial_i g_y(x) = f_i(x, g_y(x))$  mit  $1 \leq i \leq k$  ist ein System von partiellen Differentialgleichungen. Wir werden den Beweis von (30.7) in basisfreier Darstellung führen. (Einen Beweis in Koordinatenschreibweise findet man z.B. in [78, Vol.I, S.254].)

#### Beweis von (30.7).

( $\Rightarrow$ ) Es sei  $g$  die Lösung obiger Differentialgleichung, dann gilt:

$$\begin{aligned} g''_y(x)(v_1, v_2) &= (g'_y(-)(v_1))'(x)(v_2) = (f(-, g(-, y))(v_1))'(x)(v_2) \\ &= \partial_1(f(x, g_y(x)) \cdot v_1)(v_2) + \partial_2(f(x, g_y(x)) \cdot (g'_y(x) \cdot v_1))(v_2) \\ &= f'(z)(v_1, f(x, g_y(x)) \cdot v_1)(v_2) \\ &= f'(z)(v_1, f(z)v_1)v_2, \quad \text{wobei } z = (x, g_y(x)). \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist symmetrisch in  $v_1$  und  $v_2$ , weil  $g''_y(x)$  es ist (partielle Ableitungen vertauschen bei  $C^\infty$ -Funktionen).

( $\Leftarrow$ ) Wir führen die partielle Differentialgleichung auf eine Gewöhnliche zurück. Nehmen wir dazu vorerst an, daß  $g$  existiert und setzen wir  $\bar{g}(t, v) := g(x_0 + tv)$  für fixes  $x_0$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\bar{g}(t, v) &= g'(x_0 + tv) \cdot v = f(x_0 + tv, g(x_0 + tv)) \cdot v = f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v)) \cdot v \\ \bar{g}(0, v) &= g(x_0) = y_0\end{aligned}$$

Andererseits hat diese gewöhnliche Differentialgleichung lokal (d.h. für  $|v| \leq \varepsilon$ ,  $|t| \leq \varepsilon$  mit einem gewissen  $\varepsilon > 0$ ) eine eindeutig bestimmte Lösung  $\bar{g}$ . Es gilt  $\bar{g}(t, sv) = \bar{g}(st, v)$ , denn

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\bar{g}(t, sv) &= f(x_0 + tsv, \bar{g}(t, sv))(sv) = s \cdot f(x_0 + (ts)v, \bar{g}(t, sv))(v) \\ \frac{\partial}{\partial t}\bar{g}(st, v) &= s \cdot f(x_0 + (st)v, \bar{g}(st, v))(v).\end{aligned}$$

Somit setzen wir  $g(x) := \bar{g}(\varepsilon, \frac{x-x_0}{\varepsilon})$  und müssen  $g'(x)(w)$  und dafür insbesondere  $\partial_2 \bar{g}$  berechnen. Die Idee dabei ist, daß

$$\begin{aligned}\partial_2 \bar{g}(t, v)(w) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \bar{g}(t, v + sw) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g(x_0 + t(v + sw)) \\ &= g'(x_0 + tv)(tw) = f(x_0 + tv, g(x_0 + tv))(tw) \\ &= f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v))(tw)\end{aligned}$$

gelten sollte. Also definieren wir  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  durch  $k(t) := \partial_2 \bar{g}(t, v)(w) - f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v))(tw)$ . Dann ist  $k(0) = \partial_2 \bar{g}(0, v)(w) - f(x_0 + 0v, \bar{g}(0, v))(0w) = 0$  und

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}k(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left[ \partial_2 \bar{g}(t, v)(w) - f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v))(tw) \right] \\ &= \partial_2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, v)}_{f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v)) \cdot v} (w) - \left[ \partial_1 f \cdot v \cdot tw + \partial_2 f \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \bar{g}}_{f \cdot v} \cdot tw + f \cdot w \right] \\ &= \partial_1 f \cdot tw \cdot v + \partial_2 f \cdot (\partial_2 \bar{g} \cdot w) \cdot v - \partial_1 f \cdot v \cdot tw - \partial_2 f \cdot (f \cdot v) \cdot tw \\ &= \partial_2 f \cdot (\partial_2 \bar{g} \cdot w - f \cdot tw) \cdot v \\ &= \partial_2 f \cdot k(t) \cdot v.\end{aligned}$$

Da letzteres eine lineare Differentialgleichung mit nicht konstanten Koeffizienten ist und  $k(0) = 0$  erfüllt, ist  $k = 0$ . Folglich ist

$$\begin{aligned}g'(x)(w) &= \partial_2 \bar{g} \left( \overbrace{\varepsilon}^t, \overbrace{\frac{x-x_0}{\varepsilon}}^v \right) \left( \frac{1}{\varepsilon} w \right) \\ &= f \left( \underbrace{x_0 + tv}_x, \bar{g} \left( \varepsilon, \frac{x-x_0}{\varepsilon} \right) \right) (w) \\ &= f(x, g(x))(w). \quad \square\end{aligned}$$

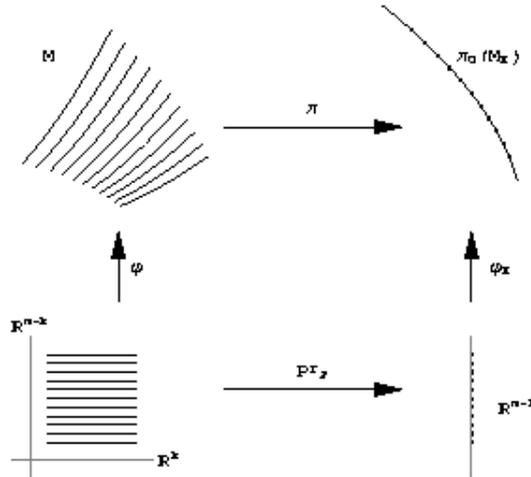
### 30.11 Integritätstheorem von Frobenius, globale Version.

Es sei  $E$  ein integribles Teilbündel von  $TM$ , dann gilt

1. Es existiert eine Mannigfaltigkeitsstruktur  $M_E$  auf  $M$ , sodaß die Inklusion  $\text{incl} : M_E \rightarrow M$  eine Immersion ist und  $T \text{incl}(TM_E) = E$  gilt, d.h.  $T \text{incl} : TM_E \rightarrow E \subseteq TM$  ist bijektiv
2. Sei  $f : N \rightarrow M$  glatt und  $Tf(TN) \subseteq E$ . Dann ist  $f : N \rightarrow M_E$  glatt, d.h.  $M_E$  ist feiner als  $M$ .
3. Jede Zusammenhangskomponente von  $M_E$  (diese heißen MAXIMALE INTEGRALMANNIGFALTIGKEITEN) ist eine initiale Teilmannigfaltigkeit von  $M$ .
4. Ist  $N$  eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit, dann ist  $N$  eine offene Teilmannigfaltigkeit einer Zusammenhangskomponente von  $M_E$ .

In dieser Situation spricht man von der BLÄTTERUNG (engl.: FOLIATION)  $M_E$  von  $E$ . Die maximalen Integralmannigfaltigkeiten heißen BLÄTTER (engl.: leaves) der Blätterung (Achtung: Dies ist etwas anderes als die Blätter einer Überlagerung). Die

**Beweis.** Nach Voraussetzung existieren trivialisierende Karten  $\varphi$ , sodaß  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$  eine Integralmannigfaltigkeit ist.



Sei  $f : N \rightarrow M$  glatt,  $\text{Bild}(Tf) \subseteq E$ ,  $f(p) = q$  und  $\varphi$  eine  $E$  trivialisierende Karte um  $q$ . Es liegt  $f$  lokal in einer "Schicht"  $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ , denn:

Wir definieren  $\bar{f} := \varphi^{-1} \circ f$  dann ist

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Bild}(T_p f) \subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \\ \bar{f}(p) \in \mathbb{R}^k \times \{a\} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Bild } \bar{f} \subseteq \mathbb{R}^k \times \{a\}.$$

(1) Auf  $M$  ist  $\{\varphi|(\mathbb{R}^k \times \{a\}), \varphi$  trivialisiert  $E\}$  ein Atlas. Es ist zu zeigen, daß der Kartenwechsel auf offenen Mengen definiert ist:

Betrachte  $\varphi_1, \varphi_2; a_1, a_2$  und  $p \in \varphi_1(\mathbb{R}^k \times \{a_1\}) \cap \varphi_2(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})$ . Da  $\varphi_1|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})} : \mathbb{R}^k \times \{a_1\} \rightarrow M$  eine Integralmannigfaltigkeit ist, liegt  $\text{Bild}(\varphi_1|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})})$  lokal in  $\varphi_2(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})$ . Es ist also

$$\left(\varphi_2|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})}\right)^{-1} \circ \left(\varphi_1|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})}\right)$$

lokal wohldefiniert und wir bezeichnen die zugehörige Mannigfaltigkeit mit  $M_E$ . Es ist noch zu zeigen, daß  $M_E \rightarrow M$  eine Immersion ist: Aber  $TM_E = E$ , weil  $T(\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})) = E|_{\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})}$  ist.

(2) Sei  $f : N \rightarrow M$  glatt und  $\text{Bild}(Tf) \subseteq E$ . Dann liegt  $f$  lokal in einer Schicht und somit ist  $(\varphi|_{\mathbb{R}^k \times \{a\}})^{-1} \circ f$  lokal wohldefiniert und glatt.

(3)  $M_E$  ist parakompakt: o.B.d.A. sei  $M$  zusammenhängend,  $C$  sei eine Zusammenhangskomponente von  $M_E$ . Es ist z.z., daß  $C$  durch abzählbar viele Kartenumgebungen überdeckt wird.

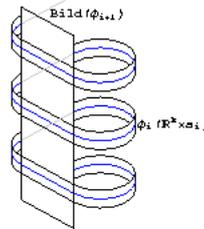
Seien  $\varphi_i$  abzählbar viele  $E$  trivialisierende Karten, die  $M$  überdecken;  $p_0 \in C$  fix und  $p \in C$  beliebig: Es existiert also eine Kurve  $c$  in  $C$ , die  $p_0$  und  $p$  verbindet. Somit existieren endlichviele Karten  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  und  $a_1, \dots, a_n$ , sodaß:

$$p_0 \in \varphi_1(\mathbb{R}^k \times \{a_1\}), \quad p \in \varphi_n(\mathbb{R}^k \times \{a_n\}) \text{ und} \\ \varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset.$$

Zu vorgegebenen  $\varphi_i, \varphi_{i+1}, a_i$  gibt es höchstens abzählbar viele  $a_{i+1}$ , sodaß

$$\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset.$$

Andernfalls gäbe es eine Überdeckung von  $\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \text{Bild } \varphi_{i+1}$  durch überabzählbar viele disjunkte offene Mengen, welches ein Widerspruch zur Lindelöf-Eigenschaft wäre. Also gibt es nur abzählbar viele endliche Folgen  $(\varphi_i, a_i)_i$ , die der Bedingung  $\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset$  genügen. Jedes  $p \in C$  wird durch eine geeignete Folge erreicht. Also wird  $C$  durch  $\{\varphi_n(\mathbb{R}^k \times \{a_n\}), n = 1, 2, \dots\}$  überdeckt (geeignete Durchnummerierung).



Die Zusammenhangskomponente  $C$  ist eine initiale Teilmannigfaltigkeit: Sei  $f : N \rightarrow C \subseteq M$  glatt. Lokal liegt  $f$  in  $\text{Bild } \varphi$ , außerdem liegt  $f$  in  $C$ . Da  $C$  aber höchstens abzählbar viele Schichten trifft, liegt  $f$  lokal in einer Schicht (verschiedene Schichten hängen nicht zusammen). Somit ist  $f : N \rightarrow M_E$  stetig und damit auch glatt.

(4) Sei  $N \rightarrow M$  zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit, dann ist  $\text{incl} : N \rightarrow M_E$  glatt, denn  $\text{incl} : N \rightarrow M$  ist eine injektive Immersion. Weiters ist  $\text{incl} : N \rightarrow \text{incl}(N) \subseteq M_E$  surjektiv und Submersion, also ein lokaler Diffeomorphismus. Somit ist  $\text{incl}(N) \subseteq M_E$  offen und  $N \cong \text{incl}(N)$ .  $\square$

**30.12 Proposition (Urbilder von Punkten).**

Es sei  $f : M \rightarrow N$  glatt und  $x \mapsto T_x f$  habe konstanten Rang  $r$ . Dann ist  $\text{Ker}(Tf) := \bigsqcup_{x \in M} \text{Ker}(T_x f)$  ein integrables Teilvektorbündel von  $TM$  und die Zusammenhangskomponenten der Niveauflächen  $f^{-1}(q)$  sind die maximalen Integralmannigfaltigkeiten zu  $\text{Ker}(Tf)$ .

**Beweis.** Nach dem Rangsatz (21.2) existieren Karten  $\varphi$  und  $\psi$ , sodaß  $f$  bezüglich dieser Karten die kanonische Projektion ist. Bezüglich dieser Karten ist  $\text{Ker}(T_x f) \cong \{0\} \times \mathbb{R}^{m-r}$ . Die Integralmannigfaltigkeiten sind lokal durch  $\{x\} \times \mathbb{R}^{m-r}$  gegeben. Da  $f^{-1}(q)$  lokal  $\{x\} \times \mathbb{R}^{m-r}$  ist für ein gewisses  $x$ , sind die Zusammenhangskomponenten von  $f^{-1}(q)$  Integralmannigfaltigkeiten.  $\square$

**30.13 Definition (Reguläres Teilbündel)**

Man nennt ein integrables Teilvektorbündel genau dann REGULÄR (bzw. die zugehörige Blätterung regulär), wenn trivialisierende Karten existieren, die jede (maximale) Integralmannigfaltigkeit höchstens einmal treffen. Diese heißen reguläre Karten. Die Blätterung des Torus mit irrationalen Anstieg ist klarerweise nicht regulär. Hingegen sind die Blätterungen aus (30.12) offensichtlich regulär.

Wir zeigen nun, daß die regulären Blätterungen genau jene aus (30.12) sind.

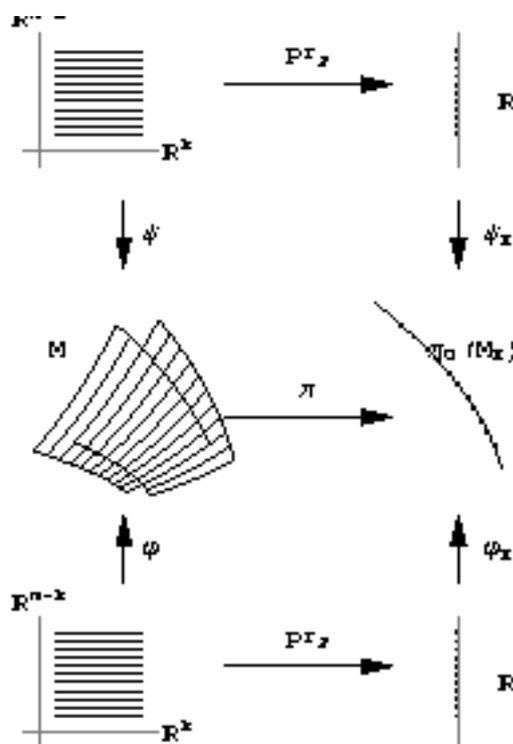
**30.14 Satz (Raum der maximalen Integralmannigfaltigkeiten).**

Es sei  $E$  ein reguläres integrables Teilvektorbündel. Dann existiert am Raum aller maximalen Integralmannigfaltigkeiten (also dem Raum  $\pi_0(M_E)$  der Zusammenhangskomponenten von  $M_E$ ) eine Mannigfaltigkeitsstruktur, sodaß  $\pi : M \rightarrow \pi_0(M_E)$  mit  $p \mapsto (\text{max. Integralmannigfaltigkeit durch } p)$  eine Submersion mit  $\text{Ker}(T\pi) = E$  ist.

**Beweis.** Es sei  $\varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow M$  eine reguläre Karte für  $M$ . Man definiert dann eine Karte  $\varphi_E$  für  $\pi_0(M_E)$  wie folgt:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\pi} & \pi_0(M_E) \\ \varphi \uparrow & & \varphi_E \uparrow \\ \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n-k} \end{array}$$

Hier ist  $\varphi_E : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \pi_0(M_E)$  wohldefiniert und injektiv, d.h.  $\varphi_E$  ist bijektiv auf das Bild. Es bleibt z.z., daß der Kartenwechsel glatt ist. Seien  $\varphi$  und  $\psi$  reguläre Karten und  $C$  ein Punkt (d.h. eine maximale Integralmannigfaltigkeit) im Bild beider. Wir betrachten zuerst den Spezialfall, wo  $\text{Bild } \varphi \cap \text{Bild } \psi \cap C$  nicht leer ist und  $p \in C$ .



Wegen  $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E \circ \text{pr}_2 = \psi_E^{-1} \circ \pi \circ \varphi = \text{pr}_2 \circ \psi^{-1} \circ \varphi$  ist  $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$  lokal um  $\text{pr}_2(\varphi^{-1}(p))$  ein Diffeomorphismus.

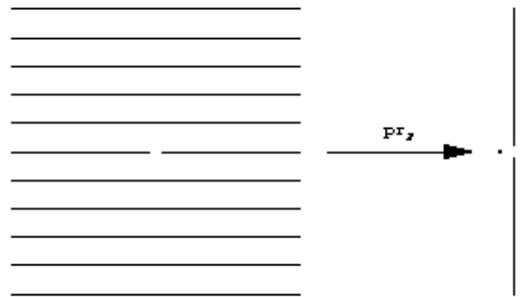
Nun zum allgemeinen Kartenwechsel  $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$ : Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf der Menge der regulärer Karten  $\varphi$  die  $C$  treffen:

$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \psi_E^{-1} \circ \varphi_E \text{ ist Diffeomorphismus offener Umgebungen von } \varphi_E^{-1}(C).$$

Seien  $A, B$  Äquivalenzklassen, dann gilt:  $R(A) := \bigcup_{\varphi \in A} \text{Bild } \varphi \cap C$  ist offen in  $C$ . Falls  $R(A) \cap R(B)$  nicht leer ist, so gilt  $A = B$ , denn wenn  $\varphi \in A$  und  $\psi \in B$  ist mit  $p \in \text{Bild } \varphi \cap \text{Bild } \psi \cap C$ , dann ist  $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$  ein Diffeomorphismus lokal um  $\text{pr}_2(\psi^{-1}(p)) = \varphi_E^{-1}(C)$  nach dem zuvor gezeigten, d.h.  $A \sim B$ . Die Vereinigung  $\bigcup_A R(A)$  ist somit eine disjunkte Überdeckung von  $C$  mit offenen Mengen. Daraus und weil  $C$  zusammenhängend ist, folgt, es gibt genau eine Äquivalenzklasse  $A$ . Somit ist  $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$  für je zwei Karten  $\varphi$  und  $\psi$  mit  $C \in \text{Bild } \varphi_E \cap \text{Bild } \psi_E$  lokal um  $\varphi_E^{-1}(C)$  glatt und  $\pi_0(M_E)$  ist eine  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit. Die Behauptung  $\text{Ker}(T\pi) = E$  folgt daraus, daß die Kartendarstellung von  $\pi$  bzgl. der Karten  $\varphi$  und  $\varphi_E$  durch  $\text{pr}_2$  gegeben ist und somit  $\text{Ker}(T\pi)$  via  $T\varphi$  faserweise durch  $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ , also gleich  $E$  ist.  $\square$

### 30.15 Gegenbeispiel

Nicht jede  $\pi_0(M_E)$  ist Hausdorff, wie das Beispiel  $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ,  $\xi_{(x,y)} := (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x}$  und  $E_{(x,y)} := \mathbb{R} \cdot \xi_{(x,y)}$  zeigt.



## IX. Lie-Gruppen

In diesem Kapitel soll abschließend noch eine kurze Einführung in die auf Sophus Lie zurückgehende Theorie der Lie-Gruppen gegeben werden.

### 66. Lokale versus globale Struktur

#### 66.1 Definition (Lie-Gruppe)

Eine LIE-GRUPPE  $G$  ist eine Gruppe, die zugleich  $C^\infty$ -MF ist und deren Gruppenmultiplikation  $\text{mult} : G \times G \rightarrow G$  glatt ist.

#### 66.2 Bemerkungen

(1) Die durch  $L_g : h \mapsto g \cdot h$ ,  $R_g : h \mapsto h \cdot g$  und durch  $\text{mult}(g, \text{inv}(g)) := e$  definierten Abbildungen  $L_g$  (Linkstranslation),  $R_g$  (Rechtstranslation) und  $\text{inv}$  (Inversenbildung) sind Diffeomorphismen von  $G$ : Klarerweise sind sie bijektiv und haben als Umkehrabbildungen  $L_{g^{-1}}$ ,  $R_{g^{-1}}$  und  $\text{inv}$ . Die beiden ersten sowie ihre Umkehrabbildungen sind als Einschränkungen der glatten Multiplikation selbst wieder glatt. Da bei festem  $h$  die Identität

$$\text{inv}(g) = h^{-1} \cdot h \cdot \text{inv}(g) = h^{-1} \cdot \text{inv}(g \cdot h^{-1}) = L_{h^{-1}} \circ \text{inv} \circ R_{h^{-1}}(g)$$

gilt, genügt es, die Differenzierbarkeit von  $\text{inv}$  beim neutralen Element  $e$  nachzuweisen. O.B.d.A. rechnen wir lokal im  $\mathbb{R}^n$ . Dort ist  $\text{inv}$  die Lösung der impliziten Gleichung  $\text{mult}(g, \text{inv} \cdot g) = e$ . Wegen  $\text{mult}(e, g) = g$  ist die zweite partielle Ableitung von  $\text{mult}$  bei  $e$  die Identität und nach dem Satz über implizite Funktionen ist  $\text{inv}$  in einer Umgebung von  $e$  glatt.

(2) Jede Lie-Gruppe  $G$  ist automatisch Hausdorff:

Sei  $a \neq b$ , also  $\text{mult}(a, \text{inv} b) \neq e$ . Dann gibt es Umgebungen  $U$  und  $V$  von  $a$  und  $b$  mit  $e \notin \text{mult}(U, \text{inv}(V))$ , also ist  $U \cap V = \emptyset$  und  $G$  Hausdorff.

(3) Die Zusammenhangskomponente  $G_0$  von  $e$  ist ein Normalteiler von  $G$ :

Die Bilder von  $G_0$  unter  $L_g$  (bzw.  $R_g$ ) sind zusammenhängend. Da  $e \in G_0$ , gilt für  $g \in G_0$  auch  $g \in L_g G_0$  und also  $L_g G_0 \subseteq G_0$ . Das gleiche Argument, angewandt auf die inneren Automorphismen  $g \mapsto h \cdot g \cdot h^{-1}$ , liefert die Normalteiler-Eigenschaft.

(4) Jede Lie-Gruppe  $G$  ist auch parakompakt:

Sei  $G_g$  die Zusammenhangskomponente um  $g$ , dann sieht man wegen der Stetigkeit der Linkstranslation leicht ein, daß  $G_g = G_0 \cdot g$ . Sei  $U$  eine zusammenhängende, relativ kompakte Umgebung von  $e$ , ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei  $U = U^{-1}$ . Dann ist  $H := \bigcup_n U^n$  eine offene zusammenhängende Untergruppe von  $G$ . Die Teilmenge  $H$

ist auch abgeschlossen, denn die offene Vereinigung der Nebenklassen  $gH$  mit  $g \notin H$  ist das Komplement von  $H$ . Also muß  $H$  die Komponente  $G_0$  umfassen, somit ist die Zusammenhangskomponente  $G_0$  parakompakt. (Jede andere Komponente ist von der Gestalt  $g \cdot G_0$ .)

(5) Von [MontgomeryZippin] und [Gleason] wurde das 5. Hilbert-Problem 1952 positiv beantwortet: Jede lokalkompakte, lokal zusammenhängende, endlich-dimensionale topologische Gruppe läßt sich auf eindeutige Weise zu einer Lie-Gruppe machen.

### 66.3 Definition (Lie-Gruppenhomomorphismus)

Seien  $H$  und  $G$  zwei Lie-Gruppen. Eine Abbildung  $f : H \rightarrow G$  heißt LIE(GRUPPEN)-HOMOMORPHISMUS, falls  $f$  glatter Gruppen-Homomorphismus ist. Ein lokal definiertes  $f$  heißt LOKALER LIE(GRUPPEN)-HOMOMORPHISMUS, falls es im Definitionsbereich (einer offenen Umgebung von  $e$ ) ein Gruppen-Homomorphismus ist.

**66.4 Lemma.** *Seien  $H$  und  $G$  Lie-Gruppen und  $H$  zusammenhängend. Stimmen zwei Lie-Homomorphismen von  $H$  nach  $G$  lokal überein, so sind sie gleich.*

**Beweis.** Durch die Umgebung, auf der die Homomorphismen übereinstimmen, wird  $H$  als Gruppe erzeugt. Da Lie-Homomorphismen insbesondere Gruppen-Homomorphismen sind, stimmen sie überall überein.  $\square$

**66.5 Lemma (Fortsetzen von Homomorphismen).** *Seien  $H$  und  $G$  wie oben, zusätzlich sei  $H$  einfach zusammenhängend. Dann läßt sich jeder lokale Lie-Homomorphismus  $f : \text{Dom}(f) \rightarrow G$  mit  $\text{Dom}(f) \subseteq H$  zu einem Lie-Homomorphismus  $F$  auf ganz  $H$  fortsetzen.*

**Beweis.** Wir werden den lokalen Lie-Homomorphismus  $f$  längs Kurven fortsetzen, die von  $e$  ausgehen. Sei  $U = U^{-1}$  eine Umgebung, sodaß  $U^2 \subseteq \text{Dom}(f)$ ; zu jeder Kurve  $c$  gibt es eine Folge  $(t_i)_{i=1}^n$ ,  $t_n = 1$ , sodaß  $c(t)^{-1} \cdot c(s) \in U$  für  $t, s \in [t_i, t_{i+1}]$ . Wir definieren

$$F(c) := f(c(0)^{-1} \cdot c(t_1)) \cdot \dots \cdot f(c(t_{n-1})^{-1} \cdot c(1)).$$

Sind  $c$  und  $d$  zwei Kurven mit gleichen Endpunkten und mit  $c(t) \in d(t) \cdot U$ , dann gilt:  $F(c) = F(d)$ . Um dies zu beweisen, betrachten wir eine Folge  $(a_i)_{i=0}^n$ ,  $a_i \in U$ ,  $a_0 = a_n = e$ , mit  $c(t_i) = d(t_i) \cdot a_i$ . Es gilt dann:

$$\begin{aligned} F(c) &:= f(c(0)^{-1}c(t_1)) \dots f(c(t_n)^{-1}c(1)) \\ &= f((d(0)a_0)^{-1}(d(t_1)a_1)) \dots f((d(t_{n-1})a_{n-1})^{-1}(d(1)a_n)) \\ &= f(a_0^{-1}d(0)^{-1}d(t_1)a_1) \dots f(a_{n-1}^{-1}d(t_{n-1})^{-1}d(1)a_n) \\ &= f(a_0^{-1})f(d(0)^{-1} \cdot d(t_1))f(a_1)f(a_1)^{-1} \dots \\ &\quad \dots f(a_{n-1})f(a_{n-1})^{-1}f(d(t_{n-1})^{-1}d(1))f(a_n) \\ &= f(d(0)^{-1} \cdot d(t_1)) \cdot \dots \cdot f(d(t_n)^{-1} \cdot d(1)) \\ &= F(d) \end{aligned}$$

Somit nimmt  $F$  auf homotopen Kurven mit gleichen Endpunkten gleiche Werte an. Da  $H$  einfachzusammenhängend ist, hängt  $F$  nur von den Endpunkten der Kurven ab. Setzt man also  $F(g) := F(c)$ , wobei  $c$  eine  $e$  mit  $g$  verbindende Kurve ist, dann

ist  $F$  wohldefiniert und glatt. Nun müssen wir noch nachweisen, daß  $F$  ein Homomorphismus ist. Ist  $c$  eine Kurve von  $e$  nach  $g$ ,  $d$  eine von  $e$  nach  $h$ , so verbindet  $cd$  den Punkt  $e$  mit  $g \cdot h$ ,

$$cd(t) := \begin{cases} c(2t) & \text{für } t \leq 1/2 \\ g \cdot d(2t - 1) & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} F(g \cdot h) &= F(cd) = F(c) \cdot F(g \cdot d) \\ &= F(c) \cdot F(d) = F(g) \cdot F(h) \\ F(g \cdot d) &= F(d) \\ &\Leftarrow f((g \cdot d(t_i))^{-1}(g \cdot d(t_{i+1}))) = \\ &= f(d(t_i)^{-1}g^{-1}gd(t_{i+1})) = f(d(t_i)^{-1} \cdot d(t_{i+1})) \quad \square \end{aligned}$$

### 66.6 Lemma (Universelle Überlagerung einer Gruppe).

Sei  $G$  eine zusammenhängende Lie-Gruppe, dann ist die universelle Überlagerung  $\tilde{G}$  der Mannigfaltigkeit  $G$  selbst eine Lie-Gruppe. Der Kern der Überlagerungsabbildung ist ein diskreter, zentraler Normalteiler.

**Beweis.** Es ist  $\tilde{G}$  eine Lie-Gruppe, da die Lifte der Gruppenoperationen glatte Abbildungen sind (Überlagerung, einfacher Zusammenhang) und wegen (24.4) sind die für eine Gruppe nötigen Gleichungen auch auf  $\tilde{G}$  erfüllt. Da  $p : \tilde{G} \rightarrow G$  eine Überlagerung ist, ist  $\text{Ker}(p)$  Normalteiler und diskret und liegt nach (24.24) im Zentrum.  $\square$

### Beispiele von universellen Gruppen-Überlagerungen.

- $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ , siehe (3.9).
- $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , siehe (3.5).
- $SU(2) \cong S^3 \rightarrow SO(3)$ , siehe (24.40).
- $SU(2) \times SU(2) \cong S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$ , siehe (24.40).
- $\text{Spin}(n) \rightarrow SO(n)$ , siehe (24.43).
- $\text{Pin}(n) \rightarrow O(n)$ , siehe (24.43).
- $SL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow SO_{\mathbb{C}}(3)$ , siehe (24.40).
- $SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2) \rightarrow SO_{\mathbb{C}}(4)$ , siehe (24.40).

### 66.7 Bemerkung

Zwei zusammenhängende Lie-Gruppen sind also genau dann als Lie-Gruppen lokal isomorph, wenn ihre universellen Überlagerungen isomorph sind. Alle lokal isomorphen zusammenhängenden Lie-Gruppen erhält man aus ihren einfachzusammenhängenden Repräsentanten durch Herausfaktorisieren diskreter Normalteiler.

## 67. Infinitesimale Struktur

Von besonderer Bedeutung in der Theorie ist folgender Teilvektorraum aller Vektorfelder:

**67.1 Definition (Lie-Algebra einer Lie-Gruppe)**

Der Teilvektorraum  $\mathcal{L}(G)$  von  $\mathfrak{X}(G)$  ist definiert durch

$$\mathcal{L}(G) := \left\{ \xi \in \mathfrak{X}(G) : \xi \text{ ist } L_g\text{-verwandt mit } \xi \text{ f\"ur alle } g, \text{ d.h. } TL_g \circ \xi = \xi \circ L_g \right\}.$$

Es ist  $\xi \in \mathcal{L}(G)$  genau dann, wenn  $TL_g(\xi_h) = \xi_{gh} \forall g, h \in G$  und es gen\"ugt diese Gleichung f\"ur  $h = e$  zu fordern, denn aus  $\xi_g = TL_g(\xi_e)$  folgt:

$$TL_g(\xi_h) = TL_g(TL_h(\xi_e)) = T(L_g \circ L_h)(\xi_e) = TL_{gh}(\xi_e) = \xi_{gh} = \xi(L_g(h)).$$

Diese Vektorfelder heißen LINKSINVARIANT.

**67.2 Lemma.** *Der Tangentialraum  $TG$  einer Lie-Gruppe  $G$  ist isomorph zu  $G \times \mathcal{L}(G)$ , also ist jede Lie-Gruppe parallelisierbar. Der Vektorraum  $T_e G$  ist isomorph zu  $\mathcal{L}G$ , das ist eine  $\dim(G)$ -dimensionale Teil-Lie-Algebra von  $\mathfrak{X}(G)$ .*

**Beweis.** Dies haben wir bereits in (27.9) skizziert. Mit  $L_g$  ist nat\"urlich auch  $TL_g : T_e G \rightarrow T_g G$  ein Diffeomorphismus. Also ist  $(g, \xi) \mapsto TL_g \cdot \xi$  eine Bijektion  $G \times T_e G \rightarrow TG$  mit inverser Abbildung  $\xi \mapsto (\pi(\xi), TL_{\pi(\xi)^{-1}} \cdot \xi)$ . Der Isomorphismus zwischen  $T_e G$  und  $\mathcal{L}G$  ist durch  $v \mapsto (g \mapsto TL_g \cdot v)$  und  $\xi \mapsto \xi_e$  gegeben. Schließlich ist  $\mathcal{L}G$  eine Teilalgebra, da f\"ur  $L_g$ -verwandte Vektorfelder auch deren Summe bzw. Lie-Klammer  $L_g$ -verwandt ist (letzteres folgt aus (29.7)).  $\square$

**67.3 Folgerung (Lie-Algebra einer Lie-Gruppe).**

$\mathcal{L}$  definiert einen Funktor von der Kategorie der lokalen Lie-Homomorphismen zwischen Lie-Gruppen in die Kategorie der Homomorphismen zwischen endlich dimensionalen Lie-Algebren.

**Beweis.** Sei  $f : G \rightarrow H$  ein lokaler Lie-Homomorphismus, dann wird  $\mathcal{L}f : \mathcal{L}G \rightarrow \mathcal{L}H$  definiert durch  $(\mathcal{L}f \cdot \xi)(h) := \mathcal{L}f(\xi(h)) = \mathcal{L}f(TL_h(\xi(h))) := TL_h \cdot T_e f \cdot \xi(e)$ , also durch folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{X}(G) \supseteq & \begin{array}{ccc} \mathcal{L}G & \xrightarrow{\mathcal{L}f} & \mathcal{L}H \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong \\ T_e G & \xrightarrow{T_e f} & T_e H \end{array} & \subseteq \mathfrak{X}(H) \end{array}$$

Es ist  $\xi$   $f$ -verwandt mit  $\mathcal{L}f \cdot \xi \in \mathcal{L}(H)$ , d.h. folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{Tf} & TH \\ \xi \uparrow & & \uparrow \mathcal{L}f(\xi) \\ G & \xrightarrow{f} & H, \end{array}$$

denn

$$(\mathcal{L}f \cdot \xi)_{f(p)} = TL_{f(p)} \cdot T_e f \cdot \xi_e = T_p f \cdot T_e L_p \cdot \xi_e = T_p f \cdot \xi_p, \text{ da } L_{f(p)} \circ f = f \circ L_p.$$

Eine einfache Rechnung zeigt, daß ist und  $\mathcal{L}f \cdot \xi$  eindeutig durch diese Eigenschaft bestimmt ist. Daraus folgt mittels (29.7) die Homomorphie-Eigenschaft von  $\mathcal{L}f$ .  $\square$

**67.4 Lemma.** *Jedes  $\xi \in \mathcal{L}G$  induziert einen eindeutigen Lie-Homomorphismus*

$$\exp_\xi : \mathbb{R} \rightarrow G \text{ mit } \exp'_\xi = \xi \circ \exp_\xi.$$

**Beweis.** Lokal um 0 existiert  $c = \exp_\xi$  als Lösung dieser Differentialgleichung zum Anfangswert  $\exp_\xi(0) = e$  und ist ein lokaler Lie-Homomorphismus: Sei  $d(t) := c(s)^{-1}c(s+t)$ , dann ist leicht nachzurechnen, daß  $d(t)$  ebenfalls Lösung dieser Differentialgleichung ist, also  $c(t) = d(t) = c(s)^{-1}c(s+t)$ . Weil  $\mathbb{R}$  einfachzusammenhängend ist, setzt sich  $c$  zu einem globalen Lie-Homomorphismen nach (66.5) fort. Dieser muß die Lösung auf einer offen und abgeschlossenen Menge – also auf  $\mathbb{R}$  – sein.  $\square$

### 67.5 Folgerung (1-Parameter Untergruppen).

$\mathcal{L}G$  ist isomorph zur Menge der 1-PARAMETER UNTERGRUPPEN von  $G$ , d.h. der Lie-Homomorphismen von  $\mathbb{R}$  nach  $G$ . Der Fluß zu  $\xi \in \mathcal{L}G$  ist  $\text{Fl}^\xi(t, g) = g \cdot \exp_\xi t$ .

**Beweis.** Die Abbildung  $\xi \mapsto \exp_\xi$  ist auf  $\mathcal{L}G$  injektiv, denn  $\exp'_\xi(o) = \xi_e$ . Sie ist surjektiv: Sei  $c : \mathbb{R} \rightarrow G$  ein Lie-Homomorphismus, dann ist  $c$  Lösung der Differentialgleichung:

$$c'(s) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} c(t+s) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} c(s) \cdot c(t) = TL_{c(s)} \cdot c'(o) = \xi_{c(s)},$$

wobei  $\xi$  das linksinvariante Vektorfeld zu  $c'(o)$  ist. Es gilt auch die behauptete Formel für den Fluß zu  $\xi$ , denn

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} g \cdot c(t) &= TL_g \cdot c'(t) = TL_g \cdot \xi_{c(t)} \\ &= TL_g \cdot TL_{c(t)} \cdot \xi_e = TL_{g \cdot c(t)} \cdot \xi_e = \xi_{g \cdot c(t)}. \quad \square \end{aligned}$$

### 67.6 Definition (Exponentialabbildung)

Unter der EXPONENTIALABBILDUNG  $\exp_G$  einer Liegruppe  $G$  versteht man die Abbildung  $\exp_G : \mathcal{L}G \rightarrow G$ ,  $\xi \mapsto \exp_\xi(1) = \text{Fl}^\xi(1, e)$ . Beachte dabei, daß  $t \mapsto \exp(t\xi)$  ein lokaler Lie-Gruppen Homomorphismus  $\mathbb{R} \rightarrow G$  ist und somit nach (66.5) zu eine globalen Homomorphismus eindeutig erweiterbar ist.

**67.7 Lemma.** Die Exponentialabbildung  $\exp_G$  einer Lie-Gruppe  $G$  ist glatt und erfüllt  $T_0 \exp_G = \text{id}_{T_e G}$ .

**Beweis.** Sei  $\psi(g, \xi) := (\exp(t\xi), \xi)$ , dann ist  $\psi \in \mathfrak{X}(G \times \mathcal{L}G)$  und  $(t, \xi) \mapsto (\exp(t\xi), \xi)$  ist die Lösung der zu  $\psi$  gehörigen Differentialgleichung, also glatt. Somit ist auch  $\exp$  glatt, und es gilt:  $T_0 \exp \cdot \xi = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(t\xi) = \exp'_\xi(0) = \xi_e$ .  $\square$

**67.8 Folgerung.** Es sei  $f : G \rightarrow H$  ein Lie-Gruppen-Homomorphismus, dann kommutiert folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}G & \xrightarrow{\mathcal{L}f} & \mathcal{L}H \\ \exp_G \downarrow & & \downarrow \exp_H \\ G & \xrightarrow{f} & H \end{array}$$

Ist insbesondere  $G$  eine Lie-Untergruppe von  $H$ , so ist  $\exp_G$  die Einschränkung von  $\exp_H$ .

**Beweis.** Es genügt zu zeigen, daß  $t \mapsto f(\exp_G(t\xi_e))$  die Differentialgleichung für  $t \mapsto \exp_H(t \cdot (\mathcal{L}f)(\xi_e))$  löst. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(\exp_G(t\xi_e)) &= Tf \cdot \frac{\partial}{\partial t} \exp_G(t\xi_e) \\ &= Tf \cdot TL_{\exp_G(t\xi_e)} \cdot \xi_e = TL_{f(\exp_G(t\xi_e))} \cdot Tf \cdot \xi_e \\ &= TL_{f(\exp_G(t\xi_e))} \cdot \mathcal{L}f \cdot \xi_e \quad \square \end{aligned}$$

### 67.9 Beispiele.

- Es sei  $G$  die abelsche Lie-Gruppe  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $\mu : G \times G \rightarrow G$  ist die Addition  $(g, h) \mapsto g + h$  und  $T_0L_g \cdot v = \partial_2\mu(g, 0) \cdot v = v$ . Also sind die linksinvarianten Vektorfelder gerade die konstanten Vektorfelder, und die Lie-Klammer von solchen ist 0, d.h. die Lie-Algebra  $\mathcal{L}G = \mathbb{R}^n$  mit der 0-Klammer. Die Differentialgleichung für  $c : t \mapsto \exp_G(t \cdot \xi_e)$  ist  $\frac{\partial}{\partial t} c(t) = \xi_{c(t)} = TL_{c(t)} \cdot \xi_e = \xi_e$  mit Anfangswert  $c(0) = 0$ , also ist  $c(t) = t \cdot \xi_e$  und somit  $\exp_G(\xi_e) = \xi_e$  die Identität.
- Sei nun  $G$  die Lie-Gruppe  $GL(n)$ . Da  $G$  offen in  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  ist, ist  $T_gG = L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  für alle  $g \in G$ . Die Multiplikation ist  $\mu : G \times G \rightarrow G$  ist die Komposition  $(g, h) \mapsto g \circ h$  und hat als Ableitung  $\mu'(g, h) \cdot (u, v) = g \circ v + u \circ h$ . Die linksinvarianten Vektorfelder sind also jene der Form

$$g \mapsto v_g := TL_g \cdot v = \partial_2\mu(g, 0) \cdot v = g \circ v \text{ mit } v \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n).$$

Die Lie-Klammer ist

$$[u, v]_g := v'(g) \cdot u_g - u'(g) \cdot v_g = u_g \circ v - v_g \circ u = g \circ (u \circ v - v \circ u),$$

Also ist die Lie-Algebra von  $G$  gerade  $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  mit dem Kommutator.

Die Differentialgleichung für  $c : t \mapsto \exp_G(t \cdot \xi_e)$  ist  $\frac{\partial}{\partial t} c(t) = \xi_{c(t)} = TL_{c(t)} \cdot \xi_e = c(t) \circ \xi_e$  mit Anfangswert  $c(0) = \text{id}$ , also ist  $c(t) = e^{t \cdot \xi_e}$  und somit  $\exp_G(\xi_e) = e^{\xi_e}$ . Das rechtfertigt die Bezeichnung Exponentialfunktion auf einer allgemeinen Gruppe.

- Die Exponentialabbildung der  $SL_{\mathbb{C}}(2)$ . Die Lie-Algebra der speziellen linearen Gruppe  $SL_{\mathbb{C}}(2)$  ist

$$\mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2) = \{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : \text{Spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\},$$

d.h.

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{sl}_{\mathbb{C}}(2) \Leftrightarrow d = -a.$$

Für solche  $T$  gilt

$$T^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & 0 \\ 0 & a^2 + bc \end{pmatrix} = -\det(T) \cdot \text{id}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \exp(T) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\det T)^k}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\det T)^k}{(2k+1)!} \cdot T \\ &= \cosh(\sqrt{-\det T}) + \frac{\sinh(\sqrt{-\det T})}{\sqrt{-\det T}} T \\ &= \cos(\sqrt{\det T}) + \frac{\sin(\sqrt{\det T})}{\sqrt{\det T}} T. \end{aligned}$$

Man beachte, daß keiner der beiden Faktoren  $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$  und  $\frac{\sinh x}{x} = \frac{e^x - e^{-x}}{2x}$  von der Auswahl des Vorzeichens von  $x := \sqrt{-\det T}$  abhängt.

Ist  $\det T$  reell (was z.B. für die Untergruppe  $SL(2) \subseteq SL_{\mathbb{C}}(2)$  der Fall ist), dann gilt:

Ist  $\det T = 0$ , so ist  $t \mapsto \exp(tT) = 1 + tT$  eine Gerade.

Ist  $\Delta^2 := \det T > 0$ , so parametrisiert  $t \mapsto \exp(tT) = \cos(t\Delta) + \sin(t\Delta) \frac{1}{\Delta} T$  eine Ellipse mit Achsen  $\text{id}$  und  $\frac{1}{\Delta} T$ . Insbesondere ist also  $\exp$  nicht injektiv.

Ist  $-\Delta^2 := \det T < 0$ , so parametrisiert  $t \mapsto \exp(tT) = \cosh(t\Delta) + \sinh(t\Delta) \frac{1}{\Delta} T$  eine Hyperbel mit Achsen  $\text{id}$  und  $\frac{1}{\Delta} T$ .

## 68. Infinitesimaler versus lokale Struktur

### 68.1 Definition (Unter-Lie-Gruppe)

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe. Eine Teilmenge  $H$  heißt UNTER-LIE-GRUPPE von  $G$  falls  $H$  Untergruppe von  $G$  ist,  $H$  eine Lie-Gruppe ist und die Inklusion von  $H$  in  $G$  glatt ist. Letztere ist dann sogar eine Immersion damit  $\mathcal{L}(H)$  eine Unter-Lie-Algebra von  $\mathcal{L}(G)$ : Angenommen  $T_e \text{incl} \cdot \xi = 0$ , dann ist  $\text{incl}(\exp(t\xi)) = \exp(t \cdot T \text{incl} \xi) = e$ , daher ist  $\text{incl}$  nicht injektiv (Widerspruch).

Bemerkung: Mit dieser Definition wird etwa  $(\mathbb{R}, +)$  mit der diskreten Topologie zu einer Unter-Lie-Gruppe von  $(\mathbb{R}, +)$  mit der Standardtopologie.

### 68.2 Satz (Untergruppe zu einer Unter algebra)

Sei  $G$  eine Lie-Gruppe und  $\mathcal{H}$  Unter-Lie-Algebra von  $\mathcal{L}G$ . Dann existiert eine eindeutige zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe  $H$  von  $G$  mit  $\mathcal{L}H = \mathcal{H}$ .

**Beweis.** Sei  $E_g := \{\xi_g : \xi \in \mathcal{H}\}$ . Dann ist  $E$  ein integrables Teilbündel von  $TG$ : Sei  $\xi, \eta \in \Gamma(E)$  (nicht notwendig links-invariant). Bezüglich einer Basis  $(\xi_i)_i$  von  $\mathcal{H}$  (bestehend aus links-invarianten Vektorfeldern) haben wir:

$$\begin{aligned} \xi &= \sum f_i \xi_i, \quad \eta = \sum g_i \xi_i \text{ und somit} \\ [\xi, \eta] &= \sum_{ij} f_i g_j [\xi_i, \xi_j] + \sum_{ij} f_i \xi_i (g_j) \xi_j - \sum_{ij} g_j \xi_j (f_i) \xi_i. \end{aligned}$$

Nach dem Satz (30.11) von Frobenius existiert eine eindeutige maximale zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit  $H$  durch  $e$  mit  $TH = E|_H$ . Wir zeigen noch,

daß  $H$  Untergruppe ist: Sei  $h \in H$ , dann folgt  $e \in L_{h^{-1}}(H)$  ist zusammenhängende Teilmannigfaltigkeit. Da die Vektorfelder in  $\mathcal{H}$  linksinvariant sind, ist  $L_{h^{-1}}(H)$  eine Integralmannigfaltigkeit, also  $L_{h^{-1}}(H) \subseteq H$  nach (30.11.3).  $\square$

**68.3 Satz (Lie-Gruppe zu einer Lie-Algebra).** *Sei  $\mathcal{G}$  eine endlich dimensionale Lie-Algebra. Dann existiert eine (einfachzusammenhängende) Lie-Gruppe  $G$  mit  $\mathcal{L}G \cong \mathcal{G}$ .*

Ein Beweis kann folgendermaßen geführt werden: Jede endlich dimensionale Lie-Algebra hat nach einem Satz von Ado eine treue Darstellung auf einem  $\mathbb{R}^n$ , d.h.  $\mathcal{G}$  kann als Teilalgebra von  $L(n) \cong \mathcal{L}(GL(n))$  aufgefaßt werden. Nach obigem Satz existiert eine zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe  $G$  von  $GL(n)$  mit  $\mathcal{L}G = \mathcal{G}$ .

**68.4 Folgerung.** *Seien  $G$  und  $H$  zwei Lie-Gruppen,  $\mathfrak{f} : \mathcal{L}G \rightarrow \mathcal{L}H$  ein Lie-Algebra-Homomorphismus. Dann existiert ein lokaler Lie-Gruppen-Homomorphismus  $f$  mit  $\mathcal{L}f = \mathfrak{f}$ . Ist zusätzlich  $G$  einfachzusammenhängend, dann kann  $f$  global gewählt werden.*

**Beweis.** Sei  $\mathcal{K} := \text{graph}(\mathfrak{f})$ . Nach obigem Satz existiert zu dieser Teilalgebra von  $\mathcal{L}G \times \mathcal{L}H = \mathcal{L}(G \times H)$  eine Unter-Lie-Gruppe  $K$  von  $G \times H$  mit  $\mathcal{L}K = \mathcal{K}$ . Sei  $j := \text{pr}_1 \circ \text{incl} : K \rightarrow G \times H \rightarrow G$ , dann ist

$$\mathcal{L}j(\xi, \mathfrak{f}(\xi)) = \mathcal{L}\text{pr}_1(T\text{incl}(\xi, \mathfrak{f}(\xi))) = \mathcal{L}\text{pr}_1(\xi, \mathfrak{f}(\xi)) = \xi.$$

Also ist  $\mathcal{L}j$  ein Isomorphismus und  $j$  ein lokaler Diffeomorphismus. Sei schließlich  $f := \text{pr}_2 \cdot \text{incl} \cdot j^{-1}$ , dann ist  $f$  ein lokaler Lie-Gruppen-Homomorphismus und  $\mathcal{L}f : \xi \mapsto \mathcal{L}\text{pr}_2(\mathcal{L}\text{incl}(\xi, \mathfrak{f}(\xi))) = \mathfrak{f}(\xi)$ .  $\square$

## Zusammenfassung

Somit stellt  $\mathcal{L}$  eine bis auf lokale (globale) Isomorphismen bijektive Zuordnung zwischen (einfachzusammenhängenden) Lie-Gruppen und endlich dimensionalen Lie-Algebren dar.

Die obigen Sätze lassen sich verallgemeinern, wenn man  $G$  durch die unendlich dimensionale Gruppe  $\text{Diff}(M)$  der Diffeomorphismen einer Mannigfaltigkeit  $M$  ersetzt und als deren Lie-Algebra den Raum der Vektorfelder  $\mathfrak{X}(M)$  verwendet. Für eine 1-Parameter Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$  ist die Untergruppen-Eigenschaft äquivalent zur Fluß-Eigenschaft der assoziierten Abbildung  $(\mathbb{R} \times M \rightarrow M)$ . Solche Abbildungen entsprechen den Vektorfeldern auf  $M$  (Differenzieren).

## 69. Untergruppen

**69.1 Lemma.** *Sei  $H$  eine separable Unter-Lie-Gruppe von  $G$ , dann ist  $H$  initial in  $G$ .*

**Beweis.** Da  $\mathcal{L}H$  Unter-Lie-Algebra von  $\mathcal{L}G$  ist, existiert eine eindeutige zusammenhängende Unter-Lie-Gruppe  $K$  von  $G$  mit  $\mathcal{L}K = \mathcal{L}H$ . Diese ist als maximale Integralmannigfaltigkeit initial in  $G$ . Da die Lie-Algebren gleich sind, muß die Zusammenhangskomponente  $H_0$  von  $H$  offen in  $K$  sein, somit als Untergruppe auch abgeschlossen und daher mit der zusammenhängenden Gruppe  $K$  übereinstimmen.

$H$  besitzt als separable Mannigfaltigkeit aber nur abzählbar viele Zusammenhangskomponenten, die diffeomorph zur initialen Teilmannigfaltigkeit  $K$  sind. Also ist  $H$  selbst initiale Teilmannigfaltigkeit.  $\square$

### Bemerkung

Die Separabilität von  $H$  ist essentiell:  $\mathbb{R}$  mit der diskreten Topologie ist nicht initial in  $\mathbb{R}$ .

**69.3 Satz.** *Sei  $H$  eine separable Unter-Lie-Gruppe von  $G$ . Dann ist  $H$  genau dann reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $G$ , wenn  $H$  abgeschlossen in  $G$  ist.*

**Beweisskizze.** Dies ist in Wirklichkeit ein Satz über lokalkompakte Gruppen.

( $\Leftarrow$ ) Wir verwenden den Satz über offene Abbildungen: Jeder stetige surjektive Gruppen-Homomorphismus zwischen lokalkompakten Gruppen ist offen, falls seine Domäne Lindelöf ist. Wir wenden diesen nun auf die Identität von  $H$  mit der Lie-Gruppen-Topologie nach  $H$  mit der Spurtopologie an; letztere ist auch lokalkompakt, wenn  $H$  in  $G$  abgeschlossen ist.

( $\Rightarrow$ ) Das ist eine direkte Konsequenz eines Satzes über abgeschlossene Abbildungen: Jeder stetige Gruppen-Homomorphismus zwischen lokalkompakten Gruppen, der ein Homöomorphismus auf sein Bild ist, hat ein abgeschlossenes Bild. Man könnte auch so vorgehen: Als reguläre Teilmannigfaltigkeit ist  $H$  lokal abgeschlossen in  $G$ , demnach ist  $H$  offen abgeschlossen in  $H^\sim$ , also  $H = H^\sim$ .  $\square$

### 69.4 Satz (Abgeschlossen Untergruppen).

*Jede abgeschlossene Untergruppe einer Lie-Gruppe ist selbst eine Lie-Gruppe.*

**Beweis.** Sei  $H$  eine abgeschlossene Untergruppe der Lie-Gruppe  $G$ . Wir setzen  $\mathcal{H} := \{c'(0) : c \in c^\infty(\mathbb{R}, H), c(0) = e\}$ . Dann ist  $\mathcal{H}$  ein Teilvektorraum von  $\mathcal{L}G$ : Seien  $c'_i(0) \in \mathcal{H}$  und  $t_i \in \mathbb{R}$ , definiere  $c(t) := c_1(t_1 t) \cdot c_2(t_2 t)$ , dann gilt  $c'(0) = t_1 \cdot c'_1(0) + t_2 \cdot c'_2(0)$ .

**Behauptung:**  $\mathcal{H} = \{\xi \mid \exp(t \cdot \xi) \in H \text{ für alle } t\}$

( $\supseteq$ ) ist klar.

( $\subseteq$ )  $\xi := c'(0)$ , sei  $v : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}G$ , sodaß  $v(0) = 0$  und  $\exp(v(t)) = c(t)$ . Es gilt:

$$\xi = c'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp(v(t)) = T_0 \exp(v'(0)) = v'(0) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot v\left(\frac{1}{n}\right)$$

Setzen wir  $t_n := 1/n$  und  $h_n := n \cdot v(t_n)$ , so ist  $t_n h_n = v(1/n)$  und  $\exp(t_n h_n) = \exp(v(1/n)) = c(1/n) \in H$ . Aus der nachfolgenden Behauptung ergibt sich dann  $\exp(t \xi) \in H$ .

**Behauptung:** Seien  $h_k \in \mathcal{G}$ ,  $0 \neq t_k \rightarrow 0$ ,  $h_k \rightarrow h$ ,  $\exp(t_k h_k) \in H$ . Dann ist  $\exp(th) \in H$  für alle  $t$ .

Da  $\exp(t_k h_k)^{-1} = \exp(-t_k h_k)$  ist, können wir uns auf positive  $t_k$  beschränken. Sei  $t \in \mathbb{R}$  beliebig und  $k_n$  mit  $n \in [t/t_{k_n-1}, t/t_{k_n}]$  gewählt. Wegen  $t_k \rightarrow 0$  gilt:  $k_n \rightarrow \infty$  und somit  $nt_{k_n} \rightarrow t$ . Also  $nt_{k_n} h_{k_n} \rightarrow th$  und  $\exp(th) \leftarrow \exp(nt_{k_n} h_{k_n}) = \exp(t_{k_n} h_{k_n})^n \in H$

**Behauptung:** Es existiert ein offenes  $U' \subseteq \mathcal{H}^\perp$  mit  $\exp(U') \cap H = \{0\}$ .

Anderenfalls existieren  $h_k \in \mathcal{H}^\perp$ ,  $h_k \rightarrow 0$ ,  $\exp(h_k) \in H$ . Setzen  $t_k := 1/|h_k|$ , o.B.d.A. konvergiert  $t_k h_k \rightarrow h \in \mathcal{H}^\perp$ . Dann ist  $\exp(t_k h_k / t_k) = \exp(h_k) \in H$  und  $1/t_k \rightarrow 0$ . Mit der vorigen Behauptung folgt  $\exp(th) \in H$  und  $h \in \mathcal{H}$ , ein Widerspruch.

**Behauptung:** Ein offenes  $U \subseteq \mathcal{L}G$  existiert mit  $\exp(U \cap \mathcal{H}) = \exp U \cap H$ :

( $\subseteq$ ) klar.

( $\supseteq$ ) Sei  $a \in H \cap \exp(U)$ . Dann ist  $a = \exp \xi \cdot \exp \eta$  mit  $\xi \in \mathcal{H}$  und  $\eta \in \mathcal{H}^\perp$  für  $U$  genügend klein ( $(\xi, \eta) \mapsto \exp \xi \cdot \exp \eta$  ist lokaler Diffeomorphismus). Es gilt  $\exp \eta \in H$  ( $a, \exp \xi \in H$  Untergruppe), und nach dem obigen  $\eta = 0$ , also  $a = \exp \xi$  mit  $\xi \in \mathcal{H} \cap U$ . Wir zeigen  $H$  ist Unter-Lie-Gruppe von  $G$ :  $\exp : \mathcal{H} \rightarrow H$  ist lokaler Diffeomorphismus, also bildet  $\{L_h \circ \exp | \mathcal{H} : h \in H\}$  einen Atlas für  $H$ . Die Kartenwechsel

$$(L_h \circ \exp)^{-1} \circ L_t \circ \exp = \exp^{-1} \circ L_{h-t} \circ \exp$$

sind dort glatt, wo sie definiert sind, und bilden wegen obiger Eigenschaft einen Teilmannigfaltigkeits-Atlas.  $\square$

### Bemerkung

Dieser Satz wurde zuerst durch [VonNeumann] für  $G = GL(n)$  und dann von [Cartan] für beliebiges  $G$  bewiesen. Es gibt noch ein zweites wichtiges Kriterium, um Untergruppen als Lie-Gruppen zu erkennen: Jede bogenzusammenhängende Untergruppe einer Lie-Gruppe ist selbst Lie-Gruppe, siehe [93].

## 70. Homogene Räume

**70.1 Satz (Homogene Räume).** *Sei  $H$  eine abgeschlossene Unter-Lie-Gruppe von  $G$ . Dann existiert auf der Menge der rechten Nebenklassen  $G/H := \{gH : g \in G\}$  eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur, für die  $G \rightarrow G/H$  eine Submersion ist. Es ist dann  $G \rightarrow G/H$  sogar ein Hauptfaserbündel.*

**Beweis.** Wir beweisen dies in zwei Teilen: Im ersten Schritt bilden wir die Faktorgruppe nach der Zusammenhangskomponente  $H_0$  von  $e$ , im zweiten faktorisieren wir die diskrete Wirkung von  $H/H_0$  heraus.

$$G \rightarrow G/H_0 \rightarrow (G/H_0)/(H/H_0) \cong G/H$$

Durch  $E_g := TL_g(T_e H)$  wird ein integrables reguläres Teilvektorbündel definiert. Die maximalen zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeiten zu  $E$  sind gerade  $gH_0$ . Im Anschluß an den Satz von Frobenius haben wir in (30.14) gezeigt, daß in solch einer Situation  $G/H_0$  eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur trägt, sodaß  $\pi : G \rightarrow G/H_0$  eine Submersion ist. Da  $H_0$  ein Normalteiler von  $H$  ist, ist  $H/H_0$  selbst eine (diskrete) Gruppe, und diese wirkt strikt diskontinuierlich auf der Mannigfaltigkeit  $G/H_0$  durch  $(hH_0) \cdot (gH_0) := gh^{-1}H_0$ : Sei nämlich  $U$  offen in  $G$  mit  $U^{-1}U \cap H \subseteq H_0$  und  $h \notin H_0$ . Dann ist  $((hH_0) \cdot \pi(U)) \cap \pi(U) = \emptyset$ , andernfalls wäre  $\emptyset \neq uh^{-1}H_0 \cap u'H_0$  für gewisse  $u, u' \in U$  und somit  $(u')^{-1} \cdot u = h' \cdot h \in H$  mit einem  $h' \in H_0$ , also  $h' \cdot h \in H_0$  und  $h \in H_0$ . Aus (24.19) folgt nun, daß  $G/H = (G/H_0)/(H/H_0)$  eine Mannigfaltigkeit und  $G/H_0 \rightarrow G/H = (G/H_0)/(H/H_0)$  eine Überlagerung ist. Es bleibt die Faserbündelstruktur zu beweisen: Da  $p : G \rightarrow G/H$  eine Submersion ist,

finden wir einen lokalen Schnitt  $s : U \rightarrow G$  nach (22.1). Dann ist  $U \times H \rightarrow p^{-1}U$ ,  $(u, h) \mapsto s(u) \cdot h$  eine Trivialisierung mit inverser Abbildung  $g \mapsto (p(g), s(p(g))^{-1}g)$ .  $\square$

## 70.2 Bemerkungen

1. Ist  $H$  zusätzlich normal in  $G$ , dann ist  $G/H$  eine Lie-Gruppe und  $G \rightarrow G/H$  ein Lie-Gruppen-Homomorphismus.
2. Die Gruppe  $G$  wirkt transitiv auf  $M := G/H$  und die Fixgruppen  $G_{\dot{g}} = \{k \in G : k \cdot \dot{g} = \dot{g}\}$  für  $\dot{g} \in M$  sind konjugiert zu  $H$ , denn

$$p(g) = \dot{g} = k \cdot \dot{g} = k \cdot p(g) = p(kg) \Leftrightarrow \exists h \in H : kg = gh \Leftrightarrow k \in gHg^{-1}$$

**70.3 Satz.** *Wirkt umgekehrt eine Lie-Gruppe  $G$  transitiv auf einer Mannigfaltigkeit  $M$ , und sei  $G_p := \{g \in G : g \cdot p = p\}$  für ein beliebiges  $p \in M$ , dann gilt:  $G_p$  ist eine abgeschlossene Untergruppe von  $G$  und  $G/G_p$  ist diffeomorph zu  $M$  vermöge  $gG_p \mapsto gp$ . Der Wirkung auf  $M$  entspricht die Linksmultiplikation auf  $G/G_p$ .*

$$\begin{array}{ccccc} G_p & \hookrightarrow & G & \xrightarrow{\text{ev}_p} & G \cdot p = M \\ & & \searrow & & \uparrow \cong \\ & & & & G/G_p \end{array}$$

**Beweis.** Klarerweise ist  $gG_p \mapsto gp$  eine bijektive glatte Abbildung, die mit der Wirkung von  $G$  auf  $G/G_p$  und auf  $M$  vertauscht. Sie ist auch eine Immersion, denn dazu genügt es die Injektivität der Tangentialabbildung bei  $e \cdot G_p \in G/G_p$  nachzuweisen. Sei dazu  $0 = T_e \text{ev}_p \cdot \xi = \frac{d}{dt}|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot p$  für ein  $\xi \in T_e G$ , dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \exp(t\xi) \cdot p &= \frac{d}{ds}|_{s=0} \exp((t+s)\xi) \cdot p = \frac{d}{ds}|_{s=0} \exp(t\xi) \cdot \exp(s\xi) \cdot p \\ &= TL_{\exp(t\xi)} \frac{d}{ds}|_{s=0} \exp(s\xi) \cdot p = 0 \end{aligned}$$

für alle  $t$ , also  $\exp t\xi \cdot p = p$ , i.e.  $\exp t\xi \in G_p$ , und somit  $\xi = 0$  in  $T(G/G_p)$ .

Eine bijektive Immersion ist aber bereits ein Diffeomorphismus (siehe [88, S.50]): Es genügt dazu die Submersivität nachzuweisen. Angenommen, die Dimension des Zielraums ist größer, dann gibt es auf Grund des Rang-Satzes zu jedem Punkt eine Umgebung, deren Bild nirgends dicht ist. Abzählbar viele dieser Bilder überdecken dann das Bild (da wir  $G$  als zusammenhängend und somit Lindelöf voraussetzen können), was ein Widerspruch zur Baire'schen Eigenschaft (des lokalkompakten Raums  $M$ ) ist.  $\square$

Eine sehr wichtige Klasse von Faserbündeln, die sogenannten HAUPTFASERBÜNDEL, erhält man durch folgende Verallgemeinerung der Konstruktion aus (70.1):

**70.4 Satz (Raum der Orbits).** *Die Lie-Gruppe  $G$  wirke FREI auf der Mannigfaltigkeit  $M$ , (d.h.  $G_p = \{e\}$  für alle  $p \in M$ ). Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1.  $M/G$  besitzt eine (eindeutige) Mannigfaltigkeitsstruktur, sodaß  $\pi : M \rightarrow M/G$  eine Submersion ist. Dies ist dann sogar ein Faserbündel mit typischer Faser  $G$ . Diese heißt STRUKTURGRUPPE DES HAUPTFASERBÜNDELS.

2. Die Abbildung  $G \times M \rightarrow M \times M$  mit  $(g, p) \mapsto (g \cdot p, p)$  ist eine topologische Einbettung (oder äquivalent: folgende Abbildung  $M \times M \supseteq \{(g \cdot p, p) : g \in G, p \in M\} \rightarrow G$  ist stetig:  $(q, p) \mapsto g$ , falls  $q = g \cdot p$ )

**Beweis.** Wir zeigen zuerst, daß die Submersivität von  $\pi : M \rightarrow M/G$  bereits die Faserbündel-Eigenschaft impliziert: Sei dazu  $s : U \rightarrow M$  ein lokaler Schnitt für  $U$  offen in  $M/G$ . Dann ist  $U \times G \rightarrow \pi^{-1}U$ ,  $(u, g) \mapsto g \cdot s(u)$  eine Trivialisierung mit inverser Abbildung  $m \mapsto (\pi(m), g)$ , wobei  $g$  definiert durch  $g \cdot s(\pi(m)) = m$  ist.

(1  $\Rightarrow$  2) Es konvergiere  $(g_i p_i, p_i) \rightarrow (gp, p)$  in  $M \times M$ . Es genügt dann zu zeigen, daß  $g_i \rightarrow g$ . O.B.d.A. sei  $g = e$  (ersetze dazu  $g^{-1}g_i$  durch  $g_i$ ). Sei  $s$  ein lokaler Schnitt der Submersion  $M \rightarrow M/G$  mit  $s(\pi(p)) = p$ . Dann ist  $(M/G) \times G \rightarrow M$  mit  $(x, h) \mapsto h s(x)$ , ein lokaler Diffeomorphismus und somit  $p_i = h_i s(x_i)$  für  $x_i := \pi(p_i)$  und gewisse  $h_i \rightarrow e$ , also  $g_i h_i s(x_i) = g_i p_i \rightarrow gp = e s(\pi(p))$ . Folglich gilt  $g_i h_i \rightarrow e$  und wegen  $h_i \rightarrow e$  schließlich auch  $g_i \rightarrow e$ .

(1  $\Leftarrow$  2) Wie im Beweis von (70.1) stellen wir  $\pi$  als Zusammensetzung dar:

$$M \rightarrow M/G_0 \rightarrow (M/G_0)/(G/G_0) = M/G.$$

Für den ersten Teil definieren wir  $E_p := T \text{ev}_p(T_e G) \subseteq T_p M$ , wobei  $\text{ev}_p : G \rightarrow M$  durch  $g \mapsto g \cdot p$  definiert ist. Dies ist ein integrables Teilvektorbündel mit maximaler zusammenhängender Integralmannigfaltigkeit  $G_0 \cdot p$  durch  $p \in M$ . Es ist  $E$  regulär, da  $G_0 \cdot p$  nach Voraussetzung (2) reguläre Teilmannigfaltigkeit von  $M$  ist.

$$\begin{array}{ccc} G \times M & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & M \times M \\ \uparrow & & \uparrow \\ G_0 \times \{p\} & \xrightarrow{\quad \quad \quad} & M \times \{p\} \end{array}$$

Also können wir wieder die Folgerung (30.14) aus dem Satz von Frobenius anwenden und erhalten, daß  $M \rightarrow M/G_0$  eine Submersion ist.

Beim zweiten Teil beachten wir, daß  $G/G_0$  auf  $M/G_0$  vermöge  $gG_0 \cdot G_0 p := G_0 gp$  frei wirkt. Die Wirkung dieser diskreten Gruppe ist strikt diskontinuierlich: Sei  $(gG_0 \cdot G_0 U) \cap G_0 U \neq \emptyset$ , dann ist  $gu = g'u'$  mit  $g' \in G_0$  und  $u, u' \in U$ . Es folgt  $u = g^{-1}g'u'$  und somit  $g^{-1}g' \in G_0$  für hinreichend kleines  $U$  (anderfalls existieren  $p_i \rightarrow p$  und  $h_i \in G \setminus G_0$  mit  $g_i p_i \rightarrow p$  und somit wegen (2) mit  $h_i \rightarrow e$ ), also  $g \in G_0$ .  $\square$

**70.5 Lemma.** *Es sei  $M \rightarrow N$  ein Faserbündel mit typischer Faser  $F$ . Falls  $N$  und  $F$  zusammenhängend sind, dann ist es auch  $M$ . Falls  $N$  und  $F$  einfach zusammenhängend ist, so auch  $M$ . Allgemeiner hat man die lange exakte Homotopiesequenz einer Faserung (siehe [?, p.187, IV.8.6])*

$$\dots \xrightarrow{\partial} \pi_k(F) \rightarrow \pi_k(M) \rightarrow \pi_k(N) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(F) \rightarrow \dots$$

**Beweis der 1. Aussage.** Ist für ein Faserbündel  $p : M \rightarrow N$  sowohl die Basis  $N$  als auch die typische Faser  $F$  zusammenhängend, so auch der Totalraum  $M$ . Denn seien  $U$  und  $V$  nicht leer und offen in  $M$  mit  $U \cup V = M$ , dann ist  $p(U)$  und  $p(V)$  nicht leer und offen in  $N$  mit  $p(U) \cup p(V) = N$ . Weil  $N$  zusammenhängend ist, gilt  $p(U) \cap p(V) \neq \emptyset$ , also gibt es einen Punkt  $m \in p(U) \cap p(V)$ , und  $U \cap F$  und  $V \cap F$  überdecken die Faser  $F$  über  $m$  mit nicht-leeren Mengen. Da  $F$  zusammenhängend ist, haben  $U$  und  $V$  nicht-leeren Durchschnitt in  $F$  über  $m$ . Also ist  $M$  zusammenhängend.

Die Aussage betreffend des einfachen Zusammenhangs sieht man wie folgt ein: Sei  $c$  ein geschlossene Kurve in  $M$ . Da  $N$  einfach zusammenhängend ist existiert eine Homotopie relativ  $\dot{I}$  zwischen  $p \circ c$  und der konstanten Kurve. Nun lifte diese Homotopie zu einer Homotopie relative  $\{0\}$  zwischen  $c$  und der konstante Kurve. Die Endwerte der Homotopie bilden eine geschlossene Kurve in der Faser, die sich dort homotop zur konstanten Abbildung verformen läßt. Verklebt man diese beiden Homotopien, so erhält man eine Homotopie relativ  $\dot{I}$ , also ist  $M$  einfach zusammenhängend.  $\square$

Dies kann verwendet werden, um mehrere der folgenden Lie-Gruppen als (einfach-)zusammenhängend zu erkennen.

### 70.6 Beispiele

1.  $O(n) \times S^{n-1} \rightarrow S^{n-1}$  mit  $(T, v) \mapsto Tv$  ist transitive Wirkung mit Fixgruppe  $O(n)_{e_n} = O(n-1)$ . Also ist  $O(n)/O(n-1) \cong S^{n-1}$  und analog  $SO(n)/SO(n-1) \cong S^{n-1}$ .

$$SO(n-1) \hookrightarrow SO(n) \rightarrow S^{n-1}, \quad SO(1) = \{1\}, \quad SO(2) = S^1,$$

2.  $U(n) \times S^{2n-1} \rightarrow S^{2n-1}$  mit  $(T, v) \mapsto Tv$  ist transitive Wirkung mit Fixgruppe  $U(n)_{e_n} = U(n-1)$ . Also ist  $U(n)/U(n-1) \cong S^{2n-1}$  und analog  $SU(n)/SU(n-1) \cong S^{2n-1}$ .
3.  $Q(n) \times S^{4n-1} \rightarrow S^{4n-1}$  mit  $(T, v) \mapsto Tv$  ist transitive Wirkung mit Fixgruppe  $Q(n)_{e_n} = Q(n-1)$ . Also ist  $Q(n)/Q(n-1) \cong S^{4n-1}$ .
4. Die Homotopiegruppe der  $SL_{\mathbb{C}}(n)$  läßt sich rekursiv aus

$$SL_{\mathbb{C}}(n-1) \times \mathbb{C}^{n-1} \hookrightarrow SL_{\mathbb{C}}(n) \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad SL_{\mathbb{C}}(1) = \{1\}, \dots$$

berechnen.

5.  $V(k, n)$  bezeichnet die STIEFEL-MANNIGFALTIGKEIT der orthonormalen  $k$ -Beine im  $\mathbb{R}^n$ , das ist der Raum der  $k$ -Tupel orthonormaler Vektoren im  $\mathbb{R}^n$ . Die  $O(n)$  wirkt auf  $V(k, n)$  durch Anwenden auf die einzelnen Vektoren. Diese Wirkung ist transitiv: Seien nämlich  $(a_1, \dots, a_k)$  und  $(b_1, \dots, b_k)$  zwei  $k$ -Beine, dann ergänzt man diese zu Orthonormalbasen  $(a_1, \dots, a_n)$  und  $(b_1, \dots, b_n)$  und definiert eine orthogonale Transformation  $A$  durch  $A(a_i) := b_i$ . Die Fixgruppe von  $O(n)$  beim  $k$ -Bein der ersten  $k$  Vektoren der Standardbasis sind die orthogonalen Transformationen am orthogonalen Komplement des vom  $k$ -Bein aufgespannten Teilraums und somit isomorph zu  $O(n-k)$ . Also ist  $V(k, n) \cong O(n)/O(n-k)$  nach (70.3).

$$O(n-k) \hookrightarrow O(n) \rightarrow V(k, n) \dots \text{Stiefelmannigfaltigkeit}$$

6.  $G(k, n)$  bezeichnet die GRASSMANN-MANNIGFALTIGKEIT der  $k$ -Ebenen im  $\mathbb{R}^n$ , das sind die  $k$ -dimensionalen Teilräume. Wieder wirkt  $O(n)$  auf  $G(k, n)$  transitiv (man wähle passende Basen wie in 4.). Die Fixgruppe eines Teilraums  $\mathbb{R}^k$  sind jene (orthogonalen) Transformationen, die diesen - also auch sein orthogonales Komplement - invariant lassen; die sind gerade  $O(k) \times O(n-k)$ . Also ist  $G(k, n) \cong O(n)/(O(k) \times O(n-k))$  nach (70.3).

$$O(k) \times O(n-k) \hookrightarrow O(n) \rightarrow G(k, n) \dots \text{Grassmannmannigfaltigkeit}$$

Für  $k=1$  erhält man natürlich gerade den projektiven Raum  $P^{n-1}$  der Geraden im  $\mathbb{R}^n$ , vgl. Aufgabe (72.58).

7. Auf  $V(k, n)$  wirkt auch die  $O(k)$ , indem man ein orthonormales  $k$ -Bein  $(a_1, \dots, a_k)$  als isometrische Abbildung  $A : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $e_i \mapsto a_i$  auffaßt und ein  $T \in O(k)$  auf  $A$  vermöge  $A \circ T$  wirken läßt. Diese Wirkung ist klarerweise frei, und zwei  $k$ -Beine liegen im selben Orbit, wenn sie den gleichen Teilraum aufspannen, also ist  $G(k, n) = V(k, n)/O(k) \leftarrow V(k, n)$  ein Hauptfaserbündel mit typischer Faser  $O(k)$  nach (70.3), vgl. Aufgabe (72.59).

$O(k) \hookrightarrow V(k, n) \rightarrow G(k, n) \dots$  Universelles  $O(k)$ -Hauptfaserbündel

Vergleiche das auch mit

$\mathbb{R}^k \hookrightarrow \{(F, x) : x \in F < \mathbb{R}^n, \dim F = k\} \rightarrow G(k, n) \dots$  Universelle Vektorbündel

8. Hauptfaserbündel kann man auch ausgehend von Vektorbündeln  $E \rightarrow M$  konstruieren: dazu bemerke man, daß die Transitionsfunktionen  $\varphi_{UV}$  des Vektorbündels Werte in der  $GL(k)$  haben, wobei  $k$  die Faserdimension des Vektorbündels ist. Da die  $GL(k)$  aber auch als Teilgruppe der Diffeomorphismen von  $GL(k)$  aufgefaßt werden kann (Linksmultiplikation), können die Transitionsfunktionen auch als Kartenwechsel eines Faserbündels  $E^\sim$  mit typischer Faser  $GL(k)$  interpretiert werden. Die  $GL(k)$  wirkt nun frei auf diesem Faserbündel durch Linksmultiplikation, und  $E^\sim \rightarrow E^\sim/GL(k) = M$  heißt das zu  $E$  assoziierte Hauptfaserbündel. Im Falle des Tangentialbündels  $E := TM$  nennt man das assoziierte Hauptfaserbündel Rahmenbündel der Mannigfaltigkeit  $M$ .

## V. Kotangentialbündel

In diesem Kapitel besprechen wir das duale Konzept zu Tangentialbündel und Vektorfeldern, nämlich das Kotangentialbündel und die 1-Formen. In einem Abschnitt führen wir dann Riemann-Mannigfaltigkeiten ein, die nicht nur einen expliziten Isomorphismus zwischen Tangential- und Kotangentialraum erlauben sondern auch bestens geeignet sind um Geometrie zu treiben. So können wir Längen und Winkel von Kurven messen. In Kapitel (7) werden wir dies dann genauer ausführen. Hier besprechen wir ein wenig die konformen Abbildungen insbesondere im Falle Riemannscher Flächen.

### 31. Konstruktion und 1-Formen

#### 31.1 Motivation

Für Kurvenintegrale ist der Begriff der 1-Form wichtig, da dies längs Kurven integrierbare Objekte sind (siehe (3.10)). Wir wollen diesen Begriff nun auf Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Wir erinnern uns daran, daß eine 1-Form auf einer offenen Teilmenge  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  eine Abbildung  $\omega : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  ist. Das Kurvenintegral von  $\omega$  längs einer Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  ist dann als gewöhnliches Riemannintegral von  $t \mapsto \omega(c(t))(c'(t))$  definiert. Auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit  $M$  ist  $c'(t) \in T_{c(t)}M$  und somit muß  $\omega(x) \in L(T_xM, \mathbb{R}) = (T_xM)^*$  sein.

#### 31.2 Definition (1-Formen)

Unter einer 1-FORM auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  verstehen wir eine Abbildung  $\omega$ , die jedem Punkt  $x \in M$  ein lineares Funktional  $\omega(x) \in (T_xM)^*$  zuordnet.

Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine glatte Funktion. Dann erhalten wir eine 1-Form, das TOTALE DIFFERENTIAL  $df$  von  $f$ , durch  $df(x)(v) := v(f) \in \mathbb{R}$  für alle  $v \in T_xM \cong \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ .

Wir wollen nun 1-Formen in lokalen Koordinaten beschreiben. Dazu benötigen wir Koordinaten in  $(T_xM)^*$ . Ist  $E$  ein  $m$ -dimensionaler Vektorraum und  $(g_i)_{i=1}^m$  eine Basis in  $E$ , so erhält man eine Basis  $(g^i)_{i=1}^m$  von  $E^*$ , die sogenannte DUALE BASIS indem man die Funktionale  $g^i$  auf der Basis  $(g_j)_{j=1}^m$  durch  $g^i(g_j) := \delta_j^i$  festlegt, wobei  $\delta_j^i$  das Kronecker-Deltasymbol ist, d.h.  $\delta_i^i := 1$  und  $\delta_j^i := 0$  für  $i \neq j$ .

Seien nun  $(u^1, \dots, u^m)$  lokale Koordinaten auf  $M$ . Dann ist  $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$  eine Basis von  $T_xM$ . Berechnen wir nun das totale Differential  $du^i$  der  $i$ -ten Koordinatenfunktionen

$u^i$ , so erhalten wir:

$$du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \frac{\partial}{\partial u^j}(u^i) = \partial_j(u^i \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \partial_j(\text{pr}_i) \circ \varphi^{-1} = \delta_j^i.$$

Also ist  $(du^i)_{i=1}^m$  gerade die duale Basis zur Basis  $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$  von  $T_x M$  und für  $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$  ist  $du^i(\xi) = \xi^i$ . Für das totale Differential  $df$  einer Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  erhalten wir somit

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot du^i,$$

denn  $df(x)(\xi_x) = \xi_x(f) = \left(\sum_i \xi_x^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(f) = \sum_i du^i(\xi_x) \frac{\partial f}{\partial u^i} = \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot du^i\right)(\xi_x)$ .

### 31.3 Transformationsverhalten von Vektoren

(Vgl. mit (1.1) und (20.9)) Sei im Folgenden  $E$  ein Euklidischer Vektorraum,  $\mathcal{G} := (g_i)_{i=1}^m$  eine Basis in  $E$  und  $x^i$  die Komponenten (Koordinaten) eines Punktes  $x$  in  $E$  bezüglich  $\{g_i\}$ , also  $x = \sum_{i=1}^m x^i g_i$ . Sei  $\bar{\mathcal{G}} := (\bar{g}_j)_j$  eine weitere Basis und  $\bar{x}^j$  die Koordinaten von  $x$  bezüglich  $\{\bar{g}_j\}$ . Und sei  $A$  jener Isomorphismus von  $E$ , welcher  $g_i$  auf  $\bar{g}_i$  abbildet. Stellt man die Vektoren  $\bar{g}_j$  bezüglich der Basis  $\{g_i\}$  dar, d.h.  $\bar{g}_j = \sum_{i=1}^m a_i^j g_i$ , so ist  $[A] := (a_i^j)_{i,j}$  die Matrixdarstellung  $[A]_{\mathcal{G}, \mathcal{G}}$  von  $A$  bezüglich der Basis  $\{g_i\}$  für  $\text{Dom}(A) = E$  und für  $\text{Bild}(A) = E$ , aber ebenso  $[A]_{\bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{G}}}$  bezüglich der Basis  $\{\bar{g}_j\}$  für  $\text{Dom}(A) = E$  und für  $\text{Bild}(A) = E$ . Dabei zählt der obere Index  $i$  die Zeile und der untere die Spalte der Matrix. Dies sieht man wie folgt:

$$A(x) = A\left(\sum_i x^i g_i\right) = \sum_i x^i A(g_i) = \sum_i x^i \bar{g}_i = \sum_i x^i \sum_j a_i^j g_j = \sum_j \left(\sum_i a_i^j x^i\right) g_j$$

also ist die Komponentendarstellung  $[A(x)]_{\mathcal{G}}$  von  $A(x)$  bezüglich der Basis  $\mathcal{G} = (g_i)_i$  gerade

$$[A(x)]_{\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_m^m \end{pmatrix} [x]_{\mathcal{G}}, \quad \text{d.h.} \quad [A]_{\mathcal{G}, \mathcal{G}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_m^m \end{pmatrix}$$

Weiters ist

$$A(x) = A\left(\sum_i \bar{x}^i \bar{g}_i\right) = A\left(\sum_i \bar{x}^i \sum_j a_i^j g_j\right) = \sum_j \left(\sum_i a_i^j \bar{x}^i\right) \bar{g}_j = \sum_j \bar{x}^j \bar{g}_j,$$

denn

$$\sum_j \bar{x}^j \bar{g}_j = x = \sum_i x^i \bar{g}_i = \sum_i x^i \sum_j a_i^j g_j = \sum_j \left(\sum_i a_i^j x^i\right) g_j \Rightarrow \bar{x}^j = \sum_i a_i^j x^i,$$

also ist

$$[x]_{\mathcal{G}} = [A(x)]_{\bar{\mathcal{G}}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_m^m \end{pmatrix} [x]_{\bar{\mathcal{G}}}, \quad \text{d.h.}$$

$$[A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}} = \text{id} \quad \text{und} \quad [A]_{\bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{G}}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_m^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_m^m \end{pmatrix}.$$

Für das Transformationsverhalten der Komponenten erhalten wir:

$$[x]_{\mathcal{G}} = [A] \cdot [x]_{\bar{\mathcal{G}}}$$

Umgekehrt ist  $A^{-1} : E \rightarrow E$  gegeben durch  $A^{-1} : \bar{g}_j \mapsto g_j$ . Es ist  $g_i = \sum_j b_i^j \bar{g}_j$ , wobei  $(b_i^j)_{j,i}$  die Matrixdarstellung von  $A^{-1}$  bezüglich  $\{\bar{g}_j\}$  ist.

$$\sum_j \bar{x}^j \bar{g}_j = x = \sum_i x^i g_i = \sum_{i,j} b_i^j x^i \bar{g}_j \quad \Rightarrow \quad \bar{x}^j = \sum_i b_i^j x^i, \text{ d.h. } [x]_{\bar{\mathcal{G}}} = [A^{-1}] \cdot [x]_{\mathcal{G}}$$

und es gilt:  $\sum_{i=1}^m b_i^j a_k^i = \delta_k^j$ . Die Matrix  $(b_i^j)_{j,i}$  ist also invers zu  $(a_j^i)_{i,j}$ .

Es bezeichne  $E^*$  den zu  $E$  dualen Raum,  $\{g^i\}$  die duale Basis zu  $\{g_i\}$ , es gilt also:  $g^i(g_j) = \delta_j^i$ . Dann kann jeder Vektor  $x^* \in E^*$  in der Form  $x^* = \sum_{i=1}^m x_i g^i$  geschrieben werden, mit  $x_i = x^*(g_i)$ .

Wie transformieren jetzt diese dualen Vektoren?

Ist  $A : E \rightarrow E$  wie oben, so ist auch die transponierte (= adjungierte) Abbildung  $A^t = A^*$  ein Isomorphismus, der, aufgefaßt als  $A^* : E^* \rightarrow E^*$ , die duale Basis  $\bar{g}^j$  auf  $g^j$  abbildet, denn

$$A^* \bar{g}^j \left( \sum x^i g_i \right) = \bar{g}^j \left( A \sum x^i g_i \right) = \bar{g}^j \left( \sum x^i A g_i \right) = \bar{g}^j \left( \sum x^i \bar{g}_i \right) = x^j,$$

also gilt  $A^* \bar{g}^j = g^j$  bzw.  $g^j = \sum_{i=1}^m a_i^j \bar{g}^i$ , und analog  $\bar{g}^i = \sum b_j^i g^j$ , d.h.  $[A^*]_{\mathcal{G}^*, \bar{\mathcal{G}}^*} = ([A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}})^t$ .

Daraus folgt das Transformationsverhalten für die Koordinaten:

$$\begin{aligned} \sum_j x_j g^j = x^* &= \sum_i \bar{x}_i \bar{g}^i = \sum_{i,j} \bar{x}_i b_j^i g^j \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow x_j &= \sum_i b_j^i \bar{x}_i; \quad \bar{x}_i = \sum_j a_i^j x_j. \end{aligned}$$

Vergleicht man nun die Transformationsformeln, so zeigt sich, daß die Komponenten  $x_i$  der dualen Vektoren wie die Basisvektoren  $g_i$  des Grundraumes transformieren:

$$x_i = \sum b_i^j \bar{x}_j, \quad g_i = \sum b_i^j \bar{g}_j; \quad \bar{x}_j = \sum a_j^i x_i, \quad \bar{g}_j = \sum a_j^i g_i.$$

Hingegen transformieren die Komponenten  $x^i$  eines Vektors wie die Vektoren der dualen Basis  $g^i$ :

$$x^i = \sum a_j^i \bar{x}^j, \quad g^i = \sum a_j^i \bar{g}^j; \quad \bar{x}^j = \sum b_j^i x^i, \quad \bar{g}^i = \sum b_j^i g^j.$$

Dieser Sachverhalt motiviert auch die Verwendung von "oberen" und "unteren" Indizes: Die Komponentenvektoren dualer Vektoren transformieren wie die Basis im Grundraum (sie transformieren kovariant), die duale Basis und die Komponentenvektoren im Grundraum transformieren kontravariant.

Vergleiche das aber mit folgender

### 31.4 Definition (Funktork)

Unter einem FUNKTOR  $\mathcal{F}$  auf einer Kategorie versteht man eine Zuordnung, die jedem Raum  $M$  einen anderen Raum  $\mathcal{F}(M)$  zuordnet und jedem Morphismus  $f : M \rightarrow N$  einen entsprechenden Morphismus  $\mathcal{F}(f)$  zwischen  $\mathcal{F}(M)$  und  $\mathcal{F}(N)$  zuordnet, sodaß  $\mathcal{F}(\text{id}_M) = \text{id}_{\mathcal{F}(M)}$  und  $\mathcal{F}$  von der Zusammensetzung je zweier Morphismen die Zusammensetzung der zugeordneten Morphismen ist.

Man nennt einen Funktor  $\mathcal{F}$  KOVARIANT, falls  $\mathcal{F}(f)$  in die gleiche Richtung läuft wie  $f$ , d.h. für  $f : M \rightarrow N$  ist  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(N)$ . Er heißt KONTRAVARIANT, falls  $\mathcal{F}(f)$  in die entgegengesetzte Richtung läuft, d.h. für  $f : M \rightarrow N$  ist  $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(N) \rightarrow \mathcal{F}(M)$ . Insbesondere ist der Dualraum-Funktork  $(f : E \rightarrow F) \mapsto (f^* : F^* \rightarrow E^*)$  **kontravariant**.

### 31.5 Transformationsverhalten von 1-Formen

Es sei  $\varphi^{-1} = (u^1, \dots, u^m)$  bzw.  $\psi^{-1} = (v^1, \dots, v^m)$  eine Karte einer Mannigfaltigkeit  $M$  und  $\partial_i^\varphi = \frac{\partial}{\partial u^i}$  bzw.  $\partial_j^\psi = \frac{\partial}{\partial v^j}$  seien die (lokalen) Basisvektorfelder des Tangentialbündels. Diese hängen nach (20.9) wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}\partial_j^\psi|_x &= \sum_{i=1}^m \partial_j^\psi|_x (\varphi^{-1})^i \partial_i^\varphi|_x \text{ oder intuitiver } \frac{\partial}{\partial v^j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \\ \partial_j^\varphi|_x &= \sum_{i=1}^m \partial_j^\varphi|_x (\psi^{-1})^i \partial_i^\psi|_x \text{ oder intuitiver } \frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial v^i}\end{aligned}$$

Sei  $a_j^i := \frac{\partial u^i}{\partial v^j}$  bzw.  $b_i^j := \frac{\partial v^j}{\partial u^i}$  und das Vektorfeld  $\xi$  habe die Darstellungen  $\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial v^j}$ , dann gilt auch

$$\begin{aligned}\xi &= \sum_j \eta^j \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_i \left( \sum_j \eta^j \left( \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\ \Rightarrow \xi^i &= \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \eta^j = \sum_j a_j^i \eta^j\end{aligned}$$

und analog  $\eta^j = \sum_i b_i^j \xi^i$ .

Für Kotangentialvektoren erhalten wir wegen (31.3) die folgenden Transformationsformeln:

$$\begin{aligned}du^i &= \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j} dv^j = \sum_j a_j^i dv^j \\ dv^j &= \sum_i \frac{\partial v^j}{\partial u^i} du^i = \sum_i b_i^j du^i.\end{aligned}$$

Die Komponenten der Kotangentialvektoren, transformieren also kovariant, daher heißen Schnitte im Kotangentialbündel (d.h. 1-Formen) auch KOVARIANTE VEKTORFELDER.

**31.6 Konstruktion des dualen Bündels**

Um über Glattheit von 1-Formen sprechen zu können, müssen wir nun die disjunkte Vereinigung  $T^*M := (TM)^* := \bigsqcup_{x \in M} (T_x M)^*$  zu einer glatten Mannigfaltigkeit, oder besser noch einem Vektorbündel machen. Noch allgemeiner wollen wir für ein allgemeines Vektorbündel  $E \xrightarrow{p} M$  die disjunkte Vereinigung  $E^* := \bigsqcup_{x \in M} (E_x)^*$  wieder zu einem solchen machen. Seien dazu Trivialisierungen  $\varphi : U \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} E|_U$  von  $E$  über offenen Mengen  $U \subset M$  gegeben. Wir brauchen eine Trivialisierung

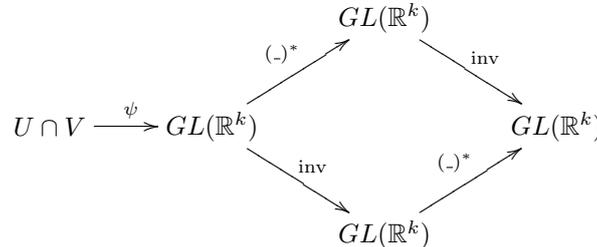
$$\varphi^* : \bigsqcup_{x \in U} (\mathbb{R}^k)^* = U \times (\mathbb{R}^k)^* \xrightarrow{\cong} E^*|_U = \bigsqcup_{x \in U} (E_x)^*$$

Faserweise können wir  $\varphi^*$  als  $(\varphi^*)_x := ((\varphi_x)^*)^{-1} = ((\varphi_x)^{-1})^* : (\mathbb{R}^k)^* \rightarrow (E_x)^*$  definieren, wobei  $(\varphi_x)^* : (E_x)^* \rightarrow (\mathbb{R}^k)^*$  die adjungierte Abbildung zum Isomorphismus  $\varphi_x : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$  bezeichnet.

Sei  $\psi : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$  die Transitionsfunktion für zwei Vektorbündelkarten von  $E$ . Die zu den Trivialisierungen  $\varphi^*$  gehörenden Transitionsfunktionen  $\psi^*$  sind dann durch

$$\psi^*(x) = (\psi(x)^*)^{-1} \in GL((\mathbb{R}^k)^*) \cong GL(\mathbb{R}^k)$$

gegeben, wobei  $\psi(x)^*$  die adjungierte Abbildung zum linearen Isomorphismus  $\psi(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$  bezeichnet. Da  $A \mapsto A^*$  linear ist von  $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l) \rightarrow L((\mathbb{R}^l)^*, (\mathbb{R}^k)^*)$ , die Inversion  $A \mapsto A^{-1}$  von  $GL(\mathbb{R}^k) \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$  glatt ist und  $\psi : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$  als Transitionsfunktion des Vektorbündels  $E$  ebenfalls glatt ist, gilt gleiches auch für die Zusammensetzung  $\psi^*$



Also bilden die  $\psi^*$  einen Kozykel von Transitionsfunktionen für ein glattes Vektorbündel  $E^* \rightarrow M$  und die  $\varphi^*$  sind die zugehörigen Vektorbündelkarten. Diese Vektorbündel  $E^* \rightarrow M$  heißt das **DUALE VEKTORBÜNDEL** zu  $E \rightarrow M$ .

Im Spezialfall, wo  $E \rightarrow M$  gerade das Tangentialbündel  $TM \rightarrow M$  ist, heißt  $T^*M := (TM)^* \rightarrow M$  **KOTANGENTIALBÜNDEL** von  $M$ .

Der Raum  $\Gamma(T^*M \rightarrow M)$  der glatten Schnitte des Kotangentialbündels wird auch mit  $\Omega^1(M)$  bezeichnet.

**31.7 Glatte 1-Formen**

Wie erkennt man, ob eine 1-Form  $\omega$  wirklich glatt ist? Nun, das ist lokal um einen Punkt  $x \in M$  genau dann der Fall, wenn ihre Darstellung bezüglich einer Trivialisierung  $TM^*|_U \cong U \times \mathbb{R}^m$  mit  $x \in U \subset M$  glatt ist. Nach (31.6) werden die Trivialisierungen von  $(TM)^*$  durch Dualisieren aus jenen von  $TM$  gewonnen. Zu einer Karte

$\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$  mit zugehörigen lokalen Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m) = \varphi^{-1}$ , war die entsprechende lokale Trivialisierung von  $TM \rightarrow M$  in (25.4) durch

$$TM \supseteq T(\varphi(U)) \xleftarrow{T\varphi} TU \cong U \times \mathbb{R}^m \xleftarrow{\varphi^{-1} \times \mathbb{R}^m} \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$$

gegeben. Wobei der standard-Basis  $(e_i)$  in  $\{x\} \times \mathbb{R}^m$  die Basis  $(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x) \in T_x M$  der Richtungsableitungen entspricht. Die duale Abbildung zu  $T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow T_x M$  bildet somit die duale Basis  $(du^i)$  von  $(T_x M)^*$  auf die duale Basis  $(e^i)$  von  $(\mathbb{R}^m)^* \cong \mathbb{R}^m$ . Die lokale Trivialisierung von  $T^*M$  bildet somit  $e^i$  auf  $du^i$  ab, und eine 1-Form  $\omega$  genau dann glatt, wenn alle ihre lokalen Koordinaten  $\omega_i$  – gegeben durch  $\omega = \sum_i \omega_i du^i$  – glatt sind.

**31.8 Lemma (Schnitte des dualen Bündels).** *Sei  $p : E \rightarrow M$  ein Vektorbündel, dann gibt es folgende Beschreibungen für die glatten Schnitte des dualen Bündels  $E^* := \bigsqcup_x (E_x)^* \rightarrow M$ :*

$$\begin{aligned} \Gamma(E^* \rightarrow M) &= \{\sigma \in C^\infty(M, E^*) : \forall x : \sigma(x) \in E_x^*\} \\ &\cong \{s \in C^\infty(E, \mathbb{R}) : \forall x : s|_{E_x} \in L(E_x, \mathbb{R})\} \\ &\cong \text{dem Raum der Vektorbündelhomomorphismen} \\ &\quad \text{von } E \text{ nach } M \times \mathbb{R} \text{ über } \text{id}_M. \end{aligned}$$

**Beweis.** Wir müssen nur zeigen, daß die Schnitte  $\sigma \in \Gamma(E^* \rightarrow M)$  genau den faserweise linearen glatten Abbildungen  $s : E \rightarrow \mathbb{R}$  entsprechen.

Definiert man  $\sigma \mapsto s$  durch  $s|_{E_x} := \sigma(x)$ , so ist klar, daß sich diese Abbildungen in eindeutiger Weise entsprechen. Verbleibt zu zeigen, daß  $\sigma$  genau dann glatt ist, wenn  $s$  es ist. Dies ist eine lokale Eigenschaft. Lokal ist  $\sigma$  durch ein  $\bar{\sigma} : U \rightarrow (\mathbb{R}^k)^* = L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$  und  $s$  durch ein  $\bar{s} : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben. Sei  $\sigma$  (und also auch  $\bar{\sigma}$ ) glatt, dann ist  $(x, v) \mapsto \bar{s}(x, v) = \text{eval}(\bar{\sigma}(x), v) = \text{eval} \circ (\bar{\sigma} \times \text{id}_{\mathbb{R}^k})(x, v)$  ebenfalls glatt. Umgekehrt: Ist  $s$  glatt, so auch  $\bar{s}$  und damit auch  $\text{eval}_v \circ \bar{\sigma} = \bar{s}(\cdot, v)$ . Somit ist aber  $\bar{\sigma} : U \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$  glatt, und damit auch  $\sigma$  selbst.  $\square$

### 31.9 Bemerkung

Wir wollen nun wie für glatte Vektorfelder auch für glatte 1-Formen eine algebraische Beschreibung. Wir können eine 1-Form  $\omega$  auf ein Vektorfeld  $\xi$  punktweise anwenden, da  $\omega_x \in (T_x M)^* = L(T_x M, \mathbb{R})$  und  $\xi_x \in T_x M$ , und erhalten eine Funktion  $\omega(\xi) : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $x \mapsto \omega_x(\xi_x)$ . In lokalen Koordinaten sieht das wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_i \omega_i du^i ; \quad \xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\ \omega(\xi) &= \left( \sum_i \omega_i du^i \right) \left( \sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_{i,j} \omega_i \xi^j du^i \left( \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_i \omega_i \xi^i. \end{aligned}$$

Also ist die resultierende Funktion  $\omega(\xi)$  glatt, falls  $\omega$  und  $\xi$  glatt sind. Und klarerweise ist die Zuordnung  $(\omega, \xi) \mapsto \omega(\xi)$  bilinear als Abbildung von  $\Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

**31.10 Lemma (Raum der 1-Formen als  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineare Abbildungen).**  
 Die bilineare Abbildung  $\Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  induziert einen  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linearen Isomorphismus

$$\Omega^1(M) \cong \text{Hom}_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R})),$$

wobei der rechte Raum aus allen  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linearen Abbildungen von  $\mathfrak{X}(M)$  nach  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  besteht.

**Beweis.** Klarerweise induziert obige bilineare Abbildung eine lineare Abbildung von  $\Omega^1(M)$  in den Raum  $L(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$  der linearen Abbildungen.

Jedes  $\omega \in \Omega^1(M)$  wirkt aber auch  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear auf  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ , denn

$$\omega(f \cdot \xi)|_x = \omega_x((f \cdot \xi)_x) = \omega_x(f(x) \cdot \xi_x) = f(x) \cdot \omega_x(\xi_x) = (f \cdot \omega(\xi))_x$$

Sei umgekehrt ein  $\omega \in \text{Hom}_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$  gegeben.

Dann wirkt  $\omega$  lokal, d.h.  $\xi = 0$  auf  $U \subset M$  impliziert  $\omega(\xi) = 0$  auf  $U$ : Zu  $p \in U$  wählen wir ein  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit  $f(p) = 1$  und  $\text{Trg}(f) \subset U$ . Dann ist  $f \cdot \xi = 0$  und somit

$$0 = \omega(0) = \omega(f \cdot \xi) = f \cdot \omega(\xi) \quad \Rightarrow \quad 0 = \underbrace{f(p)}_{=1} \cdot \omega(\xi)(p) = \omega(\xi)(p).$$

Es wirkt  $\omega$  sogar punktal, d.h.  $\xi(p) = 0$  impliziert  $\omega(\xi)(p) = 0$ , denn

$$\omega(\xi)(p) = \omega\left(\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(p) = \sum_i \underbrace{\xi^i(p)}_{=0} \cdot \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)(p) = 0.$$

Folglich können wir eine 1-Form  $\omega$  durch  $\omega(x)(\xi_x) := \omega(\xi)(x)$  definieren, wobei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  so gewählt ist, daß  $\xi(x) = \xi_x$  ist. Die 1-Form  $\omega$  ist dann glatt, denn lokal gilt:

$$\omega = \sum_i \omega_i du^i \quad \text{mit} \quad \omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right).$$

Daß diese beiden Zuordnungen invers zueinander sind, ist offensichtlich.  $\square$

**31.11 Lemma (Pull-back von Schnitten dualer Bündel).**

Seien  $p : E \rightarrow M, q : F \rightarrow N$  Vektorbündel und  $f$  ein Vektorbündelhomomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ p \downarrow & & q \downarrow \\ M & \xrightarrow{f_0} & N \end{array}$$

Dann ist  $f^* : \Gamma(F^* \rightarrow N) \rightarrow \Gamma(E^* \rightarrow M)$  durch die Formel  $f^*(s)_p \cdot v_p := s_{f_0(p)} \cdot f(v_p)$  für  $s \in \Gamma(F^* \rightarrow N), p \in M, v_p \in E_p$  wohldefiniert.

**Beweis.** Z.z. ist nur, daß  $f^*(s)$  glatt ist. Via lokaler Trivialisierungen reduziert man das Problem auf triviale Bündel. Betrachten wir also die Bündel  $p : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$ ,

$q : V \times \mathbb{R}^i \rightarrow V$ , und die Abbildungen  $s : V \rightarrow (\mathbb{R}^i)^*$ ,  $f_0 : U \rightarrow V$  und  $f : U \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^i)$ . Dann kommutiert

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f^*(s)} & (\mathbb{R}^k)^* \\ & \searrow (s \circ f_0, f) & \nearrow \text{komp} \\ & (\mathbb{R}^i)^* \times L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^i) & \end{array}$$

denn

$$f^*(s)_p \cdot v_p := s_{f_0(p)} \cdot f(v_p) = (s \circ f_0)(p) \cdot f_p(v_p) = \text{komp}((s \circ f_0)(p), f_p) \cdot v_p$$

Also ist  $f^*(s)$ , als Zusammensetzung zweier  $C^\infty$ -Funktionen, selbst glatt.  $\square$

### 31.12 Pull-back von 1-Formen in lokalen Koordinaten

Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt,  $(u^1, \dots, u^i)$  lokale Koordinaten um  $p \in M$ ,  $(v^1, \dots, v^j)$  lokale Koordinaten um  $q := f(p) \in N$ , und  $\omega \in \Omega^1(N)$ . Wir wollen  $f^*\omega \in \Omega^1(M)$  in den lokalen Koordinaten bestimmen. Für Tangentialvektoren  $\xi \in T_pM$  ist  $(f^*\omega)(p)$  nach (31.11) definiert durch

$$(f^*\omega)_p(\xi) := \omega_{f(p)}(T_p f \cdot \xi).$$

Es sei  $\omega = \sum_j \omega_j dv^j$  die Koordinatendarstellung von  $\omega$  um  $q$  und  $f^*\omega = \sum_i \eta_i du^i$  jene von  $f^*\omega$  um  $p$ . Setzen wir nun  $\xi := \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p$  so erhalten wir:

$$\begin{aligned} (f^*\omega)_p(\xi) &= \left( \sum_k \eta_k du^k \right) \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right) \stackrel{(31.9)}{=} \eta_i \\ \omega_{f(p)}(T_p f \cdot \xi) &\stackrel{(20.9)}{=} \left( \sum_j \omega_j dv^j \right)_{f(p)} \left( \sum_l \frac{\partial f^l}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^l} \Big|_q \right) \stackrel{(31.9)}{=} \sum_j (\omega_j \circ f) \frac{\partial f^j}{\partial u^i} \end{aligned}$$

Also gilt

$$f^* \left( \sum_j \omega_j dv^j \right) = \sum_i \left( \sum_j (\omega_j \circ f) \frac{\partial f^j}{\partial u^i} \right) du^i.$$

Man beachte, daß das Kurvenintegral aus (3.10) einer 1-Form  $\omega \in \Omega^1(U)$  auf einer offenen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$  längs einer Kurve  $c : I \rightarrow U$  gerade durch

$$\int_c \omega = \int_c \sum_i \omega_i(x) dx^i = \int_0^1 \sum_i \omega_i(c(t)) \frac{dc^i}{dt} dt = \int_0^1 c^*(\omega)$$

gegeben ist. Für eine abstrakte Mannigfaltigkeit  $M$  können wir genauso das Kurvenintegral  $\int_c \omega$  einer 1-Form  $\omega \in \Omega^1(M)$  längs einer Kurve  $c : I \rightarrow M$  durch

$$\int_c \omega := \int_0^1 c^*(\omega)$$

definieren. Wir werden diese Definition im Abschnitt (47) weiter verallgemeinern.

## 32. Riemann-Mannigfaltigkeiten

### 32.1 Bemerkung zur Dualität

Für  $M = U \subset \mathbb{R}^m$  können wir das Tangentialbündel und das Kotangentialbündel identifizieren, denn  $TM = M \times \mathbb{R}^m$  und  $T^*M = M \times (\mathbb{R}^m)^*$ . Es sind also sowohl die Vektorfelder als auch die 1-Formen auf  $M$  mit Abbildungen  $M \rightarrow \mathbb{R}^m$  ident. Im allgemeinen gibt es aber keinen solchen kanonischen Isomorphismus zwischen  $T_x M$  und  $(T_x M)^*$ . Wir wollen nun Mannigfaltigkeiten beschreiben, für welche es einen solchen dennoch gibt. Inwiefern ist denn ein endlich dimensionaler Vektorraum  $E$  und sein Dualraum  $E^*$  isomorph? Da sie die gleiche Dimension haben sind sie isomorph. Aber um einen solchen Isomorphismus angeben zu können, verwendet man üblicherweise eine Basis von  $E$  und als Bildvektoren die duale Basis von  $E^*$ . Wählt man eine andere Basis, so ändert sich auch der Isomorphismus. So können wir auf einer Mannigfaltigkeit nicht vorgehen, denn in  $T_x M$  haben wir keine ausgezeichnete Basis zur Verfügung.

Eine zweite Möglichkeit so einen Isomorphismus zu erhalten ist die Verwendung eines inneren Produkts  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $E$ . Dann induziert diese bilineare Form eine lineare Abbildung  $\sharp : E \rightarrow L(E, \mathbb{R}) = E^*$  durch  $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ . Diese ist injektiv, denn:  $\forall w \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$ . Aus Dimensionsgründen ist sie somit ein Isomorphismus.

Wie sieht  $\sharp$  in Koordinaten aus? Sei  $(e_i)$  eine Orthonormalbasis von  $E$  und  $(e^i)$  die dazugehörige duale Basis. Dann ist  $\sharp(e_i)(e_j) := \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = e^i(e_j)$ , also bildet  $\sharp$  die Basis  $(e_i)$  auf die duale Basis  $(e^i)$  ab.

Falls  $(g_i)$  eine beliebige Basis von  $E$  ist und  $(g^i)$  die dazugehörige duale Basis von  $E^*$ , so gilt:

$$\begin{aligned} \sharp(g_i)(g_k) &= \langle g_i, g_k \rangle =: g_{i,k} = \sum_j g_{i,j} g^j(g_k) \\ \Rightarrow \sharp(g_i) &= \sum_j g_{i,j} g^j \text{ und} \\ \sharp(v) &= \sharp\left(\sum_i v^i g_i\right) = \sum_i v^i \sum_j g_{i,j} g^j = \sum_j \left(\sum_i g_{i,j} v^i\right) g^j \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit  $v^i$  die Koordinaten des Vektors  $v \in E$  bezüglich der Basis  $(g_i)$  und mit  $v_j$  die Koordinaten des dazugehörigen dualen Vektors  $\sharp(v) \in E^*$  bezüglich der dualen Basis  $(g^i)$ , so gilt also:

$$v_j = \sum_i g_{i,j} v^i.$$

Sei nun  $M \subset \mathbb{R}^n$  eine Teilmannigfaltigkeit des  $\mathbb{R}^n$ . Dann ist  $T_x M$  ein Teilraum vom  $\mathbb{R}^n$  und erbt somit das übliche innere Produkt von  $\mathbb{R}^n$ . Also ist  $(T_x M)^*$  isomorph zu  $T_x M$  vermöge dem Isomorphismus  $\sharp : T_x M \rightarrow (T_x M)^*$ . Wir erhalten also auch eine faserlineare Bijektion der Bündel  $TM \rightarrow M$  und  $T^*M \rightarrow M$ . In Koordinaten ist sie durch

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \mapsto \sum_j g_{i,j} du^j$$

gegeben, wobei  $g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle$  mit  $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$  und  $g^i = du^i$ . Da die  $g_i$  glatte Funktionen von  $M \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$  sind, sind alle Koeffizienten  $g_{i,j} : M \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$  glatt, und somit die Bündel  $TM$  und  $T^*M$  isomorph.

Es entsprechen sich also auch die glatten Schnitte eindeutig, d.h.  $\mathfrak{X}(M) \cong \Omega^1(M)$ . Das Vektorfeld, welches einer exakten 1-Form  $df$  entspricht, heißt GRADIENTENFELD  $\text{grad}(f)$  von  $f$ .

Nun wollen wir das auf allgemeine Mannigfaltigkeiten  $M$  übertragen. Dazu benötigen wir für alle  $x \in M$  ein inneres Produkt  $g_x$  im Tangentialraum  $T_x M$ . Daß dieses vernünftig von  $x$  abhängt, gewährleisten wir folgendermaßen.

### 32.2 Definition (Riemann-Mannigfaltigkeit)

Eine RIEMANN-METRIK auf einer Mannigfaltigkeit  $M$  ist eine Funktion  $g$  die jedem Punkt  $x \in M$  eine positiv definite symmetrische Bilinearform  $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  zuordnet, sodaß für beliebige Vektorfelder  $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$  die Abbildung  $x \mapsto g_x(\xi_x, \eta_x)$  von  $M$  nach  $\mathbb{R}$  glatt ist.

Eine RIEMANN-MANNIGFALTIGKEIT ist eine Mannigfaltigkeit  $M$  zusammen mit einer ausgezeichneten Riemann-Metrik  $g$ .

Ersetzt man die Bedingung der positiven Definitheit, durch die des nicht-Degeneriertseins, d.h.  $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$  und  $v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$  ist injektiv als Abbildungen  $\mathbb{R}^m \rightarrow (\mathbb{R}^m)^*$ , so erhält man eine PSEUDO-RIEMANN-METRIK und als zugehörige Mannigfaltigkeiten PSEUDO-RIEMANN-MANNIGFALTIGKEITEN.

### 32.3 Definition (Länge und Distanz)

Sei  $(M, g)$  eine Riemann-Mannigfaltigkeit, dann können wir die LÄNGE VON TANGENTIALVEKTOREN  $\xi_x \in T_x M$  als  $\sqrt{g_x(\xi_x, \xi_x)}$  definieren.

Falls  $c : [0, 1] \rightarrow M$  eine glatte Kurve in  $M$  ist, so sei die LÄNGE  $c$  definiert durch

$$L(c) := \int_0^1 \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann haben wir auch eine Metrik  $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$  im Sinne der Topologie:

$$d(p, q) := \inf \left\{ L(c) : c \in C^\infty(\mathbb{R}, M); c(0) = p, c(1) = q \right\}.$$

Für jedes glatte  $f : N \rightarrow M$  definiert  $(v, w) \mapsto g_{f(x)}(T_x f \cdot v, T_x f \cdot w)$  für  $v, w \in T_x N$  eine Riemann-Metrik auf  $N$  und für diese gilt:

$$L_{f^*g}(c) = L_g(f \circ c) \text{ und somit } f(\{x : d_{f^*g}(x, x_0) < r\}) \subseteq \{y : d_g(y, f(x_0)) < r\}.$$

Wir zeigen nun, daß diese Metrik die Topologie erzeugt:

Um zu sehen, daß  $d$  stetig ist, verwenden wir, daß  $g$  in der Kartendarstellung bzgl. einer Karte  $u : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow u(U) \subseteq M$  Ungleichungen der Form  $M_1^2 \cdot |v|^2 \leq (u^*g)_x(v, v) \leq M_2^2 \cdot |v|^2$  mit  $M_1, M_2 > 0$  erfüllt (In der Tat: Einerseits ist  $\{u^*g_x(w, w) : |w| \leq 1, x \in \text{Kompaktum}\}$  kompakt, also beschränkt durch ein  $M_2^2$  und somit  $u^*g_x(v, v) = |v|^2 u^*g_x(w, w) \leq M_2^2 |v|^2$  mit  $v = |v|w$ . Andererseits ist  $\{v : u^*g_x(v, v) \leq 1\}$  beschränkt, denn andernfalls existieren  $v_n$  mit  $|v_n| = 1$  und  $u^*g_{x_n}(v_n, v_n) \rightarrow 0$  und

für Häufungspunkte  $v_\infty$  von  $v_n$  ist dann  $|v_\infty| = 1$  aber  $u^*g_{x_\infty}(v_\infty, v_\infty) = 0$ . Damit ist

$$u\left(\left\{x : |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{M_2}\right\}\right) \subseteq u\left(\left\{x : d_{u^*g}(x, x_0) \leq \varepsilon\right\}\right) \subseteq \{y : d_g(y, u(x_0)) \leq \varepsilon\}.$$

Umgekehrt sei  $u(U)$  eine Kartenumgebung zentriert bei  $y_0$  und  $V$  eine relativ kompakte offene Umgebung von 0 mit  $\bar{V} \subseteq U$ . Da  $d$  stetig ist gilt  $r := d(u(\bar{V}), M \setminus u(U)) > 0$ , und somit ist  $\{y : d_g(y, y_0) < \varepsilon\} = u(\{x : d_{u^*g}(x, 0) < \varepsilon\})$  für alle  $\varepsilon < \frac{r}{2}$ . Weiters ist  $d_{u^*g}(x, 0) \geq M_1|x|$  wegen

$$L_{u^*g}(c) = \int_0^1 \sqrt{(u^*g)_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt \geq M_1 \int_0^1 |c'(t)| dt = M_1 L(c)$$

Sei  $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$  mit  $V \supseteq \{x : M_1|x| < \varepsilon\} \supseteq \{x : d_{u^*g}(x, 0) < \varepsilon\}$ . Dann ist  $\{y : d_g(y, y_0) < \varepsilon\} = u(\{x : d_{u^*g}(x, 0) < \varepsilon\}) \subseteq u(\bar{V}) \subseteq u(U)$ .

Interessant ist es, die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten tatsächlich zu finden. Dies ist ein Variationsproblem, welches wir in Paragraph (57) angehen werden.

### 33. Isometrische und konforme Diffeomorphismen

#### 33.1 Definition (Isometrie)

Seien  $(M, g)$  und  $(N, h)$  zwei Riemann-Mannigfaltigkeiten und  $f : M \mapsto N$  glatt, dann heißt  $f$  genau dann ISOMETRIE, wenn

$$T_x f : (T_x M, g_x) \rightarrow (T_{f(x)} N, h_{f(x)})$$

für alle  $x$  eine lineare Isometrie (siehe (1.2)) ist. Beachte, daß  $f$  genau dann eine Isometrie ist, wenn  $f^*h = g$  ist.

#### Bemerkung

Falls  $f$  eine Isometrie ist und  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$  glatt ist, so gilt:

$$\begin{aligned} L_a^b(f \circ c) &= \int_a^b \sqrt{h((f \circ c)'(t), (f \circ c)'(t))} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{g(c'(t), c'(t))} dt = L_a^b(c) \end{aligned}$$

Wir erhalten für die Distanz  $d(f(x), f(y))$ :

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \inf\{L_0^1(c) : c \text{ verbindet } f(x) \text{ mit } f(y)\} \\ &\leq \inf\{L_0^1(f \circ c) : c \text{ verbindet } x \text{ mit } y\} = d(x, y), \end{aligned}$$

d.h. die Isometrie kann die Distanz nicht vergrößern. Falls  $f$  ein Diffeomorphismus und eine Isometrie ist, so gilt:  $d(x, y) = d(f(x), f(y))$ .

Falls die Menge der Fixpunkte einer Isometrie als glatte Kurve  $c$  parametrisiert werden kann, so ist diese Kurve lokal die kürzeste Verbindung je zweier ihrer Punkte: Wir werden in (58.4) sehen, daß lokal die kürzesten Verbindungen existieren und eindeutig sind. Da aber das isometrische Bild einer solchen Kurve gleiche Länge hat, muß es in der Fixpunktmenge enthalten sein.

**33.3 Satz (Existenz von Riemann-Metriken).**

Jede parakompakte glatte Mannigfaltigkeit besitzt (viele) vollständige Riemann-Metriken, d.h. Riemann-Metriken, deren zugehörige Metriken  $d$  auf  $M$  vollständig sind.

**Beweis.** Wir brauchen nur (die Zusammenhangskomponenten von)  $M$  in einen  $\mathbb{R}^n$  einzubetten und dann die von der Standardmetrik induzierte Metrik zu nehmen, um eine Riemann-Metrik auf  $M$  zu erhalten.

Oder wir verwenden, daß wir mittels Karten lokal Riemann-Metriken finden können, die wir mit Hilfe einer Partition der Eins zu einer globalen Riemann-Metrik verkleben dürfen, da "eine Riemann-Metrik zu sein" eine konvexe Bedingung ist. Die Existenz vollständiger Riemann-Metriken werden wir in (62.12) zeigen.  $\square$

**33.2 Satz von Nash.** Jede abstrakte und zusammenhängende Riemann-Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  läßt sich isometrisch in einen  $\mathbb{R}^n$ , für  $n = (2m + 1)(6m + 14)$  einbetten.

**Ohne Beweis,** siehe [68].

Wir wollen nun Geodäten und Paralleltransport auf abstrakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten behandeln. Dazu erinnern wir uns an die kovariante Ableitung von Hyperflächen  $M$  mit deren Hilfe wir die Differentialgleichung für Geodäten und parallele Vektorfelder beschrieben haben.

**62.1 Definition (Kovariante Ableitung)**

Sei  $w$  ein Vektorfeld längs einer Kurve  $c$  in  $M$ , d.h.  $w(t) \in T_{c(t)}M$  für alle  $t$ . Dann wollen wir die Normal-Projektion auf den Tangentialraum der Ableitung des Vektorfelds die KOVARIANTE ABLEITUNG  $\nabla$  (sprich "Nabla" oder "Del") nennen und mit

$$\nabla w : t \mapsto w'(t) - \langle w'(t), \nu_{c(t)} \rangle \nu_{c(t)} \in T_{c(t)}M$$

bezeichnen. Diese mißt also die infinitesimale Änderung von  $w$ , wie sie in  $M$  gesehen wird, und ignoriert jene Komponente, die auf  $M$  normal steht.

Die Formel für die kovariante Ableitung  $\nabla$  eines Vektorfelds  $w$  längs einer Kurve  $c = \varphi \circ u$  sieht in lokalen Koordinaten wie folgt aus:

$$\nabla w = \sum_{k=1}^m \left( \frac{dw^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k w^i \frac{dw^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^k},$$

wobei  $w = \sum_k w^k \frac{\partial}{\partial u^k}$ .

Man beachte, daß die Geodäten genau die Lösungen der Gleichung  $\nabla c' = 0$  sind (wobei  $c'$  als Vektorfeld längs  $c$  aufzufassen ist), und die Vektorfelder  $w$ , die parallel längs einer Kurve  $c$  sind, genau die Lösungen der Gleichung  $\nabla w = 0$  sind.

**62.2 Gaußgleichung.** Für den Nabla-Operator gilt:

$$\nabla w = w' + \langle L c', w \rangle \nu \circ c.$$

**Beweis.** Die Behauptung folgt sofort aus  $\langle w, \nu \circ c \rangle = 0$  durch Differenzieren.  $\square$

**62.3 Definition**

Seien nun zwei Vektorfelder  $\xi$  und  $\eta$  auf  $M$  gegeben, dann können wir  $\nabla_\eta \xi \in \mathfrak{X}(M)$  als  $(\nabla_\eta \xi)(x) = \nabla(\xi \circ c)(0)$  definieren, wobei  $c$  eine Integralkurve des Vektorfelds  $\eta$  mit der Anfangsbedingung  $c(0) = x$  ist.

Das läßt sich auch wie folgt schreiben:

$$(\nabla_\eta \xi)_x = \xi'(x) \cdot \eta_x - \langle \xi'(x) \cdot \eta_x, \nu_x \rangle \nu_x = \xi'(x) \cdot \eta_x + \langle \xi(x) | L_x \cdot \rangle \nu_x.$$

**62.4 Lemma (Eigenschaften der kovarianten Ableitung).** *Der Operator  $\nabla$  geht von  $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$  nach  $\mathfrak{X}(M)$  und hat folgende Eigenschaften.*

1.  $\nabla$  ist bilinear.
2.  $\nabla_\eta \xi$  ist  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear in  $\eta$ .
3.  $\nabla_\eta(f\xi) = f\nabla_\eta \xi + \eta(f)\xi$ .
4.  $\nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta = [\eta, \xi]$ .
5.  $\eta \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \nabla_\eta \xi_1, \xi_2 \rangle + \langle \xi_1, \nabla_\eta \xi_2 \rangle$ .

**Beweis.** (1) und (2) sind klar.

Zu (3):

$$\begin{aligned} (\nabla_\eta(f\xi))(x) &= (f\xi)'(x) \cdot \eta_x - \langle (f\xi)'(x) \cdot \eta_x, \nu_x \rangle \nu_x \\ &= f'(x)(\eta_x) \cdot \xi_x + f(x) \cdot \xi'(x) \cdot \eta_x - \left\langle f'(x)(\eta_x) \cdot \xi_x + f(x) \cdot \xi'(x) \cdot \eta_x, \nu_x \right\rangle \nu_x \\ &= \eta(f)(x) \cdot \xi_x + f(x) \cdot \xi'(x) \cdot \eta_x - 0 - f(x) \langle \xi'(x) \cdot \eta_x, \nu_x \rangle \nu_x \\ &= (\eta(f) \cdot \xi)(x) + f(x) \cdot (\nabla_\eta \xi)(x) \\ &= \left( \eta(f) \cdot \xi + f \cdot \nabla_\eta \xi \right)(x) \end{aligned}$$

Zu (4): Wegen der Gaußgleichung und der Symmetrie von  $L$  gilt:

$$\begin{aligned} (\nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta)(x) &= (\xi'(x) \cdot \eta_x + \langle L_x \eta_x, \xi_x \rangle \nu_x) - (\eta'(x) \cdot \xi_x + \langle L_x \xi_x, \eta_x \rangle \nu_x) \\ &= [\eta, \xi](x) + 0. \end{aligned}$$

Zu (5):

$$\begin{aligned} \left( \langle \nabla_\eta \xi_1 | \xi_2 \rangle + \langle \nabla_\eta \xi_2 | \xi_1 \rangle \right)(x) &= \left\langle \xi_1'(x)(\eta_x) - \langle \xi_1'(x)(\eta_x) | \nu_x \rangle \nu_x, \xi_2(x) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \xi_2'(x)(\eta_x) - \langle \xi_2'(x)(\eta_x) | \nu_x \rangle \nu_x, \xi_1(x) \right\rangle \\ &= \langle \xi_1'(x)(\eta_x) | \xi_2(x) \rangle \langle \xi_2'(x)(\eta_x) | \xi_1(x) \rangle \\ &= (\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle)'(x) \cdot \eta_x = \eta(\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle)(x). \quad \square \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß es so einen Differentialoperator auch auf abstrakten Riemann-Mannigfaltigkeiten gibt, und er durch die obigen Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

**62.5 Satz (Levi-Civita Ableitung).**

*Sei  $M$  eine (abstrakte) Riemann-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau eine Abbildung  $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ , welche obige Eigenschaften (1)-(5) erfüllt, wobei das innere Produkt in (5) durch die Riemann-Metrik zu ersetzen ist. Diese Abbildung heißt KOVARIANTE ABLEITUNG, oder auch LEVI-CIVITA-ZUSAMMENHANG.*

**(Koordinatenfreie) Beweis.** Wegen (5) gilt:

$$\begin{aligned}\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) &= g(\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3) + g(\xi_2, \nabla_{\xi_1} \xi_3) & (+) \\ \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) &= g(\nabla_{\xi_2} \xi_3, \xi_1) + g(\xi_3, \nabla_{\xi_2} \xi_1) & (+) \\ \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) &= g(\nabla_{\xi_3} \xi_1, \xi_2) + g(\xi_1, \nabla_{\xi_3} \xi_2) & (-).\end{aligned}$$

Daraus folgt durch Addieren der ersten beiden und Subtrahieren der 3.ten Gleichung unter Verwendung von (4):

$$\begin{aligned}\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) &= \\ &= g(\nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1, \xi_3) + g(\nabla_{\xi_1} \xi_3 - \nabla_{\xi_3} \xi_1, \xi_2) + g(\nabla_{\xi_2} \xi_3 - \nabla_{\xi_3} \xi_2, \xi_1) \\ &= g(2\nabla_{\xi_1} \xi_2 - [\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) + g([\xi_2, \xi_3], \xi_1).\end{aligned}$$

Und somit

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3) &= \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2).\end{aligned}$$

Da die rechte Seite linear in  $\xi_3$  ist, ist  $\nabla_{\xi_1} \xi_2$  durch diese implizite Gleichung wohldefiniert. Da die rechte Seite auch bilinear in  $(\xi_1, \xi_2)$  ist, hat  $\nabla$  die Eigenschaft (1).

Nun zur Eigenschaft (2):

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{f\xi_1} \xi_2, \xi_3) &= f\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, f\xi_1) - \xi_3 g(f\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g([f\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], f\xi_1) + g([\xi_3, f\xi_1], \xi_2) \\ &= f\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + f\xi_2 g(\xi_3, \xi_1) + \xi_2(f)g(\xi_3, \xi_1) \\ &\quad - f\xi_3 g(\xi_1, \xi_2) - \xi_3(f)g(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g(f[\xi_1, \xi_2] - \xi_2(f)\xi_1, \xi_3) - f g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) \\ &\quad + g(f[\xi_3, \xi_1] + \xi_3(f)\xi_1, \xi_2) \\ &= f\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + f\xi_2 g(\xi_3, \xi_1) + \xi_2(f)g(\xi_3, \xi_1) \\ &\quad - f\xi_3 g(\xi_1, \xi_2) - \xi_3(f)g(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + f g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - \xi_2(f)g(\xi_1, \xi_3) - f g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) \\ &\quad + f g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) + \xi_3(f)g(\xi_1, \xi_2) \\ &= f(\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2)) \\ &= 2f g(\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3).\end{aligned}$$

Eine sehr ähnliche Rechnung zeigt die Eigenschaft (3).

Weiter zu Eigenschaft (4):

$$\begin{aligned}2g(\nabla_{\xi_1} \xi_2 - \nabla_{\xi_2} \xi_1, \xi_3) &= \\ &= \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) \\ &\quad - \xi_2 g(\xi_1, \xi_3) - \xi_1 g(\xi_3, \xi_2) + \xi_3 g(\xi_2, \xi_1) \\ &\quad - g([\xi_2, \xi_1], \xi_3) + g([\xi_1, \xi_3], \xi_2) - g([\xi_3, \xi_2], \xi_1) \\ &= 2g([\xi_1, \xi_2], \xi_3).\end{aligned}$$

Schlußendlich Eigenschaft (5):

$$\begin{aligned}
& 2g(\nabla_{\xi_1}\xi_2, \xi_3) + 2g(\xi_2, \nabla_{\xi_1}\xi_3) = \\
& = \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\
& \quad + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) \\
& \quad + \xi_1 g(\xi_3, \xi_2) + \xi_3 g(\xi_2, \xi_1) - \xi_2 g(\xi_1, \xi_3) \\
& \quad + g([\xi_1, \xi_3], \xi_2) - g([\xi_3, \xi_2], \xi_1) + g([\xi_2, \xi_1], \xi_3) \\
& = 2\xi_1 g(\xi_2, \xi_3). \quad \square
\end{aligned}$$

### 62.6 Lokale Formeln für $\nabla$

Wählen wir für  $\xi_1, \xi_2$  und  $\xi_3$  Basisvektorfelder  $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$ ,  $g_j := \frac{\partial}{\partial u^j}$  und  $g_k := \frac{\partial}{\partial u^k}$ , so erhalten wir eine lokale Formel für  $\nabla$ :

$$2g(\nabla_{g_i}g_j, g_k) = \frac{\partial}{\partial u^i}g_{j,k} + \frac{\partial}{\partial u^j}g_{k,i} - \frac{\partial}{\partial u^k}g_{i,j} + 0 =: 2\Gamma_{i,j,k}$$

Das ist gerade die Formel für die Christoffelsymbole der 1.ten Art.

Bezeichnen wir die Koeffizienten von  $\nabla_{g_i}g_j$  bezüglich der Basis  $(g_l)$  mit  $\Gamma_{i,j}^l$ , also

$$\nabla_{g_i}g_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_k,$$

so erhalten wir:

$$\Gamma_{i,j,k} = g(\nabla_{g_i}g_j, g_k) = g\left(\sum_l \Gamma_{i,j}^l g_l, g_k\right) = \sum_l \Gamma_{i,j}^l g_{l,k}.$$

D.h. die  $\Gamma_{i,j}^l$  sind die Christoffel-Symbole der 2.ten Art (siehe (58.2)).

Man beachte noch, daß aus der Symmetrie von  $g_{i,j}$  folgende Umkehrformel für die partiellen Ableitungen der Koeffizienten der Riemann-Metrik folgt:

$$\frac{\partial}{\partial u^i}g_{j,k} = \Gamma_{i,j,k} + \Gamma_{i,k,j}.$$

Wegen Eigenschaft (62.4.2) ist  $\nabla_X Y$  tensoriell in  $X$ , d.h.  $(\nabla_X Y)(p)$  hängt nur von  $X_p$  und  $Y$  ab. Sei  $c: \mathbb{R} \rightarrow M$  eine Kurve mit  $c'(0) = X_p$ . Dann ist also  $(\nabla_{c'(0)} Y)(p)$  wohldefiniert und in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned}
(\nabla_{c'(0)} Y)(p) &= \nabla_{\sum_j \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial u^j}(p)} \left( \sum_{i=1}^m Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \right)(p) = \\
&= \sum_{j,i} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p + Y^i(p) \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}(p)} \frac{\partial}{\partial u^i}(p) \right) \\
&= \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p Y^i \cdot \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \\
&\quad + \sum_{i,j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) Y^i(p) \Gamma_{j,i}^k \Big|_p \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p
\end{aligned}$$

Dieser Ausdruck macht aber sogar für ein Vektorfeld  $Y$  längs  $c$  Sinn, d.h.  $Y(t) \in T_{c(t)}M$  für alle  $t \in \mathbb{R}$ , denn dann ist nach der Kettenregel

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{c(t)} Y^i \cdot \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) = \frac{dY^i}{dt}(t)$$

und somit ist

$$(\nabla_{c'(t)} Y)(t) = \sum_i \left( \frac{dY^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) Y^k(t) \Gamma_{j,k}^i \Big|_{c(t)} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{c(t)}.$$

### 62.7 Bemerkung

Wenn wir die entsprechenden Differentialgleichungen  $0 = \nabla_{c'} X$  für parallele Vektorfelder  $X$  längs Kurven  $c$  und  $0 = \nabla_{c'} c'$  für Geodäten  $c$  in lokalen Koordinaten aufschreiben, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dX^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) X^k(t) \Gamma_{j,k}^i \Big|_{c(t)} \\ 0 &= \frac{d^2(u^i \circ c)}{dt^2}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) \frac{d(u^k \circ c)}{dt}(t) \Gamma_{j,k}^i \Big|_{c(t)}. \end{aligned}$$

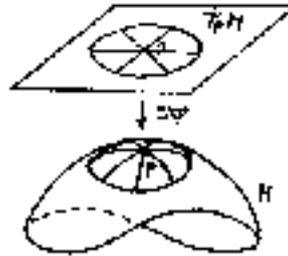
Das zeigt, daß die Exponentialabbildung  $\exp : TM \rightarrow M$  und der Paralleltransport  $\text{ptp} : C^\infty(\mathbb{R}, M) \times_M TM \rightarrow TM$  auch für abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeiten existieren und die entsprechenden Eigenschaften besitzen.

Wie für Hyperflächen kann man zeigen, daß die kritischen Punkte der Bogenlänge Geodäten sind.

### 58.4 Lemma. Die Exponentialabbildung.

Zu jedem  $x \in M$  und  $\xi \in T_x M$  existiert eine eindeutige Geodäte  $c_\xi : I \rightarrow M$  mit maximalem Definitionsintervall  $I \subseteq \mathbb{R}$ , mit konstanter skalarer Geschwindigkeit und Anfangsbedingung  $c_\xi(0) = x$ ,  $c'_\xi(0) = \xi$ .

Ordnet man nun  $\xi \in TM$  den Wert  $c_\xi(1)$  der Geodäte  $c_\xi$  mit Anfangsbedingung  $\xi$  zu, so nennt man das Ergebnis  $\exp(\xi)$ . Die Exponentialfunktion  $\exp$  ist auf einer offenen Umgebung des Nullschnitts  $M$  in  $TM$  definiert. Sie ist dort glatt, hat Werte in  $M$  und erfüllt:  $\exp_x(0_x) = x$  und  $T_{0_x}(\exp_x) = \text{id}_{T_x M}$ , wobei  $\exp_x := \exp|_{T_x M} : T_x M \rightarrow M$ . Die Geodäte  $c_\xi$  mit Anfangswert  $\xi$  ist dann durch  $c_\xi(t) = \exp(t\xi)$  gegeben.



Der Grund für die Bezeichnungsweise  $\exp$  liegt darin, daß für  $M := S^1 \subset \mathbb{C}$  mit  $TM = \{(x, tx^\perp) : |x| = 1, t \in \mathbb{R}\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$  die Exponentialabbildung gegeben ist

durch  $\exp(x, tx^\perp) = x e^{it}$ . Für allgemeine Liegruppen anstelle von  $S^1$  siehe auch (67.6).

**Beweis.** Die lokale Formel aus (58.3) für die Geodätengleichung zeigt, daß die Existenz und Eindeutigkeit maximal definierter Geodäten  $c_\xi$ , sowie deren glatte Abhängigkeit vom Anfangswert  $\xi$ .

**62.8 Lemma.** Die Abbildung  $(\pi, \exp) : TM \rightarrow M \times M$  ist ein Diffeomorphismus einer Umgebung  $U$  des Nullschnitts  $M \subseteq TM$  auf eine Umgebung der Diagonale  $\{(x, x) : x \in M\} \subseteq M \times M$ .

**Beweis.** Man beachte zuerst, daß der Tangentialraum von  $TM$  in einem Punkt  $0_x$  des Nullschnitts gerade  $T_x M \oplus T_x M$  ist: Dabei ist der erste Faktor durch die Tangentialvektoren an Kurven in  $M \subseteq TM$  gegeben und der zweite durch Geschwindigkeitsvektoren von Kurven im Vektorraum  $T_x M \subseteq TM$ . Diese beiden Teilräume haben trivialen Durchschnitt, und ergeben zusammen die richtige Dimension  $\dim(TM) = 2 \dim(M)$ .

Nun berechnen wir die partiellen Ableitungen von  $(\pi, \exp)$ . Auf dem Nullschnitt ist  $(\pi, \exp) : TM \supset M \rightarrow M \times M$  gerade die Diagonal-Abbildung  $x \mapsto (x, x)$  und auf der Faser  $T_x M$  ist  $(\pi, \exp) : TM \supset T_x M \rightarrow M \times M$  die Abbildung  $(\text{konst}_x, \exp_x)$ . Also sieht die Tangentialabbildung von  $(\pi, \exp)$  in  $0_x$  wie folgt aus:

$$T_{0_x}(\pi, \exp) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ \text{id} & T_0 \exp_x \end{pmatrix} : T_x M \times T_x M \rightarrow T_x M \times T_x M.$$

Wegen  $T_0 \exp_x = \text{id}_{T_x M}$  ist also  $(\pi, \exp)$  ein lokaler Diffeomorphismus für Punkte nahe dem Nullschnitt.

Wir wählen für jedes  $x \in M$  eine offene 0-Umgebung  $U_x$  in  $TM$ , so daß  $(\pi, \exp) : U_x \rightarrow (\pi, \exp)(U_x)$  ein Diffeomorphismus ist, und die Fasern  $U_x \cap T_y M$  Kugeln um 0 sind. Die Vereinigung  $U := \bigcup_{x \in M} U_x$  ist dann eine offene Umgebung des Nullschnitts in  $TM$ . Und  $(\pi, \exp) : U \rightarrow V := (\pi, \exp)(U)$  ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Bleibt nur noch die Injektivität zu zeigen: Aber falls zwei Tangentialvektoren verschiedene Fußpunkte besitzen, so können wir sie durch die erste Komponente  $\pi : TM \rightarrow M$  trennen, und falls sie den gleichen Fußpunkt  $x \in M$  haben, so trennt sie die zweite Komponente  $\exp_x$ , da sie in einer der Kugeln  $U_y \cap T_x M$  enthalten sind.  $\square$

**62.9 Tubuläre Umgebung.** Sei  $M \subseteq N$  eine Teilmannigfaltigkeit der Riemann-Mannigfaltigkeit  $N$ . Mit  $TM^\perp$  bezeichnen wir das Normalbündel von  $M$  in  $N$ , d.h. jenes Vektorbündel über  $M$ , welches als Faser über  $x \in M$  das orthogonale Komplement  $(T_x M)^\perp$  von  $T_x M$  in  $T_x N$  bezüglich der Riemann-Metrik von  $N$  hat. Dann ist  $\exp_N$  ein Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung des Nullschnitts  $M \subseteq TM^\perp$  auf eine offene Umgebung von  $M$  in  $N$ . Die Bilder von Schnitten konstanter Länge schneiden die radialen Geodäten orthogonal.

**Beweis.** Analog zum Beweis von Satz (62.8) können wir den Tangentialraum von  $TM^\perp$  in einem Punkt  $x$  des Nullschnitts als  $T_x M \oplus T_x M^\perp$  schreiben. Und die Tangential-Abbildung von  $\exp_N$  hat die Gestalt

$$(\text{id}_{T_x M}, T_0 \exp_x |_{(T_x M)^\perp}) = \text{id}_{T_x N}.$$

Also ist  $\exp_N : TM^\perp \rightarrow N$  ein lokaler Diffeomorphismus, und auch die Injektivität kann wie im Beweis von Satz (62.8) gezeigt werden.

Sei nun  $X : \mathbb{R} \rightarrow TM^\perp$  ein Vektorfeld längs einer Kurve  $c = \pi \circ X : \mathbb{R} \rightarrow M$  von konstanter Länge (o.B.d.A. 1), so betrachten wir die Abbildung  $\varphi : (t, s) \mapsto \exp_{c(s)}(tX(s))$ . Da  $t \mapsto \varphi(t, s)$  Geodäten sind, ist  $E = g_{1,1} = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 1$  und

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0,$$

i.e.  $0 = \Gamma_{1,1}^1$  und  $0 = \Gamma_{1,1}^2$ . Also wegen  $g_{1,1} = 1$  auch

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_{1,1}^1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \Gamma_{1,1,i} g^{i,1} = \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{d}{du^1} g_{i,1} + \frac{d}{du^1} g_{1,i} - \frac{d}{du^1} g_{1,1} \right) g^{i,1} \\ &= \frac{dg_{1,2}}{du^1} g^{2,1} = \left( \frac{dg_{1,2}}{du^1} \right) \left( -g_{1,2} \frac{1}{\det(g_{i,j})} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\det(g_{i,j})} \frac{d}{du^1} (g_{1,2})^2 \\ &\Rightarrow 0 = \frac{d}{du^1} (g_{1,2})^2 \end{aligned}$$

Wegen  $g_{1,2}(0, u^1) = 0$  also  $F = g_{1,2} = 0$ . □

Wählt man für  $M$  einen Punkt und in  $T_x M$  eine Orthonormalbasis, dann sind das gerade die Riemannschen-Normalkoordinaten. Ein anderer Spezialfall ist der einer – nach der Bogenlänge parametrisierten – doppelpunktfreien Kurve  $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ .

In (60.2) haben wir eine Riemann-Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  als geodätisch vollständig bezeichnet, wenn jede Geodäte unendliche Länge hat, oder äquivalent, auf ganz  $\mathbb{R}$  definiert ist. Der folgende Satz liefert nun den Zusammenhang mit der Vollständigkeit im Sinne der Metrik, wie wir ihm in (33.2) verwendet haben.

**58.7 Lemma.** *Sei  $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow M$  eine Parametrisierung nach geodätischen Koordinaten, dann ist jede Kurve der Form  $\varphi \circ u$  mit einer Kurve  $u$  in  $U$  welche  $(t_1, s_1)$  mit  $(t_2, s_2)$  verbindet mindestens so lang wie jede Geodäte  $t \mapsto \varphi(t, s)$  für  $t \in [t_1, t_2]$ .*

Dieses Resultat liefert also, daß gewisse Geodäten unter allen hinreichend nahen Kurven minimal sind. Global muß das nicht stimmen, wie ein Bogen eines Großkreises auf der Sphäre von Länge größer als  $\pi$  zeigt.

**Beweis.** Sei  $c_0(t) := \varphi(t, s)$  und  $c_1(r) := \varphi(u(r))$ , dann gilt

$$\begin{aligned} L(c_1) &= \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left( \frac{du^1}{dr} \right)^2 + G \left( \frac{du^2}{dr} \right)^2} dr \geq \\ &\geq \int_{r_1}^{r_2} \left| \frac{du^1}{dr} \right| dr \geq \int_{r_1}^{r_2} \frac{du^1}{dr} dr = u^1(r_2) - u^1(r_1) = t_2 - t_1 = L(c_0) \end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn  $\frac{du^2}{dr} = 0$ , also  $u^2$  konstant ist. □

### 62.10 Satz von Hopf-Rinow.

*Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind folgende Aussagen äquivalent*

1.  $M$  ist geodätisch vollständig.
2.  $M$  ist als metrischer Raum vollständig, d.h. Cauchyfolgen konvergieren.
3. Jede in der Metrik beschränkte und abgeschlossene Menge ist kompakt.

*Weiters folgt aus diesen äquivalenten Aussagen*

4. Je zwei Punkte lassen sich durch eine Geodäte minimaler Länge verbinden.

**Beweis.** (3  $\Rightarrow$  2) Dies ist ein allgemeiner Satz aus der Topologie.

(2  $\Rightarrow$  1) Sei  $c$  eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte und  $]a, b[$  ihr maximaler Definitionsbereich. Sei z.B.  $b < +\infty$ , und betrachten wir eine Folge  $b_n \nearrow b$ , dann ist  $c(b_n)$  eine Cauchyfolge, denn

$$d(c(t_1) - c(t_2)) < L(c|_{[t_1, t_2]}) = |t_2 - t_1|.$$

Nach (2) existiert also  $\lim_{n \rightarrow \infty} c(b_n) =: c(b)$ . Aus (62.8) wissen wir, daß eine Umgebung  $U$  von  $c(b)$  existiert und ein  $\rho > 0$ , sodaß  $\exp_x$  für alle  $x \in U$  und alle Vektoren der Länge kleiner als  $\rho$  definiert ist. Wählen wir nun  $n$  so groß, daß  $b - b_n < \frac{\rho}{2}$  und  $c(b_n) \in U$ . Dann ist die Geodäte mit Anfangsrichtung  $c'(b_n)$  für  $|t| < \frac{\rho}{2}$  definiert, also über  $b$  hinaus, Widerspruch.

(1  $\Rightarrow$  4) Es sei  $r := d(x, y) > 0$ . Wir wählen ein  $0 < \rho < r$ , so daß  $\exp_x : B_\rho(0) \rightarrow M$  ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Sei  $0 < \rho_1 < \rho$  und  $S := \exp_x(\partial B_{\rho_1}(0))$ . Da  $S$  kompakt ist, existiert ein  $x_1 \in S$  mit  $d(x_1, y)$  minimal. Sei  $v \in T_x M$  mit  $|v| = 1$  und  $x_1 := \exp_x(\rho_1 v)$ , Wir behaupten, daß  $\exp_x(rv) = y$ , also  $c(t) := \exp_x(tv)$  eine minimale Geodäte von  $x$  nach  $y$  ist.

Es genügt  $d(c(t), y) = r - t$  für  $\rho_1 \leq t \leq r$  zu zeigen. Offensichtlich stimmt diese Gleichung für  $t = \rho_1$ , denn da jede Kurve von  $x$  nach  $y$  die Menge  $S$  trifft, gilt:

$$r = d(x, y) = \min_{s \in S} (d(x, s) + d(s, y)) = \rho_1 + d(x_1, y) = \rho_1 + d(c(\rho_1), y).$$

Sei nun  $t_0$  das Infimum jener  $t$ , für welche die Gleichung nicht stimmt. Da die Bedingung abgeschlossen ist, gilt für  $t_0$  die Gleichung. Insbesondere ist also  $t_0 < r$ . Sei  $S_0$  eine geodätische Sphäre um  $c(t_0)$  mit Radius  $\rho_0 < r - t_0$ , sei weiters  $x_0$  ein Punkt auf  $S_0$  mit minimalem Abstand von  $y$ , und sei  $c_0$  eine Geodäte minimaler Länge von  $c(t_0)$  nach  $x_0$ . Dann gilt:

$$d(c(t_0), y) = \min_{s \in S_0} (d(c(t_0), s) + d(s, y)) = \rho_0 + d(x_0, y)$$

und somit  $d(x_0, y) = (r - t_0) - \rho_0$ . Weiters ist

$$d(x, x_0) \geq d(x, y) - d(x_0, y) = r - (r - t_0) + \rho_0 = t_0 + \rho_0,$$

und die Kurve  $c|_{[0, t_0]}$  gefolgt von  $c_0$  hat die Länge  $t_0 + \rho_0$  somit gilt  $d(x, x_0) = t_0 + \rho_0$ , also die gestückelte Kurve eine Geodäte die  $c|_{[0, t_0]}$  also mit  $c$  übereinstimmt. Somit gilt die gewünschte Gleichung auch noch für  $t_0 + \rho_0$  für alle kleinen  $\rho_0$ . Das ist ein Widerspruch dazu, daß  $t_0$  das Infimum jener  $t$  ist, für die die Gleichung falsch ist.

(1  $\Rightarrow$  3) Sei  $A \subseteq M$  abgeschlossen und beschränkt, i.e.

$$\sup\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in A\} =: r < \infty.$$

Nach (4) ist  $A \subseteq \exp_x\{B_r(0)\} =: B$  für  $x \in A$ , und  $B$  ist als stetiges Bild der kompakten Menge  $B_r(0)$  kompakt, also auch  $A$ .  $\square$

**62.11 Satz.** Sei  $(M, g)$  eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit, und sei  $X \in \mathfrak{X}(M)$  ein bezüglich  $g$  beschränktes Vektorfeld. Dann ist  $X$  vollständig, d.h. hat einen globalen Fluß.

**Beweis.** Sei  $|X(x)|_g \leq R$  für alle  $x \in M$  und sei  $c$  eine Lösungskurve von  $X$ , dann gilt:

$$L(c|_{[a, b]}) = \int_a^b |c'(t)|_g dt = \int_a^b |X(c(t))|_g dt \leq |b - a| R$$

Also bleibt  $c$  auf endlichen Intervallen innerhalb einer beschränkten, und wegen der Vollständigkeit innerhalb einer kompakten Menge. Dies ist ein Widerspruch zu (28.3).  $\square$

**62.12 Satz von Nomitzu-Ozeki.** *Zu jeder Riemann-Metrik gibt es immer eine konform äquivalente, die geodätisch vollständig ist.*

**Beweis.** Sei  $(M, g)$  eine Riemann-Mannigfaltigkeit und  $d$  die assoziierte Metrik zu  $g$ . Sei  $B_r(X) := \{y \in M : d(x, y) < r\}$ . Dann setzen wir

$$r(x) := \sup\{\rho > 0 : B_\rho(x) \text{ ist kompakt}\}.$$

Aus der Dreiecksungleichung für  $d$  folgt sofort  $|r(x_1) - r(x_2)| < d(x_1, x_2)$ , also ist  $r$  stetig. Falls  $r(x) = +\infty$  für ein  $x$ , so auch für alle anderen  $x \in M$ , und damit ist jede abgeschlossene beschränkte Menge kompakt, also  $M$  nach (62.10) vollständig. Wir dürfen folglich annehmen, daß  $r : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Nun wählen wir mittels Partition der 1 eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) > \frac{1}{r(x)}$  für alle  $x \in M$ . Und betrachten die konform äquivalente Metrik  $g_f := f^2 g$ .

Bleibt zu zeigen, daß  $g_f$  vollständig ist. Dafür genügt es die Inklusion  $B_{1/3}^{g_f}(x) \subseteq B_{r(x)/2}^g(x)$  zu beweisen, denn dann hat auf Grund des Beweises von  $2 \Rightarrow 1$  in (62.10) jede Geodäte mindestens Länge  $\frac{1}{3}$ , und somit durch Aneinanderstückeln unendliche Länge. D.h.  $g_f$  ist vollständig.

Sei also  $y \notin B_{r(x)/2}^g(x)$  und  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine glatte Kurve von  $x$  nach  $y$  dann gilt:

$$L^g(c) = \int_a^b |c'(t)|_g dt \geq d(x, y) > \frac{r(x)}{2} \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} L^{g_f}(c) &= \int_a^b |c'(t)|_{g_f} dt \\ &= \int_a^b f(c(t)) |c'(t)|_g dt = && \text{(nach dem Zwischenwertsatz)} \\ &= f(c(\tau)) \int_a^b |c'(t)|_g dt \\ &= f(c(\tau)) L^g(c) > \frac{L^g(c)}{r(c(\tau))}. \end{aligned}$$

Wegen  $|r(x) - r(c(\tau))| \leq d(x, c(\tau)) \leq L^g(c)$  gilt  $r(c(\tau)) \leq r(x) + L^g(c)$  und somit

$$L^{g_f}(c) > \frac{L^g(c)}{r(c(\tau))} \geq \frac{L^g(c)}{r(x) + L^g(c)} > \frac{L^g(c)}{2L^g(c) + L^g(c)} = \frac{1}{3} \quad \square$$

**33.4 Satz (Lie-Gruppe der Isometrien).** *Sei  $(M, g)$  eine zusammenhängende  $m$ -dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit, dann ist*

$$\text{Isom}(M) := \{f \in \text{Diff}(M) : f \text{ ist Isometrie}\}$$

*eine Lie-Gruppe (zu einer Lie-Gruppe machbar) der Dimension höchstens  $\frac{1}{2}m(m+1)$ .*

Die Gruppe  $\text{Isom}(M)$  ist also im Unterschied zur Gruppe  $\text{Diff}(M)$  aller Diffeomorphismen endlichdimensional. Z.B. haben  $\text{Isom}(\mathbb{R}^m) = O(m) \times \mathbb{R}^m$  und  $\text{Isom}(S^m) = O(m+1)$  Dimension  $\frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{(m+1)(m+1-1)}{2}$ .

**Ohne Beweis.** Siehe [51, 2.1.2].

Da man mittels eines inneren Produktes Winkel zwischen Vektoren durch

$$\cos \sphericalangle(x, y) := \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}}$$

definieren kann, können wir auf jeder Riemann-Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  Winkel  $\alpha$  zwischen Tangentialvektoren und somit zwischen Kurven  $c_1$  und  $c_2$  in ihren Schnittpunkten auf folgende Weise messen:

$$\cos \alpha := \frac{g(c'_1(0), c'_2(0))}{\sqrt{g(c'_1(0), c'_1(0))} \sqrt{g(c'_2(0), c'_2(0))}} .$$

### 33.5 Definition (Konforme Abbildungen)

Eine glatte Abbildung  $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$  heißt WINKELERHALTEND (KONFORM), falls  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$  für alle  $x \in M$  winkelerhaltend ist.

**33.7 Lemma (Lineare konforme Abbildungen).** Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  linear und injektiv, dann sind äquivalent:

1.  $f$  ist winkelerhaltend,
2.  $\exists \lambda > 0 : \langle f(x), f(y) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$  für alle  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ;
3.  $\exists \mu > 0 : \mu f$  ist Isometrie.

Siehe Aufgabe !1.5.

**Beweis.**  $(2 \Leftrightarrow 3)$  ist offensichtlich mit  $\lambda \mu^2 = 1$ .

$(1 \Leftrightarrow 2)$  Sei  $\alpha$  der von den Vektoren  $x$  und  $y$  aufgespannte Winkel und  $\alpha'$  der von den Vektoren  $f(x)$  und  $f(y)$  aufgespannte Winkel. Dann gilt:

$$\cos \alpha' = \frac{\langle f(x), f(y) \rangle}{|f(x)| \cdot |f(y)|} = \frac{\lambda \langle x, y \rangle}{\sqrt{\lambda} |x| \sqrt{\lambda} |y|} = \cos \alpha.$$

Also ist  $\alpha = \alpha'$ , und  $f$  winkelerhaltend.

$(1 \Rightarrow 2)$  Wir definieren  $\lambda(v) \geq 0$  implizit durch  $\langle f(v), f(v) \rangle =: \lambda(v) \langle v, v \rangle$ .

Für Vektoren  $v$  und  $w$  ist  $v + w \perp v - w \Leftrightarrow 0 = \langle v + w, v - w \rangle = |v|^2 - |w|^2 \Leftrightarrow |v| = |w|$ . Da  $f$  konform ist gilt somit für Vektoren mit  $|v| = 1 = |w|$ :

$$0 = \langle f(v + w), f(v - w) \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle - \langle f(w), f(w) \rangle = \lambda(v) - \lambda(w).$$

Also ist  $\lambda$  konstant auf der Einheits-Sphäre und damit auch auf  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ , denn mit  $w = |w|v$  mit  $v := \frac{1}{|w|}w \in S^{n-1}$  ist

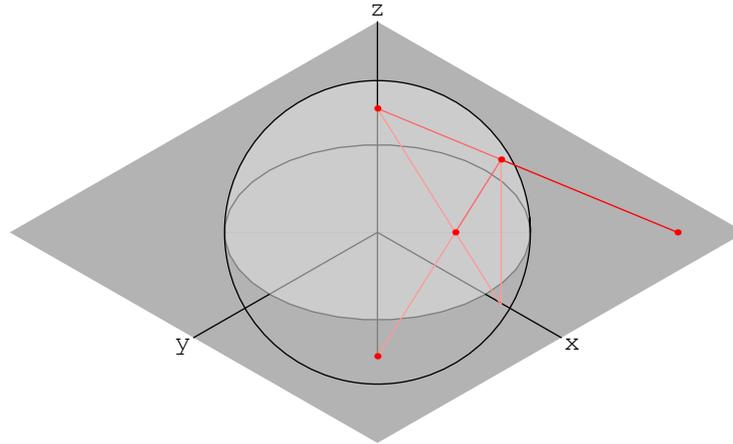
$$\begin{aligned} \lambda(w) \langle w, w \rangle &= \langle f(w), f(w) \rangle = \langle f(|w|v), f(|w|v) \rangle = \langle |w| f(v), |w| f(v) \rangle \\ &= |w|^2 \langle f(v), f(v) \rangle = \langle w, w \rangle \lambda(v) \cdot 1. \end{aligned}$$

Somit ist für zwei beliebige Vektoren  $v$  und  $w$ :

$$\begin{aligned} \langle f(v), f(w) \rangle &= \frac{1}{4} \left( |f(v) + f(w)|^2 - |f(v) - f(w)|^2 \right) = \frac{1}{4} \left( |f(v + w)|^2 - |f(v - w)|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \lambda \left( |v + w|^2 - |v - w|^2 \right) = \lambda \langle v, w \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

### 33.8 Beispiele konformer Abbildungen

- (1) Stereographische Projektion  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  (siehe Aufgabe (72.40)).  
 (2) Spiegelung  $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $z \mapsto \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  an der Einheitskugel.



Die Abbildung  $f$  ist konform, da  $f'(z)(v) = \frac{v\langle z, z \rangle - 2z\langle z, v \rangle}{\langle z, z \rangle^2}$  und somit

$$\begin{aligned} \langle f'(z)(v), f'(z)(w) \rangle &= \left\langle \frac{v\langle z, z \rangle - 2z\langle z, v \rangle}{\langle z, z \rangle^2}, \frac{w\langle z, z \rangle - 2z\langle z, w \rangle}{\langle z, z \rangle^2} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\langle z, z \rangle^4} \left( \langle v, w \rangle \langle z, z \rangle^2 - 4\langle z, z \rangle \langle z, v \rangle \langle z, w \rangle + 4\langle z, z \rangle \langle z, v \rangle \langle z, w \rangle \right) = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle z, z \rangle^2}. \end{aligned}$$

In Analogie zur Definition von holomorph in (30.9) heißt eine Funktion  $f$  ANTIHOLOMORPH, falls  $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^2$  glatt ist und  $f'(z)$  konjugiert komplex-linear ist, d.h.  $f'(z)(iv) = -if'(z)(v)$  für alle  $v, z$ .

**33.9 Satz (Konforme Abbildungen der Ebene).** Sei  $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$  ein Diffeomorphismus, dann gilt:  
 $f$  ist konform  $\Leftrightarrow f$  ist holomorph oder antiholomorph. Dabei heißt  $f$  antiholomorph, wenn  $\bar{f}$  holomorph ist.

**Beweis.**

$$\begin{aligned}
 f = (f^1, f^2) \text{ ist konform} &\Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f'(z) \text{ ist konform} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0 \\ \langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} f_1^1 f_2^1 + f_1^2 f_2^2 = 0 \\ (f_1^1)^2 + (f_1^2)^2 = (f_2^1)^2 + (f_2^2)^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} AB^* + BA^* = 0 \text{ wo } A := f_1^1 - f_2^2 \text{ und } B := f_2^1 + f_1^2 \\ AA^* - BB^* = 0 \text{ wo } A^* := f_1^1 + f_2^2 \text{ und } B^* := f_2^1 - f_1^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 0 \text{ falls } (A^*)^2 + (B^*)^2 \neq 0 \\ \text{oder } (A^*)^2 + (B^*)^2 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ ist holomorph} \\ \text{oder } A^* = B^* = 0, \text{ d.h. } f \text{ ist antiholomorph.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kürzer kann man das auch so sehen:  $f'(z)$  ist wegen (33.7) genau dann konform, wenn es ein Vielfaches einer Isometrie ist, also Multiplikation mit einer komplexen Zahl und eventuell noch mit der Spiegelung  $z \mapsto \bar{z}$  zusammengesetzt.  $\square$

**33.10 Proposition.** *Es sei  $f$  eine glatte (nicht notwendig reguläre) Abbildung und  $U$  offen und zusammenhängend. Wir nennen sie in Verallgemeinerung zu (33.7) KONFORM, falls  $T_z f$  für jedes  $z$  (reelles) Vielfaches einer Isometrie ist. Dann gilt:*

1.  $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$  ist konform  $\Leftrightarrow f$  oder  $\bar{f}$  ist holomorph.
2.  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  ist konform  $\Leftrightarrow f$  ist konstant.
3.  $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow S^2$  ist konform  $\Leftrightarrow$  bezüglich stereographischer Parametrisierung  $\mathbb{C} \subseteq S^2$  ist  $f$  oder  $f$  meromorph, d.h. ist holomorph bis auf Pole.
4.  $f : S^2 \rightarrow S^2$  ist konform  $\Leftrightarrow$  bezüglich stereographischer Parametrisierung  $\mathbb{C} \subseteq S^2$  ist  $f$  oder  $f$  rational, d.h. Quotient zweier Polynome.
5.  $f : S^2 \rightarrow S^2$  ist konformer Diffeomorphismus  $\Leftrightarrow$  bezüglich stereographischer Parametrisierung  $\mathbb{C} \subseteq S^2$  ist  $f$  oder  $f$  eine Möbiustransformation, d.h. ist Quotient der Form  $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ .
6.  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist konformer Diffeomorphismus  $\Leftrightarrow f$  ist eine Ähnlichkeitsabbildung, d.h. eine Bewegung zusammengesetzt mit einer Streckung.

**Beweis.** Die Implikationen ( $\Leftarrow$ ) sind leicht zu verifizieren. In (5) geht das wie folgt. Es sei  $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  eine Möbiustransformation. Dann ist  $f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$  ein konformer Diffeomorphismus, mit Inverser  $w \mapsto \frac{dw-b}{-cw+a}$ , denn

$$f(z) = w \Leftrightarrow az + b = (cz + d)w \Leftrightarrow z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Falls  $c \neq 0$  so erweitern wir diesen nun durch  $f(-d/c) := \infty$  und  $f(\infty) := a/c$  zu einer Bijektion  $S^2 \rightarrow S^2$ . Diese Erweiterung ist holomorph bei  $-d/c$ , denn  $z \mapsto 1/f(z) =$

$(cz + d)(az + b)$ , ist holomorph nahe  $z = -d/c$ , da  $a(-d/c) + b = -(ad - bc)/c$  und

$$z \mapsto f(1/z) = (a/z + b)/(c/z + d) = (bz + a)/(dz + c),$$

ist holomorph nahe 0, da  $d \cdot 0 + c = c \neq 0$ .

Falls  $c = 0$ , so erweitern wir  $f$  durch  $f(\infty) := \infty$ . Dann ist die Erweiterung holomorph bei  $\infty$ , da

$$1/f(1/z) = (c/z + d)/(a/z + b) = (dz + c)/(bz + a)$$

und  $a \neq 0$  wegen  $ad = ad - bc \neq 0$ . Also definiert jede Möbiustransformation  $f$  einen konformen Diffeomorphismus  $S^2 \rightarrow S^2$ .

Für die umgekehrte Richtungen ( $\Rightarrow$ ) gehen wir wie folgt vor:

(1) Jede Isometrie  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ist eine Drehung (eventuell mit einer Spiegelung zusammengesetzt). Also ist  $f'(z)$  oder  $\overline{f'(z)} = \overline{f'}(z)$  Multiplikation mit einer komplexen Zahl und die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen  $\frac{\partial u}{\partial x} = \pm \frac{\partial v}{\partial y}$  und  $\frac{\partial u}{\partial y} = \mp \frac{\partial v}{\partial x}$  sind für  $f =: u + iv$  erfüllt. Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \pm \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \pm \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = 0,$$

d.h.  $u = \Re f$  ist harmonisch. Wir suchen ein  $w$ , s.d.  $u + iw$  holomorph ist, d.h. die Cauchy-Riemanschen Differentialgleichungen erfüllt. Es soll also  $dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$  gelten, was wegen der Integrabilitätsbedingung

$$d\left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy\right) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy = 0$$

durch den Ansatz

$$w(z) := \int_{z_0}^z \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

erreichbar ist. Also ist  $u + iw$  holomorph und somit sind die Stellen, wo  $f'(z) = 0$  ist isoliert, d.h.  $f = u + iv = u \pm iw$  mit konstanter Wahl von  $\pm$ . Also ist  $f$  oder  $\bar{f}$  holomorph.

(2) Es sei  $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  konform. Dann ist auch die Zusammensetzung  $\mathbb{C} \rightarrow S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  mit der stereographischen Parametrisierung konform, also holomorph oder antiholomorph nach (1). Da  $f(S^2)$  kompakt ist, ist diese Zusammensetzung beschränkt, und nach dem Satz von Liouville (siehe [75, S.116]) konstant.

(3) Es sei  $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow S^2$  konform und  $z_0 \in U$ . Falls  $f(z_0) \in \mathbb{C} \subseteq S^2$  liegt, dann ist  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  lokal konform und nach (1) also (anti) holomorph. Andernfalls ist  $f(z_0) = \infty$  und somit  $z \mapsto \frac{1}{z} f(z)$  holomorph und folglich lokal beschränkt und lokal  $\neq 0$ . Also hat  $f$  eine isolierte Singularität in  $z_0$  und kommt lokal um  $z_0$  den Wert 0 nicht nahe und hat folglich nach dem Satz von Casorati-Weierstrass (siehe [75, S. 166]) in  $z_0$  keine wesentliche Singularität, sondern einen Pol. Also ist  $f$  oder  $\bar{f}$  meromorph.

(4) Nach (3) ist  $f|_{\mathbb{C}} : S^2 \supseteq \mathbb{C} \rightarrow S^2$  (oder  $\bar{f}$ ) meromorph und hat nur endlich viele Pole  $z_j$ , da diese auf  $S^2$  isoliert sind. Dort ist die Laurent-Entwicklung  $f(z) = \sum_{k=-n_j}^{\infty} (z - z_j)^k f_k^j$  für ein  $n_j \in \mathbb{N}$ . Also ist  $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{n_j} (z - z_j)^{-k} f_{-k}^j$  holomorph um  $z_j$ . Falls auch  $\infty$  ein Pol ist, dann ist die Laurent-Entwicklung  $f(\frac{1}{z}) = \sum_{k=-n_{\infty}}^{\infty} z^k f_k^{\infty}$ ,

also  $f(z) - \sum_{k=1}^{n_\infty} z^k f_{-k}^\infty$  holomorph bei  $\infty$ . Also ist

$$z \mapsto f(z) - \sum_j \sum_{k=1}^{n_j} (z - z_j)^{-k} f_{-k}^j - \sum_{k=1}^{n_\infty} z^k f_{-k}^\infty$$

holomorph  $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  und nach (2) konstant, d.h.  $f$  ist rational.

(5) Nach (4) ist  $f = \frac{p}{q}$  für relativ prime Polynome  $p$  und  $q$ . Falls der Grad von  $p$  oder von  $q$  größer als 1 ist, dann hat  $h(z) := p(z) - cq(z)$  für geeignete  $c := f(z)$  Grad größer als 1. Da  $f$  injektiv ist, darf nur eine Lösung  $z = z_0$  von  $h(z) = 0$  existieren, d.h.  $h(z) = k(z - z_0)^n$  für ein  $n \geq 2$  und  $k \neq 0$ . Dann ist  $p(z_0) = cq(z_0)$  und  $p'(z_0) = cq'(z_0)$  und somit  $f'(z_0) = \frac{qp' - pq'}{q^2}(z_0) = 0$ , ein Widerspruch dazu, daß  $f$  ein Diffeomorphismus ist.

(6) Sei  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ein konformer Diffeomorphismus. O.B.d.A. (ersetze wenn nötig  $f$  durch  $\bar{f}$ ) ist somit  $f$  holomorph nach (1) und erfüllt  $f(0) = 0$  (ersetze  $f$  durch  $f - f(0)$ ). Sei  $i : z \mapsto \frac{1}{z}$ . Dann ist  $\tilde{f} := i \circ f \circ i : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  ein holomorpher Diffeomorphismus. Da  $f$  ein Diffeomorphismus bei 0 ist, existiert ein  $\delta > 0$  mit  $|f^{-1}(z)| < \delta$  für alle  $|z| < 1$ . Somit gilt  $|z| \leq \frac{1}{\delta} \Rightarrow |i(z)| \geq \delta \Rightarrow |f(i(z))| \geq 1 \Rightarrow |\tilde{f}(z)| = |i(f(i(z)))| \leq 1$ , d.h.  $\tilde{f}$  ist nahe 0 beschränkt und somit zu einer holomorphen Funktion auf  $\mathbb{C}$  erweiterbar mit  $\tilde{f}(0) = 0$  (siehe z.B. [?, 115]). Gleiches Argument gilt auch für die Umkehrfunktion  $\tilde{f}^{-1}$ , d.h.  $f$  läßt sich zu einem konformen Diffeomorphismus  $S^2 \rightarrow S^2$  erweitern. Damit ist  $f$  nach (5) eine Möbiustransformation  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  mit  $\infty \mapsto \infty$ , also  $c = 0$ , d.h. eine Ähnlichkeitsabbildung.  $\square$

**33.6 Satz (Lie-Gruppe der konformen Diffeomorphismen).** *Die Gruppe der konformen Isomorphismen einer  $m$ -dimensionalen parakompakten zusammenhängenden Riemann-Mannigfaltigkeit bilden eine Lie-Gruppe der Dimension höchstens  $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$ .*

Z.B. ist diese Gruppe nach dem Satz (52.11) (bzw. (33.10)) von Liouville für  $M = \mathbb{R}^m$  die Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen von Dimension  $\dim(O(m)) + \dim(\mathbb{R}^m) + 1 = \frac{m(m-1)}{2} + m + 1 = \frac{m^2+m+2}{2}$  und für  $M = S^2$  ist nach (33.10) die Zusammenhangskomponente  $SL_{\mathbb{C}}(2)/\mathbb{Z}_2$  (der Moebius-Transformationen) dieser Gruppe von Dimension  $6 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$ .

**Ohne Beweis.** Siehe [51, 4.6.1].

## 34. Riemann-Flächen

### 34.1 Definition (Riemann-Fläche)

Eine RIEMANN-FLÄCHE ist eine 2-dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit.

**34.2 Satz von Korn-Lichtenstein.** *Auf jeder Riemann-Fläche existieren konforme lokale Koordinaten (auch ISOTHERMALE KOORDINATEN genannt).*

**Ohne Beweis.** Siehe [13] oder [78, Vol.II, Addendum 2]

### 34.3 Definition (Komplexe Mannigfaltigkeit)

Eine KOMPLEXE MANNIGFALTIGKEIT ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, dessen Kartenwechsel komplex differenzierbar (holomorph) sind.

Eine ORIENTIERTE MANNIGFALTIGKEIT ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, dessen Kartenwechsel orientierungserhaltend sind. Für ein detaillierteres Studium von Orientierbarkeit siehe Abschnitt (46).

**34.4 Folgerung.** *Jede orientierte Riemann-Fläche ist eine komplexe Mannigfaltigkeit.*

**Beweis.** Man wähle einen Atlas, dessen Kartenwechsel konform und orientierungserhaltend, also holomorph, sind.  $\square$

### 34.5 Beispiele konformer Diffeomorphismen

(1) Die  $S^2$  hat als Atlas die stereographische Projektion vom Nord- und Südpol. Der Kartenwechsel ist die Inversion am Einheitskreis, ist also konform aber vertauscht die Orientierungen. Wir ändern die Orientierung einer Karte und erhalten so einen holomorphen Atlas. Dies nennt man auch die RIEMANN'SCHE ZAHLENKUGEL. Wir betrachten nun die AUTOMORPHISMENGRUPPE der  $S^2$ . Das ist die Menge aller biholomorphen Abbildungen  $f : S^2 \rightarrow S^2$ , wobei die BIHOLOMORPHEN ABBILDUNGEN, genau die konformen, orientierungserhaltenden Diffeomorphismen sind. Nach (33.10) gilt bezüglich der stereographischen Projektion von  $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$  folgende Beschreibung:

$$\text{Aut}(S^2) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Diese Gruppe der MÖBIUSTRANSFORMATIONEN kann man auch mit folgender Matrixengruppe bis auf eine Multiplikation mit  $\pm 1$  identifizieren:

$$\text{SL}_{\mathbb{C}}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Die Gruppe  $\text{Aut}(S^2)$  ist also isomorph zu  $\text{SL}_{\mathbb{C}}(2)/\mathbb{Z}_2$ , wobei die Untergruppe  $\mathbb{Z}_2$  gegeben ist durch  $\mathbb{Z}_2 := \{\text{id}, -\text{id}\}$ . Dies ist eine Lie-Gruppe.

Die Gruppe der Möbiustransformationen wird von  $z \mapsto az$ ,  $z \mapsto z + b$  und  $z \mapsto 1/z$  erzeugt.

Offensichtlich sind die angegebenen Funktionen Möbiustransformationen. Sei umgekehrt eine Möbiustransformation  $f : z \mapsto (az + b)/(cz + d)$  mit  $ad - bc \neq 0$  gegeben. Falls  $c = 0$  und damit  $d \neq 0$  so ist  $f$  die Zusammensetzung  $z \mapsto \frac{a}{d}z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$ . Ist  $c \neq 0$  und damit  $f(\infty) = a/c \in \mathbb{C}$ , so ist die Zusammensetzung  $z \mapsto f(z) \mapsto f(z) - f(\infty) \mapsto \frac{1}{f(z) - f(\infty)}$  ein konformer Diffeomorphismus von  $\mathbb{C}$  (mit  $\infty \mapsto \infty$ ), also nach dem ersten Teil eine Zusammensetzung einer Drehstreckung und einer Translation.

(2) Die Automorphismengruppe von  $\mathbb{C}$  besteht aus jenen Möbiustransformationen von  $\text{Aut}(S^2)$ , welche  $\mathbb{C} \subset S^2$  oder – äquivalent – den Nordpol  $\hat{=} \infty \in \mathbb{C}$  invariant lassen: In der Tat sei  $f$  so ein Diffeomorphismus, dann ist  $f_{\infty} : z \mapsto 1/f(1/z)$  holomorph auf der punktierten Ebene. Da  $f$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $f_{\infty}$  durch  $f_{\infty}(0) = 0$

stetig ergänzbar, also ist  $\infty$  eine hebbare Singularität und  $f$  durch  $f(\infty) := \infty$  zu einen holomorphen Diffeomorphismus  $S^2 \rightarrow S^2$  erweiterbar. Wegen

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{a}{c}.$$

bildet die Möbiustransformation  $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$  den Punkt  $\infty$  auf  $a/c$  ab, und somit ist  $\infty$  genau dann invariant, wenn  $c = 0$  und  $a \neq 0$  ist. Die Möbiustransformation hat dann die Gestalt

$$\frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Also gilt:

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b : a \neq 0, a, b \in \mathbb{C}\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \neq 0, a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Man nennt dies auch die “ $az+b$ -Gruppe”, siehe (14.2). Sie ist komplex 2-dimensional.

(3) Für die offene Einheitskreis  $\mathbb{D}$  besteht die Automorphismengruppe aus jenen Möbiustransformationen von  $S^2$ , die  $\mathbb{D}$  invariant lassen, d.h.

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \frac{az + b}{bz + \bar{a}} : a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \right\} \cong SU(2,1)/\mathbb{Z}_2.$$

Es ist leicht zu sehen, daß jede solche Möbiustransformation  $\mathbb{D}$  invariant läßt. Für die Umkehrung benötigen wir dafür das

**Schwarz'sche Lemma.** *Es sei  $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$  holomorph mit  $f(0) = 0$ . Dann ist  $|f'(0)| \leq 1$  und  $|f(z)| \leq |z|$  für alle  $z$ . Genauer gesagt, es tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:*

1.  $|f'(0)| < 1$  und  $|f(z)| < |z|$  für  $z \neq 0$ ;
2.  $f(z) = e^{i\theta} z$  für ein  $\theta \in \mathbb{R}$  und alle  $z$ .

Es sei  $f$  ein Automorphismus von  $\mathbb{D}$  mit  $f(0) = c$ . Die Abbildung  $z \mapsto \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$  ist eine Möbiustransformation der angegebenen Gestalt und setzt man  $f$  mit ihr zusammen so wird 0 invariant gelassen. O.B.d.A. ist also  $f(0) = 0$ . Nach dem Schwarzschen Lemma ist  $|f'(0)| \leq 1$  und da  $f$  ein Diffeomorphismus ist, ist  $f'(0) \neq 0$  und gleiches gilt für die Inverse  $f^{-1}$ . Wegen  $f^{-1} \circ f = \text{id}$  ist also  $(f^{-1})'(0) \circ f'(0) = 1$  und somit  $|f'(0)| = 1$ , d.h.  $f(z) = e^{i\theta} z$  für ein  $\theta \in \mathbb{R}$  nach dem Schwarzschen Lemma. Dies ist ebenfalls eine Möbiustransformation der gesuchten Gestalt.

Es ist  $\text{Aut}(\mathbb{D})$  eine 3-dimensionale Gruppe. Sei dazu  $a = a_1 + ia_2$  und  $b = b_1 + ib_2$ . Dann ist  $a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 = 1$  und durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} (1) \quad & r_{1,1} = a_1 + b_1 & r_{1,2} &= a_2 + b_2 \\ (2) \quad & r_{2,1} = -a_2 - b_2 & r_{2,2} &= a_1 - b_1 \end{aligned}$$

wird ein Element  $\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,1} & r_{2,2} \end{pmatrix} \in \text{SL}(2)/\mathbb{Z}_2$  definiert. Somit erhalten wir einen Isomorphismus  $\text{Aut}(\mathbb{D}) \cong \text{SL}(2)/\mathbb{Z}_2$ , siehe Aufgabe (72.62).

### 34.6 Die Hyperbolische Scheibe

Wir definieren eine neue Riemann-Metrik auf  $\mathbb{D}$  durch

$$g_z(v, w) := \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

Dies ist eine konform äquivalente Metrik, d.h.  $\text{id} : (\mathbb{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathbb{D}, g)$  ist ein konformer Diffeomorphismus. Es ist also

$$\text{Aut}(\mathbb{D}, g) = \text{Aut}(\mathbb{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

Für  $f(z) := \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$ , d.h.  $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$ , ergibt sich

$$g_z(v, v) = \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} |v|^2 = \frac{|f'(z)(v)|^2}{(1 - |f(z)|^2)^2} = g_{f(z)}(f'(z)v, f'(z)v),$$

denn es gilt

$$(1 - |z|^2)|f'(z)v| = (1 - |f(z)|^2)|v|.$$

Es ist demnach  $\text{Aut}(\mathbb{D}, g) = \text{Isom}(\mathbb{D}, g)$ , man nennt diese Riemann-Fläche  $(\mathbb{D}, g)$  die HYPERBOLISCHE SCHEIBE. Für sie ist jeder winkelerhaltende Diffeomorphismus also längenerhalten.

## 35. Riemann'scher Abbildungssatz

**35.1 Riemann'scher Abbildungssatz.** *Jede 2-dimensionale, komplexe, einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit ist biholomorph zu  $\mathbb{D}$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $S^2$*

Dies ist eine Verallgemeinerung von (5.3).

**Ohne Beweis.** siehe [4, S.158].

Die in (24.31) konstruierte universelle Überlagerung  $\tilde{M}$  einer komplexen Mannigfaltigkeit  $M$  ist selbst eine komplexe Mannigfaltigkeit und die Überlagerungsabbildung ist lokal eine biholomorphe Abbildung. Das ist offensichtlich, denn die Kartenwechselabbildungen des kanonischen Atlases von  $\tilde{M}$  sind Einschränkungen jener von  $M$ .

Wegen (35.1) ist die universelle Überlagerung einer 2-dimensionalen, komplexen Mannigfaltigkeit  $S^2$ ,  $\mathbb{C}$  oder  $\mathbb{D}$ .

### 35.2 Die universelle Überlagerung der punktierten Ebene

Die Abbildung  $p$  von  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  nach  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $(r, \varphi) \xrightarrow{p} re^{i\varphi}$  ist eine Überlagerung. Da  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  einfach zusammenhängend ist, ist  $p$  zugleich eine universelle Überlagerung. Wir wollen nun auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  eine Riemann-Metrik finden, sodaß die Fußpunktabbildung eine Isometrie wird.

$$\begin{aligned} p'(r, \varphi)(s, \psi) &= \frac{\partial p}{\partial r} s + \frac{\partial p}{\partial \varphi} \psi = e^{i\varphi} s + r i e^{i\varphi} \psi \\ |(s, \psi)|_{(r, \varphi)} &:= |p'(r, \varphi)(s, \psi)|^2 = s^2 + r^2 \psi^2. \end{aligned}$$

Dies liefert die gewünschte Riemann-Metrik auf  $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ .

**Behauptung.** Die Abbildung  $h : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$(r, \varphi) \mapsto \ln(r) + i\varphi = (\ln(r), \varphi)$$

ist ein konformer Diffeomorphismus: Daß  $h$  ein Diffeomorphismus ist, ist klar. Bleibt noch zu zeigen, daß  $h$  auch konform ist. Es ist

$$h'(r, \varphi)(s, \psi) = \left(\frac{1}{r}s, \psi\right)$$

$$|h'(r, \varphi)(s, \psi)|^2 = \frac{s^2}{r^2} + \psi^2 = \frac{1}{r^2}(s^2 + r^2\psi^2) = \frac{1}{r^2}|(s, \psi)|_{(r, \varphi)}^2.$$

Also ist  $h$  konform, und damit ist  $p \circ h^{-1} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$  die universelle Überlagerung

$$\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, z = x + iy \mapsto (e^x, y) \mapsto e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z.$$

### 36. Uniformisierungssatz

Wir wollen nun Riemannsche Flächen  $X$  mittels ihrer universellen Überlagerungen  $\tilde{X}$  beschreiben. Dazu werden wir (24.18) verwenden:  $X \cong \tilde{X}/G$ , wobei  $G$  die Gruppe der Decktransformationen der universellen Überlagerung  $\tilde{X} \rightarrow X$  ist.

#### 36.1 Die Decktransformationen von $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$

Wir wollen die Decktransformationen der universellen Überlagerung  $h$  von  $\mathbb{C}$  nach  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  mit  $h : z \mapsto e^z$  bestimmen. Wir wissen bereits, daß

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ ist biholomorph}\}$$

$$= \text{Gruppe der Möbiustransformationen } z \mapsto az + b \text{ mit } a \neq 0.$$

Nun definieren wir für  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ :

$$z_1 \sim z_2 : \Leftrightarrow e^{z_1} = e^{z_2} \Leftrightarrow e^{x_1} e^{iy_1} = e^{x_2} e^{iy_2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 - y_2 \in 2\pi\mathbb{Z}).$$

Für ein  $g \in \{h \in \text{Aut}(\mathbb{C}) : h(z) \sim z\}$  können wir auch  $az + b$  schreiben. Sei  $az + b \sim z$  für alle  $z$ . Wenn  $z = 0$  ist, dann folgt  $b \sim 0$  und somit  $b \in 2i\pi\mathbb{Z}$ . Sei  $az + b \sim z$  für alle  $z$ . Dann folgt aus  $z = 1$ , daß  $a \sim 1$  ist, d.h. der Realteil von  $a$  ist gleich 1 und der Imaginärteil von  $a$  ist Element von  $2i\pi\mathbb{Z}$ . Wenn  $z = i$  ist, schließen wir äquivalent, daß  $ai = -\Im(a) + i\Re(a) \sim i$  ist, d.h.  $\Im(a) = 0 \Rightarrow a = 1$ . Somit haben wir also die Gruppe  $G$  der Decktransformationen zu obiger universeller Überlagerung gefunden:

$$G = \{z + 2i\pi k : k \in \mathbb{Z}\}.$$

**36.2 Uniformisierungssatz.** *Sei  $M$  eine 2-dimensionale, zusammenhängende, orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit. Dann ist  $M$  konform-isomorph zu  $\tilde{M}/G$ , wobei  $\tilde{M} \in \{S^2, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}$  und  $G$  eine Gruppe von Möbiustransformationen in  $\text{Aut}(\tilde{M})$  ist. Umgekehrt, ist  $G$  eine Gruppe von Möbiustransformationen auf  $M_1 \in \{S^2, \mathbb{C}, \mathbb{D}\}$ , welche STRIKT DISKONTINUIERLICH wirkt, d.h.  $g \neq \text{id} \Rightarrow \forall x \exists U(x) : U(x) \cap g(U(x)) = \emptyset$ , dann ist*

1.  $M_1/G$  eine Mannigfaltigkeit,
2. die Quotientenabbildung  $M_1 \rightarrow M_1/G$  eine Überlagerung,
3.  $G$  ist die Gruppe der Decktransformationen der Überlagerung.

**Beweis.** Das entscheidende Hilfsmittel ist der Riemannschen Abbildungssatzes (35.1). Also ist die nach (24.31) existierende universelle Überlagerung  $\tilde{M}$  einer der drei Räume  $S^2$ ,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{D}$  und nach (24.18) ist  $M$  isomorph zu  $\tilde{M}/G$ , wobei  $G$  die Gruppe der Decktransformationen ist, also eine Gruppe von Möbius-Transformationen die nach (24.18) strikt diskontinuierlich auf  $\tilde{M}$  wirkt. Umgekehrt liefert jede solche Gruppe  $G$  eine Überlagerung  $\tilde{M} \rightarrow \tilde{M}/G =: M$  nach (24.19).  $\square$

### 36.3 Die Automorphismengruppe einer Riemann-Fläche

Wie können wir nun  $\text{Aut}(M)$  bestimmen? Dazu verwenden wir Ideen, die wir bereits in (24.15) und (24.16) verwendet haben. Falls  $f \in \text{Aut}(M)$ , dann gibt es ein  $\tilde{f} \in \text{Aut}(\tilde{M})$ , sodaß folgendes Diagramm kommutiert.

$$\begin{array}{ccc} \tilde{M} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \tilde{M} \\ p \downarrow & & p \downarrow \\ \tilde{M}/G & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

Welche  $\tilde{f} \in \text{Aut}(\tilde{M})$  stammen aber von einem  $f \in \text{Aut}(M)$ ? Dies sind genau jene, bei denen man aus  $x_1 \sim x_2$  auf  $\tilde{f}(x_1) \sim \tilde{f}(x_2)$  schließen kann. Sei nun  $p \circ \tilde{f} = f \circ p$ , dann folgt für alle  $g \in G$ :

$$p \circ \tilde{f} \circ g = f \circ p \circ g = f \circ p = p \circ \tilde{f} \Rightarrow p \circ \tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1} = p \Rightarrow \tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1} \in G.$$

Analog folgern wir für  $\tilde{f}^{-1}$ , daß  $\tilde{f}^{-1} \circ g \circ \tilde{f} \in G$ . Wir definieren den NORMALISATOR von  $G$ :

$$\text{Norm}_{\text{Aut}(\tilde{M})}(G) := \{\tilde{f} \in \text{Aut}(\tilde{M}) : \tilde{f}G\tilde{f}^{-1} \subseteq G \text{ und } \tilde{f}^{-1}G\tilde{f} \subseteq G\}$$

Sei  $\tilde{f} \in \text{Norm}_{\text{Aut}(\tilde{M})}(G)$ , dann ist zu zeigen, daß  $\tilde{x}_1 \sim \tilde{x}_2 \Rightarrow \tilde{f}(\tilde{x}_1) \sim \tilde{f}(\tilde{x}_2)$ . Die Bedingung bedeutet aber: es existiert ein  $g \in G$  mit  $g(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$ . Wir definieren  $\bar{g} := \tilde{f} \circ g \circ \tilde{f}^{-1}$ . Dieses  $\bar{g}$  ist aber gewiß Element von  $G$ , da ja  $\tilde{f} \in \text{Norm}_{\text{Aut}(\tilde{M})}(G)$ . Also gilt:

$$\tilde{f}(\tilde{x}_2) = \tilde{f}(g(\tilde{x}_1)) = \bar{g}(\tilde{f}(\tilde{x}_1)) \Rightarrow \tilde{f}(\tilde{x}_2) \sim \tilde{f}(\tilde{x}_1),$$

d.h.  $\tilde{f}$  faktorisiert über eine Abbildung  $f : M \rightarrow M$  und  $\tilde{f}^{-1}$  faktorisiert über die Abbildung  $f^{-1} : M \rightarrow M$ . Somit ist

$$\text{Norm}_{\text{Aut}(M)}(G) = \{\tilde{f} \in \text{Aut}(\tilde{M}) : \tilde{f} \text{ sitzt über einem } f \in \text{Aut}(M)\}.$$

Wann liefern zwei  $\tilde{f}_1, \tilde{f}_2 \in \text{Norm}_{\text{Aut}(\tilde{M})}(G)$  die gleiche Abbildung  $f \in \text{Aut}(M)$ ?

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow p \circ \tilde{f}_1 &= f \circ p = p \circ \tilde{f}_2 \Leftrightarrow p \circ \tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2^{-1} = p \\ \Leftrightarrow g := \tilde{f}_1 \circ \tilde{f}_2^{-1} &\in G \Leftrightarrow \exists g \in G : \tilde{f}_1 = g \circ \tilde{f}_2. \end{aligned}$$

Es folgt also folgendes (siehe auch (24.14)-(24.16))

### 36.4 Lemma (Automorphismengruppe via universelle Überlagerung).

Sei  $M$  eine Riemann-Fläche,  $\tilde{M} \rightarrow M$  die universelle Überlagerung und  $G$  die Gruppe der Decktransformationen, dann gilt:

$$\text{Aut } M = \text{Norm}_{\text{Aut}(\tilde{M})}(G)/G. \quad \square$$

### 36.5 Beispiel

Wir betrachten  $M = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  und  $\tilde{M} = \mathbb{C} \xrightarrow{p=\exp} \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , mit

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\tilde{M}) &= \{az + b : a \neq 0 \text{ und } a, b \in \mathbb{C}\}, \text{ nach (34.5)} \\ \text{und } G &= \{z + 2ki\pi : k \in \mathbb{Z}\}, \text{ nach (36.1)}. \end{aligned}$$

Die Gruppe der Decktransformationen wird durch  $t : z \mapsto z + 2\pi i$  erzeugt. Wir wollen den Normalisator von  $G$  berechnen.

Sei  $\text{Norm}(G) \ni \tilde{f} : z \mapsto az + b = w$  mit der Inversen  $\tilde{f}^{-1} : w \mapsto \frac{w-b}{a}$ . Dann folgt:

$$\begin{aligned} (\tilde{f} \circ t \circ \tilde{f}^{-1})(z) &= a\left(\frac{z-b}{a} + 2\pi i\right) + b = z + 2\pi ia \Rightarrow \\ &\Rightarrow a \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\tilde{f}^{-1} \circ t \circ \tilde{f})(z) &= \frac{(az + b + 2\pi i) - b}{a} = z + t \frac{2\pi i}{a} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{1}{a} \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow a \in \{1, -1\} \Rightarrow \text{Norm}(G) = \{\pm z + b : b \in \mathbb{C}\}$$

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) &= \{e^z \mapsto e^{\pm z + b} : b \in \mathbb{C}\} = && \text{mit } e^b = c \\ &= \{e^z \mapsto e^{\pm z} \cdot c : c \neq 0\} \\ &= \{w \mapsto w^{\pm 1} \cdot c : c \neq 0\} \end{aligned}$$

## 64. Riemann-, Ricci- und Schnittkrümmung

Seien 2 Vektorfelder  $\xi$  und  $\eta$  im  $\mathbb{R}^n$  gegeben. Dann gilt für die übliche Ableitung des Vektorfelds  $\xi$  in Richtung  $\eta$ , die wir hier auch mit  $D_\eta \xi : x \mapsto \xi'(x)(\eta(x))$  bezeichnen wollen:

$$[D_\xi, D_\eta] := D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi = D_{[\xi, \eta]},$$

denn

$$\begin{aligned} (D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi)\left((\zeta^i)_{i=1}^m\right) &= (\xi(\eta(\zeta^i)) - \eta(\xi(\zeta^i)))_{i=1}^m \\ &= [\xi, \eta](\zeta^i)_{i=1}^m = D_{[\xi, \eta]}((\zeta^i)_{i=1}^m) \end{aligned}$$

### 64.1 Satz (Godazzi-Mainardi-Gleichung).

Sei  $M$  eine Hyperfläche im  $\mathbb{R}^n$  und seien  $\xi, \eta, \zeta$  Vektorfelder im  $\mathbb{R}^n$ , welche längs  $M$  tangential an  $M$  sind. Dann ist

1.  $\nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi, \eta]} \zeta = \langle L\eta, \zeta \rangle L\xi - \langle L\xi, \zeta \rangle L\eta,$
2.  $\nabla_\xi L\eta - \nabla_\eta L\xi = L[\xi, \eta].$

Die erste Gleichung wird auch als GAUSS-GLEICHUNG und die zweite als GODAZZI-MAINARDI-GLEICHUNG bezeichnet.

**Beweis.** Es ist

$$\begin{aligned}
0 &= D_\xi D_\eta \zeta - D_\eta D_\xi \zeta - D_{[\xi, \eta]} \zeta \stackrel{(62.2)}{=} \\
&= D_\xi (\nabla_\eta \zeta - \langle L\eta, \zeta \rangle \nu) - D_\eta (\nabla_\xi \zeta - \langle L\xi, \zeta \rangle \nu) - D_{[\xi, \eta]} \zeta \\
&= D_\xi \nabla_\eta \zeta - \xi(\langle L\eta, \zeta \rangle) \nu - \langle L\eta, \zeta \rangle D_\xi \nu \\
&\quad - D_\eta \nabla_\xi \zeta + \eta(\langle L\xi, \zeta \rangle) \nu + \langle L\xi, \zeta \rangle D_\eta \nu \\
&\quad - \nabla_{[\xi, \eta]} \zeta + \langle L[\xi, \eta], \zeta \rangle \nu \\
&= \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \langle L\xi, \nabla_\eta \zeta \rangle \nu - \xi(\langle L\eta, \zeta \rangle) \nu - \langle L\eta, \zeta \rangle L\xi \\
&\quad - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta + \langle L\eta, \nabla_\xi \zeta \rangle \nu + \eta(\langle L\xi, \zeta \rangle) \nu + \langle L\xi, \zeta \rangle L\eta \\
&\quad - \nabla_{[\xi, \eta]} \zeta + \langle L[\xi, \eta], \zeta \rangle \nu.
\end{aligned}$$

Der Tangentialanteil hiervon ist:

$$0 = \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi, \eta]} \zeta - \langle L\eta, \zeta \rangle L\xi + \langle L\xi, \zeta \rangle L\eta$$

Und der Normalanteil ist:

$$\begin{aligned}
0 &= -\langle \nabla_\eta \zeta, L\xi \rangle - \xi(\langle L\eta, \zeta \rangle) + \langle \nabla_\xi \zeta, L\eta \rangle + \eta(\langle L\xi, \zeta \rangle) + \langle L[\xi, \eta], \zeta \rangle \\
&= \left\langle -\nabla_\xi(L\eta) + \nabla_\eta(L\xi) + L[\xi, \eta], \zeta \right\rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

### 64.2 Definition (Riemann-Krümmung)

Die RIEMANN-KRÜMMUNG  $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow L(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$  einer Riemann-Mannigfaltigkeit ist definiert durch die linke Seite der Gauß-Gleichung:

$$R(\xi, \eta) := [\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]}.$$

Die Motivation hierfür ist, daß die rechte Seite auf  $\eta$  angewandt und ins innere Produkt mit  $\xi$  genommen für orthonormale Vektoren  $\xi$  und  $\eta$  gerade die Gaußkrümmung liefert:

$$\langle \langle L\eta, \eta \rangle L\xi - \langle L\xi, \eta \rangle L\eta, \xi \rangle = \langle L\eta, \eta \rangle \langle L\xi, \xi \rangle - \langle L\xi, \eta \rangle \langle L\eta, \xi \rangle = \det(L) = K.$$

### 64.3 Lemma (Die Riemann-Krümmung ist ein Tensorfeld).

Die Riemann-Krümmung ist ein 3-fach ko- und 1-fach kontravariantes Tensorfeld auf  $M$ , d.h.  $R \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$ .

**(Koordinatenfreier) Beweis.** Dazu muß man nur zeigen, daß die Abbildung  $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto R(\xi, \eta)(\zeta)$  in allen Variablen  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -homogen ist, vgl. mit dem Beweis von (31.10).

$$\begin{aligned}
R(f\xi, \eta) &= [\nabla_{f\xi}, \nabla_\eta] - \nabla_{[f\xi, \eta]} \\
&= [f\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{f[\xi, \eta] - \eta(f)\xi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (f\nabla_\xi)\nabla_\eta - \nabla_\eta(f\nabla_\xi) - f\nabla_{[\xi,\eta]} + \eta(f)\nabla_\xi \\
&= f\nabla_\xi\nabla_\eta - f\nabla_\eta\nabla_\xi - \eta(f)\nabla_\xi - f\nabla_{[\xi,\eta]} + \eta(f)\nabla_\xi \\
&= f([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi,\eta]}) + 0 \\
&= fR(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(\xi, \eta)(f\zeta) &= ([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi,\eta]})(f\zeta) \\
&= \nabla_\xi(f\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\zeta) - \nabla_\eta(f\nabla_\xi\zeta + \xi(f)\zeta) \\
&\quad - f\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta - [\xi, \eta](f)\zeta \\
&= f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta + \xi(f)\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\nabla_\xi\zeta + \xi(\eta(f))\zeta \\
&\quad - f\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \eta(f)\nabla_\xi\zeta - \xi(f)\nabla_\eta\zeta - \eta(\xi(f))\zeta \\
&\quad - f\nabla_{[\xi,\eta]}\zeta - \xi(\eta(f))\zeta + \eta(\xi(f))\zeta \\
&= f(\nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi,\eta]})\zeta \\
&= fR(\xi, \eta)(\zeta). \quad \square
\end{aligned}$$

**Koordinatenbeweis.**

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z$$

$$\begin{aligned}
&= \nabla_X \left( \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\
&\quad - \nabla_Y \left( \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\
&\quad - \nabla_{\sum_{i,j} \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}} Z \\
&= \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \nabla_X \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + X \left( \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \nabla_Y \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - Y \left( \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i,j} \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \sum_l X^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_i \left( \sum_k X \left( \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \right) Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X(Y^k) \right. \\
&+ \sum_{j,k} X(\Gamma_{j,k}^i) Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i X(Z^j) Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X(Y^k) \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \sum_l Y^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_i \left( \sum_k Y \left( \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \right) X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y(X^k) \right. \\
&+ \sum_{j,k} Y(\Gamma_{j,k}^i) Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Y(Z^j) X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y(X^k) \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j} \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \sum_l \left( Z^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&= \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \sum_l X^l \sum_p \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_i \left( \sum_k \sum_p X^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p} Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \right. \\
&+ \sum_{j,k} \sum_p X^p \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i \sum_p X^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} Y^k \\
&+ \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_i \left( \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \sum_l Y^l \sum_p \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_i \left( \sum_k \sum_p Y^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p} X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \right. \\
&+ \sum_{j,k} \sum_p Y^p \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i \sum_p Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} X^k \\
&+ \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j} \left( X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \sum_l \left( Z^l \sum_p \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,k,l,p} X^l Y^k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,k,l,p} X^l Y^k Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,k,p} X^p Y^k \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,k,l,p} X^k Y^l \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k Y^l Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_{i,k,p} X^k Y^p \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j,l,p} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_{i,j,l} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,l,p} X^l Y^k Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k Y^l Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,k,l,p} X^l Y^k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,l,p} X^k Y^l \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l,p} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&- \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&+ \sum_{i,k,p} X^p Y^k \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} X^k Y^p \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&= \sum_p \sum_{i,j,k} X^i Y^j Z^k \underbrace{\left( \frac{\partial \Gamma_{k,j}^p}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{k,i}^p}{\partial u^j} + \sum_l \left( \Gamma_{k,j}^l \Gamma_{i,l}^p - \Gamma_{k,i}^l \Gamma_{l,j}^p \right) \right)}_{=: R_{i,j,k}^p} \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&= \sum_p \sum_{i,j,k} X^i Y^j Z^k R_{i,j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \quad \square
\end{aligned}$$

#### 64.4 Bemerkung

In lokalen Koordinaten haben wir von

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k}^l du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes \frac{\partial}{\partial u^l} \\
\text{mit } R_{i,j,k}^l &= du^l \left( R \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{j,k}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{i,k}^l + \sum_{p=1}^m \left( \Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,p}^l - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,p}^l \right)
\end{aligned}$$

Beziehungsweise für  $R(\xi, \eta, \zeta, \chi) := \langle R(\xi, \eta)\zeta, \chi \rangle$

$$\begin{aligned}
R &= \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k,l} du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes du^l \\
\text{mit } R_{i,j,k,l} &= \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \frac{\partial}{\partial u^k} \middle| \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle \\
&= \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l} \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) \\
&\quad + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q} (\Gamma_{i,k,q} \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k,q} \Gamma_{i,l,p}).
\end{aligned}$$

**Beweis.** Wir rechnen wie folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^m R_{i,j,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} &= R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \frac{\partial}{\partial u^k} := \left( \left[ \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \right] - \nabla_{\left[ \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right]} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&\stackrel{(62.6)}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \left( \sum_{l=1}^m \Gamma_{j,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \left( \sum_{l=1}^m \Gamma_{i,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) + 0 \\
&\stackrel{(62.5)}{=} \sum_{l=1}^m \left( \Gamma_{j,k}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&\quad - \sum_{l=1}^m \left( \Gamma_{i,k}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&\stackrel{(62.6)}{=} \sum_{l=1}^m \left( \Gamma_{j,k}^l \sum_{p=1}^m \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&\quad - \sum_{l=1}^m \left( \Gamma_{i,k}^l \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&= \sum_{l=1}^m \left( \sum_{p=1}^m (\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l}^p - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l}^p) + \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{j,k}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{i,k}^l \right) \frac{\partial}{\partial u^l}.
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$R_{i,j,k}^l = \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^l) - \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^l) + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l}^p - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l}^p).$$

Nun berechnen wir  $R_{i,j,k,l} := \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l}$ :

$$\begin{aligned}
\sum_{p=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^p) g_{p,l} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p g_{p,l} \right) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^i} (g_{p,l}) \\
&\stackrel{(62.6)}{=} \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k,l}) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p (\Gamma_{i,p,l} + \Gamma_{i,l,p}).
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
R_{i,j,k,l} &:= \langle R(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}) \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \rangle = \langle \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^p}, \frac{\partial}{\partial u^l} \rangle = \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l} \\
&= \sum_{p=1}^m \left( \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^p) - \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^p) + \sum_{q=1}^m (\Gamma_{j,k}^q \Gamma_{i,q}^p - \Gamma_{i,k}^q \Gamma_{j,q}^p) \right) g_{p,l} \\
&= \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k,l}) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p (\underbrace{\Gamma_{i,p,l}}_{(1)} + \underbrace{\Gamma_{i,l,p}}_{(2)}) - \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k,l}) + \sum_{p=1}^m \Gamma_{i,k}^p (\underbrace{\Gamma_{j,p,l}}_{(3)} + \underbrace{\Gamma_{j,l,p}}_{(4)}) \\
&\quad + \sum_{q=1}^m (\underbrace{\Gamma_{j,k}^q \Gamma_{i,q,l}}_{(1)} - \underbrace{\Gamma_{i,k}^q \Gamma_{j,q,l}}_{(3)}) \\
&\stackrel{(62.6)}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^i} (\frac{\partial}{\partial u^j} g_{k,l} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{j,k}) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^j} (\frac{\partial}{\partial u^i} g_{k,l} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{l,i} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{i,k}) \\
&\quad + \sum_{p=1}^m (\underbrace{\Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l,p}}_{(4)} - \underbrace{\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l,p}}_{(2)}) \\
&= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) \\
&\quad + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q} (\Gamma_{i,k,q} \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k,q} \Gamma_{i,l,p}). \quad \square
\end{aligned}$$

### 64.5 Lemma (Symmetrie der Riemann-Krümmung).

Die Riemann-Krümmung erfüllt folgende Identitäten:

1.  $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$
2.  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle = 0$
3.  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$
4.  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
5.  $(\nabla_Z R)(X, Y, W) + (\nabla_X R)(Y, Z, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, W) = 0.$

Die Gleichungen (4) und (5) heißen 1.te und 2.te BIANCHI IDENTITÄT.

#### Beweis.

(1) ist klar wegen der Definition  $R(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$ .

(2) ist äquivalent zu  $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$  für alle  $X, Y, Z$ . Es ist:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= \underbrace{\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle}_{X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle} - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\ &= X \left( \frac{1}{2} Y \langle Z, Z \rangle \right) - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle - Y \left( \frac{1}{2} X \langle Z, Z \rangle \right) + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle - 0 - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle = 0 \end{aligned}$$

(4) Nach (62.4) gilt  $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$  und durch Anwenden von  $\nabla_X$  erhalten wir:

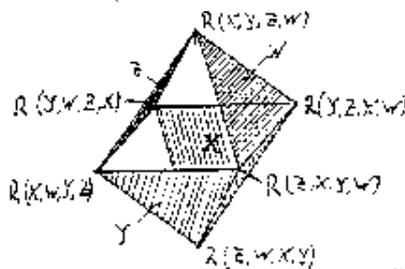
$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Y, Z]} X = \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]} X = [X, [Y, Z]]$$

Der zyklische Ausdruck läßt sich nun wie folgt umformen:

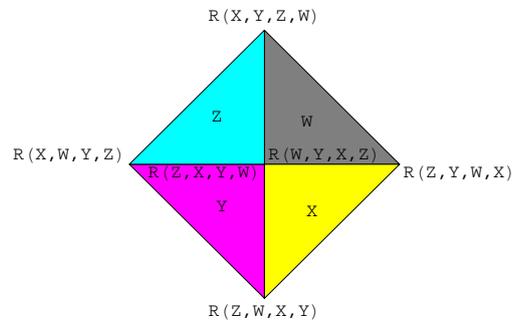
$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \\ &= \underbrace{\nabla_X \nabla_Y Z}_{(1)} - \underbrace{\nabla_Y \nabla_X Z}_{(2)} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]} Z}_{(3)} \\ &\quad + \underbrace{\nabla_Y \nabla_Z X}_{(2)} - \underbrace{\nabla_Z \nabla_Y X}_{(3)} - \underbrace{\nabla_{[Y, Z]} X}_{(1)} \\ &\quad + \underbrace{\nabla_Z \nabla_X Y}_{(3)} - \underbrace{\nabla_X \nabla_Z Y}_{(1)} - \underbrace{\nabla_{[Z, X]} Y}_{(2)} \\ &= \underbrace{[X, [Y, Z]]}_{(1)} + \underbrace{[Y, [Z, X]]}_{(2)} + \underbrace{[Z, [X, Y]]}_{(3)} \\ &= 0 \quad (\text{wegen der Jacobi-Identität}). \end{aligned}$$

(3) folgt rein algebraisch aus (1), (2) und (4):

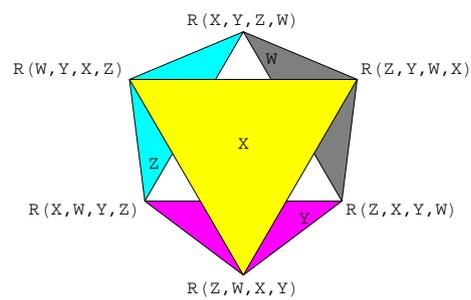
Man setzt  $R(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle$ . Nun betrachtet man einen Oktaeder und bezeichne 4 der Seitenflächen (die sich nur in Ecken schneiden) mit  $X, Y, Z, W$ .



Die Ecken des Oktaeders, welche z.B. der Schnitt der Flächen  $X$  und  $Y$  ist, wird mit  $R(Z, W, X, Y)$  bezeichnet, da von dieser Ecke aus betrachtet die Flächen  $X, W, Y, Z$  aufeinander folgen. Wegen (1) und (2) ist es egal, ob man von  $X$  oder von  $Y$  aus zu zählen beginnt. Nun beachte man, daß die Summen der Ecken der Dreiecke  $X, Y, Z, W$  wegen (4) Null sind.



Zählt man diese Summen für die Dreiecke  $Z$  und  $W$  zusammen und zieht jene für  $X$  und  $Y$  ab, so erhält man, daß das Doppelte von der Differenz aus der Ecke  $W \cap Z$  und der Ecke  $X \cap Y$  Null ist, d.h. (3) gilt.



In Detail bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
(+)\quad & \underbrace{R(X, Y, Z, W)}_{(1)} + \underbrace{R(Y, Z, X, W)}_{(2)} + \underbrace{R(Z, X, Y, W)}_{(3)} = 0 \\
(-)\quad & \underbrace{R(W, X, Y, Z)}_{(4)} + \underbrace{R(X, Y, W, Z)}_{(1)} + \underbrace{R(Y, W, X, Z)}_{(5)} = 0 \\
(-)\quad & \underbrace{R(Z, W, X, Y)}_{(6)} + \underbrace{R(W, X, Z, Y)}_{(4)} + \underbrace{R(X, Z, W, Y)}_{(3)} = 0 \\
(+)\quad & \underbrace{R(Y, Z, W, X)}_{(2)} + \underbrace{R(Z, W, Y, X)}_{(6)} + \underbrace{R(W, Y, X, Z)}_{(5)} = 0 \\
& \Rightarrow \underbrace{2R(X, Y, Z, W)}_{(1)} - \underbrace{2R(Z, W, X, Y)}_{(6)} = 0
\end{aligned}$$

(5) Um diesem Punkt überhaupt Sinn zu geben, muß man  $\nabla_Z$  auf Tensorfelder ausdehnen. Das geht mittels Produkt-Regel, i.e.

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z R)(X, Y, W) &:= \\
&= \nabla_Z(R(X, Y)W) - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W - R(X, Y)\nabla_Z W \\
&= \nabla_Z(R(X, Y)W) + R(Y, \nabla_Z X)W - R(X, \nabla_Y Z + [Z, Y])W - R(X, Y)\nabla_Z W.
\end{aligned}$$

Mit  $\sum_{\text{zykl.}}$  bezeichnen wir die zyklische Summe bezüglich der Variablen  $X, Y$  und  $Z$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}
& \sum_{\text{zykl.}} (\nabla_Z R)(X, Y, W) = \\
&= - \sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z(R(X, Y)W) - \sum_{\text{zykl.}} R(X, -[Y, Z])W - \sum_{\text{zykl.}} R(X, Y)\nabla_Z W \\
&= \sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z \left( \underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]}_{(1)} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]}}_{(4)} \right) W \\
&\quad + \sum_{\text{zykl.}} \left( \underbrace{[\nabla_X, \nabla_{[Y, Z]}]}_{(4)} W - \underbrace{\nabla_{[X, [Y, Z]]}}_{(3)} W \right) \\
&\quad - \sum_{\text{zykl.}} \left( \underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]\nabla_Z}_{(2)} W - \underbrace{\nabla_{[X, Y]}\nabla_Z}_{(4)} W \right) \\
&= - \underbrace{\nabla_{\sum_{\text{zykl.}} [X, [Y, Z]]}}_{(3)} W \\
&\quad + \sum_{\text{zykl.}} \left( \underbrace{\nabla_Z[\nabla_X, \nabla_Y]}_{(1)} W - \underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]\nabla_Z}_{(2)} W \right) + \underbrace{0}_{(4)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \left( \sum_{\text{zykl.}} [[\nabla_X, \nabla_Y], \nabla_Z] \right) W \\
&= 0 \quad \text{wegen der Jacobi-Identität.} \quad \square
\end{aligned}$$

**64.6 Folgerung (Polarisierungsformel).** Für die Riemannkrümmung gilt:

$$\begin{aligned}
4! R(X, Y, Z, W) &= \\
&= -R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) + R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \\
&\quad + R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) - R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \\
&\quad + R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \\
&\quad - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y)
\end{aligned}$$

**Beweis.** Es ist

$$\begin{aligned}
(6) \quad R(X, Y+Z, Y+Z, X) - R(X, Y-Z, Y-Z, X) &= \\
&= 2 \left( R(X, Y, Z, X) + R(X, Z, Y, X) \right) \\
&\stackrel{(1,2)}{=} 2 \left( R(X, Y, Z, X) + R(Z, X, X, Y) \right) \\
&\stackrel{(3)}{=} 4 R(X, Y, Z, X)
\end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned}
(7) \quad R(X+W, Y, Z, X+W) - R(X-W, Y, Z, X-W) &= \\
&= 2 \left( R(X, Y, Z, W) + R(W, Y, Z, X) \right)
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
(8) \quad R(Y, Z, X, W) &= \\
&\stackrel{(1,2)}{=} R(Z, Y, W, X) \\
&\stackrel{(7)}{=} -R(X, Y, W, Z) + \frac{1}{2} \left( R(Z+X, Y, W, Z+X) - R(Z-X, Y, W, Z-X) \right) \\
&\stackrel{(2,6)}{=} R(X, Y, Z, W) \\
&\quad + \frac{1}{8} \left( R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) - R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \right. \\
&\quad \left. - R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) + R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(9) \quad R(Z, X, Y, W) &= \\
&\stackrel{(2)}{=} -R(Z, X, W, Y) \\
&\stackrel{(7)}{=} R(Y, X, W, Z) - \frac{1}{2} \left( R(Z+Y, X, W, Z+Y) - R(Z-Y, X, W, Z-Y) \right) \\
&\stackrel{(1,2,6)}{=} R(X, Y, Z, W) \\
&\quad - \frac{1}{8} \left( R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \right. \\
&\quad \left. - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y) \right)
\end{aligned}$$

und damit

**64.7 Bemerkung.** Wir wollen nun die Ausdrücke der Form  $R(X, Y, Y, X)$  in der Polarisierungsformel (64.6) weiter untersuchen. Sei dazu

$$\begin{aligned}
X' &= aX + bY \\
Y' &= cX + dY \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wegen der Schiefsymmetrie (1) und (2) in (64.5) ist

$$R(X', Y', Y', X') = \det(A) R(X, Y, Y', X') = \det(A)^2 R(X, Y, Y, X).$$

Das gleiche Transformationsverhalten hat auch  $|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2$ , da dies das Quadrat der Fläche des von  $X$  und  $Y$  erzeugten Parallelogramms ist, siehe dazu (53.4). Folglich ist der Ausdruck

$$\frac{R(X, Y, Y, X)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

unabhängig von der Wahl eines Erzeugendensystems des von  $X$  und  $Y$  erzeugten 2-dimensionalen Teilraums  $F$  von  $T_p M$ . Wir nennen diese Zahl die **SCHNITTKRÜMMUNG** von  $F$  und bezeichnen sie mit  $K(F)$ . Die Polarisierungsformel zeigt, daß die Riemannkrümmung sich aus der Schnittkrümmung berechnen läßt.

### 64.8 Satz (Gauß-Krümmung versus Schnitt-Krümmung).

*Für jede Riemann-Fläche  $M$  ist die Gaußkrümmung ident mit der Schnittkrümmung (des ganzen 2-dimensionalen Tangentialraums).*

**Beweis für Hyperflächen im  $\mathbb{R}^3$ .** Sei  $(\xi, \eta)$  eine Orthonormalbasis von  $T_x M$ . Dann ist

$$\begin{aligned}
K(T_x M) &= \langle R_x(\xi_x, \eta_x)\eta_x, \xi_x \rangle \\
&\stackrel{(64.1)}{=} \langle \langle L_x \eta_x, \eta_x \rangle L_x \xi_x - \langle L_x \xi_x, \eta_x \rangle L_x \eta_x, \xi_x \rangle \\
&= \langle L_x \eta_x, \eta_x \rangle \langle L_x \xi_x, \xi_x \rangle - \langle L_x \xi_x, \eta_x \rangle \langle L_x \eta_x, \xi_x \rangle \\
&= \det(L_x) = K_x
\end{aligned}$$

**Beweis für abstrakte Riemann-Flächen.**

Es seien  $(u^1, u^2)$  lokale Koordinaten auf  $M$ . Dann ist nach (64.4)

$$\begin{aligned}
D^2 K(T_x M) &= D^2 \frac{R\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^1}\right)}{\left|\frac{\partial}{\partial u^1}\right|^2 \left|\frac{\partial}{\partial u^2}\right|^2 - \left|\left\langle \frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2} \right\rangle\right|^2} = R_{1,2,2,1} \\
&\stackrel{(64.4)}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1} g_{2,2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2} g_{1,1} \right) \\
&\quad + g^{1,1} (\Gamma_{1,2,1} \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,1} \Gamma_{1,1,1}) \\
&\quad + g^{1,2} (\Gamma_{1,2,2} \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,2} \Gamma_{1,1,1}) \\
&\quad + g^{2,1} (\Gamma_{1,2,1} \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,1} \Gamma_{1,1,2}) \\
&\quad + g^{2,2} (\Gamma_{1,2,2} \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,2} \Gamma_{1,1,2}) \\
&\stackrel{(62.6)}{=} \frac{1}{2} (F_{1,2} - G_{1,1} + F_{2,1} - E_{2,2}) \\
&\quad + \frac{G}{D^2} (E_2 E_2 - (2F_2 - G_1) E_1) \\
&\quad - \frac{F}{D^2} (G_1 E_2 - G_2 E_1) \\
&\quad - \frac{F}{D^2} (E_2 G_1 - (2F_2 - G_1)(2F_1 - E_2)) \\
&\quad + \frac{E}{D^2} (G_1 G_1 - G_2(2F_1 - E_2)) \\
&= \frac{E}{4D^2} (E_2 G_2 - 2F_1 G_2 + G_1^2) \\
&\quad + \frac{F}{4D^2} (E_1 G_2 - E_2 G_1 - 2E_2 F_2 + 4F_1 F_2 - 2F_1 G_1) \\
&\quad + \frac{G}{4D^2} (E_1 G_1 - 2E_1 F_2 + E_2^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} (E_{2,2} - 2F_{1,2} + G_{1,1}) \\
&\stackrel{(53.7)}{=} D^2 K
\end{aligned}$$

Oder etwas anders gerechnet:

$$\begin{aligned}
R_{i,j,k,l} &\stackrel{(64.4)}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) \\
&\quad + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l,p}) \\
R_{1,2,2,1} &\stackrel{(64.4)}{=} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1} g_{2,2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2} g_{1,1} \right) \\
&\quad + (\Gamma_{1,2}^1 \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2}^1 \Gamma_{1,1,1}) \\
&\quad + (\Gamma_{1,2}^2 \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2}^2 \Gamma_{1,1,2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \stackrel{(62.6)}{=} \frac{1}{2} (F_{1,2} - G_{1,1} + F_{2,1} - E_{2,2}) \\
& + \frac{E_2 G - G_1 F}{2D^2} \cdot \frac{E_2}{2} \\
& - \frac{2 F_2 G - G_1 G - G_2 F}{2D^2} \cdot \frac{E_1}{2} \\
& + \frac{-E_2 F + G_1 E}{2D^2} \cdot \frac{G_1}{2} \\
& - \frac{-2 F_2 F + G_1 F + G_2 E}{2D^2} \cdot \frac{2 F_1 - E_2}{2} \\
& = \frac{E}{4D^2} (E_2 G_2 - 2F_1 G_2 + G_1^2) \\
& + \frac{F}{D^2} (E_1 G_2 - E_2 G_1 - 2E_2 F_2 + 4F_1 F_2 - 2F_1 G_1) \\
& + \frac{G}{D^2} (E_1 G_1 - 2E_1 F_2 + E_2^2) \\
& - \frac{1}{2} (E_{2,2} - 2F_{1,2} + G_{1,1}) \\
& \stackrel{(53.7)}{=} D^2 K. \quad \square
\end{aligned}$$

### 64.9 Definition (Normalkoordinaten)

Unter RIEMANNSCHEN NORMALKOORDINATEN versteht man die Parametrisierung

$$\varphi : (u^1, \dots, u^m) \mapsto \exp_p \left( \sum_{i=1}^m u^i X_i \right)$$

für eine Orthonormalbasis  $(X_1, \dots, X_m)$  von  $T_p M$ .

**64.10 Lemma (Christoffelsymbole in Normalkoordinaten).** *In Riemannschen Normalkoordinaten verschwinden alle Christoffelsymbole bei  $p$ .*

**Beweis.** Offensichtlich gilt

$$g_{i,j}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle(p) = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Die radialen Geodäten  $t \mapsto \exp_p(tX)$  erfüllen die Geodäten-Gleichung

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0.$$

Für  $u(t) := tX_j$  gilt wegen  $u^k(t) = \delta_j^k t$  somit  $\Gamma_{j,j}^k(p) = 0$ . Für  $u(t) := t(X_i + X_j)$  folgt analog  $\Gamma_{i,i}^k + \Gamma_{i,j}^k + \Gamma_{j,i}^k + \Gamma_{j,j}^k = 0$  und da  $\Gamma_{i,j}^k$  symmetrisch in  $(i, j)$  ist, ist  $\Gamma_p = 0$   $\square$

**64.11 Lemma.** *Sei  $M$  eine Riemann-Mannigfaltigkeit und  $F < T_x M$  ein 2-dimensionaler Teilraum. Dann ist die Schnittkrümmung  $K(F)$  genau die Gauß-Krümmung der Fläche die lokal durch  $\exp(F)$  gegeben ist.*

**Beweis.** Wegen (64.8) genügt es zu zeigen, daß die Riemann-Krümmung  $R_N$  der Fläche  $N$  mit der Riemann-Krümmung  $R_M$  auf  $M$  übereinstimmt, wobei  $N$  durch  $(t, s) \mapsto \exp_p(tX_p + sY_p)$  parametrisiert wird und die von  $M$  induzierte Metrik trägt.

Dazu wählt man Riemann-Normalkoordinaten, d.h. die Parametrisierung  $\varphi : (u^1, \dots, u^m) \mapsto \exp_p(\sum_{i=1}^m u^i X_i)$  für eine Orthonormalbasis  $(X_1, \dots, X_m)$  des Tangentialraums  $T_p M$ . Dann verschwinden nach (64.10) alle Christoffelsymbole bei  $p$ . Da die Koeffizientenfunktionen  $g_{i,j}$  für  $M$  und  $N$  übereinstimmen, gilt das auch für

$$R_{i,j,k,l} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial^j \partial^l} g_{i,k} + \frac{\partial^2}{\partial^i \partial^k} g_{j,l} - \frac{\partial^2}{\partial^j \partial^k} g_{i,l} - \frac{\partial^2}{\partial^i \partial^l} g_{j,k} \right) + 0. \quad \square$$

**64.12 Satz (Ungekrümmte Räume).** *Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind äquivalent:*

1.  $R = 0$ .
2.  $M$  ist lokal isometrisch zum Euklidischen Raum.
3. Der Paralleltransport ist lokal wegunabhängig.

Der Punkt (3) ist global nicht allgemein gültig wie das Möbiusband mit flacher Metrik zeigt.

**Beweis.** ( $1 \Rightarrow 3$ ) Indem wir eine Karte verwenden, können wir annehmen, daß  $M$  eine offene Umgebung von  $0$  in  $\mathbb{R}^m$  ist, allerdings mit einer allgemeinen Riemann-Metrik  $g$ . Wir müssen zu gegebenem Anfangswert  $X_0$  ein Vektorfeld  $X$  finden, welches längs jeder Kurve parallel ist. Dazu genügt es, daß  $\nabla_{\partial_i} X = 0$  für alle  $i = 1, \dots, m$  ist. Zuerst finden wir ein längs der  $u^1$ -Achse paralleles Vektorfeld  $u^1 \mapsto X(u^1, 0, \dots, 0)$ . Zu jedem  $u^1$  finden wir längs der Kurve  $u^2 \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$  ein paralleles Vektorfeld  $u^2 \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$  mit Anfangswert  $X(u^1, 0, \dots, 0)$ . Und somit erhalten wir ein Vektorfeld  $(u^1, u^2) \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$  längs der 2-Fläche  $\psi : (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ . Dieses erfüllt:  $\nabla_{\partial_2} X = 0$  längs  $\psi$  und  $\nabla_{\partial_1} X = 0$  längs  $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$ . Es gilt  $\nabla_{\partial_1} \nabla_{\partial_2} X - \nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} X = R(\partial_1, \partial_2)X = 0$ , da  $[\partial_s, \partial_t] = 0$  ist, weil die Flüsse  $t \mapsto (t, s)$  und  $s \mapsto (t, s)$  miteinander kommutieren. Somit ist  $\nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} X = 0$ , d.h.  $\nabla_{\partial_1} X$  ist parallel längs  $u^2 \mapsto \psi(u^1, u^2)$ . Aus  $\nabla_{\partial_1} X = 0$  längs  $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$  folgt  $\nabla_{\partial_1} X = 0$  längs  $\psi$ . Es ist also  $X$  parallel längs aller Kurven in der 2-Fläche  $\psi$ .

Nun kann man obigen Prozeß fortsetzen, um das gewünschte parallele Vektorfeld  $X$  zu erhalten. Dies zeigt, daß der Paralleltransport wegunabhängig ist.

( $3 \Rightarrow 2$ ) Wählt man als Anfangswert die Vektoren einer Basis von  $T_0 \mathbb{R}^m$ , so erhält man parallele Vektorfelder  $X_i$ , welche punktweise eine Basis bilden. Für diese gilt  $[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0$ . Diese können integriert werden, um eine Karte  $\varphi$  zu erhalten, welche  $\varphi_i = X_i$  erfüllt, siehe (29.12). In dieser Karte hat die Riemann-Metrik dann aber Koeffizienten  $\delta_{i,j}$ , d.h.  $\varphi$  ist eine lokale Isometrie zwischen dem flachen  $\mathbb{R}^m$  und  $M$ .

( $2 \Rightarrow 1$ ) Da die kovariante Ableitung und somit die Riemann-Krümmung eine intrinsische Größe ist, also nur von der Riemann-Metrik abhängt, genügt es  $R$  für den Euklidischen Raum zu berechnen, dort ist aber  $R = 0$  wegen der Vorbemerkung zu (64.1).  $\square$

**64.13 Definition (Krümmungen)**

Unter der RICCI-KRÜMMUNG einer Riemann-Mannigfaltigkeit versteht man

$$\text{Ricci}(X, Y) = \text{Spur}(Z \mapsto R(X, Z)(Y)).$$

In lokalen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \text{Ricci}\left(\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}\right) &= \\ &= \sum_{i,j} X^i Y^j \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\ &= \sum_{i,j} X^i Y^j \sum_k \underbrace{\left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k}\right) \frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right\rangle}_{R_{i,k,j,k}} \\ &= \sum_{i,j,k} X^i Y^j \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} g_{k,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{k,j} + \frac{\partial^2}{\partial u^k \partial u^k} g_{i,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^k \partial u^j} g_{k,i} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q} (\Gamma_{i,j,q} \Gamma_{k,p,k} - \Gamma_{k,j,q} \Gamma_{i,k,p}) \right). \end{aligned}$$

Unter der SKALARKRÜMMUNG versteht man  $\text{Spur}_g(\xi \mapsto (\text{Ricci}(\xi, \cdot))^b)$ , wobei

$$T_x M \xrightarrow{\text{Ricci}_x} (T_x M)^* \xrightarrow{\cong} T_x M.$$

Beachte, daß dies wegen der Symmetrieeigenschaften (64.6) alle nicht trivialen Spuren sind, welche man aus der Riemannkrümmung bilden kann.

**65. Rückblick auf Krümmungen**

Bei ebenen Kurven, haben wir die KRÜMMUNG als die Kraft interpretiert, die notwendig ist, um einen Massenpunkt mit konstanter skalarer Geschwindigkeit auf einer Kurve zu halten.

Bei Hyperflächen im  $\mathbb{R}^3$  haben wir zuerst die NORMALKRÜMMUNG einer Fläche in Richtung  $\xi$  als Krümmung der Schnittkurve mit der, von der Flächennormale und  $\xi$  aufgespannten Ebene kennengelernt. Dies ist gleichzeitig die Krümmung der Geodäte in Richtung  $\xi$ , siehe (52.4). Die kritische Punkte der Normalkrümmung sind die HAUPTKRÜMMUNGEN, deren Produkt die GAUSS-KRÜMMUNG ist.

Bei einer allgemeinen Riemann-Mannigfaltigkeit kann die SCHNITTKRÜMMUNG als die Gauß-Krümmung einer 2-dimensionalen Fläche, welche durch die Exponentialabbildung parametrisiert wird, aufgefaßt werden. Die Riemann-Krümmung ist schließlich das zur Schnittkrümmung gehörige Tensorfeld (i.e. 4-lineare Abbildung).

## VI. Differentialformen

In diesem Kapitel werden wir 1-Formen, wie wir sie in vorhergehenden Kapitel behandelt haben, zu Differentialformen höheren Grades (kurz:  $n$ -Formen) verallgemeinern. Nach einem der Motivation dienenden Abschnitt stellen wir die nötige multilineare Algebra zusammen, und verkleben die damit aus den Tangential- und Kotangential-Räumen konstruierten Tensorräume zu Tensorbündel. Als Schnitte der Bündel alternierender Tensoren erhalten wir die Differentialformen. Wir behandeln die wichtigsten Operationen auf ihnen: Die äußere Ableitung, die Lieableitung und den Einsetzungshomomorphismus. Insbesondere schauen wir uns das für Riemann-Mannigfaltigkeiten genauer an. Als Anwendung reißen wir die De Rham Kohomologie an.

### 37. Motivation

#### 37.1 Die Riemann-Metrik als Tensorfeld

In (32.2) hatte wir die Riemann-Metrik als eine Abbildung definiert, die jedem  $x \in M$  eine Bilinearform  $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  zuordnet, und zwar so, daß  $x \mapsto g_x(\xi_x, \eta_x)$ ,  $M \rightarrow \mathbb{R}$  glatt ist für je zwei glatte Vektorfelder  $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ . Schreiben wir die beiden Vektorfelder mittels lokaler Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m)$  als  $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$  und  $\eta = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ , so erhalten wir

$$g_x(\xi_x, \eta_x) = \sum_{i,j} \xi_x^i \eta_x^j g_x \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_{i,j} du^i(\xi) du^j(\eta) g_{i,j}(x),$$

wobei wir  $g_{i,j}(x) := g_x \left( \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right)$  gesetzt haben. Die Abbildung  $(\xi_x, \eta_x) \mapsto du^i(\xi) \cdot du^j(\eta)$  ist eine bilineare Abbildung  $T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ , die wir mit  $du^i \otimes du^j$  bezeichnen. Also gilt lokal

$$g = \sum_{i,j} g_{i,j} du^i \otimes du^j$$

#### 37.2 Hessische Form

Sei  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion mit lokalem Extremum bei  $x$ , dann ist  $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$  die Nullabbildung. Um umgekehrt schließen zu können benötigen wir die 2.Ableitung: Sei  $M$  eine offene Teilmenge des  $\mathbb{R}^m$  oder eine Teilmannigfaltigkeit und

$f$  eine Erweiterung auf eine offene Umgebung.

$$M \times \mathbb{R}^M = TM \xrightarrow{Tf} T\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

$$Tf(x, v) = (f(x), f'(x)(v))$$

$$M \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = T^2M = T(TM) \xrightarrow{T^2f} T^2\mathbb{R} = \mathbb{R}^4$$

$$T^2f(x, v; y, w) = \left( f(x), f'(x)(v), f'(x)(y), f''(x)(v, y) + f'(x)(w) \right)$$

Im  $\mathbb{R}^n$  ist  $\text{pr}_4(T^2f(x, v; y, 0)) = f''(x)(v, y)$ , falls  $(x, v; y, 0)$  im 2. Tangentialraum der Mannigfaltigkeit liegt.

### 37.3 Beispiel

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} :$$

$$TS^1 = \{(x, v) \in (\mathbb{R}^2)^2 : |x| = 1, \langle x, v \rangle = 0\}$$

$$T^2S^1 = \{(x, v; y, w) \in (\mathbb{R}^2)^4 : |x| = 1, \langle x, v \rangle = \langle x, y \rangle = 0, \\ \langle y, v \rangle + \langle x, w \rangle = 0\}$$

Da  $v \perp x$  und  $y \perp x$  ist, ist  $(x, v; y, 0) \notin T^2S^1$ , d.h. auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit läßt sich  $f''(x) : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}$  nicht sinnvoll definieren.

Falls  $T_xf = 0$ , so ist dies doch möglich. Sei  $\xi_x, \eta_x \in T_xM$ , dann definieren wir  $f''(x)(\xi_x, \eta_x) := \eta_x(\xi(f))$ , wobei  $\xi$  ein Vektorfeld mit  $\xi(x) = \xi_x$  sei. Schreiben wir  $\xi_x$  und  $\eta_x$  in lokalen Koordinaten, d.h.  $\xi_x = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$  bzw.  $\eta_x = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ , so ergibt sich:

$$\xi(f) = \sum_i \xi^i \frac{\partial f}{\partial u^i}$$

$$\begin{aligned} \eta_x(\xi(f)) &= \left( \sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \left( \left( \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) (f) \right) \\ &= \sum_j \eta^j \sum_i \frac{\partial}{\partial u^j} \left( \left( \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) (f) \right) = \sum_j \eta^j \sum_i \frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i} f \\ &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i}, \quad \text{da } \frac{\partial f}{\partial u^i} = 0. \end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, daß obige Definition von der Fortsetzung unabhängig ist und in lokalen Koordinaten die übliche 2. Ableitung liefert, falls  $f'(x) = 0$ .

Es ist also  $f''(x) : T_xM \times T_xM \rightarrow \mathbb{R}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} f''(x)(\xi, \eta) &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} = \sum_{i,j} du^i(\xi) du^j(\eta) \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} \\ &= \left( \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} du^i \otimes du^j \right) (\xi, \eta). \end{aligned}$$

Demnach ist  $f''(x) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} du^i \otimes du^j$ . Wie transformiert sich dieser Ausdruck beim Wechsel von Koordinaten  $u^i$  zu neuen Koordinaten  $v^j$ ? Wir haben  $dv^i = \sum_j \frac{\partial v^i}{\partial u^j} du^j$  und  $\frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial v^k}$ . Also ist  $\frac{\partial}{\partial u^j}(f) = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial v^k}$  und

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}(f) &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \frac{\partial}{\partial u^j}(f) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial v^k} \right) \\ &= \sum_l \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial v^l} \left( \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial v^k} \right) \\ &= \sum_{l,k} \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial v^l} \left( \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial v^k} + \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^l \partial v^k} \right). \end{aligned}$$

Somit ist

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} du^i \otimes du^j = \sum_{l,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v^l \partial v^k} dv^l \otimes dv^k + \sum_{i,j} \left( \sum_k \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j} \right) \frac{\partial f}{\partial v^k} du^i \otimes du^j,$$

und der zweite Summand verschwindet in  $x$ , da  $\frac{\partial f}{\partial v^k}|_x = 0$ .

### 37.4 Exakte 1-Formen

Für eine glatte Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , wobei  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  offen sei, ist  $f' : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  glatt. Natürlich interessiert man sich dafür, wann die Umkehrung gilt, also wann zu einer 1-Form  $\omega : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  eine Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  existiert, sodaß  $\omega = f'$ , ein solches  $\omega$  nennt man EXAKTE 1-FORM. Der Satz von Frobenius liefert eine Bedingung: Lokal existiert so ein  $f$  genau dann wenn  $d\omega(x)(v_1, v_2) = 0 \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$ , wobei  $2d\omega(x)(v_1, v_2) := \omega'(x)(v_1) \cdot v_2 - \omega'(x)(v_2) \cdot v_1$ . Das so definierte  $d\omega : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$  ist für festes  $x \in M$  alternierend (= schief-symmetrisch) und bilinear. Kürzer schreibt man  $d\omega : M \rightarrow L_{Alt}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  und sagt:  $d\omega$  ist eine 2-FORM.

Allgemein bezeichnet man eine Abbildung  $\omega : M \rightarrow L_{Alt}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  als  $k$ -FORM,  $L_{Alt}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$  ist der Raum der alternierenden  $k$ -linearen Funktionale. Ist  $M = \mathbb{R}^m$ , so genügt  $d\omega = 0$  um ein global gegebenes  $f$  mit  $\omega = f'$  zu finden. Ist  $M \subseteq \mathbb{R}^m$ , so genügt es i.a. nicht. Dazu ein Beispiel:

### 37.5 Beispiel

Wir betrachten die 1-Form

$$\omega(x, y)(v, w) := \frac{-yv + xw}{x^2 + y^2} \quad \text{also} \quad \omega(x, y) := -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

auf  $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  aus (3.10). Wegen  $\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$  ist  $d\omega = 0$ . Angenommen, es gibt ein  $f$  mit  $\omega = f'$ , so muß gelten:

$$f'(x, y) = (\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)) = \left( \frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Ist  $(x_0, y_0) \in S^1$  ein Punkt, in dem  $f$  eingeschränkt auf  $S^1$  ein Minimum annimmt, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x_0, y_0)(-y_0, x_0) = -y_0 \cdot \frac{1}{x_0^2 + y_0^2}(-y_0) + x_0 \cdot \frac{1}{x_0^2 + y_0^2}(x_0) \\ &= 1, \text{ das ist ein Widerspruch.} \end{aligned}$$

Für die eben betrachtete Form gilt also:  $d\omega = 0$ , aber es gibt keine Stammfunktion zu  $\omega$ . Diese Diskrepanz zwischen Formen  $\omega$  mit  $d\omega = 0$  und solchen der Gestalt  $\omega = f' = df$  kann verwendet werden, um etwas über die topologischen Eigenschaften von  $M$  auszusagen. (In unserem Beispiel war  $M$  nicht einfach zusammenhängend.). Wie sieht das nun für beliebige Mannigfaltigkeiten  $M$  aus?

Sei allgemeiner  $\omega : x \mapsto \omega(x)$  eine 1-Form, dann müßte  $d\omega$  eine, auf  $M$  gegebene Abbildung  $d\omega : x \mapsto d\omega(x)$  mit Werten  $d\omega(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$  sein, die bilinear und alternierend sind (solche  $d\omega$  heißen 2-FORM). Also ist  $(d\omega)_x \in L^2_{Alt}(T_x M, \mathbb{R})$ . Analog werden wir  $k$ -Formen definieren. Dazu wollen wir jetzt die grundlegenden Tatsachen aus der multilinearen Algebra zusammenfassen.

## 38. Multilineare Algebra, Tensoren

### 38.1 Definition

Wir stellen zuerst die (multi)lineare Theorie zusammen, für ein vertiefendes Studium vgl. etwa [30] und [78, Vol.I, Cap.7]. Im folgenden bezeichnen  $E, F$ , etc. endlichdimensionale Vektorräume über  $\mathbb{R}$ . Wir bezeichnen mit  $L^k(E_1, \dots, E_k; F)$  den RAUM DER  $k$ -LINEAREN ABBILDUNGEN  $E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$ . Dieser ist ein Vektorraum der endlicher Dimension  $\dim(E_1) \cdot \dots \cdot \dim(E_k) \cdot \dim(F)$ .

Die Abbildung  $T : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $k$ -linear und  $S : E_{k+1} \times \dots \times E_{k+i} \rightarrow \mathbb{R}$  sei  $i$ -linear.

Das TENSORPRODUKT von  $T$  mit  $S$  ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} T \otimes S : E_1 \times \dots \times E_{k+i} &\rightarrow \mathbb{R} \quad (k+i)\text{-linear} \\ (T \otimes S)(v_1, \dots, v_{k+i}) &:= T(v_1, \dots, v_k) S(v_{k+1}, \dots, v_{k+i}) \end{aligned}$$

Völlig analog kann man auch das Tensorprodukt  $T_1 \otimes \dots \otimes T_k$  mehrerer multilinearer Funktionale  $T_i$  definieren.

**38.2 Das Tensorprodukt von Vektorräumen.** Für endlichdimensionale Vektorräume  $E_1, \dots, E_k$  ist das Tensorprodukt durch  $E_1 \otimes \dots \otimes E_k := L^k(E_1^*, \dots, E_k^*; \mathbb{R})$  definiert. Gemeinsam mit der Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes : E_1 \times \dots \times E_k &\rightarrow E_1 \otimes \dots \otimes E_k, \\ \otimes : (x_1, \dots, x_k) &\mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_k, \text{ wobei} \\ (x_1 \otimes \dots \otimes x_k)(y_1^*, \dots, y_k^*) &:= y_1^*(x_1) \cdot \dots \cdot y_k^*(x_k), \end{aligned}$$

löst es folgendes universelles Problem:

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 \times \dots \times E_k & \xrightarrow{\otimes} & E_1 \otimes \dots \otimes E_k \\
 \searrow k\text{-linear} & & \swarrow \text{linear} \\
 & & F
 \end{array}$$

Ist  $\{e_i^j : 1 \leq i \leq \dim E_j\}$  eine Basis von  $E_j$ , dann ist eine Basis von  $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$  gegeben durch:

$$\{e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k : 1 \leq i_1 \leq \dim E_1, \dots, 1 \leq i_k \leq \dim E_k\}.$$

**Beweis.** Wir zeigen zuerst die Aussage über die Basis. Die Menge  $\{e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k : i_1, \dots, i_k\}$  ist linear unabhängig, denn aus  $\sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k = 0$  folgt durch Anwenden auf  $(e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k})$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
 0 &= \left( \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k \right) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} \left( e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k \right) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} \underbrace{e_1^{j_1}(e_{i_1}^1)}_{\delta_{i_1}^{j_1}} \dots \underbrace{e_k^{j_k}(e_{i_k}^k)}_{\delta_{i_k}^{j_k}} = \mu^{j_1, \dots, j_k}
 \end{aligned}$$

Dies ist auch ein Erzeugendensystem für  $E_1 \otimes \dots \otimes E_k := L(E_1^*, \dots, E_k^*; \mathbb{R})$ , denn jedes  $k$ -lineare  $\mu : E_1^* \times \dots \times E_k^* \rightarrow \mathbb{R}$  läßt sich auf  $(x^1, \dots, x^k) \in E_1^* \times \dots \times E_k^*$  wie folgt beschreiben

$$\begin{aligned}
 \mu(x^1, \dots, x^k) &= \mu\left(\sum_{i_1} x_{i_1}^1 e_{i_1}^1, \dots, \sum_{i_k} x_{i_k}^k e_{i_k}^k\right) \\
 &= \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} x_{i_1}^1 \dots x_{i_k}^k \cdot \mu(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_k}^k) \\
 &= \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} e_{i_1}^1(x^1) \dots e_{i_k}^k(x^k) \cdot \mu(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_k}^k) \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} (e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k)(x^1, \dots, x^k)
 \end{aligned}$$

wobei  $\mu^{i_1, \dots, i_k} := \mu(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_k}^k) \in \mathbb{R}$ .

Folglich läßt sich jede multilineare Abbildung  $\mu : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$  auf eine eindeutige Weise zu einer linearen Abbildung  $\tilde{\mu} : E_1 \otimes \dots \otimes E_k \rightarrow F$  durch

$$\tilde{\mu}(e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k) := \mu(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_k}^k)$$

fortsetzen, sodaß das angegebene Dreieck kommutiert.  $\square$

## 38.3 Bemerkungen

1. Wir erhalten folgende Identitäten (die erste mittels vollständiger Induktion):

$$\begin{aligned}
 (\dots(E_1 \otimes E_2) \otimes \dots \otimes E_k) &\cong L((E_1 \otimes \dots \otimes E_{k-1})^*, E_k^*; \mathbb{R}) \\
 &\cong L(E_1^*, \dots, E_{k-1}^*, L(E_k^*, \mathbb{R})) \\
 &\cong L(E_1^*, \dots, E_{k-1}^*, E_k^*; \mathbb{R}) \\
 &\cong (E_1 \otimes \dots \otimes E_k) \\
 E_1 \otimes E_2 &\cong L(E_1^*, E_2^*; \mathbb{R}) \cong L(E_2^*, E_1^*; \mathbb{R}) \cong E_2 \otimes E_1 \\
 E_1 \otimes \mathbb{R} &\cong L(E_1^*, \mathbb{R}^*; \mathbb{R}) \cong L(E_1^*, \mathbb{R}^{**}) \cong E_1^{**} \cong E_1 \\
 (E_1 \otimes \dots \otimes E_k)^* &\cong L^k(E_1, \dots, E_k; \mathbb{R}) \cong L^k(E_1^{**}, \dots, E_k^{**}; \mathbb{R}) \cong \\
 &\cong (E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^*) \\
 L(E, F) &\cong L(E, F^{**}) = L(E, L(F^*, \mathbb{R})) \cong L^2(E, F^*; \mathbb{R}) \cong \\
 &\cong L^2(E^{**}, F^*; \mathbb{R}) = E^* \otimes F.
 \end{aligned}$$

2. Zu linearen Abbildungen  $T_i : E_i \rightarrow F_i$  existiert eine durch folgendes Diagramm eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $T_1 \otimes \dots \otimes T_k : E_1 \otimes \dots \otimes E_k \rightarrow F_1 \otimes \dots \otimes F_k$ :

$$\begin{array}{ccc}
 E_1 \times \dots \times E_k & \xrightarrow[k\text{-linear}]{\otimes} & E_1 \otimes \dots \otimes E_k \\
 T_1 \times \dots \times T_k \downarrow \text{linear} & & \text{linear} \downarrow T_1 \otimes \dots \otimes T_k \\
 F_1 \times \dots \times F_k & \xrightarrow[k\text{-linear}]{\otimes} & F_1 \otimes \dots \otimes F_k.
 \end{array}$$

In der Tat ist  $T_1 \otimes \dots \otimes T_k$  auf der Basis  $(e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k)$  wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
 (T_1 \otimes \dots \otimes T_k)(e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k) &= T_1(e_{i_1}^1) \otimes \dots \otimes T_k(e_{i_k}^k) \\
 &= \sum_{j_1} (T_1)_{i_1}^{j_1} f_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes \sum_{j_k} (T_k)_{i_k}^{j_k} f_{j_k}^k \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_k} (T_1)_{i_1}^{j_1} \dots (T_k)_{i_k}^{j_k} f_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes f_{j_k}^k
 \end{aligned}$$

3. Zwischen den verschiedensten eben definierten Tensorprodukten besteht der folgende Zusammenhang: Sind  $T_i : E_i \rightarrow \mathbb{R}$  linear, so ist das in (2) definierte Tensorprodukt  $T_1 \otimes \dots \otimes T_k : E_1 \otimes \dots \otimes E_k \rightarrow \mathbb{R} \otimes \dots \otimes \mathbb{R}$  zusammengesetzt mit dem natürlichen Isomorphismus  $\mathbb{R} \otimes \dots \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$  genau das in (38) definierte Tensorprodukt  $T_1 \otimes \dots \otimes T_k : E_1 \otimes \dots \otimes E_k \rightarrow \mathbb{R}$ .

4.  $\otimes E := \bigoplus_{m=0}^{\infty} (\otimes_{i=0}^m E)$  ist eine graduierte, assoziative Algebra mit 1 und heißt die TENSORALGEBRA über  $E$  mit  $1 \in \mathbb{R} = \otimes^0 E$ . Dabei heißt eine Algebra GRADUIERT, falls  $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_k$  und die Multiplikation  $A^k \times A^l$  in  $A^{k+l}$  abbildet. Die Elemente  $\omega \in A_k$  heißen HOMOGEN VOM GRAD  $k$ . Dabei setzt man  $\otimes^0 E := \mathbb{R}$ , denn von  $\prod_{i \in \emptyset} E_i^* = \{0\}$  und jedes  $f : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  ist 0-linear.

5. Die Tensoralgebra hat folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder linearen Abbildung  $f : E \rightarrow A$ , wo  $A$  eine assoziative Algebra mit 1 ist, existiert ein eindeutiger Algebromorphismus  $\tilde{f} : \otimes E \rightarrow A$ , welcher auf  $\otimes^1 E = E$  mit  $f$  übereinstimmt.

**38.4 Definition**

Mit  $L_{Alt}^k(E, F)$  bezeichnen wir den durch die alternierenden  $k$ -linearen Abbildungen gebildeten Teilraum von  $L(\underbrace{E, \dots, E}_{k \text{ mal}}; F) =: L^k(E, F)$ . Bekanntlich heißt eine Abbildung  $T : E \times \dots \times E \rightarrow F$  alternierend, wenn  $\pi^{**} \circ T = \text{sgn}(\pi) \cdot T$  für alle Permutationen  $\pi$  gilt, d.h.

$$\begin{aligned} T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) &= T(\pi^*(v_1), \dots, \pi^*(v_k)) = \pi^{**}(T)(v_1, \dots, v_k) \\ &= \text{sgn}(\pi) T(v_1, \dots, v_k) \quad \forall v_1, \dots, v_k \in E. \end{aligned}$$

Eine Projektion  $\text{alt} : L^k(E, F) \rightarrow L_{Alt}^k(E, F)$ , genannt ALTERNATOR ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{alt}(T)(v_1, \dots, v_k) &:= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \text{sign}(\pi) T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \\ \text{alt}(T) &= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \text{sign}(\pi) T \circ \pi^*. \end{aligned}$$

Für alternierende multilineare Funktionale  $T$  und  $S$  definiert man das ÄUSSERE oder "HACK"-PRODUKT (englisch: wedge-product) durch:

$$\begin{aligned} (T \wedge S)(v_1, \dots, v_{k+i}) &:= \frac{(k+i)!}{k! i!} \text{alt}(T \otimes S)(v_1, \dots, v_{k+i}) = \\ &= \frac{1}{k! i!} \sum_{\pi} \text{sgn} \pi \cdot T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot S(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+i)}) \\ &= \frac{1}{k! i!} \sum_{\pi_1, \pi_2} \sum_{\sigma \text{ stkw.} \nearrow} \text{sgn} \sigma \text{sgn} \pi_1 \text{sgn} \pi_2 T(v_{\sigma(\pi_1(1))}, \dots, v_{\sigma(\pi_1(k))}) \cdot \\ &\quad \cdot S(v_{\sigma(\pi_2(k+1))}, \dots, v_{\sigma(\pi_2(k+i))}) \\ &= \sum_{\sigma(1) < \dots < \sigma(k)} (-1)^{\sum_{j \leq k} (\sigma(j) - j)} \cdot T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot \\ &\quad \cdot S(v_1, \dots, \overbrace{v_{\sigma(1)}}^{\text{---}}, \dots, \overbrace{v_{\sigma(k)}}^{\text{---}}, \dots, v_{k+i}). \end{aligned}$$

In dieser Rechnung haben wir die Permutation  $\pi$  von  $\{1, \dots, k+i\}$  in eindeutiger Weise als  $\sigma \circ (\pi_1 \sqcup \pi_2)$  geschrieben, wobei  $\pi_1$  eine beliebige Permutation von  $\{1, \dots, k\}$ , sowie  $\pi_2$  eine solche von  $\{k+1, \dots, k+i\}$  ist und  $\sigma$  auf  $\{1, \dots, k\}$  und  $\{k+1, \dots, k+i\}$  streng monoton wachsend ist. Es also  $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$  die monotone Anordnung von  $\{\pi(1), \dots, \pi(k)\}$  und  $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+i)$  jene von  $\{\pi(k+1), \dots, \pi(k+i)\}$ . Damit ist  $\pi_1 = \sigma^{-1} \circ \pi|_{\{1, \dots, k\}}$  und  $\pi_2 = \sigma^{-1} \circ \pi|_{\{k+1, \dots, k+i\}}$ . Es ist  $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sum_{j \leq k} (\sigma(j) - j)}$ , denn um die natürliche Ordnung von  $\sigma(1), \dots, \sigma(k+i)$  wiederherzustellen müssen für alle  $1 \leq j \leq k$  die  $\sigma(j) - j$  vielen kleineren Zahlen mit  $\sigma(j)$  vertauscht werden.

Falls  $T, S$  und  $R$  linear sind, dann ist

$$(T \wedge S)(w, v) = T(w) S(v) - T(v) S(w) = \det \begin{pmatrix} T(w) & S(w) \\ T(v) & S(v) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned}
2((T \wedge S) \wedge R)(w, v, u) &= \\
&= (T \wedge S)(w, v) R(u) - (T \wedge S)(v, w) R(u) \\
&+ (T \wedge S)(v, u) R(w) - (T \wedge S)(w, u) R(v) \\
&+ (T \wedge S)(u, w) R(v) - (T \wedge S)(u, v) R(w) \\
&= (T(w) S(v) - T(v) S(w)) R(u) - (T(v) S(w) - T(w) S(v)) R(u) \\
&+ (T(v) S(u) - T(u) S(v)) R(w) - (T(w) S(u) - T(u) S(w)) R(v) \\
&+ (T(u) S(w) - T(w) S(u)) R(v) - (T(u) S(v) - T(v) S(u)) R(w) \\
&= 2T(w) S(v) R(u) + 2T(v) S(u) R(w) + 2T(u) S(w) R(v) \\
&- 2T(v) S(w) R(u) - 2T(w) S(u) R(v) - 2T(u) S(v) R(w) \\
&= 2 \det \begin{pmatrix} T(w) & S(w) & R(w) \\ T(v) & S(v) & R(v) \\ T(u) & S(u) & R(u) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und folglich verschwinden auch im 3-fachen Produkt von 1-Formen alle Faktoren. Dies ist der Grund für die Wahl des Faktors  $\frac{(k+i)!}{k!i!}$  bzw.  $\frac{1}{k!i!}$ , siehe auch (1) in (38.6). Analog zu obiger Formel für  $T \wedge S$  können wir auch direkt ein Hackprodukt mehrerer multilinearer alternierender Funktionale definieren. Beachte noch, daß

$$T \wedge S = (-1)^{ki} S \wedge T,$$

denn

$$\begin{aligned}
(T \wedge S)(v_1, \dots, v_{k+i}) &= \\
&= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot S(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+i)}) \\
&= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi'} \operatorname{sgn}(\pi' \circ \sigma) \cdot T(v_{\pi'(\sigma(1))}, \dots, v_{\pi'(\sigma(k))}) \cdot S(v_{\pi'(\sigma(k+1))}, \dots, v_{\pi'(\sigma(k+i))}) \\
&= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi'} \operatorname{sgn}(\pi' \circ \sigma) \cdot S(v_{\pi'(1)}, \dots, v_{\pi'(i)}) \cdot T(v_{\pi'(i+1)}, \dots, v_{\pi'(i+k)}) \\
&= (-1)^{ki} (S \wedge T)(v_1, \dots, v_{k+i})
\end{aligned}$$

wobei  $\pi = \pi' \circ \sigma$  und  $\sigma$  jene Permutation ist, welche den Block  $(1, \dots, k)$  mit  $(k+1, \dots, k+i)$  vertauscht und Vorzeichen  $(-1)^{ik}$  hat.

**38.5 Lemma (Das äußere Produkt eines Vektorraums).** *Es sei das  $k$ -fache äußere Produkt der Vektorräume  $E$  definiert durch  $\bigwedge^k E := L_{\text{Alt}}^k(E^*, \mathbb{R})$  und  $E \times \dots \times E \rightarrow \bigwedge^k E \subseteq \bigotimes^k E = L^k(E^*, \mathbb{R})$  sei die folgende alternierende,  $k$ -lineare Abbildung:*

$$\begin{aligned}
\wedge : (v_1, \dots, v_k) &\mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k \quad \text{mit} \\
(v_1 \wedge \dots \wedge v_k)(w^1, \dots, w^k) &:= \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) w^{\pi(1)}(v_1) \cdot \dots \cdot w^{\pi(k)}(v_k) \\
&= k! \operatorname{alt}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)(w^1, \dots, w^k).
\end{aligned}$$

Das äußere Produkt löst folgendes universelles Problem:

$$\begin{array}{ccc}
 E \times \dots \times E & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^k E \\
 \searrow \text{\textit{k-linear, alt.}} & & \swarrow \text{\textit{linear}} \\
 & & F
 \end{array}$$

Ist  $\{e_i\}_{i=1}^m$  eine Basis von  $E$  (also  $m = \dim E$ ), dann ist  $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\}$  eine Basis von  $\bigwedge^k E$  (also ist  $\dim \bigwedge^k E = \binom{m}{k}$ ). Ist  $k = \dim E$ , so erzeugt  $e_1 \wedge \dots \wedge e_k$  ganz  $\bigwedge^k E$  und

$$(e_1 \wedge \dots \wedge e_k)(w^1, \dots, w^k) = \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi w_1^{\pi(1)} \dots w_k^{\pi(k)} = \det(w^1, \dots, w^k).$$

**Beweis.** Es ist  $\wedge : E \times \dots \times E \rightarrow \bigwedge^k E$  durch  $E \times \dots \times E \xrightarrow{\otimes} \bigotimes^k E \xrightarrow{\text{\textit{k! alt}}} \bigwedge^k E$  gegeben, folglich bildet  $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})_{i_1 < \dots < i_k}$  ein Erzeugendensystem von  $\bigwedge^k E = L_{Alt}^k(E; \mathbb{R})$ .

Es ist auch linear unabhängig, denn für aus  $\sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k = 0$  folgt durch Anwenden auf  $(e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k})$  mit  $j_1 < \dots < j_k$  die Gleichung

$$\begin{aligned}
 0 &= \left( \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k \right) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\
 &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} (e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\
 &= \mu^{j_1, \dots, j_k}
 \end{aligned}$$

Folglich läßt sich jede alternierende multilineare Abbildung  $\mu : E \times \dots \times E \rightarrow F$  auf eine eindeutige Weise zu einer lineare Abbildung  $\tilde{\mu} : \bigwedge^k E \rightarrow F$  durch

$$\tilde{\mu}(e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k) := \mu(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_k}^k)$$

fortsetzen, sodaß das angegebene Dreieck kommutiert. □

### 38.6 Bemerkungen

1. Es gelten die folgenden Identitäten:

$$L_{Alt}^k(E, F) \cong L\left(\bigwedge^k E, F\right); \quad \left(\bigwedge^k E\right)^* \cong L_{Alt}^k(E, \mathbb{R}) \cong L_{Alt}^k(E^{**}, \mathbb{R}) \cong \bigwedge^k E^*;$$

2. Zu jeder linearen Abbildung  $T : E \rightarrow F$  existiert eine durch folgendes Diagramm eindeutig bestimmte lineare Abbildung  $\bigwedge^k T : \bigwedge^k E \rightarrow \bigwedge^k F$ :

$$\begin{array}{ccc}
 E \times \dots \times E & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^k E \\
 \downarrow T \times \dots \times T & & \downarrow \bigwedge^k T \\
 F \times \dots \times F & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^k F
 \end{array}$$

Damit wird  $\bigwedge^k$  zu einem Funktor. In der Tat ist  $\bigwedge^k T$  auf der Basis  $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})$  wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} \bigwedge^k T(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) &= T(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge T(e_{i_k}) \\ &= \sum_{j_1} T_{i_1}^{j_1} f_{j_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{j_k} T_{i_k}^{j_k} f_{j_k} \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k} T_{i_1}^{j_1} \cdots T_{i_k}^{j_k} f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k} \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{\pi} T_{i_1}^{j_{\pi(1)}} \cdots T_{i_k}^{j_{\pi(k)}} f_{j_{\pi(1)}} \wedge \cdots \wedge f_{j_{\pi(k)}} \\ &= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \det(T_{i_s}^{j_r})_{r,s} f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k}. \end{aligned}$$

3. Der Raum  $\bigwedge E := \bigoplus_{i=0}^m \bigwedge^i E$  ist eine graduiert-kommutative assoziative Algebra mit  $1 \in \bigwedge^0 E := \mathbb{R}$ , die sogenannte ÄUSSERE ALGEBRA über  $E$ . Dabei heißt eine graduierte Algebra  $A = \bigoplus_k A_k$  ( $k \in \mathbb{N}_0$ ) KOMMUTATIV, falls:  $a \in A_k$ ,  $b \in A_i \Rightarrow a \cdot b = (-1)^{ki} b \cdot a$ . Es ist  $\dim(\bigwedge E) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} = 2^m$ .

## 39. Vektorbündel-Konstruktionen

### 39.1 Definition (Tensorfelder und Differentialformen)

Sei  $M$  eine  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $x \in M$ . Als Vektorraum  $E$  verwenden wir nun den Tangentialraum  $T_x M$  von  $M$  bei  $x$ . Dann ist  $E^* = (T_x M)^*$ , und wir bilden das Tensorprodukt

$$\underbrace{T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \cdots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}} = L^{p+q}(T_x^* M, \dots, T_x M; \mathbb{R}).$$

Die Elemente dieses Vektorraums bezeichnet man als  $p$ -FACH KONTRAVARIANTE,  $q$ -FACH KOVARIANTE VEKTOREN oder TENSOREN. Eine Basis von  $T_x M$  ist gegeben durch  $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$ , wobei  $(u^1, \dots, u^m)$  lokale Koordinaten um  $x$  von  $M$  sind. Die duale Basis von  $(T_x M)^*$  haben wir mit  $(du^i)_{i=1}^m$  bezeichnet. Nach (38.3) erhalten wir als Basis des Tensorprodukts:

$$\left( \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_q} \right)_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = 1, \dots, m}$$

Analog bilden wir  $\bigwedge^k (T_x M)^* \cong L_{alt}^k(T_x M, \mathbb{R})$ . Die Elemente dieses äußeren Produktes nennt man  $k$ -FORMEN und eine Basis bildet

$$(du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k})_{i_1 < \cdots < i_k}.$$

Lassen wir nun noch den Punkt  $x \in M$  variieren, so können wir die Abbildungen

$$\omega : M \ni x \mapsto \omega(x) \in \underbrace{T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \cdots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}}$$

betrachten. Diese heißen  $p$ -FACH KONTRAVARIANTE UND  $q$ -FACH KOVARIANTE TENSORFELDER.

Eine Abbildung

$$\omega : M \ni x \mapsto \omega(x) \in \Lambda^k(T_x M)^*$$

heißt DIFFERENTIALFORM VOM GRAD  $k$ .

Um von der Glattheit eines Tensorfelds (oder einer Differentialform) sprechen zu können sollten wir die Familie der Vektorräume

$$\left( \underbrace{T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_p \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \cdots \otimes (T_x M)^*}_q \right)_{x \in M}$$

zu einer Mannigfaltigkeit oder besser gleich zu einem Vektorbündel über  $M$  machen. Wir gehen dabei wie beim Tangentialbündel und den daraus konstruierten Kotangentenbündel vor:

### 39.2 Direkte Summe von Vektorbündel

Seien  $E \xrightarrow{p} M$  und  $F \xrightarrow{q} M$  zwei Vektorbündel über  $M$  sowie  $\varphi^E$  eine Trivialisierung von  $E$  über  $U \subset M$  und  $\varphi^F$  eine solche von  $F$  über dem o.B.d.A. gleichen  $U$ . Mit  $\psi^E : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$  und  $\psi^F : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^l)$  bezeichnen wir die Transitionsfunktionen zu je zwei solcher Vektorbündelkarten über  $U$  und  $V$ . Wir wollen nun die disjunkte Vereinigung  $E \oplus F := \bigsqcup_{x \in M} (E_x \oplus F_x)$  zu einem Vektorbündel machen. Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{E \oplus F} := \varphi_x^E \oplus \varphi_x^F : \mathbb{R}^{k+l} \cong \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l \rightarrow E_x \oplus F_x.$$

Die Transitionsfunktionen  $\psi^{E \oplus F} : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{k+l})$  sind dann durch

$$\psi^{E \oplus F}(x) := \psi^E(x) \oplus \psi^F(x) \in GL(\mathbb{R}^k) \times GL(\mathbb{R}^l)$$

gegeben. Als Matrix ist  $\psi^{E \oplus F}(x)$  gerade  $\begin{pmatrix} \psi^E(x) & 0 \\ 0 & \psi^F(x) \end{pmatrix}$ . Also hat  $\psi^{E \oplus F}$  wirklich Werte in  $GL(\mathbb{R}^{k+l})$  und ist glatt. Somit ist  $E \oplus F \rightarrow M$  ein Vektorbündel, die sogenannte WHITNEY-SUMME von  $E$  und  $F$ .

### 39.3 Tensorprodukt von Vektorbündel

Analog zur direkten Summe machen wir nun die disjunkte Vereinigung  $E \otimes F := \bigsqcup_{x \in M} (E_x \otimes F_x)$  zu einem Vektorbündel, dem sogenannten TENSORPRODUKT von  $E$  und  $F$ . Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{E \otimes F} := \varphi_x^E \otimes \varphi_x^F : \mathbb{R}^{kl} \cong \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l \rightarrow E_x \otimes F_x.$$

Die Transitionsfunktionen  $\psi^{E \otimes F} : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{kl})$  sind dann durch

$$\psi^{E \otimes F}(x) := \psi^E(x) \otimes \psi^F(x) \in GL(\mathbb{R}^{kl}) \subset L(\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l)$$

gegeben. Als Matrix ist  $\psi^{E \otimes F}(x)$  gerade  $(a_i^r b_j^s)_{(i,j),(r,s)}$ , wobei  $(a_i^r)$  die Matrix von  $\psi^E(x)$  und  $(b_j^s)$  die Matrix von  $\psi^F(x)$  sei. Ist nämlich  $(e_i)_{i=1}^k$  und  $(f_j)_{j=1}^l$  die Standardbasen im  $\mathbb{R}^k$  und  $\mathbb{R}^l$  und  $(a_i^r)$  sowie  $(b_j^s)$  die Matrixdarstellungen von  $A \in L(\mathbb{R}^k)$  und  $B \in L(\mathbb{R}^l)$ , so ist  $A \otimes B : \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l$  gegeben durch  $(A \otimes B)(v \otimes w) = A(v) \otimes B(w)$ . Auf die Standardbasis  $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$  angewandt erhalten wir also:

$$A(e_i) \otimes B(f_j) = \left( \sum_r a_i^r e_r \right) \otimes \left( \sum_s b_j^s f_s \right) = \sum_{r,s} a_i^r b_j^s e_r \otimes f_s.$$

Also hat  $\psi^{E \otimes F}$  wirklich Werte in  $GL(\mathbb{R}^{kl})$  und ist glatt.

### 39.4 Äußeres Produkt eines Vektorbündels

Schließlich machen wir die disjunkte Vereinigung  $\bigwedge^p E := \bigsqcup_{x \in M} \bigwedge^p E_x$  zu einem Vektorbündel, dem sogenannten  $p$ -FACHEN ÄUSSEREN PRODUKT von  $E$ . Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x \bigwedge^p E := \bigwedge^p (\varphi_x^E) : \mathbb{R}^{\binom{k}{p}} \cong \bigwedge^p \mathbb{R}^k \rightarrow \bigwedge^p E_x.$$

Die Transitionsfunktionen  $\psi \bigwedge^p E : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}})$  sind dann durch

$$\psi \bigwedge^p E(x) := \bigwedge^p (\psi^E(x)) \in GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}}) \subset L\left(\bigwedge^p \mathbb{R}^k, \bigwedge^p \mathbb{R}^k\right)$$

gegeben. Wie zuvor zeigt man wieder, daß die Transitionsfunktionen wirklich Werte in  $GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}})$  haben und glatt sind.

Allgemeiner hat man folgende Konstruktion:

### 39.5 Theorem (Funktorielle Vektorbündel Konstruktionen).

Es sei  $\mathcal{F}$  eine Zuordnung, die jeder Familie von  $(k+i)$  endlichdimensionalen Vektorräumen einen endlichdimensionalen Vektorraum zuweist und die FUNKTORIELL ist.

Funktoriell bedeutet, daß jedem  $(k+i)$ -Tupel linearer Abbildungen

$T_j : F_j \rightarrow E_j$  für  $j \leq k$  "kontravariant in den vorderen Variablen"

$T_j : E_j \rightarrow F_j$  für  $k < j$  "kovariant in den hinteren Variablen"

eine lineare Abbildung

$$\mathcal{F}(T_1, \dots, T_{k+i}) : \mathcal{F}(E_1, \dots, E_{k+i}) \rightarrow \mathcal{F}(F_1, \dots, F_{k+i})$$

zugeordnet wird, die mit Komposition und Identität verträglich ist und glatt von  $T_1, \dots, T_{k+i}$  abhängt.

Dann ist für  $(k+i)$  Vektorbündel  $p_j : E_j \rightarrow M$  eine natürliche Vektorbündel-Struktur auf  $\mathcal{F}(E_1, \dots, E_{k+i}) := \bigsqcup_x \mathcal{F}(E_1|_x, \dots, E_{k+i}|_x)$  gegeben.

Ein Beispiel eines solchen Funktors ist die direkte Summe  $\oplus$ ; der auf Vektorbündel angewandt die Whitney-Summe liefert.

Ein weiteres ist der Dualraum-Funktor, der auf das Tangentenbündel  $\pi : TM \rightarrow M$  angewandt das Kotangentenbündel  $T^*M = \bigsqcup_x (T_x M)^* \rightarrow M$  liefert.

Andere Beispiele sind das Tensorprodukt und das äußere Produkt sowie Kombinationen von ihnen, wie  $\bigwedge^k T^*M = L_{Alt}^k(TM, \mathbb{R}) = \left(\bigwedge^k TM\right)^*$ .

**Beweis.** Die Vektorbündelkarten  $\mathcal{F}(\psi_1, \dots, \psi_{k+i})$  werden aus jenen für  $E_i$  durch folgende Formel gewonnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\psi_1, \dots, \psi_{k+i})|_x &= \\ &= \mathcal{F}\left((\psi_1)_x^{-1}, \dots, (\psi_k)_x^{-1}, (\psi_{k+1})_x, \dots, (\psi_{k+i})_x\right) \\ &= \mathcal{F}(\psi_1, \dots, \psi_{k+i})|_x : \mathcal{F}(\mathbb{R}^{N_1}, \dots, \mathbb{R}^{N_{k+i}}) \rightarrow \mathcal{F}(E_1|_x, \dots, E_{k+i}|_x) \end{aligned}$$

Die Transitionsfunktionen werden durch folgende Abbildungsfolge festgelegt:

$$\begin{aligned}
 (\psi_1|_x, \dots, \psi_{k+i}|_x) &: U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \\
 (\text{inv}, \dots; \text{id}, \dots) &: GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \rightarrow \\
 &\rightarrow GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \\
 &: GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \rightarrow \\
 &\rightarrow GL(\mathcal{F}(\mathbb{R}^{N_1}, \dots, \mathbb{R}^{N_{k+i}})) \quad \square
 \end{aligned}$$

## 40. Differentialformen

### 40.1 Definition (glatte Tensorfelder und Differentialformen)

Der VEKTORRAUM DER GLATTEN  $p$ -FACH KONTRAVARIANT UND  $q$ -FACH KOVARIANTEN TENSORFELDER oder kurz  $p$ - $q$ -TENSORFELDER, d.h. der glatten Schnitte des Vektorbündels

$$\underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(TM)^* \otimes \dots \otimes (TM)^*}_{q\text{-mal}}$$

wird auch mit  $\mathcal{T}_p^q(M)$  bezeichnet.

Lokal läßt sich jedes Tensorfeld  $\Phi$  als

$$\Phi = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q}$$

schreiben. Und wir wissen, daß  $\Phi$  genau dann glatt, wenn alle Komponenten  $\Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$  glatte reell-wertige Funktionen sind. Insbesondere sind die 0-0-Tensorfelder gerade die reell-wertigen Funktionen, die 1-0-Tensorfelder die Vektorfelder und die 0-1-Tensorfelder die 1-Formen.

Der VEKTORRAUM DER GLATTEN DIFFERENTIALFORMEN VOM GRAD  $p$ , d.h. glatten Schnitte des Vektorbündels  $\bigwedge^p (TM)^*$  wird mit  $\Omega^p(M)$  bezeichnet. Diesen Raum können wir auch anders beschreiben:

$$\begin{aligned}
 \Omega^p(M) &:= \Gamma(\bigwedge^p (TM)^* \rightarrow M) \\
 &\cong \Gamma((\bigwedge^p TM)^* \rightarrow M) \\
 &\cong \left\{ \omega : \bigwedge^p TM \rightarrow \mathbb{R} : \omega_x \in L\left(\bigwedge^p T_x M, \mathbb{R}\right) \forall x \right\} \\
 &\cong \left\{ \omega : \bigoplus^p TM \rightarrow \mathbb{R} : \omega_x \in L_{Alt}^p(T_x M, \mathbb{R}) \forall x \right\}
 \end{aligned}$$

Der Raum  $\Omega^0(M)$  der 0-Formen stimmt mit  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  überein. Jede Differentialform  $\omega$  vom Grad  $k$  läßt sich lokal als

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$$

schreiben. Wieder gilt, daß  $\omega$  glatt ist, wenn alle seine Koordinatenfunktionen  $\omega_{i_1, \dots, i_k}$  glatt sind.

Für die Koeffizienten  $\omega_{i_1, \dots, i_k}$  ergibt sich aus

$$\begin{aligned} (du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}) \left( \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \right) &= \\ &= \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \, du^{i_1} \left( \frac{\partial}{\partial u^{j_{\pi(1)}}} \right) \dots du^{i_k} \left( \frac{\partial}{\partial u^{j_{\pi(k)}}} \right) \\ &= \begin{cases} \operatorname{sgn} \pi & \text{falls eine Permutation } \pi \text{ existiert mit } i_t = j_{\pi(t)} \forall t \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

folgende Formel für  $j_1 < \dots < j_k$ :

$$\begin{aligned} \omega \left( \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \right) &= \\ &= \left( \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k} \right) \left( \frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \right) = \omega_{j_1 \dots j_k}. \end{aligned}$$

#### 40.2 Bemerkung

Wegen

$$\underbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \dots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}} \cong L(\underbrace{(T_x M)^*, \dots, (T_x M)^*}_{p\text{-mal}}, \underbrace{T_x M, \dots, T_x M}_{q\text{-mal}}, \mathbb{R})$$

können wir ein  $p$ - $q$ -Tensorfeld

$$\Phi = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q}$$

punktweise auf  $q$  Tangentialvektoren  $\xi_1, \dots, \xi_q \in T_x M$  und  $p$  Kotangentialvektoren  $\omega^1, \dots, \omega^p$  anwenden:

$$\begin{aligned} \Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) &= \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \left( \sum_{r_1} \omega_{r_1}^1 du^{r_1}, \dots, \sum_{s_q} \xi_{s_q}^{j_q} \frac{\partial}{\partial u^{s_q}} \right) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q \\ r_1, \dots, r_p \\ s_1, \dots, s_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{r_1}^1 \delta_{i_1}^{r_1} \dots \xi_{s_q}^{j_q} \delta_{s_q}^{j_q} \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \dots \xi_q^{j_q}. \end{aligned}$$

**Satz (Tensorfelder als  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineare Abbildungen).**

Obige Abbildung liefert einen linearen Isomorphismus des Raums  $\mathcal{T}_p^q$  der glatten  $p$ - $q$ -Tensorfelder mit dem Raum  $L_{C^\infty(M, \mathbb{R})}^k(\Omega^1(M), \dots, \mathfrak{X}(M); C^\infty(M, \mathbb{R}))$  der  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilinearen Abbildungen.

**Beweis.** Offensichtlich wirkt jedes Tensorfeld  $\Phi$  auf 1-Formen  $\omega^1, \dots, \omega^p \in \Omega^1(M)$  und auf Vektorfelder  $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathfrak{X}(M)$  als  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineare Abbildung, durch

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x) := \Phi_x(\omega^1(x), \dots, \omega^p(x), \xi_1(x), \dots, \xi_q(x))$$

und wegen der obigen lokalen Formel

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1}^1 \cdot \dots \cdot \omega_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_q^{j_q}$$

liegt  $\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

Umgekehrt sei  $\Phi : \Omega^1(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  eine  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineare Abbildung. Falls eines der Vektorfelder oder 1-Formen  $\sigma$  lokal um  $x \in M$  verschwindet, so auch  $\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)$ , denn sei  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  so gewählt, daß  $f = 1$  auf dem Träger jenes Schnittes  $\sigma$  und  $f(x) = 0$  gilt. Dann ist  $f \cdot \sigma = \sigma$  und wegen der  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Linearität ist  $\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x) = f(x) \cdot \Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x) = 0$ .

Folglich erhalten wir die lokale Formel

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1}^1 \cdot \dots \cdot \omega_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_q^{j_q},$$

mit  $\Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} := \Phi(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}, \dots, du^{j_q})$ , deren rechte Seite an der Stelle  $x$  nur von Wert der 1-Formen und Vektorfelder an dieser Stelle abhängt. Also definiert  $\Phi_x(\omega_1, \dots, \xi^p) := \Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x)$  ein glattes Tensorfeld, das gesuchte inverse Bild zu  $\Phi$ .  $\square$

**40.3 Satz (Differentialformen als  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineare Abbildungen).**

Es existiert ein linearer Isomorphismus von  $\Omega^k(M)$  mit  $\left\{ \omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) : \omega \text{ ist } k\text{-linear alternierend und } C^\infty(M, \mathbb{R})\text{-homogen} \right\}$ .

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Offensichtlich ist  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = \omega_p(\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p)$   $k$ -linear und alternierend.

Die Abbildung  $\omega$  ist aber auch  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -homogen:

$$\begin{aligned} \omega(f \xi_1, \dots, \xi_k)|_p &= \omega_p(f_p \xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) = f(p) \omega_p(\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) \\ &= f \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p \end{aligned}$$

Weiters ist  $M \xrightarrow{(\xi_1, \dots, \xi_k)} TM \oplus \dots \oplus TM \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}$  glatt, also  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

( $\Leftarrow$ ) Sei  $\omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit obigen Eigenschaften. Es ist z.z., daß  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p$  nur von  $\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p$  abhängt, denn dann können wir definieren:  $\omega_p(\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) := \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p$ .

Sei  $\xi_1 = 0$  lokal um  $p$ , sei  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit  $f(p) = 0$  und  $f = 1$  dort wo  $\xi_1 \neq 0$ . Dann gilt  $f \cdot \xi_1 = \xi_1$  und somit wie zuvor

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = \omega(f \xi_1, \dots, \xi_k)|_p = f(p) \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = 0.$$

Sei weiters  $\xi_1 = \sum_{i=1}^m \xi_1^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$  lokal. Dann gilt

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega\left(\sum_i \xi_1^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \dots, \xi_k\right) = \sum_i \xi_1^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \dots, \xi_k\right)$$

und da  $\xi_1|_p = 0$  gilt  $\xi_1^i|_p = 0 \ \forall i$  und somit  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = 0$ .

Sei  $\omega = \sum \omega_I dx^I$  eine lokale Darstellung von  $\omega$ , dabei ist  $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$ ,  $dx^I = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ . Es ist  $\omega_I(p) = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right)|_p$  glatt bei  $p$ , also ist  $\omega \in \Omega^k(M)$ .  $\square$

## 41. Differentialformen auf Riemann MF

### 41.1 Tensorfelder auf Riemann-Mannigfaltigkeiten

Allgemein wissen wir, daß  $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  ist. Sei  $E$  ein endlich dimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt. Wir haben dann nach (32.1) einen Isomorphismus  $\sharp : E \xrightarrow{\cong} E^*$  definiert durch  $\sharp : v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ . Sein Inverses bezeichnen wir mit  $\flat := \sharp^{-1}$ . Sei  $(e_i)$  eine Orthonormalbasis von  $E$  und  $(e^i)$  die duale Basis von  $E^*$ , dann ist:

$$\sharp : x = \sum_i x^i e_i \in E \mapsto \sum_i x^i e^i \in E^*.$$

Sei  $(M, g)$  eine Riemann-Mannigfaltigkeit mit dem zugehörigen Tangentialraum  $\sharp : T_x M \cong (T_x M)^*$ . Eine Basis im Tangentialraum ist gegeben durch  $\frac{\partial}{\partial u^i}$ , diese wird nach (32.1) abgebildet auf  $\sharp\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right) = \sum_j g_{j,i} du^j$ . Und allgemeiner wird  $\xi \in T_x M$  wie folgt abgebildet:

$$\sharp : \xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \in T_x M \mapsto \omega = \sum_i \omega_i du^i \in (T_x M)^*.$$

wobei  $\xi^i = \sum_j g^{i,j} \omega_j$ ,  $\omega_i = \sum_j g_{i,j} \xi^j$  und  $g_{i,j} = \langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \rangle$  sind, und  $(g^{i,j}) = (g_{i,j})^{-1}$  ist. Es folgt, daß auf kanonische Weise  $TM \cong T^*M$  ist, und somit der Raum der Vektorfelder  $\mathfrak{X}(M)$  kanonisch isomorph zum Raum der 1-Formen  $\Omega^1(M)$  ist.

Allgemeiner gilt:

$$\mathcal{T}_p^q(M) \cong \mathcal{T}_{p+q}^0(M) \cong \mathcal{T}_0^{p+q}(M)$$

### 41.2 Volumsform

Sei  $E$  ein endlich dimensionaler, orientierter Vektorraum mit innerem Produkt. Falls  $(e_1, \dots, e_m)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis von  $E$  ist, so definieren wir  $\det \in L_{Alt}^m(E; \mathbb{R})$  durch  $\det(e_1, \dots, e_m) = 1$ . Um zu zeigen, daß diese Definition nicht von der gewählten Basis abhängt wählen wir beliebige Vektoren  $g_i \in E$  und

betrachten die Abbildung  $A : E \rightarrow E$ , welche  $e_j$  auf  $g_j := \sum_i a_j^i e_i$  abbildet. Dann ist

$$\begin{aligned} \det(g_1, \dots, g_m) &= \det\left(\sum_{j_1} a_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_m} a_m^{j_m} e_{j_m}\right) \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_m} a_1^{j_1} \cdot \dots \cdot a_m^{j_m} \underbrace{\det(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})}_{\substack{=0, \text{ falls } j_1, \dots, j_m \text{ keine} \\ \text{Permutation von } 1, \dots, m}} \\ &= \sum_{j \text{ Permutation}} a_1^{j(1)} \cdot \dots \cdot a_m^{j(m)} \operatorname{sgn}(j) \underbrace{\det(e_1, \dots, e_m)}_{=1} \\ &= \det(a_i^j)_{i,j}. \end{aligned}$$

Falls also  $(g_i)_i$  insbesondere eine andere positiv orientierte Orthonormalbasis ist, so ist  $[A] \in SO(n)$ , also  $1 = \det[A] = \det(g_1, \dots, g_m)$ .

Da wir diese Konstruktion auf den Tangentialraum einer orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit anwenden wollen (dort aber nicht eine orthonormal-Basis) sondern nur eine (positiv orientierte) Basis  $(\frac{\partial}{\partial u^i})_j$  gegeben haben, benötigen wir auch für so eine Basis  $(g_j)$  eine Formel für die Determinante: Dazu betrachten wir wieder die inneren Produkte

$$g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle = \left\langle \sum_k a_i^k e_k, \sum_l a_j^l e_l \right\rangle = \sum_{k,l} a_i^k a_j^l \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{\delta_{k,l}} = \sum_k a_i^k a_j^k$$

und erhalten  $(g_{i,j})_{i,j} = [A \cdot A^t]$  und weiters

$$\det(g_{i,j})_{i,j} = \det([A] \cdot [A]^t) = (\det[A])^2$$

und schließlich (wegen  $\det[A] > 0$ )

$$\det(g_1, \dots, g_m) = \det[A] = \sqrt{\det(g_{i,j})_{i,j}} =: \sqrt{G}.$$

Für jede orientierte (siehe (34.3)) Riemann-Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  ist  $\det \in L_{\text{alt}}^m(T_x M, \mathbb{R})$  und wir definieren die Volumensform  $\operatorname{vol}_M \in \Omega^m(M)$  der Mannigfaltigkeit durch

$$\operatorname{vol}_M(x) := \det \in L_{\text{alt}}^m(T_x M; \mathbb{R}).$$

Diese Volumensform wollen wir mittels lokaler Koordinaten  $(u^1, \dots, u^m)$  berechnen. Es bilden die  $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$  eine Basis in  $T_x M$ , von der wir annehmen dürfen, daß sie positiv orientiert ist, wenn wir ein Orientierungs-erhaltende Karte  $\varphi = (u^1, \dots, u^m)^{-1}$  verwenden. Es ist  $\operatorname{vol} = \operatorname{vol}_{1, \dots, m} \cdot du^1 \wedge \dots \wedge du^m$  mit

$$\begin{aligned} \operatorname{vol}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right) &= \left(\operatorname{vol}_{1, \dots, m} \cdot du^1 \wedge \dots \wedge du^m\right) \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right) \\ &= \operatorname{vol}_{1, \dots, m} \cdot \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) \underbrace{du^1\left(\frac{\partial}{\partial u^{\pi(1)}}\right)}_{\delta_{\pi(1),1}} \cdot \dots \cdot \underbrace{du^m\left(\frac{\partial}{\partial u^{\pi(m)}}\right)}_{\delta_{\pi(m),m}} = \operatorname{vol}_{1, \dots, m}, \end{aligned}$$

da  $\pi$  die Identität sein muß, siehe auch (40.1). Wegen obiger Rechnung ist

$$\operatorname{vol}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right) = \det(g_1, \dots, g_m) = \sqrt{G}$$

$$\text{mit } G := \det(g_{i,j})_{i,j} \text{ und } g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right).$$

Wir erhalten für orientierbare Riemann-Mannigfaltigkeiten folgenden Isomorphismus:

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \Omega^m(M), \quad f \mapsto f \cdot \operatorname{vol}_M.$$

### 41.3 Skalare Produkt auf $\Omega(M)$

Dazu betrachten wir zuerst einen orientierten,  $m$ -dimensionalen Vektorraum  $E$ . Seien die  $(e_i)$  eine positiv-orientierte Orthonormalbasis von  $E$ . Wir definieren ein skalares Produkt auf  $E^*$  indem wir fordern, daß die duale Basis  $(e^i)$  ebenfalls eine Orthonormalbasis sei. Auf  $\otimes^k E$  definieren wir ein skalares Produkt indem wir fordern, daß die Basis  $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})$  eine Orthonormalbasis sei und analog auf  $\wedge^k E$  durch die Orthonormalbasis  $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})$ . Diese Definition ist von der Basis unabhängig, denn das skalare Produkt auf  $E^*$  ist durch folgende Formel gegeben:

$$\langle x^*, y^* \rangle_{E^*} := \langle \flat x^*, \flat y^* \rangle_E, \text{ da } \langle e^i, e^j \rangle_{E^*} = \langle e_i, e_j \rangle_E = \delta_{i,j}.$$

Auf  $\otimes^k E$  ist das skalare Produkt analog gegeben durch:

$$\langle x_1 \otimes \dots \otimes x_k, y_1 \otimes \dots \otimes y_k \rangle_{\otimes^k E} := \langle x_1, y_1 \rangle_E \cdot \dots \cdot \langle x_k, y_k \rangle_E$$

Auf  $\wedge^k E$  ist das skalare Produkt analog gegeben durch:

$$\begin{aligned} \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, y_1 \wedge \dots \wedge y_k \rangle_{\wedge^k E} &:= \det \left( (\langle x_i, y_j \rangle_E)_{i,j} \right) \\ &= \frac{1}{k!} \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, y_1 \wedge \dots \wedge y_k \rangle_{\otimes^k E}. \end{aligned}$$

Achtung: Die Spur des skalaren Produkts von  $\otimes^k E$  auf den Teilraum  $\wedge^k E$  hat noch einen Faktor  $k!$ , denn  $x_1 \wedge \dots \wedge x_k = k! \text{ alt}(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)}$  und somit ist

$$\begin{aligned} \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, x_1 \wedge \dots \wedge x_k \rangle_{\otimes^k E} &= \\ &= \sum_{\sigma, \pi} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\pi) \langle x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)}, x_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes x_{\pi(k)} \rangle_{\otimes^k E} \\ &= \sum_{\sigma, \pi} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\pi) \langle x_{\sigma(1)}, x_{\pi(1)} \rangle \dots \langle x_{\sigma(k)}, x_{\pi(k)} \rangle \\ &= \sum_{\sigma, \pi} \text{sign}(\sigma) \text{sign}(\pi \circ \sigma) \langle x_{\sigma(1)}, x_{\pi(\sigma(1))} \rangle \dots \langle x_{\sigma(k)}, x_{\pi(\sigma(k))} \rangle \\ &= k! \sum_{\pi} \text{sign}(\pi) \langle x_1, x_{\pi(1)} \rangle \dots \langle x_k, x_{\pi(k)} \rangle. \end{aligned}$$

### 41.4 Definition (Hodge-Sternoperator)

Sei  $E$  ein orientierter  $m$ -dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann hat  $\wedge^k E$  Dimension  $\binom{m}{k}$ . Und somit ist  $\wedge^k E \cong \wedge^{m-k} E$ . Wir wollen nun einen Isomorphismus  $*$  :  $\wedge^k E \rightarrow \wedge^{m-k} E$  angeben, der nicht von der Wahl einer Basis abhängt. Dieser heißt Hodge-Sternoperator und ist durch folgende implizite Gleichung gegeben:

$$\eta \wedge (*\omega) = \langle \eta, \omega \rangle \cdot \det \text{ für } \eta, \omega \in \wedge^k E.$$

Um zu zeigen, daß dadurch wirklich ein linearer Operator eindeutig bestimmt ist wählen wir eine positiv orientierte Orthonormalbasis  $(e^1, \dots, e^m)$  in  $E$ .

Eine Basis von  $\bigwedge^k E$  ist dann durch die Elemente  $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$  mit  $i_1 < \cdots < i_k$  und eine solche von  $\bigwedge^{m-k} E$  dann durch die Elemente

$$e^1 \wedge \cdots \wedge \overline{e^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{e^{i_k}} \wedge \cdots \wedge e^m$$

gegeben. Wir wollen die Koeffizienten  $\alpha_{j_1, \dots, j_m}$  des Bildes von  $\omega = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$  unter dem Sternoperator bestimmen:

$$*\omega = \sum_{j_1 < \cdots < j_m} \alpha_{j_1, \dots, j_m} e^1 \wedge \cdots \wedge \overline{e^{j_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{e^{j_k}} \wedge \cdots \wedge e^m.$$

Dazu verwenden wir die implizite Gleichung mit

$$\eta := e^{l_1} \wedge \cdots \wedge e^{l_k} \text{ f\u00fcr } l_1 < \cdots < l_k$$

und erhalten

$$\begin{aligned} & \alpha_{l_1, \dots, l_m} e^{l_1} \wedge \cdots \wedge e^{l_k} \wedge e^1 \wedge \cdots \wedge \overline{e^{l_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{e^{l_k}} \wedge \cdots \wedge e^m = \\ & = \eta \wedge (*\omega) = \langle \eta, \omega \rangle \det \\ & = \underbrace{\langle e^{l_1} \wedge \cdots \wedge e^{l_k}, e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \rangle}_{\delta^{(l_1, \dots, l_k), (i_1, \dots, i_k)}} e^1 \wedge \cdots \wedge e^m. \end{aligned}$$

Um das Hackprodukt auf der linken Seite auch in die nat\u00fcrliche Reihenfolge zu bekommen m\u00fcssen wir zuerst  $e^{l_k}$  mit  $e^1 \wedge \cdots \wedge \overline{e^{l_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{e^{l_k}}$  vertauschen und erhalten ein Vorzeichen  $(-1)^{l_k - k}$ , danach  $e^{l_{k-1}}$  mit  $e^1 \wedge \cdots \wedge \overline{e^{l_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{e^{l_{k-1}}}$  und erhalten ein Vorzeichen  $(-1)^{l_{k-1} - k - 1}$  u.s.w. und schlie\u00dflich  $e^{l_1}$  mit  $e^1 \wedge \cdots \wedge \overline{e^{l_1}}$  mit  $(-1)^{l_1 - 1}$  als resultierenden Vorzeichen. Also verschwinden alle  $\alpha_{l_1, \dots, l_m}$  bis auf

$$\alpha_{i_1, \dots, i_m} = (-1)^{i_k - k} \cdots (-1)^{i_1 - 1} = (-1)^{(\sum_{j=1}^k i_j) - k(k+1)/2}.$$

Wir wollen nun zeigen, da\u00df  $*$  bis auf ein Vorzeichen zu sich selbst invers ist. Sei  $\omega = e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k} \in \bigwedge^k E$  gegeben. Dann ist

$$*\omega = (-1)^{(\sum_{j=1}^k i_j) - k(k+1)/2} e^1 \wedge \cdots \wedge \overline{e^{i_1}} \wedge \cdots \wedge \overline{e^{i_k}} \wedge \cdots \wedge e^m$$

und

$$**\omega = (-1)^{1 + \cdots + \overline{l_1} + \cdots + \overline{l_k} + \cdots + m - (m-k)(m-k+1)/2} (-1)^{i_1 + \cdots + i_k - k(k+1)/2} e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$$

Die Berechnung des Vorzeichen ergibt:  $(-1)^{k(m-k)}$ , d.h.  $* \circ * = (-1)^{k(m-k)} : \bigwedge^k E \rightarrow \bigwedge^{n-k} E \rightarrow \bigwedge^k E$ . Dieses Vorzeichen ist genau dann  $-1$ , wenn  $m$  gerade und  $k$  ungerade ist.

Der Hodge-Stern Operator ist eine Isometrie, wie man entweder durch die Wirkung auf einer orthonormal-Basis sofort sieht, oder wie aus

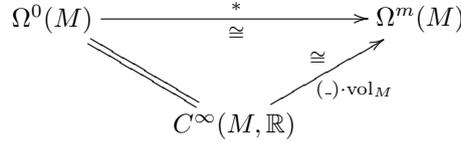
$$\langle *\alpha, *\beta \rangle \cdot \text{vol}_M = *\alpha \wedge **\beta = (-1)^{k(m-k)} *\alpha \wedge \beta = \beta \wedge *\alpha = \langle \beta, \alpha \rangle \text{vol}_M$$

folgt. Umgekehrt h\u00e4tten wir auch die Isometrie-Eigenschaft von  $*$  verwenden k\u00f6nnen um mit dieser Rechnung  $* \circ * = (-1)^{k(m-k)}$  zu zeigen.

F\u00fcr eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  der Dimension  $m$  definieren wir den HODGE-STERNOOPERATOR  $* : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{m-k}(M)$  durch  $(*\omega)(x) := *(\omega(x))$ .

41.5 Spezialfälle

( $k = 0$ )



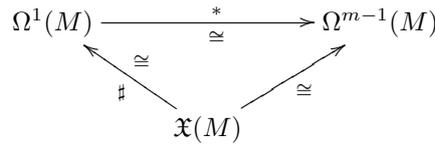
Sei  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ , dann ist  $g \wedge *f = \langle g, f \rangle_{C^\infty(M, \mathbb{R})} \cdot \text{vol}_M$ . Wählen wir  $g := 1$ , so gilt:

$$*f = 1 \wedge *f = f \cdot \text{vol}_M \text{ für } * : C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^m(M)$$

und wegen  $* \circ * = \text{id}$ , ist

$$*(f \cdot \text{vol}_M) = f \text{ für } * : \Omega^m(M) \rightarrow \Omega^1(M) = C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

( $k = 1$ )



Sei  $\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \omega = \sum \omega_i du^i \in \Omega^1(M)$ , wobei  $\omega_i = \sum_j g_{i,j} \xi^j$  und  $\text{vol}_M = \sqrt{G} du^1 \wedge \dots \wedge du^m$ , dann gilt für

$$*\omega = \sum_{i=1}^m \overbrace{\eta_{1, \dots, \hat{i}, \dots, m}}^{\eta_i :=} du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m$$

$$\begin{aligned}
 \eta_i (-1)^{i-1} du^1 \wedge \dots \wedge du^m &= \eta_i du^i \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \\
 &= du^i \wedge (*\omega) = \left\langle du^i, \sum \omega_j du^j \right\rangle \cdot \text{vol}_M \\
 &= \sum_j \omega_j \underbrace{\langle du^i, du^j \rangle_{\Omega^1(M)}}_{g^{i,j}} \cdot \text{vol}_M \\
 &= \sum_j \omega_j g^{i,j} \sqrt{G} du^1 \wedge \dots \wedge du^m,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{da } \langle du^i, du^j \rangle &= \langle \flat(du^i), \flat(du^j) \rangle = \left\langle \sum_k g^{i,k} \frac{\partial}{\partial u^k}, \sum_l g^{j,l} \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle \\
 &= \sum_{k,l} g^{i,k} g^{j,l} \underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle}_{g_{k,l}} = \sum_{k,l} g^{i,k} \delta_k^j = g^{i,j},
 \end{aligned}$$

wobei  $(g^{i,k})$  die inverse Matrix zu  $(g_{i,k})$  ist. Mit dieser Behauptung folgt:

$$\begin{aligned}\eta_i &= \sum_j (-1)^{i-1} \omega_j g^{i,j} \sqrt{G} \quad \text{und somit} \\ * \omega &= \sum_i \eta_i du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \\ &= \sum_i (-1)^{i-1} \sqrt{G} \underbrace{\sum_j g^{i,j} \omega_j}_{\xi^i} du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \\ &= \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} * \circ \sharp : \mathfrak{X}(M) \ni \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} &\mapsto \\ &\mapsto \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \in \Omega^{m-1}(M).\end{aligned}$$

## 42. Graduierte Derivationen

### 42.1 Lemma (Algebra der Differentialformen).

Es ist  $\Omega(M) := \bigoplus_k \Omega^k(M)$  eine graduiert kommutative Algebra bezüglich dem punktweisen Hackprodukt (siehe auch (38.4))

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta)_x(\xi_1, \dots, \xi_{k+i}) &= \\ &= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi} \text{sgn } \pi \cdot \alpha_x(\xi_{\pi(1)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \cdot \beta_x(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+i)}),\end{aligned}$$

für  $\alpha \in \Omega^k(M)$ ,  $\beta \in \Omega^i(M)$  und  $\xi_i \in T_x M$ . Sie ist als Algebra durch  $\{f, df : f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}$  erzeugt.

**Beweis.** Da die Fasern  $\bigwedge T_x^* M = \bigoplus_k \bigwedge^k T_x^* M$  graduiert kommutative Algebren sind, ist auch  $\Omega(M) = \Gamma(\bigwedge T^* M)$  eine graduiert kommutative Algebra. Lokal wird  $\Omega(M)$  durch  $\{f, df : f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}$  erzeugt, denn  $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$ . Um das auch global zu erhalten, benötigen wir einen endlichen Atlas von  $M$ . Für Lindelöf-Mannigfaltigkeiten existiert ein solcher nach (19.11). Wir wählen nun eine Partition der Eins  $\{f_1, \dots, f_N\}$ , welche dem zugehörigen Vektorbündel-Atlas von  $T^* M$  untergeordnet ist. Dann ist  $\omega = \sum_i f_i \omega$  und  $f_i \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} f_i \omega_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$ , wobei die  $u^i$  globale glatte Funktionen auf  $M$  sind, sodaß  $(u^1, \dots, u^m)$  lokale Koordinaten auf  $\text{Trg}(f_i)$  sind.  $\square$

### 42.2 Zurückziehen von Formen

Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt, dann haben wir die Tangentialabbildung  $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$ , sowie deren transponierte  $(T_p f)^t : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$ . Falls nun  $p$  nicht durch  $f(p)$  determiniert ist, d.h.  $f$  nicht injektiv ist, oder zu gewissen  $q \in N$  kein  $p$  mit  $f(p) = q$  existiert, d.h.  $f$  nicht surjektiv ist, läßt sich keine Abbildung  $T^* f : T^* N \rightarrow T^* M$  aus den  $(T_p f)^t$  zusammensetzen. Es läßt sich aber nach (31.11) dennoch ganz allgemein aus

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^k TM & \xrightarrow{\bigwedge^k T f} & \bigwedge^k TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

eine Abbildung

$$f^* := \left( \bigwedge^k T f \right)^* : \Omega^k(N) := \Gamma \left( \left( \bigwedge^k TN \right)^* \rightarrow N \right) \rightarrow \Gamma \left( \left( \bigwedge^k TM \right)^* \rightarrow M \right) =: \Omega^k(M)$$

definieren. Dabei heißt  $f^*(\omega)$  die mit  $f$  ZURÜCKGEZOGENE FORM zu  $\omega$ .

$$(f^*\omega)_p(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k) := \omega_{f(p)} \left( \left( \bigwedge^k T f \right) (\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_k) \right)$$

oder unter Verwendung des Isomorphismuses  $\left( \bigwedge^k T_x M \right)^* \cong L_{Alt}^k(T_x M; \mathbb{R})$  auch als

$$(f^*\omega)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega_{f(p)}(T_p f \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p f \cdot \xi_k|_p).$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} f^*(dg)_p(\xi_p) &= (dg)_{f(p)}(T_p f \cdot \xi_p) \\ &= \text{pr}_2 \cdot T_{f(p)} g \cdot T_p f \cdot \xi_p \\ &= \text{pr}_2 \cdot T_p(g \circ f) \cdot \xi_p \\ &= d(g \circ f)_p \cdot \xi_p \end{aligned}$$

Das so definierte  $f^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$  ist ein Algebramorphismus, wie man leicht nachrechnet. Mittels des Isomorphismuses  $\left( \bigwedge^k TM \right)^* \cong \bigwedge^k (T^* M)$  kann man  $f^*$  für  $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega^1(M)$  auch durch  $f^*(\omega_1 \wedge \dots \wedge \omega_k) := f^*(\omega_1) \wedge \dots \wedge f^*(\omega_k)$  definieren, wobei  $f^*(\omega_k)$  die in (31.12) definierte zurückgezogene 1-Form ist. Weiters gilt:

$$\begin{aligned} f^*(g) &= g \circ f \text{ und} \\ f^*(dg) &= d(g \circ f) \text{ für } g \in C^\infty(N, \mathbb{R}) \\ (f_1 \circ f_2)^* &= f_2^* \circ f_1^* \text{ für zusammensetzbare Abbildungen } f_1 \text{ und } f_2 \end{aligned}$$

Seien  $(u^i)_{i=1}^m$  lokale Koordinaten auf  $M$  und  $(v^j)_{j=1}^n$  lokale Koordinaten auf  $N$ . Dann läßt sich  $\omega \in \Omega^k(N)$  lokal als

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1, \dots, j_k} dv^{j_1} \wedge \dots \wedge dv^{j_k}$$

schreiben. Die zurückgezogene Form muß eine lokale Darstellung der Form

$$f^*(\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \eta_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$$

besitzen. Wir berechnen nun die lokalen Koeffizienten  $\eta_{i_1, \dots, i_k}$  von  $f^*(\omega)$ :

$$\begin{aligned} \eta_{i_1, \dots, i_k}(x) &= f^*(\omega)_x \left( \frac{\partial}{\partial u^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{i_k}} \right) \\ &= \omega_{f(x)} \left( \bigwedge^k T_x f \left( \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial u^{i_k}} \right) \right) \\ &\stackrel{(38.6)}{=} \omega_{f(x)} \left( \sum_{j_1 < \dots < j_k} \det \left( \frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \frac{\partial}{\partial v^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial v^{j_k}} \right) \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \det \left( \frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \omega_{f(x)} \left( \frac{\partial}{\partial v^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^{j_k}} \right) \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \det \left( \frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \omega_{j_1, \dots, j_k}(f(x)). \end{aligned}$$

Wir können dies auch durch die Multiplikativität von  $f^*$  wie folgt erhalten:

$$\begin{aligned} f^*(dv^{j_1} \wedge \dots \wedge dv^{j_k}) &= d(v^{j_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(v^{j_k} \circ f) \\ &= \left( \sum_{i_1} \frac{\partial(v^{j_1} \circ f)}{\partial u^{i_1}} du^{i_1} \right) \wedge \dots \wedge \left( \sum_{i_k} \frac{\partial(v^{j_k} \circ f)}{\partial u^{i_k}} du^{i_k} \right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \det \left( \frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \cdot du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}. \end{aligned}$$

Also ist

$$f^*(\omega) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ i_1, \dots, i_k = 1 \dots m}} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_k \\ j_1, \dots, j_k = 1 \dots n}} \omega_{(j_1, \dots, j_k)} \rho_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$$

$$\text{Wobei } \rho_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} := \det \left( \frac{\partial(v^{j_1}, \dots, v^{j_k})}{\partial(u^{i_1}, \dots, u^{i_k})} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial v^{j_1}}{\partial u^{i_1}} & \dots & \frac{\partial v^{j_1}}{\partial u^{i_k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v^{j_k}}{\partial u^{i_1}} & \dots & \frac{\partial v^{j_k}}{\partial u^{i_k}} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \frac{\partial v^j}{\partial u^i} := \frac{\partial}{\partial u^i}(v^j \circ f),$$

In (29.1) haben wir die kommutative Algebra  $A := C^\infty(M, \mathbb{R})$  betrachtet. Den Raum  $\text{Der}(A)$  ihrer Derivationen konnten wir mit dem Raum  $\mathfrak{X}(M)$  der Vektorfelder auf  $M$  identifizieren. Wir haben auf  $\text{Der}(A)$  die Struktur einer Lie-Algebra gefunden. Wir wollen ähnliche Ideen nun auf die graduiert kommutative Algebra  $A = \Omega(M)$  der Differentialformen auf  $M$  anwenden.

### 42.3 Definition (graduierte Derivation)

Eine Abbildung  $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  heißt GRADUIERTE DERIVATION VOM GRAD  $d$ , falls  $D$  linear ist, für alle  $k$  den Summanden  $\Omega^k(M)$  in  $\Omega^{d+k}(M)$  abbildet und falls für

alle  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $\eta \in \Omega(M)$  die Produktregel  $D(\omega \wedge \eta) = D(\omega) \wedge \eta + (-1)^{dk} \omega \wedge D\eta$  gilt.

Mit  $\text{Der}_d(\Omega(M))$  bezeichnen wir den VEKTORRAUM ALLER GRADUIERTEN DERIVATIONEN von  $\Omega(M)$  vom Grad  $d$ , und mit  $\text{Der}(\Omega(M))$  bezeichnen wir die direkte Summe  $\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \text{Der}_d(\Omega(M))$ .

Allgemeiner heißt für eine glatte Abbildung  $g : N \rightarrow M$  eine Abbildung  $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N)$  GRADUIERTE DERIVATION ÜBER  $g^*$ , falls  $D$  linear ist, für alle  $k$  den Summanden  $\Omega^k(M)$  in  $\Omega^{d+k}(N)$  abbildet und falls die Produktregel  $D(\omega \wedge \eta) = D(\omega) \wedge g^*(\eta) + (-1)^{dk} g^*(\omega) \wedge D\eta$  für alle  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $\eta \in \Omega(M)$  gilt.

#### 42.4 Lemma (Eindeutigkeit graduiertter Derivationen).

Es sei  $g : N \rightarrow M$   $C^\infty$ . Jede graduierte Derivation  $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N)$  über dem Algebra-Homomorphismus  $g^* : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N)$  ist eindeutig durch die Werte  $D(f)$  und  $D(df)$  für alle  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  festgelegt.

**Beweis.** Da  $f$  und  $df$  die Algebra  $\Omega(M)$  erzeugen folgt dies sofort aus (42.1). Wollen wir aber die dort verwendete Dimensionstheorie nicht hineinstecken so können wir dies auch wie folgt zeigen:

Hätten wir zwei solche Derivationen, so betrachten wir die Differenz  $D$ . Wir müssen zeigen:  $\forall f : D(f) = 0, D(df) = 0 \Rightarrow D = 0$ .

Wir behaupten zuerst, daß die Derivation  $D$  ein lokaler Operator ist. Sei nämlich  $\omega \in \Omega(M)$  lokal um  $g(x)$  gleich 0. Dann wählen wir ein  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit  $f(g(x)) = 1$  und  $f\omega = 0$ , und erhalten

$$0 = D(0) = D(f\omega) = \underbrace{D(f)}_{=0} \wedge g^*(\omega) + g^*(f) \cdot D(\omega)$$

Und an der Stelle  $x \in N$  gilt  $0 = \underbrace{f(g(x))}_{=1} \wedge D(\omega)(x) = D(\omega)(x)$ . Da  $D$  ein lokaler und

linearer Operator ist, dürfen wir ihn durch eine lokale Darstellung durchtauschen:

$$\begin{aligned} D(\omega) &= D\left(\sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}\right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left( \underbrace{D(\omega_{i_1, \dots, i_p})}_{=0} \wedge g^*(du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^p g^*(\omega_{i_1, \dots, i_p}) g^*(du^{i_1}) \wedge \dots \wedge \underbrace{D(du^{i_k})}_{=0} \wedge \dots \wedge du^{i_p} \right) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

**42.5 Bemerkung.** Es folgt aus (42.4), daß  $\text{Der}_d(\Omega(M)) = \{0\}$  für  $d < -1$ . Denn  $D(\Omega^k(M)) \subseteq \Omega^{k+d}(M) = \{0\}$  für  $k + d < 0$  und insbesondere für  $k \in \{0, 1\}$  und  $d < -1$ .

Wir wollen als nächstes  $\text{Der}_{-1}(\Omega(M))$  bestimmen. Sei also  $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  eine graduierte Derivation vom Grad  $d = -1$ . Dann ist  $D(C^\infty(M, \mathbb{R})) = \{0\}$  und die lineare Abbildung  $D \circ d : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  erfüllt  $(D \circ d)(f \cdot g) = D(g \cdot df + f \cdot dg) = D(g) \wedge df + (-1)^{0 \cdot d} g \cdot D(df) + D(f) \wedge dg + (-1)^{0 \cdot d} f \cdot$

$D(dg) = (D \circ d)f \cdot g + f \cdot (D \circ d)g$ , wegen  $D(g) = 0 = D(f)$ . Also ist  $D \circ d$  auf  $C^\infty(M, \mathbb{R})$  eine Derivation und somit durch ein Vektorfeld  $\xi$  gegeben, d.h.  $D(f) = 0$  und  $D(df) = \xi(f) = df(\xi)$  für alle  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Wir werden in (42.6) zeigen, daß wir durch  $(i_\xi \omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_k)$  zu jedem Vektorfeld  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  eine graduierte Derivation  $i_x s$  vom Grad  $d = -1$  definieren können.

Nun zu  $\text{Der}_0(\Omega(M))$ . Sei also  $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  eine graduierte Derivation vom Grad  $d = 0$ . Dann wirkt  $D$  auf  $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  derivativ, ist also durch ein Vektorfeld  $\xi$  gegeben, d.h.

$$D(f) = \xi(f) = \mathcal{L}_\xi(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* f \text{ (siehe (29.10)).}$$

Der letzte Ausdruck  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* \omega$  macht aber auch für  $\omega \in \Omega(M)$  einen Sinn und wir werden in (42.6) zeigen, daß dadurch für jedes Vektorfeld  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  eine Derivation  $\mathcal{L}_\xi$  vom Grad  $d = 0$  auf  $\Omega(M)$  definiert wird. Man kann zeigen, daß dies alle Derivationen vom Grad 0 sind, die zusätzlich  $D(df) = d(Df)$  erfüllen. Um eine globale Formel für  $\mathcal{L}_\xi$  zu erhalten, differenzieren wir die Funktion  $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)$  (für  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$ ) in Richtung von  $\xi$  an der Stelle  $x \in M$  und erhalten:

$$\begin{aligned} (\xi \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k))_x &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \circ \text{Fl}_t^\xi)_x \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \omega_{\text{Fl}_t^\xi(x)}(\xi_1, \dots, \xi_k) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \omega_{\text{Fl}_t^\xi(x)}(T \text{Fl}_t^\xi \cdot T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_1, \dots, T \text{Fl}_t^\xi \cdot T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_k) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \left( ((\text{Fl}_t^\xi)^* \omega)_x (T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_1|_{\text{Fl}_t^\xi(x)}, \dots, T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_k|_{\text{Fl}_t^\xi(x)}) \right) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \left( ((\text{Fl}_t^\xi)^* \omega)_x ((\text{Fl}_t^\xi)^*(\xi_1)(x), \dots, (\text{Fl}_t^\xi)^*(\xi_k)(x)) \right) \\ &= \left( \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} ((\text{Fl}_t^\xi)^* \omega)_x \right) (\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \omega_x(\xi_1(x), \dots, \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} ((\text{Fl}_t^\xi)^*(\xi_j)(x)), \dots, \xi_k(x)) \\ &= (\mathcal{L}_\xi \omega)_x(\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) \\ &\quad + \sum_{j=1}^k \omega_x(\xi_1(x), \dots, [\xi, \xi_j](x), \dots, \xi_k(x)), \end{aligned}$$

und somit

$$\mathcal{L}_\xi \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \xi \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) - \sum_{i=1}^k \omega(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, [\xi, \xi_i], \xi_{i+1}, \dots, \xi_k).$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_\xi df)(\eta) &= \xi(df(\eta)) - df([\xi, \eta]) = \xi(\eta \cdot f) - [\xi, \eta](f) = \eta(\xi \cdot f) \\ &= d(\xi \cdot f)(\eta) \end{aligned}$$

Schließlich wollen wir noch eine ausgezeichnete Derivation vom Grad  $d = 1$  angeben. Nach (37.4) hoffen wir ja durch die Abweichung der Ableitung einer 1-Form (oder

allgemeiner einer  $k$ -Form) davon symmetrisch zu sein, zu erkennen ob die Form selbst Ableitung einer Funktion (bzw.  $k - 1$ -Form) ist. Betrachten wir dazu zuerst den Fall, wo  $M = U$  offen in einen Vektorraum  $E$  ist. Dann ist eine  $k$ -Form auf  $U$  eine Abbildung

$$\omega : U \rightarrow L_{Alt}^k(E; \mathbb{R})$$

und ihre Ableitung ist

$$\omega' : U \rightarrow L(E, L_{Alt}^k(E; \mathbb{R})).$$

Setzen wir diese mit dem Alternator von

$$L(E, L_{Alt}^k(E; \mathbb{R})) \subseteq L(E, L^k(E; \mathbb{R})) \cong L^{k+1}(E, \mathbb{R}) \xrightarrow{alt} L_{Alt}^{k+1}(E, \mathbb{R})$$

zusammen, so erhalten wir die Abweichung  $d\omega$  davon, daß  $\omega'(x)$  symmetrisch ist für alle  $x \in U$ . Es ist also

$$\begin{aligned} d\omega(x)(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \omega'(x)(\xi_{\sigma(0)})(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \\ &= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (-1)^i \omega'(x)(\xi_i)(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k). \end{aligned}$$

Um nun eine globale Formel für  $d$  auf beliebige Mannigfaltigkeiten  $M$  zu erhalten ersetzen wir die Vektoren  $\xi_i \in E$  durch Vektorfelder  $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$  und differenzieren  $\omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k)$  an der Stelle  $x \in M$  in Richtung  $\xi_i(x)$  und erhalten:

$$\begin{aligned} \left( \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \right)'(x)(\xi_i(x)) &= \omega'(x)(\xi_i(x))(\xi_0(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \xi_k(x)) \\ &\quad + \sum_{j < i} \omega(x)(\dots, \xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots) \\ &\quad + \sum_{j > i} \omega(x)(\dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \dots) \end{aligned}$$

Und Einsetzen in obige Formel liefert

$$\begin{aligned} (k+1)d\omega(x)(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \omega'(x)(\xi_i(x))(\xi_0(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \xi_k(x)) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (\xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k))(x) \\ &\quad - \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \omega(x)(\xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \xi_0(x), \dots, \overline{\xi_j(x)}, \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots) \\ &\quad - \sum_{j > i} (-1)^{i+j-1} \omega(x)(\xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \xi_0(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \overline{\xi_j(x)}, \dots) \\ &= \left( \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi(k)) \right)(x). \end{aligned}$$

Wegen des lästigen Faktors  $(k+1)$  ersetzen wir  $dw$  besser durch  $(k+1)d\omega$ .

#### 42.6 Lemma (Lie-Algebra der graduierten Derivationen).

Der Raum  $\text{Der}(\Omega(M))$  ist eine graduierte Lie-Algebra bezüglich der punktweisen Vektoroperationen und dem graduierten Kommutator als Lie-Klammer:

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 \circ D_1 \text{ für } D_i \in \text{Der}_{d_i}(\Omega(M))$$

Im Detail bedeutet das:

1. Die Klammer  $[\cdot, \cdot] : \text{Der}_{d_1}(\Omega(M)) \times \text{Der}_{d_2}(\Omega(M)) \rightarrow \text{Der}_{d_1+d_2}(\Omega(M))$  ist bilinear für alle  $d_1, d_2$ .
2. Sie ist GRADUIERT ANTIKOMMUTATIV:  $[D_1, D_2] + (-1)^{d_1 d_2} [D_2, D_1] = 0$ .
3.  $[D_0, \cdot]$  ist eine graduierte Derivation bezüglich  $[\cdot, \cdot]$ , d.h. es gilt die GRADUIERTE JACOBI-IDENTITÄT

$$[D_0, [D_1, D_2]] = [[D_0, D_1], D_2] + (-1)^{d_0 d_1} [D_1, [D_0, D_2]],$$

oder äquivalent und zyklisch symmetrisch

$$(-1)^{d_0 d_2} [D_0, [D_1, D_2]] + (-1)^{d_1 d_0} [D_1, [D_2, D_0]] + (-1)^{d_2 d_1} [D_2, [D_0, D_1]] = 0.$$

**Beweis.** Wir führen den Beweis abstrakt für eine beliebige graduiert-kommutative Algebra  $A$  anstelle von  $\Omega(M)$ .

Behauptung:  $[D_1, D_2] \in \text{Der}_{d_1+d_2}(A)$  für  $D_i \in \text{Der}_{d_i}(A)$  für  $i = 1, 2$ .

$$\begin{aligned} [D_1, D_2](X \cdot Y) &= (D_1 \circ D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 \circ D_1)(X \cdot Y) \\ &= D_1(D_2 X \cdot Y + (-1)^{x d_2} X \cdot D_2 Y) \\ &\quad - (-1)^{d_1 d_2} D_2(D_1 X \cdot Y + (-1)^{x d_1} X \cdot D_1 Y) \\ &= D_1 D_2 X \cdot Y + (-1)^{d_1(d_2+x)} D_2 X \cdot D_1 Y \\ &\quad + (-1)^{x d_2} D_1 X \cdot D_2 Y + (-1)^{x d_2 + x d_1} X \cdot D_1 D_2 Y \\ &\quad - (-1)^{d_1 d_2} D_2 D_1 X \cdot Y - (-1)^{d_1 d_2 + (d_1+x)d_2} D_1 X \cdot D_2 Y \\ &\quad - (-1)^{d_1 d_2 + x d_1} D_2 X \cdot D_1 Y - (-1)^{d_1 d_2 + d_1 x + d_2 x} X \cdot D_2 D_1 Y \\ &= [D_1, D_2]X \cdot Y + (-1)^{x(d_1+d_2)} X \cdot [D_1, D_2]Y. \end{aligned}$$

Klarerweise ist  $[\cdot, \cdot]$  bilinear und graduiert antikommutativ. Verbleibt die graduierte Jacobi-Identität zu zeigen:

$$\begin{aligned} [D_0, [D_1, D_2]] - [[D_0, D_1], D_2] - (-1)^{d_0 d_1} [D_1, [D_0, D_2]] &= \\ = [D_0, D_1 D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 D_1] - [D_0 D_1 - (-1)^{d_0 d_1} D_1 D_0, D_2] \\ - (-1)^{d_0 d_1} [D_1, D_0 D_2 - (-1)^{d_0 d_2} D_2 D_0] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= +D_0D_1D_2 - (-1)^{d_1d_2}D_0D_2D_1 \\
&\quad - (-1)^{(d_1+d_2)d_0}D_1D_2D_0 + (-1)^{d_1d_2+d_0(d_1+d_2)}D_2D_1D_0 \\
&\quad - D_0D_1D_2 + (-1)^{d_0d_1}D_1D_0D_2 \\
&\quad + (-1)^{(d_0+d_1)d_2}D_2D_0D_1 - (-1)^{d_0d_1+(d_0+d_1)d_2}D_2D_1D_0 \\
&\quad - (-1)^{d_0d_1}D_1D_0D_2 + (-1)^{d_0d_1+d_0d_2}D_1D_2D_0 \\
&\quad + (-1)^{d_0d_1+(d_0+d_2)d_1}D_0D_2D_1 - (-1)^{d_0(d_1+d_2)+(d_0+d_2)d_1}D_2D_0D_1 \\
&= 0. \quad \square
\end{aligned}$$

**42.7 Theorem (Die wichtigsten graduierten Derivationen).** Sei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ .

- ( $i_\xi$ ). Durch  $i_\xi(f) := 0$ ,  $i_\xi(df) := \xi \cdot f$  ist eine graduierte Derivation  $i_\xi$  vom Grad  $-1$ , der EINSETZOPERATOR;  
( $\mathcal{L}_\xi$ ). durch  $\mathcal{L}_\xi(f) := \xi \cdot f$ ,  $\mathcal{L}_\xi(df) := d(\xi \cdot f)$  ist eine graduierte Derivation  $\mathcal{L}_\xi$  vom Grad  $0$ , die LIE-ABLEITUNG;  
(d). und durch  $d(f) := df$ ,  $d(df) := 0$  ist eine graduierte Derivation  $d$  vom Grad  $+1$ , die ÄUSSERE ABLEITUNG, festgelegt.

Globale Formeln für diese graduierten Derivationen sind mit  $\omega \in \Omega^k(M)$  und  $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$  gegeben durch:

$$(\iota_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) := \omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1})$$

$$(\mathcal{L}_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) := \xi_0 \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) - \sum_{i=1}^k \omega(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, [\xi_0, \xi_i], \xi_{i+1}, \dots, \xi_k)$$

$$\begin{aligned}
(d\omega)(\xi_0, \dots, \xi_k) &:= \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

Die graduierten Kommutatoren sind durch folgende Tabelle gegeben:

| $[D_1, D_2]$      | $i_\eta$              | $\mathcal{L}_\eta$          | $d$                |
|-------------------|-----------------------|-----------------------------|--------------------|
| $i_\xi$           | $0$                   | $-\iota_{[\xi, \eta]}$      | $-\mathcal{L}_\xi$ |
| $\mathcal{L}_\xi$ | $\iota_{[\xi, \eta]}$ | $\mathcal{L}_{[\xi, \eta]}$ | $0$                |
| $d$               | $\mathcal{L}_\eta$    | $0$                         | $0$                |

Falls  $\eta \in \mathfrak{X}(N)$  verwandt mit  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  bezüglich einem glatten  $g : M \rightarrow N$  ist, d.h.  $Tg \circ \xi = \eta \circ g$  erfüllt ist, so gilt:

$$g^* \circ i_\eta = i_\xi \circ g^*, \quad g^* \circ \mathcal{L}_\eta = \mathcal{L}_\xi \circ g^*, \quad g^* \circ d = d \circ g^*$$

Weiters gilt:  $\iota_{f\xi}\omega = f i_\xi\omega$ ,  $\mathcal{L}_{f\xi}\omega = f \mathcal{L}_\xi\omega + df \wedge i_\xi\omega$  und  $(\mathcal{L}_\xi\omega)(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\text{Fl}_t^\xi)^*\omega|_x$

**Beweis.** Wir führen den Beweis in 14 Schritten:

**Behauptung.**  $i_\xi \omega \in \Omega^{k-1}(M)$ :

Offensichtlich ist  $i_\xi \omega$  alternierend und  $k+1$ -linear und es gilt

$$\begin{aligned} i_\xi \omega(f\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) &= \omega(\xi, f\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = f \omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\ &= f i_\xi \omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}). \end{aligned}$$

**Behauptung.**  $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$ :

Offensichtlich ist  $d\omega$  ist  $(k+1)$ -linear und alternierend. Die  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Homogenität ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned} d\omega(f\xi_0, \dots, \xi_k) &= (f\xi_0) \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \\ &\quad + \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i \cdot f\omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\ &\quad + \sum_{j>i=0} (-1)^j \omega([f\xi_0, \xi_j], \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\ &\quad + \sum_{j>i>0} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], f\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\ &= (f\xi_0)\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \\ &\quad + \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i(f) \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\ &\quad + \sum_{i>0} (-1)^i f(\xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k)) \\ &\quad + \sum_{j>i=0} (-1)^j \omega(f[\xi_0, \xi_j] - \xi_j(f)\xi_0, \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\ &\quad + f \sum_{j>i>0} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\ &= f d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) \\ &\quad + \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i(f) \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\ &\quad - \sum_{j>i=0} (-1)^j \xi_j(f) \omega(\xi_0, \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\ &= f d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k). \end{aligned}$$

**Behauptung.**  $i_\xi \in \text{Der}_{-1}(\Omega(M))$ . Sei dazu  $\alpha \in \Omega^{k+1}$  und  $\beta \in \Omega^l$ , dann ist:

$$\begin{aligned}
i_{\xi_0}(\alpha \wedge \beta)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) &= \\
&= (\alpha \wedge \beta)(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k+l}) \\
&= \frac{1}{(k+1)!l!} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\
&= \sum_{\substack{\pi \\ \text{stkw.} \nearrow}} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\
&= \sum_{\pi(0)=0} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\
&\quad + \sum_{\pi(k+1)=0} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\
&= \left( (i_{\xi_0} \alpha) \wedge \beta \right) (\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) \\
&\quad + \sum_{\substack{\pi' \\ \text{stkw.} \nearrow}} (-1)^{k+1} \text{sgn}(\pi') \alpha(\xi_{\pi'(1)}, \dots, \xi_{\pi'(k+1)}) \beta(\xi_0, \xi_{\pi'(k+2)}, \dots, \xi_{\pi'(k+l)}) \\
&= \left( (i_{\xi_0} \alpha) \wedge \beta + (-1)^{k+1} \alpha \wedge (i_{\xi_0} \beta) \right) (\xi_1, \dots, \xi_{k+l}).
\end{aligned}$$

Dabei ist  $\pi' := \pi \circ (k+1, k, \dots, 1, 0)$  jene Permutation, die 0 auf 0 abbildet, auf  $i+1 \leq k+1$  mit  $\pi(i)$  übereinstimmt, und auf  $i > k+1$  mit  $\pi$  ident ist.

**Behauptung.**  $d(f\omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$

$$\begin{aligned}
d(f\omega)(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \\
&= \sum_i (-1)^i \xi_i \cdot (f\omega)(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{j>i} (-1)^{i+j} f\omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_i (-1)^i \xi_i (f) \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_i (-1)^i f \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{j>i} (-1)^{i+j} f\omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_i (-1)^i df(\xi_i) \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) + f d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) \\
&= (df \wedge \omega + f \wedge d\omega)(\xi_0, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

**Behauptung.**  $d$  ist ein lokaler Operator

Sei dazu  $\omega|_U = 0$  und  $x \in U$ . Dann existiert ein  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  mit  $\text{Trg } f \subseteq U$ ,

$f(x) = 1$  und  $df(x) = 0$ . Folglich ist  $f\omega = 0$  und damit  $0 = d(f\omega)(x) = df(x) \wedge \omega(x) + f(x) \cdot d\omega(x) = d\omega(x)$ .

**Behauptung.**  $d(du^I) = 0$ , wobei  $du^I := du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_{k-1}}$  für  $I := (i_1, \dots, i_{k-1})$ .

$$\begin{aligned} d(du^I)\left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}}\right) &= \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}\right) du^I \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}}\right) \\ &\quad + \sum_{l>i} (-1)^{i+l} du^I \left(\left[\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}, \frac{\partial}{\partial u^{j_l}}\right], \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}}, \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial u^{j_l}}}, \dots\right) \\ &= 0, \quad \text{da } \left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^l}\right] = 0 \text{ und } du^i \left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) \text{ konstant ist.} \\ \Rightarrow d\left(\sum_I \omega_I du^I\right) &= \sum_I d\omega_I \wedge du^I + \omega_I \wedge ddu^I = \sum_{i,I} \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial u^i}\right) du^i \wedge du^I \end{aligned}$$

**Behauptung.**  $d \in \text{Der}_{+1}(\Omega(M))$ , i.e.  $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|I|} \alpha \wedge d\beta$ . mit  $\alpha = \sum_I \alpha_I du^I$  und  $\beta = \sum_J \beta_J du^J$ .

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{I,J} d(\alpha_I \beta_J du^I \wedge du^J) \\ &= \sum_{I,J,i} \frac{\partial(\alpha_I \beta_J)}{\partial u^i} du^i \wedge du^I \wedge du^J + \sum_{I,J} \alpha_I \beta_J d(du^I \wedge du^J) \\ &= \sum_{I,i} \frac{\partial \alpha_I}{\partial u^i} du^i \wedge du^I \wedge \sum_J \beta_J du^J \\ &\quad + (-1)^k \sum_I \alpha_I du^I \wedge \sum_{J,i} \frac{\partial \beta_J}{\partial u^i} du^i \wedge du^J \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|I|+1} \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

**Behauptung.**  $d$  und  $i_\xi$  erfüllen die ‘‘Anfangsbedingungen’’.  
Das folgt sofort durch Einsetzen in die globalen Formeln, z.B.:

$$df(\xi_0) = \sum_{i=0}^0 \xi_0 \cdot f(\overline{\xi_0}) + \sum_{\emptyset} = \xi_0(f).$$

**Behauptung.** Es gelten die Formeln für die Kommutatoren von Einsetzoperatoren beziehungsweise für  $d$ .

Wegen (42.4) genügt es die ‘‘Anfangswerte’’ zu überprüfen, z.B.:

$$\begin{aligned} [i_\xi, i_\eta] &= 0, \quad \text{da Derivation vom Grad } -2 \\ [d, d](f) &= (d \circ d - (-1)^{-1} d \circ d)(f) = 2d(df) = 0 \\ [d, d](df) &= 2(d \circ d)(df) = 2d(d(df)) = 2d(0) = 0 \end{aligned}$$

**Behauptung.** Der Kommutator  $[d, i_\xi]$  ist durch die globale Formel von  $\mathcal{L}_\xi$  gegeben, also ist  $\mathcal{L}_\xi \in \text{Der}_0(\Omega(M))$ .

$$\begin{aligned}
& ([d, \iota_{\xi_0}]\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) = \\
& = d(\iota_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) + \iota_{\xi_0}(d\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) \\
& = \sum_i (-1)^{i-1} \xi_i \cdot \iota_{\xi_0}\omega(\xi_1, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
& \quad + \sum_{0 < i < j} (-1)^{i-1+j-1} \iota_{\xi_0}\omega([\xi_i, \xi_j], \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
& \quad + d\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k) \\
& = - \sum_{i > 0} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
& \quad + \sum_{0 < i < j} (-1)^{i+j} \omega(\xi_0, [\xi_i, \xi_j], \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
& \quad + \sum_{i \geq 0} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
& \quad + \sum_{0 \leq i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
& = \xi_0 \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) + \sum_{j > 0} (-1)^j \omega([\xi_0, \xi_j], \xi_1, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
& = \xi_0 \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) - \sum_{j > 0} \omega(\xi_1, \dots, [\xi_0, \xi_j], \dots, \xi_k) \\
& = (\mathcal{L}_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

**Behauptung.** Es gilt die ‘‘Anfangsbedingung’’ für  $\mathcal{L}_\xi$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi &= d \circ i_\xi - (-1)^{(-1)(+1)} i_\xi \circ d \quad \Rightarrow \\
\mathcal{L}_\xi(f) &= d(i_\xi f) + i_\xi(df) = 0 + \xi \cdot f \\
\mathcal{L}_\xi(df) &= d(i_\xi df) + i_\xi(d^2 f) = d(\xi \cdot f) + 0.
\end{aligned}$$

**Behauptung.** Es gelten die Formeln für Kommutatoren mit  $\mathcal{L}_\xi$ . Wieder brauchen wir nur die Anfangswerte zu überprüfen (oder wir verwenden die

Jacobi-Identität):

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_\xi, i_\eta](f) &= 0 = \iota_{[\xi, \eta]}(f), \text{ da der Grad } -1 \text{ ist} \\
[\mathcal{L}_\xi, i_\eta](df) &= \mathcal{L}_\xi(\eta \cdot f) - i_\eta(d(\xi \cdot f)) \\
&= \xi \cdot (\eta \cdot f) - \eta \cdot (\xi \cdot f) = [\xi, \eta](f) = \iota_{[\xi, \eta]}(df) \\
[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta](f) &= \xi \cdot \eta \cdot f - \eta \cdot \xi \cdot f = [\xi, \eta](f) = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}(f) \\
[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta](df) &= \mathcal{L}_\xi(d(\eta \cdot f)) - \mathcal{L}_\eta(d(\xi \cdot f)) \\
&= d(\xi \cdot \eta \cdot f - \eta \cdot \xi \cdot f) = d([\xi, \eta] \cdot f) = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}(df) \\
[d, \mathcal{L}_\xi](f) &= d(\xi \cdot f) - \mathcal{L}_\xi(df) = 0 \\
[d, \mathcal{L}_\xi](df) &= d(d(\xi \cdot f)) - \mathcal{L}_\xi(ddf) = 0.
\end{aligned}$$

**Behauptung.** Es gelten die Vertauschbarkeitsrelationen mit  $g^*$ .

$$\begin{aligned}
(g^* \circ \iota_\eta)(df) &= g^*(df(\eta)) = g^*(\eta(f)) = \eta(f) \circ g \\
&= \xi(f \circ g) = d(f \circ g)(\xi) = i_\xi(g^*(df)) = (i_\xi \circ g^*)(df)
\end{aligned}$$

oder direkt

$$\begin{aligned}
(g^* \circ i_\eta)\omega_p(\xi_1, \dots, \xi_k) &= g^*(i_\eta\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) \\
&= (i_\eta\omega)|_{g(p)}(T_p g \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p g \cdot \xi_k|_p) \\
&= \omega|_{g(p)}(\eta|_{g(p)}, T_p g \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p g \cdot \xi_k|_p) \\
&= \omega|_{g(p)}(T_p g \cdot \xi|_p, T_p g \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p g \cdot \xi_k|_p) \\
&= (g^*\omega)_p(\xi|_p, \xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) \\
&= (i_\xi(g^*\omega))(\xi_1, \dots, \xi_k)_p \\
&= (i_\xi \circ g^*)\omega_p(\xi_1, \dots, \xi_k);
\end{aligned}$$

Für  $d$  haben wir das folgende bereits in (42.2) gezeigt:

$$\begin{aligned}
(g^* \circ d)(f)(\xi|_p) &= g^*(df)(\xi|_p) = df|_{g(p)}(T_p g \cdot \xi|_p) \\
&= d(f \circ g)(\xi|_p) = d(g^*(f))(\xi|_p) = (d \circ g^*)(f)(\xi|_p) \\
(g^* \circ d)(df) &= g^*(ddf) = g^*(0) = 0 = d^2(g^*f) \\
&= d((d \circ g^*)(f)) = d((g^* \circ d)(f)) = (d \circ g^*)(df);
\end{aligned}$$

Für  $\mathcal{L}$  folgt es nun durch Anwenden der Kommutatorformel:

$$\begin{aligned}
g^* \circ \mathcal{L}_\eta &= g^*(d \circ i_\eta + i_\eta \circ d) \\
&= g^* \circ d \circ i_\eta + g^* \circ i_\eta \circ d \\
&= d \circ g^* \circ i_\eta + g^* \circ i_\eta \circ d \\
&= d \circ i_\xi \circ g^* + i_\xi \circ g^* \circ d \\
&= (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \circ g^* \\
&= \mathcal{L}_\xi \circ g^*.
\end{aligned}$$

**Behauptung.** Es gelten die Homogenitätsformeln für  $\iota_{f\xi}$  und  $\mathcal{L}_{f\xi}$ .

$$\begin{aligned}\iota_{f\xi}\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) &= \omega(f\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = f \cdot \omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\ &= f \cdot i_\xi\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\ \mathcal{L}_{f\xi}\omega &= [d, \iota_{f\xi}]\omega = d(\iota_{f\xi}\omega) + \iota_{f\xi}(d\omega) \\ &= d(f \cdot i_\xi\omega) + f \cdot i_\xi(d\omega) \\ &= df \wedge i_\xi\omega + f \cdot d(i_\xi\omega) + f \cdot i_\xi(d\omega) \\ &= df \wedge i_\xi\omega + f \cdot \mathcal{L}_\xi\omega.\end{aligned}$$

**Behauptung.**  $\mathcal{L}_\xi$  ist die Lie-Ableitung aus (29.9).

Beide Seiten definieren eine Derivation vom Grad 0, also genügt es auf Funktionen und exakten 1-Formen auszutesten:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\text{Fl}_t^\xi)^* f &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\text{Fl}_t^\xi) = \xi f = \mathcal{L}_\xi f, \\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(\text{Fl}_t^\xi)^*(df_p)(\eta_p) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} df(T \text{Fl}_t^\xi \eta_p)|(\text{Fl}_t^\xi(p)) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(T \text{Fl}_t^\xi \eta_p) f = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \eta_p(f \circ \text{Fl}_t^\xi) \\ &= \eta_p \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \text{Fl}_t^\xi) = \eta_p(\xi f) \\ &= \mathcal{L}_\xi(df)(\eta).\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis von (42.7).  $\square$

## 42.8 Die Frölicher-Nijenhuis und Nijenhuis-Richardson Klammer

Wir wollen nun allgemeine graduierte Derivationen genauer beschreiben. Dazu nennen wir eine graduierte Derivation  $D \in \text{Der}_k \Omega(M)$  algebraisch, wenn sie auf den 0-Formen  $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  verschwindet. Für so eine Derivation gilt

$$D(f \omega) = D(f) \wedge \omega + (-1)^{0 \cdot k} f D(\omega) = f D(\omega).$$

Folglich ist  $D$  tensoriell, d.h.  $D(\omega)_x$  hängt nur von  $\omega_x$  ab. Nach (42.4) ist  $D$  eindeutig durch  $D|_{\Omega^1(M)} : \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$  bestimmt, und das ist eine faserweise lineare Abbildung in

$$\begin{aligned}L(T_x^* M, \bigwedge^{k+1} T_x^* M) &\cong T_x M \otimes \bigwedge^{k+1} T_x^* M \cong T_x M \otimes (\bigwedge^{k+1} T_x M)^* \cong \\ &\cong L(\bigwedge^{k+1} T_x M, T_x M) \cong L_{\text{alt}}^{k+1}(T_x M; T_x M)\end{aligned}$$

welche glatt von  $x \in M$  abhängt. Sei umgekehrt  $K \in \Omega^{k+1}(M; TM)$  so eine vektorwertige  $k+1$ -Form. Dann können wir eine algebraische Derivation  $D := i_K \in \text{Der}_k \Omega(M)$  durch folgende Formel definieren:

$$\begin{aligned}(i_K \omega)(X_1, \dots, X_{k+l}) &:= \\ &= \frac{1}{(k+1)!(l-1)!} \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) \omega(K(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k+1)}), X_{\sigma(k+2)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}),\end{aligned}$$

wobei  $\omega \in \Omega^l(M)$  und  $X_1, \dots, X_{k+l} \in \mathfrak{X}(M)$ . Die Abbildung  $i : \Omega^{*+1}(M, TM) \rightarrow \text{Der}_*(\Omega(M))$  definiert einen Isomorphismus auf eine Teil-Liealgebra, und macht somit

$\Omega^{*+1}(M, TM)$  selbst zu einer graduierten Liealgebra (deren Klammer auch Nijenhuis-Richardson Klammer heißt).

**Beweis.** Da  $\bigwedge T_x^* M$  nach (38.6) die freie graduiert kommutative Algebra über dem Vektorraum  $T_x^* M$  ist, können wir  $K \in \Omega^{k+1}(M; TM) \cong \Gamma(L(T^* M, \bigwedge^k T^* M)) \subseteq \Gamma(L(T^* M, \bigwedge T^* M) = L_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\Omega^1(M), \Omega(M)))$  zu einer eindeutig bestimmten Derivation  $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  ausdehnen.

Die angegebene Formel ergibt sich durch Anwendung auf Hackprodukte von 1-Formen. Und offensichtlich ist der graduierte Kommutator zweier algebraischer graduierter Derivationen selbst algebraisch, und somit gelten auch die übrigen Aussagen.  $\square$

Wir definieren für  $K \in \Omega^k(M; TM)$  eine graduierte Derivation  $\mathcal{L}_K := [i_K, d]$ . Die Abbildung  $\mathcal{L} : \Omega(M; TM) \rightarrow \text{Der}(\Omega(M))$  ist injektiv, da  $\mathcal{L}_K f = [i_K, d]f = i_K(df) \pm d(i_K f) = df \circ K$  für  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

**Proposition.** Jedes  $D \in \text{Der}_k(\Omega(M))$  hat eine eindeutige Darstellung  $D = i_L + \mathcal{L}_K$  mit  $L \in \Omega^{k+1}(M; TM)$  und  $K \in \Omega^k(M; TM)$ . Das Bild von  $\mathcal{L}$  ist die Teil-Liealgebra aller  $D$  mit  $[D, d] = 0$ . Die Abbildung  $\mathcal{L}$  induziert somit eine graduierte Liealgebra Struktur (die Frölicher-Nijenhuis Klammer) auf  $\Omega^*(M; TM)$ .

**Beweis.** Für Vektorfelder  $X_i \in \mathfrak{X}(M)$  beschreibt  $f \mapsto D(f)(X_1, \dots, X_k)$  eine Derivation  $C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Folglich gibt es ein eindeutiges Vektorfeld  $K(X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}(M)$  mit  $D(f)(X_1, \dots, X_k) = K(X_1, \dots, X_k)(f)$ . Es ist  $K \in \Omega^k(M; TM)$ . Die definierende Gleichung für  $K$  ist  $D(f) = df \circ K = i_K df = \mathcal{L}_K f$  für  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Also ist  $D - \mathcal{L}_K$  algebraisch, d.h.  $D = \mathcal{L}_K + i_L$  für ein eindeutiges  $L \in \Omega^{k+1}(M; TM)$ . Wir haben

$$0 = [i_K, 0] = [i_K, [d, d]] = [[i_K, d], d] + (-1)^{k-1} [d, [i_K, d]] = 2[\mathcal{L}_K, d]$$

Schließlich ist  $df \circ [X, Y] = \mathcal{L}([X, Y])f = [\mathcal{L}(X), \mathcal{L}(Y)]f$ .  $\square$

## 43. Divergenz, Rotation und Laplace

### 43.1 Differentialformen am $\mathbb{R}^3$

Für offenes  $M \subseteq \mathbb{R}^m$  wissen wir, daß  $\mathfrak{X}(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$  ist vermöge der Abbildung  $\sum f^i (\frac{\partial}{\partial x^i}) \mapsto (f^i)_{i=1}^m$ , wobei  $x^i$  die Standardkoordinaten sind. Ebenso ist  $\Omega^m(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})$  vermöge  $* : f \cdot \text{vol}_M \mapsto f$ , mit  $\text{vol}_M = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$ . Schließlich sieht der Isomorphismus  $* \circ \sharp : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^{m-1}(M)$  nach (41.5) wie folgt aus:  $*\sharp\xi = \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i du^i \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge d^m$ . Für  $m = 3$  liefert das

$$\begin{aligned} *\sharp\xi &= \xi^1 du^2 \wedge du^3 - \xi^2 du^1 \wedge du^3 + \xi^3 du^1 \wedge du^2 \\ &= \xi^1 du^2 \wedge du^3 + \xi^2 du^3 \wedge du^1 + \xi^3 du^1 \wedge du^2 \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben also folgende Isomorphismen:

1.  $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$
2.  $\Omega^1(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$  via der Basis  $dx^1, dx^2, dx^3$
3.  $\Omega^2(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$  via der Basis  $dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^1 \wedge dx^2$
4.  $\Omega^3(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})$  via der Basis  $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

Wie sieht nun  $d$  bezüglich dieser Basen aus?

$$\begin{array}{ccccccc}
 C^\infty(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{grad}} & C^\infty(M, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(M, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(M, \mathbb{R}) \\
 \parallel & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\
 \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(M) \\
 \\ 
 f & & (f_1, f_2, f_3) & & (f_1, f_2, f_3) & & f \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 f & & \sum_i f_i dx^i & & \begin{array}{l} f_1 dx^2 \wedge dx^3 \\ + f_2 dx^3 \wedge dx^1 \\ + f_3 dx^1 \wedge dx^2 \end{array} & & f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3
 \end{array}$$

Der Operator  $d$  ist somit durch folgende Formeln gegeben:

$$\begin{aligned}
 d : \Omega^0(M) \ni f &\mapsto df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i \\
 d : \Omega^1(M) \ni \sum f_i dx^i &\mapsto \sum df_i \wedge dx^i = \sum_{i,j} \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\
 &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left( \frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 \\
 &\quad + \left( \frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \\
 d : \Omega^2(M) \ni f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2 &\mapsto \\
 &\mapsto \left( \sum \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3
 \end{aligned}$$

Also stimmt er bis auf natürliche Isomorphismen überein mit:

$$\begin{aligned}
 \text{grad } f &= \left( \frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) \\
 \text{rot}(f_1, f_2, f_3) &= \left( \frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}, \frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1}, \frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right) \\
 \text{div}(f_1, f_2, f_3) &= \frac{\partial f_1}{\partial x^1} + \frac{\partial f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial f_3}{\partial x^3}.
 \end{aligned}$$

Es folgen direkt aus  $d^2 = 0$  die bekannten Sätze aus der Vektoranalysis:

$$(\text{rot} \circ \text{grad})f = 0, \quad (\text{div} \circ \text{rot})(f_i) = 0$$

und ebenso folgt direkt aus dem Lemma von Poincaré (siehe (6) in (44.5)):

$$\begin{aligned}
 \text{rot}(f_i) = 0 &\Rightarrow \exists f, \text{ soda\ss lokal } \text{grad } f = (f_i) \text{ gilt.} \\
 \text{div}(f_i) = 0 &\Rightarrow \exists (g_i), \text{ soda\ss lokal } \text{rot}(g_i) = (f_i) \text{ gilt.}
 \end{aligned}$$

### 43.2 Divergenz

Für eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit  $M$  erhalten wir nach (41.5) mittels  $\sharp$  und Hodge-Sternoperator  $*$  einen Isomorphismus  $\mathfrak{X} \xrightarrow{\sharp} \Omega^1 \xrightarrow{*} \Omega^{m-1}$ . Dieser stimmt mit der Abbildung  $\xi \mapsto i_\xi \text{vol}_M \in \Omega^{m-1}$  überein, denn dazu müssen wir  $\omega \wedge i_\xi \text{vol}_M = \langle \omega, \sharp \xi \rangle \text{vol}_M$  beweisen, was wegen

$$0 = i_\xi(0) = i_\xi(\omega \wedge \text{vol}_M) = i_\xi \omega \cdot \text{vol}_M + (-1)^1 \omega \wedge i_\xi \text{vol}_M$$

$$\text{und } \langle \omega, \sharp \xi \rangle = \langle b\omega, \xi \rangle = \omega(\xi) = \iota_\xi(\omega)$$

gilt. Lokal kann man das auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} i_\xi \text{vol}_M &= \iota_{\left(\sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j}\right)} \left( \sqrt{G} du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \right) \\ &= \sum_j \xi^j \sqrt{G} \iota_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \left( du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \right) \\ &= \sum_j \xi^j \sqrt{G} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} du^1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{du^k \left( \frac{\partial}{\partial u^j} \right)}_{\delta_j^k} \wedge \cdots \wedge du^m \\ &= \sqrt{G} \sum_j (-1)^{j-1} \xi^j du^1 \wedge \cdots \wedge \overline{du^j} \wedge \cdots \wedge du^m \\ &= *\omega, \quad \text{wobei } \mathfrak{X}(M) \ni \xi \stackrel{\wedge}{=} \omega \in \Omega^1(M). \end{aligned}$$

Die DIVERGENZ  $\text{DIV } \xi$  eines Vektorfelds  $\xi$  wird dann durch

$$\text{div } \xi := * \left( d(i_\xi \text{vol}_M) \right) = (* \circ d \circ * \circ \sharp)(\xi)$$

definiert. Also gilt:

$$\text{div } \xi \cdot \text{vol}_M = d(i_\xi \text{vol}_M) = (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \text{vol}_M = \mathcal{L}_\xi \text{vol}_M,$$

d.h.  $\text{div } \xi$  mißt die infinitesimale Änderung  $\mathcal{L}_\xi \text{vol}_M = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^*(\text{vol}_M)$  des infinitesimalen Volumens  $\text{vol}_M$  unter dem Fluß  $\text{Fl}^\xi$  des Vektorfelds  $\xi$ . Um auf eine explizite

Formel der Divergenz zu kommen, rechnen wir lokal:

$$\begin{aligned}
 \xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} &\mapsto i_\xi \text{vol}_M \stackrel{()}{=} \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \stackrel{d}{\mapsto} \\
 &\stackrel{d}{\mapsto} \sum_i (-1)^{i-1} d(\sqrt{G} \xi^i) \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m + 0 \\
 &= \sum_i (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^m \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^k} du^k \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \\
 &= \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^i} (-1)^{i-1} du^1 \wedge \dots \wedge du^m \\
 &= \left( \sum_i \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^i} \right) du^1 \wedge \dots \wedge du^m \stackrel{*}{\mapsto} \\
 &\stackrel{*}{\mapsto} \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^i}
 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\text{div } \xi = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^i}.$$

### 43.3 Laplace-Operator

Wir betrachten nun den Laplaceoperator allgemein auf Riemann-Mannigfaltigkeiten. Die Abbildung  $d^*$  definiert durch:

$$\begin{array}{ccc}
 \Omega^p & \xrightarrow{(-1)^p d^*} & \Omega^{p-1} \\
 * \downarrow \cong & & \cong \downarrow * \\
 \Omega^{m-p} & \xrightarrow{d} & \Omega^{m-p+1}
 \end{array}
 \quad \text{oder} \quad
 \begin{array}{ccc}
 \Omega^p & \xrightarrow{d^*} & \Omega^{p-1} \\
 * \downarrow \cong & & \cong \downarrow * \\
 \Omega^{m-p} & \xrightarrow{(-1)^{pm+m+1} d} & \Omega^{m-p+1}
 \end{array}$$

heißt KODIFFERENTIALOPERATOR. Man sollte beachten, daß sie keine graduierte Derivation ist. Das Vorzeichen ist so gewählt, daß  $d^*$  formal adjungiert zu  $d$  wird, wie wir in (49.1) zeigen werden. Um die Gleichwertigkeit der beiden Diagramme zu zeigen rechnet man wie folgt:

$$\begin{aligned}
 * \circ (-1)^p d^* = d \circ * &\Leftrightarrow * \circ (-1)^{pm+m+1} d \circ * = * \circ (-1)^{pm+m+1} * \circ (-1)^p d^* \stackrel{(41.4)}{=} \\
 &= (-1)^{(pm+m+1)+p+(p-1)(m-p+1)} d^* = d^*.
 \end{aligned}$$

Die Abbildung  $\Delta := dd^* + d^*d : \Omega^p \rightarrow \Omega^p$  heißt LAPLACE-BELTRAMI-OPERATOR. Sei  $M$  eine Mannigfaltigkeit offen im  $\mathbb{R}^3$ , dann ist:

$$\begin{array}{ccccccc}
 \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\
 * \downarrow & & * \downarrow & & * \downarrow & & * \downarrow \\
 \Omega^3 & \xrightarrow{-d^*} & \Omega^2 & \xrightarrow{d^*} & \Omega^1 & \xrightarrow{-d^*} & \Omega^0 \\
 \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\
 C^\infty & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty
 \end{array}$$

Allgemein gilt für Funktionen  $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  die Formel  $\Delta f = -\text{div grad } f$ , denn

$$\begin{aligned}
 \Delta f &= d^*df + 0 = (-1)^{1m+m+1} * d * df \\
 &= - * d * \sharp \text{grad } f \stackrel{(43.2)}{=} - * d i_{\text{grad } f} \text{vol}_M \stackrel{(43.2)}{=} -\text{div}(\text{grad } f).
 \end{aligned}$$

Der hier definierte Laplace-Operator hat somit ein ungewohntes Vorzeichen, welches dazu dient, ihn positiv zu machen, siehe (49.1).

**43.4 Satz von Frobenius, 2. Version.**

Es sei  $E$  ein Teilvektorbündel von  $TM \rightarrow M$ . Dann gilt:  $E$  ist integrabel  $\Leftrightarrow d(\Omega_E(M)) \subseteq \Omega_E(M)$ , wobei  $\Omega_E(M) = \{\omega \in \Omega(M) : \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0, \text{ falls } \forall i : \text{Bild } \xi_i \subseteq E\}$

**Beweis.** ( $\Rightarrow$ ) Wir müssen zeigen, daß  $d\omega \in \Omega_E(M)$  für  $\omega \in \Omega_E(M)$  ist:

$$\begin{aligned}
 d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) + \\
 &\quad + \sum_{j>i} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) = 0,
 \end{aligned}$$

da  $E$  integrabel ist, also für Bild  $\xi_i \subseteq E$  auch  $[\xi_i, \xi_j] \subseteq E$  ist.

( $\Leftarrow$ ) Seien  $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$  mit Bild  $\xi, \text{Bild } \eta \subseteq E$ . Zu zeigen ist:  $\text{Bild}[\xi, \eta] \subseteq E$ .

Angenommen  $[\xi, \eta]_p \notin E_p \subseteq T_p M$ . Sei  $\omega_p \in (T_p M)^*$  so gewählt, daß  $\omega(E_p) = 0$  und  $\omega_p([\xi, \eta]) \neq 0$ . Lokal ist  $E = M \times E_p$ , dort ist  $\omega$  lokal definiert. Durch Multiplikation von  $\omega$  mit einer  $C^\infty$ -Funktion, deren Träger ganz im Definitionsbereich von  $\omega$  liegt, wird  $\omega$  zu einer global definierten 1-Form.

$$\begin{aligned}
 d\omega \in \Omega_E^2(M) \Rightarrow 0 = d\omega(\xi, \eta) &= \xi \omega(\eta) - \eta \omega(\xi) - \omega([\xi, \eta]) = 0 - \omega([\xi, \eta]) \Rightarrow \\
 &\Rightarrow \omega([\xi, \eta]) = 0, \text{ ein Widerspruch} \quad \square
 \end{aligned}$$

**44. Kohomologie**

**44.1 Definition der Kohomologie**

Es sei  $d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  die äußere Ableitung.

1.  $Z^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) : d\omega = 0\}$ , der RAUM DER GESCHLOSSENEN DIFFERENTIALFORMEN (oder auch KOZYKELN);

2.  $B^k(M) := \{d\omega : \omega \in \Omega^{k-1}(M)\}$ , der RAUM DER EXAKTEN DIFFERENTIALFORMEN (oder auch KORÄNDER);
3.  $H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$ , die  $k$ -TE DE-RHAM KOHOMOLOGIE von  $M$ ;
4.  $H(M) := \bigoplus_k H^k(M)$ , die DE-RHAM KOHOMOLOGIE von  $M$ ;
5.  $b_k(M) := \dim H^k(M)$ , die  $k$ -TE BETTIZAHN;
6.  $f_M(t) := \sum_k b_k t^k$ , das POINCARÉ-POLYNOM; wohldefiniert, falls alle  $b_k$  endlich sind;
7.  $\chi(M) := f_M(-1) = \sum (-1)^k b_k$ , die EULER-CHARAKTERISTIK von  $M$ .

#### 44.2 Definition (Kohomologie-Funktor)

Sei  $g : M \rightarrow N$  glatt und  $g^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$  so gilt  $g^*(d\omega) = d(g^*\omega)$ , somit  $g^* : Z^k(N) \rightarrow Z^k(M)$  und  $g^* : B^k(N) \rightarrow B^k(M)$ . Daher ist die Definition folgender linearen Abbildung sinnvoll:

$$g^* : H(N) \rightarrow H(M), \quad g^* : [\omega] \mapsto [g^*\omega].$$

**44.3 Satz (Kohomologie-Axiome).** Die Kohomologie hat folgende Eigenschaften:

1.  $H^0(\text{Pkt}) = \mathbb{R}$ ,  $H^k(\text{Pkt}) = 0$  für  $k \neq 0$  (DIMENSIONSAXIOM)
2.  $f, g : M \rightarrow N$  glatt,  $f \sim g \Rightarrow f^* = g^*$  (HOMOTOPIEAXIOM)
3. sei  $M = \bigsqcup_\alpha M_\alpha \Rightarrow H^k(M) = \prod_\alpha H^k(M_\alpha)$  (disjunkte Vereinigung)
4. sei  $M = U \cup V$ , wo  $U, V \subseteq M$  offen, dann existieren lineare Abbildungen  $\delta_k$ , die die folgende lange Sequenz exakt machen:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^k(M) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta_k} \\ \xrightarrow{\delta_k} H^{k+1}(M) \rightarrow H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \rightarrow H^{k+1}(U \cap V) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

mit den Inklusionen  $i_U : U \hookrightarrow U \cup V$ ,  $i_V : V \hookrightarrow U \cup V$ ,  $j_U : U \cap V \hookrightarrow U$  und  $j_V : U \cap V \hookrightarrow V$ . Diese Sequenz heißt MAYER-VIETORIS SEQUENZ und  $\delta^k$  heißt EINHÄNGUNGSOPERATOR.

Ein Folge linearer Abbildungen  $\dots \xrightarrow{f_k} E_k \xrightarrow{f_{k+1}} \dots$  heißt EXAKT, falls  $\text{Bild } f_k = \text{Ker } f_{k+1}$  für alle  $k$  ist.

#### Beweis.

- (1) Klar, da  $\Omega^k(\text{Pkt}) = \{0\}$  für  $k \neq 0$  und  $\Omega^0(\text{Pkt}) = C^\infty(\text{Pkt}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ .
- (2) Sei  $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$  die Homotopie zu  $f, g$ . Es ist also  $H(0, x) = f(x)$  und  $H(1, x) = g(x)$ . Für  $\omega \in \Omega^k(N)$  ist  $H^*\omega \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ . Sei  $j_t : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$  definiert durch  $j_t(x) := (x, t)$ . Dann ist  $H \circ j_0 = f$  und  $H \circ j_1 = g$  und somit

$$g^* - f^* = (H \circ j_1)^* - (H \circ j_0)^* = (j_1^* - j_0^*) \circ H^*.$$

Für  $\varphi \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$  ist  $j_t^*\varphi \in \Omega^k(M)$  und  $t \mapsto j_t^*\varphi$  ist eine Kurve in  $\Omega^k(M)$  und somit

$$(j_1^* - j_0^*)\varphi = \int_0^1 \frac{d}{dt} j_t^*\varphi dt = \int_0^1 j_t^* \mathcal{L}_\xi \varphi dt,$$

wobei  $\xi := \frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$  das Einheitsvektorfeld in  $\mathbb{R}$ -Richtung bezeichnet, denn

$$\begin{aligned} j_{t_1+t_2} &= \text{Fl}_{t_2}^\xi \circ j_{t_1} \text{ f\"ur } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt_1} j_{t_1}^* \varphi &= \frac{d}{dt_2} \Big|_{t_2=0} (j_{t_1+t_2})^* \varphi = \frac{d}{dt_2} \Big|_{t_2=0} (\text{Fl}_{t_2}^\xi \circ j_{t_1})^* \varphi \\ &= \frac{d}{dt_2} \Big|_{t_2=0} \left( j_{t_1}^* \circ (\text{Fl}_{t_2}^\xi)^* \right) \varphi = j_{t_1}^* \frac{d}{dt_2} \Big|_0 (\text{Fl}_{t_2}^\xi)^* \varphi = j_{t_1}^* \mathcal{L}_\xi \varphi. \end{aligned}$$

Somit definieren wir Faserintegration  $I_0^1$  durch

$$I_0^1 : \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^k(M), \quad I_0^1(\varphi) := \int_0^1 j_t^* \varphi dt.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (d \circ I_0^1)(\varphi) &= d \left( \int_0^1 j_t^* \varphi dt \right) = \int_0^1 (dj_t^* \varphi) dt = \int_0^1 j_t^* d\varphi dt \\ &= I_0^1 d\varphi = (I_0^1 \circ d)(\varphi); \\ (j_1^* - j_0^*)\varphi &= \int_0^1 j_t^* \mathcal{L}_\xi \varphi dt = I_0^1 \mathcal{L}_\xi \varphi = I_0^1 (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d)\varphi. \end{aligned}$$

Wir definieren nun den Homotopie-Operator  $G : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$  mit  $G := I_0^1 \circ i_\xi \circ H^*$ , d.h.:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(N) & \xrightarrow{G} & \Omega^{k-1}(M) \\ H^* \downarrow & & \uparrow I_0^1 \\ \Omega^k(M \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{i_\xi} & \Omega^{k-1}(M \times \mathbb{R}) \end{array}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g^* - f^* &= (j_1^* - j_0^*) \circ H^* \\ &= I_0^1 \circ (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \circ H^* \\ &= (d \circ I_0^1 \circ i_\xi + I_0^1 \circ i_\xi \circ d) \circ H^* \\ &= d \circ (I_0^1 \circ i_\xi \circ H^*) + (I_0^1 \circ i_\xi \circ H^*) \circ d = G \circ d + d \circ G. \end{aligned}$$

und somit ist  $g^*\omega - f^*\omega = Gd\omega + dG\omega = dG\omega$  exakt, falls  $d\omega = 0$ . Also ist  $g^* - f^* = 0 : H(N) \rightarrow H(M)$ .

(3) Klar, da  $\Omega^k(\bigsqcup_\alpha M_\alpha) = \prod_\alpha \Omega^k(M_\alpha)$ .

(4) Wir zeigen zuerst, daß

$$0 \rightarrow \Omega^k(U \cup V) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} \Omega^k(U \cap V) \rightarrow 0$$

exakt ist.

Die Abbildung  $f := (i_U^*, i_V^*)$  ist klarerweise injektiv mit  $\text{Bild}(i_U^*, i_V^*) = \text{Ker}(j_U^* - j_V^*)$ . Die Abbildung  $g := (j_U^* - j_V^*)$  ist surjektiv: Sei dazu  $\{h_U, h_V\}$  eine Zerlegung der Eins zur Überdeckung  $\{U, V\}$  und  $\varphi \in \Omega(U \cap V)$ . Mit  $\varphi_U := (h_U \varphi)|_U \in \Omega(U)$  und  $\varphi_V := (-h_V \varphi)|_V \in \Omega(V)$  gilt:

$$(j_U^* - j_V^*)(\varphi_U, \varphi_V) = \varphi_U - \varphi_V = (h_U + h_V)\varphi = \varphi.$$

Also ist die Sequenz exakt.

Um daraus die lange exakte Sequenz in der Kohomologie zu erhalten können wir das nachfolgende allgemeine Resultat verwenden.  $\square$

**44.4 Theorem.** *Es sei  $0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$  eine kurze exakte Folge von Ketten-Abbildungen, d.h.  $C$ ,  $C'$  und  $C''$  sind Kettenkomplexe (i.e.  $\mathbb{Z}$ -graduierte Vektorräume mit Randoperatoren  $\partial$  vom Grad 1, welche  $\partial^2 = 0$  erfüllen) und die verbindenden linearen Abbildungen  $f$  und  $g$  sind vom Grad 0 und vertauschen mit den Randoperatoren.*

*Dann erhalten wie eine lange exakte Folge in Homologie:*

$$\dots \xrightarrow{H_{q+1}(g)} H_{q+1}(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_q(C') \xrightarrow{H_q(f)} H_q(C) \xrightarrow{H_q(g)} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

**Beweis.** Betrachte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{f} & C_q & \xrightarrow{g} & C''_q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_{q-1} & \xrightarrow{f} & C_{q-1} & \xrightarrow{g} & C''_{q-1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Es sei  $\partial_*[z''] := [(f^{-1} \circ \partial \circ g^{-1})(z'')]$  für  $z'' \in C''$  mit  $\partial z'' = 0$ .

Wir zuerst zeigen, daß es möglich ist Elemente in den entsprechenden inversen Bildern zu wählen und dann zeigen wir, daß die resultierende Klasse nicht von irgendeiner der Wahlen abhängt.

Sei dazu  $z''_q \in C''_q$  ein Zykel, d.h.  $\partial z''_q = 0$ . Da  $g$  surjektiv ist finden wir ein  $x_q \in C_q$  mit  $gx_q = z''_q$ . Da  $g\partial x_q = \partial gx_q = \partial z''_q = 0$ , finden wir ein  $x'_{q-1} \in C'_{q-1}$  mit  $fx'_{q-1} = \partial x_q$ . Und daher ist  $x'_{q-1} \in f^{-1}\partial g^{-1}z''_q$ . Weiters ist  $f\partial x'_{q-1} = \partial fx'_{q-1} = \partial \partial x_q = 0$ . Da  $f$  injektiv ist erhalten wir  $\partial x'_{q-1} = 0$  und daher können wir die Klasse  $\partial z''_q := [x'_{q-1}]$  bilden.

$$\begin{array}{ccccc} & & x_q & \xrightarrow{g} & z''_q \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ x'_{q-1} & \xrightarrow{f} & x_{q-1} & \xrightarrow{g} & 0 \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ \partial x'_{q-1} & \xrightarrow{f} & 0 & & \end{array}$$

Nun die Unabhängigkeit von allen Wahlen. Sei dazu  $[z''_q] = [\bar{z}''_q]$ , d.h.  $\exists x''_{q+1} : \partial x''_{q+1} = z''_q - \bar{z}''_q$ . Wähle  $x_q, \bar{x}_q \in C_q$  wie zuvor, so daß  $gx_q = x''_q$  und  $g\bar{x}_q = \bar{x}''_q$ . Ebenso wie zuvor wählen wir  $x'_{q-1}, \bar{x}'_{q-1} \in C'_{q-1}$  mit  $fx'_{q-1} = \partial x_q$  und  $f\bar{x}'_{q-1} = \partial \bar{x}_q$ . Wir haben zu zeigen, daß  $[x'_{q-1}] = [\bar{x}'_{q-1}]$ . Dazu wählen wir  $x_{q+1} \in C_{q+1}$  mit  $gx_{q+1} = x''_{q+1}$ . Dann ist  $g\partial x_{q+1} = \partial gx_{q+1} = \partial x''_{q+1} = z''_q - \bar{z}''_q = g(x_q - \bar{x}_q)$  und daher existiert ein  $x'_q \in C_q$  mit  $fx'_q = \partial x_{q+1} - x_q + \bar{x}_q$ . Weiters ist  $f\partial x'_q = \partial fx'_q = \partial(\partial x_{q+1} - x_q + \bar{x}_q) = 0 - \partial x_q + \partial \bar{x}_q = -f(x'_{q-1} - \bar{x}'_{q-1})$ . Da  $f$  injektiv ist, haben wir  $x'_{q-1} = \bar{x}'_{q-1} + \partial x'_q$ , d.h.  $[x'_{q-1}] = [\bar{x}'_{q-1}]$ .

Exaktheit bei  $H_q(C')$ :

$$(\subseteq) f_*\partial_*[z''] = [ff^{-1}\partial g^{-1}z''] = [\partial g^{-1}z''] = 0.$$

( $\supseteq$ ) Es sei  $\partial z' = 0$  und  $0 = f_*[z'] = [fz']$ , d.h.  $\exists x: \partial x = fz'$ . Dann erfüllt  $x'' := gx$  sowohl  $\partial x'' = \partial gx = g\partial x = gfz' = 0$  als auch  $\partial_*[x''] = [f^{-1}\partial g^{-1}gx] = [f^{-1}\partial x] = [z']$ .

Exaktheit bei  $H_q(C)$ :

( $\subseteq$ ) da  $g \circ f = 0$ .

( $\supseteq$ ) Es sei  $\partial z = 0$  mit  $0 = g_*[z] = [gz]$ , d.h.  $\exists x'': \partial x'' = gz$ . Dann  $\exists x: gx = x''$ . Daher ist  $gz = \partial x'' = \partial gx = g\partial x \Rightarrow \exists x': fx' = z - \partial x \Rightarrow f\partial x' = \partial fx' = \partial(z - \partial x) = 0$  und  $f_*[x'] = [fx'] = [z - \partial x] = [z]$ .

Exaktheit bei  $H_q(C'')$ :

( $\subseteq$ ) Wir haben  $\partial_*g_*[z] = [f^{-1}\partial g^{-1}gz] = [f^{-1}\partial z] = [f^{-1}0] = 0$ .

( $\supseteq$ ) Es sei  $\partial z'' = 0$  und  $0 = \partial_*[z'']$ , d.h.  $\exists x': \partial x' = z'$ , wobei  $z' \in f^{-1}\partial g^{-1}z''$ , d.h.  $\exists x: gx = z''$  und  $fz' = \partial x$ . Dann ist  $\partial(x - fx') = fz' - f(\partial x') = 0$  und  $g(x - fx') = z'' - 0$ , d.h.  $g_*[x - fx'] = [z'']$ .  $\square$

#### 44.5 Bemerkungen

1. Die De-Rham Kohomologie ist durch die Eigenschaften aus Satz (44.3) schon eindeutig bestimmt, siehe [88, Kap.5].
2. Für die 0. Kohomologie gilt:

$$\begin{aligned} H^0(M) &= \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : df = 0\} \\ &= \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : f \text{ ist lokal konstant}\} \\ &= \mathbb{R}^\#, \end{aligned}$$

wobei  $\#$  die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von  $M$  ist.

3. Falls  $k < 0$  oder  $\dim M < k$  so ist  $H^k(M) = 0$ .
4. Seien  $M$  und  $N$  HOMOTOPIEÄQUIVALENT, d.h. es gibt glatte Abbildungen  $f: M \rightarrow N$  und  $g: N \rightarrow M$  mit  $f \circ g \sim \text{id}_N$  und  $g \circ f \sim \text{id}_M$ . Die Abbildungen  $H(f) := f^*: H(N) \rightarrow H(M)$  und  $H(g) := g^*: H(M) \rightarrow H(N)$  sind dann inverse Isomorphismen. Ein Beispiel homotopieäquivalenter Räume sind das offene Möbiusband und der Zylinder.
5. Ist insbesondere  $A \subseteq M$  ein DEFORMATIONSRETRAKT, d.h. eine Homotopie  $h: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  existiert, sodaß  $h(\cdot, 1) = \text{id}_M$ ,  $h(X \times \{0\}) \subseteq A$  und  $h(\cdot, 0)|_A = \text{id}_A$ , so gilt  $H(M) \cong H(A)$ . Z.B. ist die Basis jedes Vektorbündels vermöge der Einbettung als Nullschnitt ein Deformationsretrakt des Totalraums.
6. Ist  $M$  KONTRAHIERBAR, d.h. ein Punkt  $p$  in  $M$  existiert, welcher ein Deformationsretrakt von  $M$  ist, dann gilt:  $H(M) \cong H(\{p\})$ , d.h. jede geschlossene Form ist exakt (dies ist das versprochene POINCARÉ-LEMMA). Falls  $M = \mathbb{R}^m$  – oder allgemeiner  $M \subset \mathbb{R}^m$  sternförmig ist – so ist  $h: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  mit  $(x, t) \mapsto t \cdot x$  eine Kontraktion von  $M$  zu einem Punkt, also ist  $M$  kontrahierbar, Lokal ist also jede Mannigfaltigkeit kontrahierbar.
7. Ist  $M$  einfach zusammenhängend, dann ist  $H^1(M) = 0$ . Um dies zu zeigen geht man so vor: Sei  $\omega \in \Omega^1(M)$  mit  $d\omega = 0$ . Wir wollen ein  $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$  finden mit  $df = \omega$ . Dazu wählen wir einen fixen Punkt  $x_0 \in M$  und suchen für jeden anderen Punkt  $x \in M$  eine Kurve  $c$ , welche  $x_0$  mit  $x$  verbindet, und definieren

$$f(x) := \int_c \omega = \int_0^1 c^*(\omega).$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Kurve ab, denn die Zusammensetzung mit einer zweiten verkehrt durchlaufenen Kurve liefert eine geschlossene Kurve  $c$ . Diese ist nach Voraussetzung homotop zur konstanten Kurve  $\text{konst}_{x_0}$ , also ist  $[c^*(\omega)] = [(\text{konst}_{x_0})^*(\omega)]$ . Die beiden Formen auf  $[0, 1]$  unterscheiden sich also nur um eine exakte Form  $dg$ , und somit ist:

$$\int_c \omega = \int_0^1 c^*(\omega) = \int_0^1 (\text{konst}_{x_0})^*(\omega) = \int_0^1 0 = 0.$$

Da lokal so ein  $f$  mit  $df = \omega$  immer existiert, folgt daß das oben definierte  $f$  auch glatt ist. Und wegen

$$df(c'(0)) = (f \circ c)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_0^1 c(t)^*(\omega) = \omega(c'(0))$$

ist es auch die gesuchte Stammfunktion.

8. Falls  $\dots \rightarrow E_i \xrightarrow{T_i} E_{i+1} \rightarrow \dots$  eine exakte Sequenz von endlichdimensionalen Vektorräumen ist, so folgt durch Aufsummieren der Gleichung

$$\begin{aligned} \dim(E_i) &= \dim(\text{Ker } T_i) + \dim(\text{Bild}(T_i)) \\ &= \dim(\text{Ker } T_i) + \dim(\text{Ker } T_{i+1}) \end{aligned}$$

die Identität

$$\sum_i (-1)^i \dim E_i = 0$$

Die Mayer-Vietoris Sequenz impliziert also, daß für die Euler-Charakteristik folgendes gilt:

$$\chi(U \cup V) + \chi(U \cap V) = \chi(U) + \chi(V)$$

9. Da  $\mathbb{R}^m$  kontrahierbar ist, ist seine Euler-Charakteristik jene des Punktes also 1 nach Dimensionsaxiom (44.3.1). Es ist  $\chi(S^0) = 2$  wegen (44.3.3). Nach dem vorigen Punkt ist für jeden Punkt  $p \in M$  einer  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \chi(M \setminus \{p\}) + \chi(\mathbb{R}^m) - \chi(\mathbb{R}^m \setminus \{p\}) \\ &= \chi(M \setminus \{p\}) + \chi(\{p\}) - \chi(S^{m-1}) = \chi(M \setminus \{p\}) + 1 - \chi(S^{m-1}). \end{aligned}$$

Für die Sphären erhalten wir somit

$$\chi(S^m) = \chi(S^m \setminus \{p\}) + 1 - \chi(S^{m-1}) = 2 - \chi(S^{m-1}).$$

Kompakte 2-dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeiten vom Geschlecht  $g$  erhält man aus  $S^2$  durch Ankleben von  $g$  Henkeln oder  $g$  Möbiusbändern, also ergibt sich rekursive im nicht-orientierbaren Fall

$$\begin{aligned} \chi(M_g) &= \chi(M_{g-1} \setminus \{p\} \cup \text{Möb}) = \chi(M_{g-1}) - 1 + \chi(\text{Möb}) - \chi(S^1) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 1 = 2 - (g-1) - 1 = 2 - g, \end{aligned}$$

und im orientierbaren Fall

$$\begin{aligned} \chi(M_g) &= \chi(M_{g-1} \setminus \{p_-, p_+\} \cup S^1 \times \mathbb{R}) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 2 + \chi(S^1 \times \mathbb{R}) - \chi(S^1 \sqcup S^1) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 2 = 2 - 2(g-1) - 2 = 2 - 2g \end{aligned}$$

10. Die Euler-Charakteristik  $\chi$  einer Mannigfaltigkeit, läßt sich auch dadurch berechnen, daß man sie TRIANGULIERT, d.h. in Simplexe zerlegt. Sei  $\gamma_i$  die Anzahl der verwendeten Simplexe der Dimension  $i$ , dann gilt:  $\chi = \sum_i (-1)^i \gamma_i$ . Insbesondere gilt für jeden Polyeder, daß die Anzahl der Ecken minus die Anzahl der Kanten plus die Anzahl der Seitenflächen gleich  $2 = \chi(S^2)$  ist.
11. Eine weitere Möglichkeit die Euler-Charakteristik zu berechnen ist mittels MORSE-FUNKTIONEN, das sind Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ , deren kritische Punkte nicht degeneriert sind, d.h. die Hessesche Matrix ist definit. Sei  $\beta_k(f)$  die Anzahl der kritischen Punkte, in denen die Hessesche Matrix genau  $k$  negative Eigenwerte hat, so gelten die Morse-Ungleichungen, siehe [40, S.161–162]

$$\beta_k(M) \leq \beta_k(f)$$

$$\sum_k (-1)^k \beta_k(f) = \chi(M).$$

12. Noch allgemeiner kann man für ein Vektorfeld  $\xi$  mit isolierten Nullstellen (z.B. das Gradientenfeld einer Morsefunktion) einen Index  $\text{ind}_x(\xi)$  in diesen Punkten definieren, siehe [40, S.133]. Und es gilt dann nach einem Satz von Hopf, siehe [40, S.164]  $\chi(M) = \sum_{\xi(x)=0} \text{ind}_x(\xi)$ . Falls es also ein nirgends verschwindendes Vektorfeld gibt, so muß die Euler-Charakteristik  $\chi(M)$  verschwinden. Dies zeigt den Igelsatz (50.11). Man kann umgekehrt zeigen, daß auf jeder kompakten, orientierten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit  $\chi(M) = 0$  ein Nullstellenfreies Vektorfeld existiert, siehe [40, S.137].
13. Die Kohomologie der Sphären  $S^n$  ist:

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & 1 \leq k \leq n-1 \\ \mathbb{R} & k = n \\ 0 & n+1 \leq k \end{cases}$$

also hat das Poincaré-Polynom die Form:  $f_M(t) = 1 + t^n$ .

(i)  $H^0(S^n) = \mathbb{R}$  folgt aus (2).

(ii)  $H^k(S^n) = 0$  für  $k > n$  gilt immer, vergl. (3).

(iii) Wir müssen noch zeigen:  $H^k(S^n) \cong H^{k+1}(S^{n+1})$  für  $1 \leq k$ , und  $H^1(S^n) = 0$  für  $n > 2$ . Verwendet man dann noch  $H^1(S^1) = \mathbb{R}$  so folgen daraus die restlichen Behauptungen.  $S^n = U \cup V$ , wobei  $U = \{x \in S^n : -1 \leq \langle x, a \rangle\}$  und  $V = \{x \in S^n : +1 \geq \langle x, a \rangle\}$ . Also ist  $U \cap V \cong S^{n-1} \times ]-1, +1[$  und somit

$H(U \cap V) = H(S^{n-1})$ . Die Mayer-Vietoris Sequenz (für  $k \geq 1$ ) ist

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \\
 H^k(U) \oplus H^k(V) \cong H^k(Pkt) \oplus H^k(Pkt) \\
 \downarrow \\
 H^k(U \cap V) \cong H^k(S^{n-1}) \\
 \downarrow \delta \\
 H^{k+1}(S^n) \\
 \downarrow \\
 H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \cong H^{k+1}(Pkt) \oplus H^{k+1}(Pkt) \\
 \downarrow \\
 \vdots
 \end{array}$$

Also ist  $H^k(S^{n-1}) \xrightarrow{\cong} H^{k+1}(S^n)$  für  $0 < k < n$ . Der Anfang der Sequenz sieht so aus:

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 \downarrow \\
 H^0(S^n) \cong \mathbb{R} \\
 \downarrow \\
 H^0(Pkt) \oplus H^0(Pkt) \cong \mathbb{R}^2 \\
 \downarrow \\
 H^0(S^{n-1}) \cong \mathbb{R} \\
 \downarrow \\
 H^1(S^n) \\
 \downarrow \\
 0
 \end{array}$$

Folglich ist  $H^1(S^n) = 0$  für  $n \geq 2$ . Die Gleichung  $H^1(S^1) = \mathbb{R}$  läßt sich ganz analog aus der folgenden Sequenz ableiten:

$$\begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ H^0(S^1) \cong \mathbb{R} \\ \downarrow \\ H^0(Pkt) \oplus H^0(Pkt) \cong \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \\ H^0(S^0) \cong H^0(Pkt) \oplus H^0(Pkt) \cong \mathbb{R}^2 \\ \downarrow \\ H^1(S^1) \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

## VII. Integration

In diesem Kapitel entwickeln wir die Integration auf orientierten Mannigfaltigkeiten. Die integrierbaren Objekte sind dabei die Differentialformen maximalen Grades. Wir beweisen den allgemeinen Satz von Stokes und führen dafür auch Mannigfaltigkeiten mit Rand ein. Im Fall einer orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit haben wir eine ausgezeichnete Form maximalen Grades, die Volumsform. Damit sind wir in der Lage auch Funktionen zu integrieren und führt zu den Green'schen Formeln. Schließlich folgt noch ein Abschnitt über den Laplace-Beltrami Operator, wo wir den Satz von Hodge über harmonische Formen beweisen.

### 47. Integration und der Satz von Stokes

**47.1 Proposition (Pull-back von Volumsformen).** *Sei  $f : M \rightarrow N$  glatt,  $\dim M = m = \dim N$  und  $(x^1, \dots, x^m)$  lokale Koordinaten von  $M$  und  $(y^1, \dots, y^m)$  solche von  $N$ . Dann gilt:*

$$f^*(g \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) = (g \circ f) \det \left( \frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

**Beweis.** O.B.d.A.  $g = 1$  und  $f^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) = \omega \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m)$ . Wenden wir dies auf  $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$  an, so folgt (siehe auch (42.2)):

$$\begin{aligned} \omega &= f^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) \left( \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) \left( Tf \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, Tf \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) \left( \sum_{i_1} \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}}, \dots, \sum_{i_m} \frac{\partial f^{i_m}}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^{i_m}} \right) \\ &= \sum_{\pi} (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) \left( \frac{\partial}{\partial y^{\pi(1)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{\pi(m)}} \right) \prod_{i=1}^m \frac{\partial(y^{\pi(i)} \circ f)}{\partial x^i} \\ &= \det \left( \frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i} \right) \quad \square \end{aligned}$$

**47.2 Bemerkung**

Speziell für  $f = \text{id}$  und  $g = 1$  gilt:

$$dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^m = \det \left( \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

**47.4 Motivation**

Wir können Funktionen  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  nicht so ohne weiteres über eine Mannigfaltigkeit integrieren. Sehen wir uns dazu den einfachsten Fall der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten an. Wenn  $M$  ein Intervall in  $\mathbb{R}$  mit Grenzen  $a$  und  $b$  ist, dann mißt das übliche Riemann-Integral  $\int_M f = \int_a^b f$  die orientierte Fläche unterhalb des Graphens von  $f$ . Damit wir das Integral für eine beliebige 1-dimensionale Mannigfaltigkeit  $M$  auch definieren können, brauchen auf jeden Fall eine Orientierung auf  $M$ . In diesem Kapitel seien also alle Mannigfaltigkeiten orientiert. Weiters müssen wir aber auch (infinitesimale) Längen (bzw. Volumina) auf  $M$  messen können. Falls  $M$  eine Riemann-Mannigfaltigkeit ist, dann können wir das mittels der Volumensform  $\text{vol}_M$  tun, im eindimensionalen Fall also mit dem Bogenelement.

Auf abstrakten Mannigfaltigkeiten brauchen wir ein Substitut für das Volumenelement. Im 1-dimensionalen, wäre das eine 1-Form  $\omega \in \Omega^1(M)$  (welche in keinem Punkt verschwindet). Dann könnten wir das Integral  $\int_M f \cdot \omega$  von  $f$  bzgl.  $\omega$  über  $M$  definieren. Da aber  $f \cdot \omega$  selbst eine 1-Form ist, genügt es  $\int_M \omega$  für beliebige 1-Formen  $\omega \in \Omega^1(M)$  zu erklären. Sei dazu  $c : [a, b] \rightarrow M$  eine orientierungserhaltende globale Parametrisierung, dann ist  $\int_M \omega := \int_a^b \omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt$  das wie üblich definierte Kurvenintegral.

Auf allgemeinen orientierten  $m$ -dimensionalen Mannigfaltigkeiten  $M$  wollen wir nun das Integral  $\int_M \omega$  für beliebige  $m$ -Formen  $\omega \in \Omega^m(M)$  mit kompaktem Träger definieren.

**47.5 Definition (Integration von Differentialformen)**

Sei  $M$  eine orientierte  $m$ -dimensionale Mannigfaltigkeit und  $\omega \in \Omega^m(M)$  mit kompaktem Träger.

1. Falls  $M = U \subseteq \mathbb{R}^m$  offen ist, dann läßt sich  $\omega$  als  $\omega(x) = f(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$  mit  $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$  schreiben. Das Integral definieren wir dann als gewöhnliches Riemann-Integral:

$$\int_M \omega := \int_U f(x^1, \dots, x^m) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m.$$

2. Falls  $\text{Trg } \omega \subseteq \varphi(U)$  für eine orientierungserhaltende Karte  $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \varphi(U)$  ist, definieren wir:

$$\int_M \omega := \int_U \varphi^*(\omega).$$

3. Ist  $\text{Trg } \omega$  beliebig kompakt, so wählen wir eine endliche, offene Überdeckung mit Kartenumgebungen von  $\text{Trg } \omega$ , sowie eine Partition der Eins  $\{f_i\}$ , die der Überdeckung untergeordnet ist. Dann hat jedes  $f_i \cdot \omega$  Träger in einer Karte,

und somit können wir nach (2) definieren:

$$\int_M \omega = \int_M \left( \sum_i f_i \right) \omega := \sum_i \int_M f_i \omega.$$

### Bemerkung

Diese Definitionen sind sinnvoll, d.h. die Begriffe hängen nicht von den getroffenen Wahlen ab:

Im Fall (1) ist nichts zu zeigen. Aber man beachte, daß für jeden orientierungserhaltenden Diffeomorphismus  $g : \mathbb{R}^m \supseteq V \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$  gilt:

$$\int_{g(V)} \omega = \int_V g^*(\omega),$$

denn falls  $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$  ist, so ist

$$(g^*(\omega))(x) = (f \circ g)(x) \det(g'(x)) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

nach (47.1).

Im Fall (2) sei  $\text{Trg } \omega \subset \varphi(U) \cap \psi(V) =: W$  für zwei Karten  $\varphi$  und  $\psi$ . Sei der Kartenwechsel  $g := \varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \rightarrow \varphi^{-1}(W)$  ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_U \varphi^*(\omega) &= \int_{\varphi^{-1}(W)} \varphi^*(\omega) = \int_{g(\psi^{-1}(W))} \varphi^*(\omega) \stackrel{(1)}{=} \\ &= \int_{\psi^{-1}(W)} \underbrace{g^*(\varphi^*(\omega))}_{(\varphi \circ g)^*(\omega)} = \int_{\psi^{-1}(W)} \psi^*(\omega) = \int_V \psi^*(\omega). \end{aligned}$$

Diese Gleichung folgt aus dem in (1) Gesagten.

Im Fall (3) sei  $\{g_j\}$  eine zweite Partition der Eins, die einer endlichen Überdeckung des Trägers mit Kartenumgebungen untergeordnet ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_i \int_M f_i \omega &= \sum_i \int_M \left( \sum_j g_j \right) f_i \omega = \sum_i \sum_j \int_M g_j f_i \omega = \\ &= \sum_j \int_M \left( \sum_i f_i \right) g_j \omega = \sum_j \int_M g_j \omega. \end{aligned}$$

### 47.6 Definition (Dichten)

Falls wir über nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten integrieren wollen, brauchen wir etwas anderes als  $m$ -Formen. Dazu definieren wir ein eindimensionales Vektorbündel  $\text{vol}(M)$  durch Angabe der Transitionsfunktionen  $x \mapsto |\det \psi'(x)| \in GL(1)$  zu den Kartenwechseln  $\psi$ . Schnitte von  $\text{vol}(M)$  heißen DICHTEN, solche kann man dann über  $M$  integrieren. Falls  $M$  orientierbar ist, ist  $\text{vol}(M) \cong \Lambda^m T^*M$ .

## 47.7

Wir steuern jetzt auf den Satz von Stokes zu: Der 1.te Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung besagt bekanntlich, daß  $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$ . Insbesondere gilt:  $\int_{-\infty}^0 f' = \int_a^0 f' = f(0)$ , falls  $\text{Trg } f$  kompakt ist und  $a$  unterhalb des Infimums von  $\text{Trg } f$  liegt.

**Lemma (Satz von Stokes für Halbraum).** Sei  $H = H^{m+1} := \{(t, x) : t \leq 0, x \in \mathbb{R}^m\}$  ein  $(m+1)$ -DIMENSIONALER HALBRAUM. Die Teilmenge  $\partial H := \{(0, x) : x \in \mathbb{R}^m\} \cong \mathbb{R}^m$  heißt der RAND von  $H$ , und für eine  $m$ -Form  $\omega$  im  $\mathbb{R}^{m+1}$  mit kompaktem Träger gilt:

$$\int_H d\omega = \int_{\partial H} \omega := \int_{\partial H} \text{incl}^* \omega,$$

wo  $\text{incl} : \partial H \hookrightarrow H$  die Inklusion ist.

**Beweis.** Es gilt für  $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^{m+1})$ :

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=0}^m \omega_i dx^0 \wedge \cdots \wedge \overline{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m; \\ d\omega &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^0 \wedge \cdots \wedge \overline{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m + 0 \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} (-1)^i dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^m \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_H d\omega &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \int_H \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} d(x^0, \dots, x^m) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left( \int_{-\infty}^0 \frac{\partial \omega_0}{\partial x^0}(x^0, x^1, \dots, x^m) dx^0 \right) d(x^1, \dots, x^m) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m (-1)^i \int_{H_i} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^i \right) d(x^0, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \omega_0(0, \cdot) + 0, \end{aligned}$$

wobei  $H_i := \{(t, x_1, \dots, \overline{x^i}, \dots, x_m) : t \leq 0\}$  ist, und der 2te Summand 0 ist, da  $\text{Trg } \omega$  kompakt ist. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial H} \omega &= \int_{\partial H} \text{incl}^* \omega \\ &\stackrel{(42.2)}{=} \int_{\partial H} \sum_{i=0}^m \omega_i(0, x^1, \dots, x^m) \det \left( \frac{\partial(x^0, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \omega_0(0, x^1, \dots, x^m) d(x^1, \dots, x^m) + 0, \end{aligned}$$

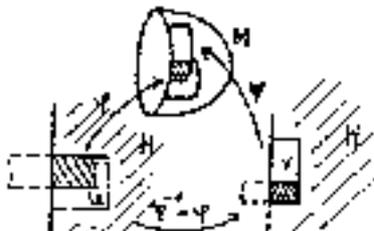
denn

$$\det \left( \frac{\partial(x^0, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \right) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \square$$

Wir wollen diese Überlegungen nun auf Räume übertragen, die nur lokal wie  $H$  aussehen:

#### 47.8 Definition (Berandete Mannigfaltigkeit)

Eine  $C^\infty$ -MANNIGFALTIGKEIT MIT RAND ist eine Menge  $M$  zusammen mit einem Atlas  $\mathcal{A}$  von injektiven Abbildungen  $\varphi : U \rightarrow M$ , wobei  $U \subseteq H$  offen in einem abgeschlossenen Halbraum  $H$ , und die Kartenwechsel  $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(\psi(V)) \rightarrow \psi^{-1}(\varphi(U))$  auf offenen Teilmengen von Halbräumen definiert und glatt sind.



Dabei heißt eine Abbildung zwischen solchen Mengen glatt, wenn es eine glatte Fortsetzung auf offene Mengen im  $\mathbb{R}^n$  gibt. Wie üblich setzen wir voraus, daß die durch den Atlas induzierte finale Topologie Hausdorff und parakompakt ist. Der RAND von  $M$  ist dann definiert als

$$\partial M := \{p \in M : \exists \text{ eine Karte } \varphi \text{ um } p \text{ mit } \varphi^{-1}(p) \in \partial H\}.$$

Da der Kartenwechsel ein lokaler Homöomorphismus des  $\mathbb{R}^n$  ist, erhält er innere Punkte, und somit ist  $p \in \partial M \Leftrightarrow \varphi^{-1}(p) \in \partial H$  für jede Karte  $\varphi$  um  $p$ . Der Rand  $\partial M$  ist dann eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Ein Atlas auf  $\partial M$  ist durch die Einschränkungen  $\varphi|_{\partial M}$  gegeben.

Man kann die Begriffe  $TM$ ,  $T^*M$ ,  $C^\infty(M, N)$ ,  $\Lambda^k T^*M$  und  $\Omega^k(M)$  wie auf Mannigfaltigkeiten ohne Rand definieren.

#### 47.9 Definition (innerer Tangentialvektor)

Ein Vektor  $v \in T_p M$  heißt INNERER TANGENTIALVEKTOR falls  $p \notin \partial M$  oder  $T\varphi^{-1}(p, v) \in T_{\varphi^{-1}(p)}H$  hat 0-te Komponente kleiner als 0.

#### 47.10 Lemma (Verlängern berandeter Mannigfaltigkeiten).

*Jede Mannigfaltigkeit mit Rand läßt sich zu einer Mannigfaltigkeit ohne Rand "verlängern", d.h. sie ist Teilmannigfaltigkeit der gleichen Dimension:*

**Beweisskizze.** Mittels Partition der Eins findet man ein VF auf  $M$ , das nur aus inneren Tangentialvektoren besteht. Durch "Zusammenstauchen" kann dessen Fluß global gemacht werden:  $\text{Fl}(1, \cdot) : M \rightarrow M \setminus \partial M$  ist dann eine Einbettung von  $M$  in die Mannigfaltigkeit ohne Rand  $M \setminus \partial M$ .  $\square$

Beispiele für berandete Mannigfaltigkeiten sind: das abgeschlossene Möbiusband und die abgeschlossene Kugel.

**47.11 Lemma (Rand eines Mannigfaltigkeit).** *Der Rand einer orientierten Mannigfaltigkeit  $M$  mit Rand ist in kanonischer Weise orientierbar.*

**Beweis.** Eine Basis  $(e_i)_{i=1}^m$  von  $T_p(\partial M)$  heißt positiv orientiert, falls  $(e_0, \dots, e_m)$  in  $T_p M$  positiv orientiert ist für einen nach außen weisenden Tangentialvektor  $e_0$ . (d.h.  $-e_0$  ist innerer Tangentialvektor)  $\square$

**47.12 Satz von Stokes.** *Sei  $M$  eine  $(n+1)$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand  $\partial M$  und dieser trage die kanonische Orientierung. Sei  $\omega \in \Omega^n(M)$  mit  $\text{Trg } \omega$  kompakt, dann gilt:*

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega := \int_{\partial M} \text{incl}^* \omega \quad (\text{wobei } \text{incl} : \partial M \hookrightarrow M)$$

**Beweis.** Sei  $\{f_i\}$  eine Partition der Eins, die einer Überdeckung mit Kartenbildern untergeordnet ist. Dann ist  $\omega = \sum_i \omega_i$  mit Formen  $\omega_i := f_i \cdot \omega$  mit Träger in Kartenbildern. Somit ist

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_i d(\omega_i), \quad \text{Trg } d(\omega_i) \subseteq \text{Trg}(\omega_i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_M d\omega = \sum_i \int_M d(\omega_i), \quad \int_{\partial M} \omega = \sum_i \int_{\partial M} \omega_i. \end{aligned}$$

Es genügt also, den Beweis für die Situation, wo  $\text{Trg } \omega$  in einer Kartenumgebung liegt, zu führen. Also o.B.d.A.  $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$  und somit  $\int_H \partial\omega = \int_{\partial H} \omega$ . Für diese Situation wurde das in (47.7) bereits gezeigt.  $\square$

## 48. Integration auf Riemann-Mannigfaltigkeiten

### 48.1 Bemerkungen

1. Die VOLUMSFORM auf einer  $m$ -dimensionalen orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit  $M$  ist jene eindeutig bestimmte  $m$ -Form  $\text{vol}_M$ , welche punktweise auf positiv orientierten Orthonormalbasen von  $TM$  den Wert 1 hat, siehe (41.2). In lokalen Koordinaten ist sie gegeben durch:

$$\begin{aligned} \text{vol}_M &= \sqrt{G} \, du^1 \wedge \dots \wedge du^m \\ \text{mit } G &:= \det((g_{i,j})_{i,j}) \text{ und } g_{i,j} := g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right), \end{aligned}$$

wobei  $g$  die Riemann-Metrik auf  $M$  ist.

2. Sei  $N$  eine orientierte Teilmannigfaltigkeit von Kodimension 1 der  $(n+1)$ -dimensionalen orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit  $M$  und sei  $\nu_x$  für  $x \in N$  der eindeutig bestimmte Vektor in  $T_x M$ , sodaß  $(\nu_x, e_1, \dots, e_n)$  eine positiv orientierte Orthonormalbasis in  $T_x M$  ist für eine (jede) orientierte Orthonormalbasis  $(e^1, \dots, e^n)$  von  $T_x N$ . Sei  $\nu$  zu einem Vektorfeld gleichen Namens auf ganz  $M$  fortgesetzt, so gilt

$$\text{vol}_N = \text{inkl}^*(i_\nu(\text{vol}_M)) \text{ auf } N,$$

denn  $\text{vol}_N(e_1, \dots, e_n) = 1 = \text{vol}_M(\nu_N, e_1, \dots, e_n) = (i_{\nu_N} \text{vol}_M)(e_1, \dots, e_n)$ . Insbesondere gilt das für den Rand  $N = \partial M$  einer berandeten Mannigfaltigkeit  $M$ . Der Vektor  $\nu$  ist dann der nach außen weisende Einheitsnormalvektor.

3. Sei allgemeiner  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  ein beliebiges Vektorfeld. Dann ist  $\text{div } \xi \cdot \text{vol}_M = \mathcal{L}_\xi \text{vol}_M$  nach (43.2) und es gilt auf  $\partial M$ :

$$\text{incl}^*(i_\xi \text{vol}_M) = \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M} \text{ auf } \partial M,$$

denn

$$\begin{aligned} (i_\xi \text{vol}_M)(e_1, \dots, e_m) &= \text{vol}_M(\xi, e_1, \dots, e_m) = \\ &= \text{vol}_M\left(\underbrace{\langle \xi, \nu \rangle \nu}_{\in (T(\partial M))^\perp} + \underbrace{(\xi - \langle \xi, \nu \rangle \nu)}_{\in T(\partial M)}, e_1, \dots, e_m\right) \\ &= \langle \xi, \nu \rangle \cdot \text{vol}_M(\nu, e_1, \dots, e_m) + 0 \\ &= \langle \xi, \nu \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M}(e_1, \dots, e_m). \end{aligned}$$

**48.2 Greensche Satz.** Sei  $M$  eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit mit Rand und sei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_M \text{div } \xi \cdot \text{vol}_M = \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M}.$$

**Beweis.** Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_M \text{div } \xi \cdot \text{vol}_M &\stackrel{(43.2)}{=} \int_M \mathcal{L}_\xi \text{vol}_M \stackrel{(42.7)}{=} \int_M (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \text{vol}_M \\ &= \int_M d(i_\xi \text{vol}_M) + 0 \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial M} \text{incl}^*(i_\xi \text{vol}_M) \\ &= \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M}. \quad \square \end{aligned}$$

### 48.3 Produktregeln

$$\begin{aligned} \text{grad}(f \cdot g) &= g \cdot \text{grad}(f) + f \cdot \text{grad}(g) \\ \text{div}(f \cdot \xi) &= f \cdot \text{div}(\xi) + df \cdot \xi = f \cdot \text{div}(\xi) + \langle \text{grad}(f), \xi \rangle \\ \Delta(f \cdot g) &= f \cdot \Delta(g) + \Delta(f) \cdot g - 2\langle \text{grad}(f), \text{grad}(g) \rangle, \end{aligned}$$

siehe Aufgabe (72.69).

**48.4 Greensche Formeln.** Sei  $M$  eine kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit mit Rand und seien  $f$  und  $h$  in  $C^\infty(M, \mathbb{R})$ . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \int_M (\langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle - f \cdot \Delta h) \cdot \text{vol} &= \int_{\partial M} f \cdot \langle \text{grad } h, \nu \rangle \cdot \text{vol} \\ \int_M (f \cdot \Delta h - h \cdot \Delta f) \cdot \text{vol} &= - \int_{\partial M} (f \, dh - h \, df)(\nu) \cdot \text{vol} \end{aligned}$$

**Beweis.** (1) Es gilt  $\operatorname{div}(f \cdot \operatorname{grad} h) = f \cdot \operatorname{div}(\operatorname{grad} h) + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle = -f \cdot \Delta h + \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle$  und somit für  $\xi = f \cdot \operatorname{grad} h$ :

$$\begin{aligned} \int_M \left( \langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} h \rangle - f \cdot \Delta h \right) \cdot \operatorname{vol}_M &= \int_M \operatorname{div}(f \cdot \operatorname{grad} h) \cdot \operatorname{vol}_M = \\ &= \int_M \operatorname{div} \xi \cdot \operatorname{vol}_M \stackrel{(48.2)}{=} \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \operatorname{vol}_{\partial M} \\ &= \int_{\partial M} \langle f \cdot \operatorname{grad} h, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \operatorname{vol}_{\partial M} = \int_{\partial M} f \cdot \langle \operatorname{grad} h, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \operatorname{vol}_{\partial M} \\ &= \int_{\partial M} f \cdot dh(\nu_{\partial M}) \cdot \operatorname{vol}_{\partial M}. \end{aligned}$$

(2) Vertauscht man  $f$  und  $h$  in (1) und zieht das Resultat von (1) ab so erhält man die zweite Greensche Formel.  $\square$

## 49. Der Laplace-Beltrami-Operator

### 49.1 Der Laplace-Beltrami-Operator ist selbstadjungiert

Was läßt sich allgemein über den Laplace-Beltrami-Operator  $\Delta := dd^* + d^*d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$  einer kompakten Riemann-Mannigfaltigkeit  $M$  aussagen? Auf jedem homogenen Teil  $\Omega^k(M)$  haben wir nach (41.3) ein inneres Produkt, welches gegeben ist durch

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\Omega^k(M)} := \int_M \langle \alpha(\cdot), \beta(\cdot) \rangle_{\Lambda^k T^*M} \operatorname{vol}_M.$$

Es gilt, daß  $d$  und  $d^*$  adjungierte Operatoren bezüglich diesem inneren Produkt sind, denn nach (41.4):

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \operatorname{vol} \text{ für } \alpha, \beta \in \Omega^k(M)$$

und für  $\alpha \in \Omega^k$  und  $\beta \in \Omega^{k-1}$  rechnen wir wie folgt

$$\begin{aligned} \left( \langle \alpha, d\beta \rangle - \langle d^* \alpha, \beta \rangle \right) \operatorname{vol} &\stackrel{(43.3)}{=} \langle d\beta, \alpha \rangle \operatorname{vol} - \left\langle \beta, (-1)^{km+m+1} * d * \alpha \right\rangle \operatorname{vol} \\ &= d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{km+m} \beta \wedge * * d * \alpha \\ &\stackrel{(41.4)}{=} d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{km+m} \beta \wedge (-1)^{(m-k+1)(k-1)} d * \alpha \\ &= d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{k-1} \beta \wedge d * \alpha \\ &= d(\beta \wedge * \alpha). \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_M \langle \alpha, d\beta \rangle \operatorname{vol} = \int_M \langle d^* \alpha, \beta \rangle \operatorname{vol}.$$

Somit ist der Laplace-Beltrami-Operator  $\Delta = dd^* + d^*d$  symmetrisch, d.h.

$$\langle \Delta \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta \beta \rangle$$

Er ist auch positiv, denn

$$\langle \Delta \alpha, \alpha \rangle = \langle (dd^* + d^*d)\alpha, \alpha \rangle = \langle d^* \alpha, d^* \alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle \geq 0.$$

Wegen dieser Gleichung gilt auch:

$$\Delta \alpha = 0 \Leftrightarrow d\alpha = 0 = d^* \alpha, \text{ also } \operatorname{Ker}(\Delta) = \operatorname{Ker}(d) \cap \operatorname{Ker}(d^*).$$

Die Formen im Kern von  $H$  werden auch als HARMONISCHE FORMEN bezeichnet. Der Operator  $\Delta$  ist ein linearer Differentialoperator vom Grad 2. Man kann zeigen, daß er elliptisch ist, siehe [88, 6.35] und damit folgendes

**49.4 Theorem von Hodge.** *Sei  $M$  eine kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit so gilt:*

$$\dim(\text{Ker } \Delta) < \infty \quad \text{und} \quad (\text{Ker } \Delta)^\perp = \text{Im } \Delta$$

**49.5 Folgerung (Orthogonale Zerlegung der Formen).** *Für kompakte orientierbare Riemann-Mannigfaltigkeiten  $M$  haben wir folgende orthogonale Zerlegungen:*

$$\Omega = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } \Delta \quad \text{und weiter} \quad \text{Bild } \Delta = \text{Bild } d \oplus \text{Bild } d^*$$

**Beweis.** Die erste direkte Summenzerlegung haben wir in (49.4) gezeigt. Nun zur zweiten:

( $\supseteq$ ) Die linearen Unterräume  $\text{Bild } d$  und  $\text{Bild } d^*$  sind in  $\text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$  enthalten, da  $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^*\beta \rangle = \langle \alpha, 0 \rangle = 0$  und  $\langle d^*\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d\beta \rangle = \langle \alpha, 0 \rangle = 0$  für alle  $\beta \in \text{Ker } \Delta$  nach (49.1).

( $\subseteq$ ) Dies ist wegen  $\Delta = dd^* + d^*d$  offensichtlich.

( $\oplus$ ) Die Summe ist orthogonal, denn wegen  $\langle d\alpha, d^*\beta \rangle = \langle d^2\alpha, \beta \rangle = \langle 0, \beta \rangle = 0$  steht  $\text{Bild}(d)$  auf  $\text{Bild}(d^*)$  normal.  $\square$

#### 49.6 Definition (Green-Operator)

Unter dem GREEN-OPERATOR versteht man den Operator  $G : \Omega \rightarrow (\text{Ker } \Delta)^\perp$  definiert durch  $\Delta(G(\alpha)) = \alpha - H(\alpha)$ , wobei  $H : \Omega \rightarrow \text{Ker } \Delta$  die orthonormale Projektion ist, die von jedem  $\alpha \in \Omega$  den harmonischen Teil  $H(\alpha) \in \text{Ker } \Delta$  berechnet. Wegen (49.4) gilt:

$$\Delta = \Delta|_{\text{Bild } \Delta} \oplus 0 : \text{Bild } \Delta \oplus \text{Ker } \Delta \rightarrow \text{Bild } \Delta \oplus \text{Ker } \Delta$$

und  $\Delta|_{\text{Bild } \Delta} : (\text{Ker } \Delta)^\perp \rightarrow \text{Bild } \Delta$  ist klarerweise bijektiv und stetig. Nach dem offenen Abbildungssatz für Fréchet-Räume (siehe [44, 5.5.2]) ist  $\Delta|_{\text{Bild } \Delta}$  ein Homöomorphismus. Mit seiner Hilfe läßt sich der Green-Operator auch als  $G = (\Delta|_{\text{Bild } \Delta})^{-1} \circ H^\perp$  schreiben, wobei  $H^\perp := \text{id}_\Omega - H$ . Folglich ist  $G$  beschränkt, selbstadjungiert und kompakt.

**49.7 Folgerung.** *Sei  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  ein linearer Operator, welcher mit  $\Delta$  kommutiert, d.h.  $T \circ \Delta = \Delta \circ T$ , so kommutiert er auch mit  $G$ . Insbesondere gilt das für  $d$ ,  $d^*$  und  $\Delta$ .*

**Beweis.** Aus  $T \circ \Delta = \Delta \circ T$  folgt, daß  $\text{Ker } \Delta$  und  $\text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$   $T$ -invariant sind. Somit kommutiert  $T$  mit  $H$  und  $H^\perp$  also auch mit  $G$ .  $\square$

#### 49.8 Folgerung (Harmonische Repräsentanten).

*Die Kohomologie  $H(M)$  von  $M$  ist isomorph zum Raum  $\text{Ker } \Delta$  der harmonischen Formen. Genauer, in jeder Kohomologiekategorie gibt es genau einen harmonischen Repräsentanten.*

**Beweis.** Nach (49.5) ist  $\Omega = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } d \oplus \text{Bild } d^*$ . Wir behaupten  $\text{Ker } d = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } d$ .

- ( $\supseteq$ ) Nach (49.1) ist  $\text{Ker } \Delta = \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^* \subseteq \text{Ker } d$  und wegen  $d^2 = 0$  ist  $\text{Im } d \subseteq \text{Ker } d$ .
- ( $\subseteq$ ) Sei  $\omega \in \text{Ker } d$ . Nach (49.5) ist  $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$  mit  $\omega_1 \in \text{Ker } \Delta$ ,  $\omega_2 \in \text{Im } d$  und  $\omega_3 \in \text{Im } d^*$  und somit  $0 = d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 + d\omega_3$  mit  $d\omega_1 = 0 = d\omega_2$  wegen ( $\supseteq$ ). Da  $\omega_3 \in \text{Im } d^*$  existiert ein  $\alpha$  mit  $d^*\alpha = \omega_3$  und somit  $0 = d\omega_3 = dd^*\alpha$  und weiters  $\|\omega\|^2 = \|d^*\alpha\|^2 = \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle = \langle dd^*\alpha, \alpha \rangle = \langle 0, \alpha \rangle = 0$ . Also ist  $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in \text{Ker } \Delta \oplus \text{Im } d$ .

**49.9 Folgerung (Kohomologie ist endlichdimensional).** *Die Kohomologie jeder kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit ist endlichdimensional, d.h. alle Betti-Zahlen sind endlich.*

**Beweis.** Wir wählen eine Riemann-Metrik auf  $M$ , dann ist  $H(M) \cong \text{Ker } \Delta$  nach (49.8), und ist somit endlichdimensional nach (49.4).  $\square$

#### 49.10 Definition (Poincaré-Dualität)

Für jede kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit induziert die Abbildung  $\Omega^{m-k}(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , welche durch  $(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$  gegeben ist, eine bilineare Abbildung  $H^{m-k}(M) \times H^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$ , die sogenannte POINCARÉ-DUALITÄT.

Diese Definition macht Sinn, denn aus  $\alpha_2 - \alpha_1 = d\alpha$  folgt  $\alpha_2 \wedge \beta - \alpha_1 \wedge \beta = d\alpha \wedge \beta = d(\alpha \wedge \beta) \pm \alpha \wedge d\beta$ , wo  $d\beta = 0$ , da  $[\beta] \in H^k(M) = \text{Ker } d/\text{Bild } d$  ist. Somit ist nach den Satz von Stokes  $\int_M \alpha_2 \wedge \beta = \int_M \alpha_1 \wedge \beta$ .

**49.11 Lemma.** *Die Poincaré-Dualität induziert einen Isomorphismus  $H^{m-k} \cong (H^k)^*$ , i.e. für die Betti-Zahlen gilt  $\beta_k = \beta_{m-k}$ .*

**Beweis.** Wir zeigen zuerst, daß die Poincaré-Dualität nicht degeneriert ist.

Sei dazu  $[\alpha] \in H^{m-k} \setminus \{0\}$ , wir dürfen annehmen, daß  $\alpha$  harmonisch ist. Wählen wir  $\beta := *\alpha$ , so gilt:  $d\beta = d*\alpha = \pm *d^*\alpha = 0$  und  $\int_M \alpha \wedge \beta = \int_M \alpha \wedge *\alpha = \int_M \langle \alpha, \alpha \rangle \text{ vol} > 0$ , da  $\alpha \neq 0$ .

Wir zeigen nun, daß eine bilineare nicht-degenerierte Abbildung  $b : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$  auf endlichdimensionalen Vektorräumen einen Isomorphismus  $E \rightarrow F^*$  induziert.

Die induzierte Abbildung  $E \ni v \mapsto b(v, \cdot) \in F^*$  ist injektiv, denn  $b(v, w) = 0$  für alle  $w \in F$  impliziert  $v = 0$ . Also ist  $\dim E \leq \dim(F^*) = \dim F$ , und aus Symmetriegründen  $\dim E = \dim F$ . Somit ist die induzierte Abbildung ein Isomorphismus.  $\square$

Da  $H^k$  nach (49.4) endlich-dimensional ist, liefert jedes innere Produkt auf  $H^k$  einen Isomorphismus  $\sharp : H^k \rightarrow (H^k)^*$  und somit nach (49.11) einen Isomorphismus  $H^{m-k} \rightarrow (H^k)^* \leftarrow H^k$ . Verwenden wir insbesondere den Isomorphismus  $H(M) \cong \text{Ker } \Delta \subseteq \Omega(M)$  und das von  $\Omega(M)$  induzierte innere Produkt aus (49.1) so läßt sich obiger Isomorphismus  $H^{m-k} \rightarrow H^k$  wie folgt beschreiben:

$$\alpha \leftrightarrow (\beta \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \gamma,$$

mit  $\int_M \alpha \wedge \beta = \langle \gamma, \beta \rangle_{\Omega^k(M)} := \int_M \langle \gamma, \beta \rangle_{\Lambda^k(M)} \text{ vol}_M = \int_M *\gamma \wedge \beta$  für alle  $\beta \in H^k(M)$ , also ist  $\alpha = *\gamma$ , d.h. der Isomorphismus ist durch den Hodge-Stern-Operator gegeben.

Beachte dabei, daß

$$\begin{aligned}
 \Delta(*\gamma) &= (dd^* + d^*d) * \gamma \\
 &= (-1)^{1+m+m(m-k)} d * d * * \gamma + (-1)^{1+m+m(m-k+1)} * d * d * \gamma \\
 &= (-1)^{1+m+m(m-k)+k(m-k)} d * d \gamma + (-1)^{1+m+m(m-k+1)} * d * d * \gamma \\
 &= *((-1)^{m(m+1-2k)} (-1)^{1+m+m k} d * d * \\
 &\quad + (-1)^{m(m-1-2k)} (-1)^{1+m+m(k+1)} * d * d) \gamma \\
 &= *(dd^* + d^*d)\gamma = *\Delta\gamma = *0 = 0, \quad \text{für } \gamma \in \text{Ker } \Delta.
 \end{aligned}$$

**49.12 Folgerung.** *Ist  $M$  kompakt, zusammenhängend, orientierbar und  $m$ -dimensional, so ist  $H^m(M) \cong \mathbb{R}$ , i.e.  $\beta_M = 1$ .*

Vgl. dies mit (50.5).

**Beweis.** Die Poincaré-Dualität liefert den Isomorphismus  $H^m \cong (H^0)^*$ , und  $H^0 = \mathbb{R}$ , da  $M$  zusammenhängend ist. Die Zusammensetzung der Isomorphismen ist:  $\omega \mapsto \int_M \omega \wedge 1 = \int_M \omega$ .  $\square$

**49.13 Folgerung.** *Ist  $M$  kompakt, zusammenhängend, orientierbar und von ungerader Dimension so verschwindet die Euler-Charakteristik  $\chi = \sum_k (-1)^k \beta_k$ .*

**Beweis.** Sei  $\dim M = 2n + 1 = m$  so gilt

$$\begin{aligned}
 \chi &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k + \sum_{k=n+1}^m (-1)^k \beta_k \\
 &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k + \sum_{k=0}^n (-1)^{m-k} \beta_{m-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \underbrace{(\beta_k - \beta_{m-k})}_{\text{nach (49.11) } = 0} = 0. \quad \square
 \end{aligned}$$

## 50.4 Kohomologie

Sei  $M$  kompakt, orientierbar und ohne Rand. Wie in (47.3) folgt die Existenz eines  $\omega \in \Omega^m(M)$ ,  $m = \dim M$ , mit  $\omega(v_1, \dots, v_m) > 0$  für alle positiv orientierten Basen  $(v_i)_{i=1}^m$ . Somit ist  $\int_M \omega > 0$  und  $\omega$  ist geschlossen, weil  $\omega$  eine  $m$ -Form ist.

Die Form  $\omega$  kann aber nicht exakt sein: Gäbe es ein  $\eta \in \Omega^{m-1}(M)$  mit  $\omega = d\eta$ , dann wäre

$$\int_M \omega = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0, \quad \text{da } \partial M = \emptyset.$$

Das ist ein Widerspruch. Also ist  $H^m(M) \neq 0$ . Genauer gilt der folgende Satz:

**50.5 Satz (Höchste Kohomologie).** *Sei  $M$  eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit ohne Rand,  $\dim M = m$ . Es gilt:*

- $H^m(M) = \mathbb{R}$ , falls  $M$  kompakt und orientierbar, cf. 49.12.
- $H^m(M) = 0$  sonst, siehe [78, Vol.I, S.371].

Der Beweis des zweiten Punktes, den wir hier nicht geben, basiert wesentlich auf

**50.6 Lemma (Poincaré-Lemma mit kompakten Träger).** Sei  $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^m)$  mit kompakten Träger und  $\int \omega = 0$ . Dann existiert ein  $\eta \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$  mit kompakten Träger und  $\omega = d\eta$ .

(Zum Beweis des Lemmas verwendet man  $H^{m-1}(S^{m-1}) = \mathbb{R}$ , siehe [78, Vol.I, Chapter 8])

**50.7 Beispiel**

Für die Orientierungsüberlagerung  $S^n \rightarrow P^n$ , ist die Orientierungsvertauschung die Antipodalabbildung  $x \mapsto -x$  und somit folgt aus  $H^k(P^n) \cong H_+^k(S^n)$ , daß

$$H^k(P^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq 0, n \\ \mathbb{R} & \text{für } k = 0 \quad (\text{da } P^n \text{ zush. ist}) \\ 0 & \text{für } k = n \text{ gerade} \\ \mathbb{R} & \text{für } k = n \text{ ungerade} \end{cases}$$

**50.8 Brouwerscher Fixpunktsatz.** Sei  $f : B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\} \rightarrow B^n$  glatt, dann gibt es ein  $x \in B^n$  mit  $f(x) = x$ .

**Beweis.** Indirekt: Sei  $f(x) \neq x$  für alle  $x$ , dann gibt es eine  $C^\infty$ -Abbildung  $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$  mit  $r|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$ , sei nämlich  $r(x)$  der auf der Seite von  $x$  liegende Schnittpunkt der wohldefinierten Geraden durch  $x$  und  $f(x)$  mit der Sphäre  $S^{n-1}$ . Wir erweitern  $r$  zu einer Abbildung gleichen Namens  $r : \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$ . Nun folgt

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{r^*} & H^{n-1}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{incl}^*} & H^{n-1}(S^{n-1}) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & 0 & & \\ \parallel & \swarrow & \nearrow & & \parallel \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

Das ist ein Widerspruch. □

**50.9 Definition (Abbildungsgrad)**

Seien  $M, N$  zusammenhängende, kompakte und orientierbare Mannigfaltigkeiten von gleicher Dimension  $m$  und sei  $f : M \rightarrow N$  glatt. Der **ABBILDUNGSGRAD**  $\text{deg } f \in \mathbb{R}$

sei durch folgendes Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccc} H^m(M) & \xleftarrow{H^m(f)} & H^m(N) \\ f^\# \downarrow & & \downarrow f^\# \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{\deg f} & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\deg f \cdot t \longleftarrow t$$

wobei

$$\deg f \cdot \int^\# [\omega] = \deg f \cdot \int \omega = \int^\# H^m(f)[\omega] := \int^\# [f^*\omega] = \int f^*\omega.$$

Man kann zeigen, daß  $\deg f$  eine ganze Zahl ist.

#### 50.10 Folgerung.

1.  $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$ .
2.  $f \sim g$  homotop  $\Rightarrow \deg f = \deg g$ .
3.  $f$  ist Diffeomorphismus  $\Rightarrow \deg f = \pm 1$ ;  
Weiters ist  $\deg f = 1 \Leftrightarrow f$  orientierungserhaltend ist.
4.  $f$  ist nicht surjektiv  $\Rightarrow \deg f = 0$ .

**Beweis.** (1) da  $(f \circ g)^\# = g^\# \circ f^\#$ .

(2) da dann  $f^\# = g^\#$ .

(3) folgt aus (1) unter Verwendung von  $\deg f \in \mathbb{Z}$ .

(4) Es ist  $\omega \in \Omega^m(N)$ ,  $\text{Trg } \omega \subseteq N \setminus f(M)$  und  $\int_N \omega = 1$ . Also ist  $\deg f \cdot 1 = \int_M f^*\omega = \int_M 0 = 0$ , und somit ist  $\deg f = 0$ .  $\square$

**50.11 Igelsatz.** Sei  $\xi \in \mathfrak{X}(S^{2n})$ . Dann gibt es ein  $p \in S^{2n}$  mit  $\xi(p) = 0$ .

**Beweis.** Indirekt: Sei  $\xi(p) \neq 0$  für alle  $p$ . Dann gibt es eine Homotopie zwischen Identität und Antipodalabbildung: verbinden wir  $p$  mit  $-p$  längs des Großkreises in Richtung  $\xi(p)$ , so folgt  $1 = \deg \text{id} = \deg(\text{Antipod}) = -1$ . Widerspruch.  $\square$

#### 49.14 Kann man die Form einer Trommel hören?

Um diese sehr anschauliches Problem in eine mathematische Formulierung zu bekommen, denken wir uns eine Trommel als ein berandetes Gebiet im  $\mathbb{R}^2$  denken. Lassen wir diese nun mit festgehaltenem Rand schwingen, so besitzt sie gewisse Eigenfrequenzen, die wir – zumindest mit absolutem Gehör – hören könnten. Es stellt sich nun die Frage, ob das Gebiet durch dieses Spektrum von Eigenfrequenzen bereits bis auf Isometrien eindeutig festgelegt ist.

Allgemeiner können wir das Problem auch für beliebig dimensionale, abstrakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten stellen, [46].

Da wir sie nur ein wenig aus der Ruhelage bringen wollen, ist es egal in welchem umgebenden Raum die Mannigfaltigkeit isometrisch eingebettet ist, am Einfachsten in  $M \times \mathbb{R}$ . Sei nun  $u(x, t)$  die Entfernung des Punktes  $x \in M$  von seiner Ruhelage

zum Zeitpunkt  $t$ . Dann erfüllt  $u$ , wie bei der üblichen Gleichung der schwingenden Saite, die partielle Differentialgleichung 2.ter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0 \text{ mit } u|_{\partial M} = 0.$$

Wobei  $\Delta$  der Laplace-Beltrami-Operator der Riemann-Mannigfaltigkeit ist, siehe (43.3).

Die übliche Lösungsmethode verwendet den Ansatz der getrennten Variablen, d.h.  $u(x, t) := \varphi(x) \cdot \psi(t)$ . Die Gleichung übersetzt sich dann in  $\frac{\Delta \varphi}{\varphi}(x) = -\frac{\psi''}{\psi}(t)$  und somit müssen beide Seiten konstant – z.B. gleich  $\lambda$  – sein. Insbesondere suchen wir also Eigenwerte  $\lambda \in \mathbb{R}$  und Eigenfunktionen  $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  des Operators  $\Delta : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ .

Falls  $M$  kompakt ist, so sind nach (49.1) alle Eigenwerte reell und die Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten stehen orthogonal (da  $\Delta$  symmetrisch ist). Die Eigenwerte sind alle nicht negativ (da  $\Delta$  positiv ist) und lassen sich zu einer monoton wachsenden Folge  $(\lambda_k)$  anordnen, die sich nur im Unendlichen häuft, denn andernfalls besäße eine zugehörige orthonormale Folge von Eigenfunktionen nach (49.2) einen Häufungswert. Vermöge einer orthonormalen Folge von zugehörigen Eigenfunktionen  $\varphi_k \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  läßt sich die Wellengleichung mittels Fourierreihen

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \cdot \varphi_k(x)$$

lösen, wobei die Konstanten  $a_k$  und  $b_k$  durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Die Klangwelle der Mannigfaltigkeit ist dann ein geeigneter Mittelwert:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \beta_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right).$$

Und somit können wir (in einem gewissen Sinn) die  $\lambda_k$  hören.

Diese Folge  $(\lambda_k)$  heißt das SPEKTRUM DER RIEMANN-MANNIGFALTIGKEIT. Z.B. ist das Spektrum der  $S^n$  die Folge  $(k(k+n-1))_{k=0}^{\infty}$ , wobei jedes  $k > 0$  mit Vielfachheit  $\frac{(n+2k-1)!(n+k-2)!}{(n-1)!k!}$  auftritt.

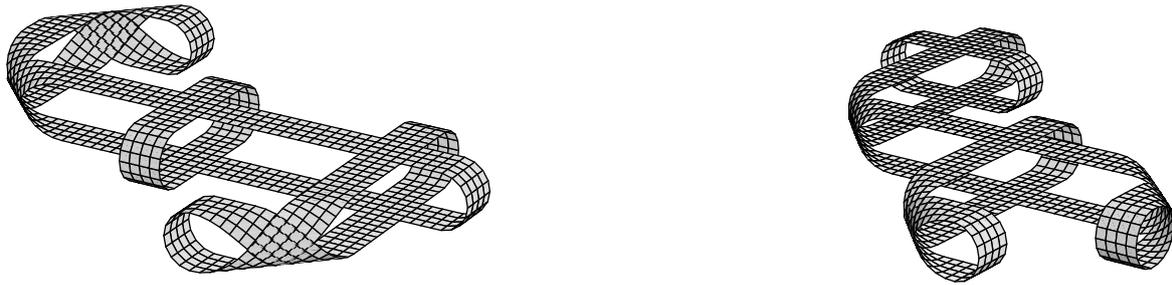
Man kann nun zeigen, daß folgende Dinge gehört werden können, d.h. durch das Spektrum bereits eindeutig bestimmt sind: die Dimension, das Volumen und die Euler-Charakteristik und damit das Geschlecht (einer 2-dimensionalen unberandeten Mannigfaltigkeit) und die totale skalare Krümmung (siehe (64.13)).

Man konnte zeigen, daß man die folgenden Riemann-Mannigfaltigkeiten mit ihrer kanonischen Metrik durch Hören erkennen kann: die Sphären  $S^n$ , die reellen projektiven Räume  $\mathbb{P}^{2n-1}$  für  $n \leq 3$ , den flachen Torus  $S^1 \times S^1$ , sowie alle kompakten 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit konstanten Krümmung  $K > 0$  [Tanaka1978]. Jedoch gibt es ISOSPEKTRALE RIEMANN-MANNIGFALTIGKEITEN die nicht isometrisch sind. Das erste Beispiel wurde von [63] gefunden und waren zwei 16-dimensionale Tori. [16] gaben 4-dimensionale Tori an. Marie-France Vigneras [86] konstruierte 2-dimensionale Beispiele die als Quotienten der hyperbolischen Halbebene nach diskreten Gruppen von Isometrien erhalten werden. Daß es sogar isospektrale Deformationen von Riemann-Mannigfaltigkeiten gibt, wurde von [26] gezeigt und in [80] systematisiert. Schließlich konstruierten [28] eine berandete Fläche die aus  $168 = 7 \cdot 24$

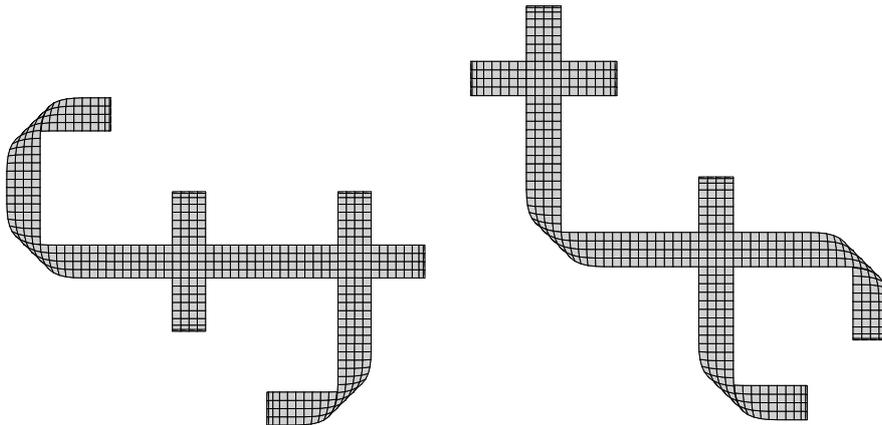
Kreuzen zusammengesetzt ist und auf welcher die Elemente von  $SL_{\mathbb{Z}_2}(3)$  als fixpunktfreie Isometrien wirken. Die diskreten Untergruppen

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

liefern dann zwei 24-blättrige Überlagerungen  $M \rightarrow M/G_i =: M_i$  mit  $M_1$  und  $M_2$  isospektral aber nicht isometrisch.



Faktoriert man noch die offensichtliche isometrische Involution  $\tau_i : M_i \rightarrow M_i$  heraus, so erhält man zwei isospektrale aber nicht isometrische Gebiete mit Ecken in  $\mathbb{R}^2$ .



## Literaturverzeichnis

- [1] J.W. Alexander. An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA.*, 10:8–10, 1924.
- [2] C. Bankwitz. über die Fundamentalgruppe des inversen Knotens und des gerichteten Knotens. *Ann.of Math*, 31:129–130, 1930.
- [3] J.L.M. Barosa and A.G. Colares. *Minimal Surfaces in  $\mathbb{R}^3$* . Springer Lecture Notes 1195, 1986.
- [4] A.F. Beardon. *A primer on Riemann Surfaces*. Cambridge Univ.Press, London, 1984. 138
- [5] M. Berger. *Geometry I*. Springer, Berlin, 1987.
- [6] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential Geometry, Manifolds, Curves, and Surfaces*. Springer, New York, 1987.
- [7] S. Bernstein. Sur un théorème de Géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique. *Comm.de la Soc.M. Kharkov*, 15:38–45, 1915.
- [8] O. Bonnet. Mémoire sur la théorie générale des surfaces. *Journ. de l'Ecole Polytechn.*, 19:1–146, 1848.
- [9] Th. Bröcker and K. Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer, Heidelberg, 1973. 39, 41, 42, 45
- [10] Brown. Smooth  $n$ -manifolds immerse in  $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$ . *Contemp. Math*, 12:73–79, 1982. 40
- [11] Carathéodory. über die gegenseitigen Beziehungen der Ränder bei konformen Abbildungen des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. *Math. Annal.*, 73:305–320, 1913.
- [12] Catalan. *Jornal de Mathém.*, 7:203, 1842.
- [13] S.S. Chern. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. AMS.*, 6:771–782, 1955. 135
- [14] S.S. Chern. *Complex manifolds without potential theory*. Van Nostrand, Princeton, 1967.
- [15] Cohen. A proof of the immersion conjecture. *Proced. Math. Acad. Soc.*, 79:3390–3392, 1982. 40
- [16] N.J.A. Conway, J.H.; Sloane. Four-dimensional lattices with the same theta series. *Int. Math. Res. Not.*, 4:93–96, 1992. 218
- [17] M. Dehn. über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, 69:137–168, 1910.
- [18] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960.
- [19] R. Engelking. *Outline of General Topology*. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1968. 20
- [20] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer, Berlin, 1969.
- [21] C. Fefferman. The Bergman kernel of biholomorphic mappings of pseudo convex domains. *Inv. Math.*, 26:1–65, 1974.
- [22] G.M. Fischer. On the group of all homeomorphisms of a manifold. *Trans. AMS*, 97:193–212, 1960.
- [23] Gauß. Disquisitiones generales circa superficies curvas. *Comm. Soc. Regiae Sci. Gottingensis Rec.*, 6, 1828.
- [24] Gleason. Groups without small subgroups. *Ann. of Math.*, 56:193–212, 1952.
- [25] Robert E. Gompf. Three exotic  $\mathbb{R}^4$ 's and other anomalies. *Journal of Differential Geom.* 18.2, pages 317–328, 1983.
- [26] C. Gordon and E. Wilson. Isospektral deformations of compact solvmanifolds. *J. Diff. Geom.*, 19:241–256, 1984. 218
- [27] C. McA. Gordon and J. Luecke. Konts are determined by their complements. *J.AMS.*, 2:371, 1989.
- [28] D.; Wolpert S. Gordon, C.; Webb. Isospectral plane domains and surfaces via riemannian orbifolds. *Invent. Math.*, 110:1–22, 1992. 218

- [29] David L.; Wolpert Scott Gordon, Carolyn; Webb. One cannot hear the shape of a drum. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 27:134–138, 1992.
- [30] Werner Greub. *Multilinear Algebra*. Springer, 161
- [31] Werner Greub, Stephen Halperin, and Ray Vanstone. *Connections, Curvature and Cohomology I-III*. Academic Press 773, 76, New York, 1972.
- [32] W. Gröbner. *Matrizenrechnung*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1966.
- [33] H.W. Guggenheimer. *Differential Geometry*. Dover Publ., New York, 1963.
- [34] J. Hadamard. Les surfaces á corbures opposées. *J.Math.Pures Appl.*, 4:27–73, 1889.
- [35] Haeflinger and Reeb. Variétés a une dimension et structures feuilletés de plan. *l'Enseignement Math.*, 2:107–125, 1957. 15
- [36] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Acad. Press, New York, 1978.
- [37] G. Herglotz. über die Starrheit der Eilflächen. *Abh. Math.Sem.Univ.Hamburg*, 15:127–129, 1943.
- [38] D. Hilbert. über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung. *Trans.AMS.*, 2:87–99, 1901. .
- [39] S. Hildebrandt. Boundary behaviour of minimal surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 35:47–82, 1969.
- [40] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer, New York, 1976. 39, 40, 41, 45, 202
- [41] H. Hopf and W. Rinow. über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen. *Math. Ann.*, 116:749–766, 1938.
- [42] Chuan-Chih Hsiung. *A First Course in Differential Geometry*. John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [43] I.M. James. Whitehead products and vector fields on spheres. *Proc. Cambridge*, 53:817–820, 1957.
- [44] H. Jarchow. *Locally convex spaces*. Teubner, Stuttgart, 1981. 213
- [45] Joris. Une  $c^\infty$ -application non-immersive qui possede la propriete universelle des immersions. *Archiv Math.*, 39:267–277, 1982. 37
- [46] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer.Math.Monthly*, 73:1–23, 1966. 217
- [47] M. Kervaire. A manifold which doesn't admit any differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 34:257–270, 1960. 6
- [48] Michel A. Kervaire. A manifold which doesn't admit a differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 35:1–14, 1961.
- [49] W. Klingenberg. *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*. Springer, Heidelberg, 1973.
- [50] S. Kobayashi. *on conjugate and cut loci*. The Mathem. Assoc. Am., Englewood Cliffs, N.J., 1967. .
- [51] S. Kobayashi. *Transformation groups in Differential Geometry*. Springer, Ergebnisse der Math. 70, Berlin, 1972. . 130, 135
- [52] S. Kobayashi and K. Nomitzu. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience, New York, 1969.
- [53] A. Kriegl. *Topologie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 1999. 19
- [54] A. Kriegl. *Analysis 2*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004.
- [55] A. Kriegl. *Analysis 3*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004/05.
- [56] Lagrange. *Œvres Vol. 1*. Gauthier-Villars, Paris, 1868.
- [57] S. Lang. *Differentiable Manifolds*. Addison-Wesley, 1962.
- [58] H. Liebmann. Eine neue Eigenschaft der Kugel. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math. Phys.*, pages 44–55, 1899.
- [59] Meusnier. Mémoire sur la curbure des surfaces. *Mémoires des savans étrangers*, 10:477–510, 1776.
- [60] P. Michor. *Riemannsche Differentialgeometrie*. Vorlesung WS, Univ. Wien, 1988/89.
- [61] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.*, 64:399–405, 1956. 7
- [62] J. Milnor. Differentiable Structures on Spheres. *Ann. of Math.*, 81:962–972, 1959.
- [63] J. Milnor. Eigenvalues of the Laplace operator on certain mf's. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 51:542, 1964. 218
- [64] Montgomery and Zippin. Small subgroups of finite dimensional groups. *Ann. of Math.*, 56:213–241, 1952. .
- [65] B. Morin and J-P. Petit. Let retournement de la sphère. *CRAS.*, 287:767–770, 791–794, 879–882, 1978.

- [66] S. Mukhopadhyaya. New methods in the geometry of a plane arc. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 1:31–37, 1909.
- [67] Munkres. Obstruction to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphism. *Ann. of Math.*, 72:521–554, 1960. 7
- [68] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, 63:20–64, 1956. 122
- [69] Nomitzu and Ozeki. The existence of complete Riemannian metrics. *Proc. AMS.*, 12:889–891, 1961. .
- [70] R. Osserman. Global Properties of minimal surfaces in  $e^3$  and  $e^n$ . *Ann. of Math.*, 80:340–364, 1964.
- [71] R. Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces*. Van Nostrand, NewYork, 1969.
- [72] R. Osserman. A proof of regularity everywhere of the classical solution to Plateaus’s problem. *Ann. of Math*, 91:550–569, 1970.
- [73] P. Painlevé. Sur la theorie de la Représentation conforme. *CRAS.*, 112:653–657, 1891.
- [74] C.D. Papakyriakopoulos. On Dehn’s lemma and the asphericity of knots. *Ann. of Math.*, 66:1–26, 1957.
- [75] E. Peschl. *Funktionentheorie*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1967. 134
- [76] Mary Ellen Rudin. Two nonmetrizable manifolds. *Topology and its Appl.*, 35:137–152, 1990. 19
- [77] H.F. Scherk. Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. *Crellés Journal f. reine und angew. Math.*, 13:185–208, 1835.
- [78] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry 1-4*. Publish or Perish, Berkeley, 1979. 19, 90, 135, 161, 215, 216
- [79] J. Stallings. The piecewise-linear structure of euclidean space. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58:481–488, 1962. 7
- [80] Toshikazu Sunada. Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Ann. Math. (2)*, 121:1985, 169-186. 218
- [81] Taubes. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *J. Diffgeom.*, 25:363–430, 1987. 7
- [82] J. Tits. *Liesche Gruppen und Algebren*. Springer Hochschultext, Berlin, 1983.
- [83] Trotter. Non-inverible knots exist. *Topology*, 2:341–358, 1964.
- [84] V.S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras and their Representation*. Springer Graduate Text, Berlin, 1984.
- [85] L. Vietoris. Ein einfacher Beweis des Vierscheitelsatzes der ebenen Kurven. *Arch. Math.*, 3:304–306, 1952.
- [86] M.F. Vignéras. Variétés Riemanniennes isospektrales et non isométriques. *Ann. Math*, 112:21–32, 1980. 218
- [87] R. Walter. *Differentialgeometry*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1978.
- [88] J.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott Foresman and Company, Illinois, 1971. 107, 200, 213
- [89] S. Warschawski. über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformen Abbildungen. *Math.Z.*, 35:321–456, 1932.
- [90] Weierstrass. *Monatsber. der Berlin. Akad.*, 1866.
- [91] H. Whitney. The selfintersections of a smooth  $n$ -manifold in  $2n$ -space. *Annals of Math.*, 45:220–446, 1944. 40, 41
- [92] F. Xavier. The Gauss map of a complete, non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere. *Annals of Math.*, 113:211–214, 1981.
- [93] H. Yamabe. On an arcwise connected subgroup of a Liegroup. *Osaka M.J.*, 2:14–15, 1950. 106
- [94] K. Zindler. über konvexe Gebilde I. *Monatsh. Math. Phys.*, 31:87–102, 1921.

# Index

- $(m+1)$ -dimensionaler Halbraum, 208
- $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit mit Rand, 209
- $C^\infty$ -Atlas einer Mannigfaltigkeit, 3
- $T_1$ , 14
- $T_2$ , 15
- $\Omega^1(M)$ , 115
- $\nabla$  = kovariante Ableitung, 122
- $\sigma$ -kompakt, 19
- $\operatorname{div} \xi$ , 194
- $\operatorname{vol}(M)$ , 207
- $k$ -Form am  $\mathbb{R}^m$ , 160
- $k$ -te Bettizahl, 197
- $k$ -te De-Rham Kohomologie, 197
- (reguläre) Teilmannigfaltigkeit, 39
- Überdeckungsdimension, 20
- Überlagerung, 46
- äquivalente Karten, 3
- äußere Algebra, 167
- “Hack“-Produkt, 164
- 1-Form auf einer Mannigfaltigkeit, 111
- 1-Parameter Untergruppe, 101
- 2-Form am  $\mathbb{R}^m$ , 160
- 2-Form auf einer Mannigfaltigkeit, 161
  
- Abbildungsgrad, 216
- abstrakte  $C^\infty$ -Mannigfaltigkeit, 3
- Alternator, 164
- antiholomorphe Funktion, 132
- Atlas einer topologischen Mannigfaltigkeit, 6
- Automorphismengruppe einer Riemannschen Fläche, 136
  
- Bianchi Identität, 148
- Blätter, 92
- Blätterung, 92
- Brouwerscher Fixpunktsatz, 216
  
- Charakterisierung initialer Immersionen, 34
- Charakterisierung von Diffeomorphismen, 32
- Charakterisierung von Einbettungen, 38
- Charakterisierung von Immersionen, 33
- Charakterisierung von Submersionen, 45
  
- De-Rham Kohomologie, 197
- Deformationsretrakt, 200
- Derivation über einem Punkt, 23
  
- Dichte, 207
- Differentialform vom Grad  $k$ , 168
- Dimensionsaxiom der Kohomologie, 197
- Divergenz eines Vektorfelds, 194
- duale Basis, 111
- duale Vektorbündel, 115
  
- Einbettung, 38
- einfach zusammenhängend, 53
- Einhängungsoperator, 197
- Einpunktkompaktifizierung, 9
- Ersten Homotopiegruppe, 52
- Euler-Charakteristik, 197
- exakt, 197
- exakte 1-Form, 160
- Exponentialabbildung, 101
- Exponentialabbildung, 126
  
- Faserbündel, 46
- finale Abbildung, 34
- foliation, 92
- freie Wirkung, 107
- Fußpunktabbildung des Tangentialbündels, 73
- Fundamentalgruppe, 52
- Funktor, 114
- funktorielle Konstruktion, 169
  
- Gauß-Gleichung, 141
- Gaußgleichung, 122
- glatte  $p$ - $q$ -Tensorfelder, 170
- glatte Abbildung, 6
- glatte Partition der Eins, 16
- global triviales Faserbündel, 47
- Godazzi-Mainardi-Gleichung, 141
- Gradientenfeld einer Funktion, 120
- graduiert antikommutativ, 184
- graduiert kommutative Algebra, 167
- graduierte Algebra, 163
- graduierte Jacobi-Identität, 184
- Grassmann-Mannigfaltigkeit, 109
- Green-Operator, 213
- Greensche Satz, 211
  
- harmonische Form, 213
- Hauptfaserbündel, 107
- Hausdorff, 4, 15

## INDEX

---

- Hodge-Sternoperator, 176  
homotopieäquivalente Räume, 200  
Homotopieaxiom der Kohomologie, 197  
hyperbolische Scheibe, 138
- Igelsatz, 217  
immersive Abbildung, 31  
immersive Teilmannigfaltigkeit, 34  
initiale Abbildung, 34  
initiale Teilmannigfaltigkeit, 37  
innerer Tangentialvektor, 209  
Integrabilitätstheorem von Frobenius, globale Version, 91  
Integralmannigfaltigkeit eines Teilvektorbündels, 87  
Isometrie Riemannscher Mannigfaltigkeiten, 121  
isospektrale Riemann-Mannigfaltigkeiten, 218  
isothermale Koordinaten, 135
- Karte einer Mannigfaltigkeit, 3  
Karten einer topologischen Mannigfaltigkeit, 6  
Kartendarstellung einer Abbildung, 6  
Kartenwechsel, 3  
Kartesischen Koordinaten, 28  
Kategorie, 7  
Kodifferentialoperator, 195  
komplexe Mannigfaltigkeit, 136  
konforme Abbildung, 131  
konforme glatte Abbildung, 133  
kontrahierbar, 200  
kontravarianter Funktor, 114  
Kotangentialbündel einer Mannigfaltigkeit, 115  
kovariante Ableitung, 122, 123  
kovariante Vektorfelder, 114  
kovarianter Funktor, 114  
Kozykel, 196  
kritischer Punkt, 42  
kritischer Wert, 42  
Kugelkoordinaten, 28
- Länge einer glatten Kurve, 120  
Laplace-Beltrami-Operator, 196  
Lebesgue-Null-Menge einer Mannigfaltigkeit, 42  
Lebesgue-Null-Menge, 42  
Levi-Civita-Zusammenhang, 123  
Lie-Ableitung, 81  
Lie-Algebra, 77  
Lie-Gruppe, 97  
Lie-Klammer, 77  
Lie(Gruppen)-Homomorphismus, 98  
Lindelöf, 16, 19  
linksinvariantes Vektorfeld, 100  
lokale Parametrisierung einer Mannigfaltigkeit, 3
- lokaler Lie(Gruppen)-Homomorphismus, 98  
lokales Integrabilitätstheorem von Frobenius, 89
- Möbiustransformation, 136  
maximale Integralmannigfaltigkeit, 92  
Mayer-Vietoris Sequenz, 197  
metrisierbar, 19  
Morse-Funktionen, 202
- Normalisator einer Untergruppe, 140
- Ordnung  $n + 1$  einer Überdeckung, 20  
orientierte Mannigfaltigkeit, 136
- parakompakt, 17  
plaques, 89  
Poincaré-Dualität, 214  
Poincaré-Lemma, 200  
Poincaré-Polynom, 197  
Pseudo-Riemann-Mannigfaltigkeiten, 120  
Pseudo-Riemann-Metrik, 120  
Pull-back von Mannigfaltigkeiten, 44
- Rand des Halbraums, 208  
Rand einer Mannigfaltigkeit, 209  
Rangsatz, 31  
Raum der  $k$ -linearen Abbildungen, 161  
Raum der exakten Differentialformen, 197  
Raum der geschlossenen Differentialformen, 196  
reguläre Abbildung, 31  
reguläres Teilvektorbündel, 94  
Ricci-Krümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 157  
Riemann'sche Zahlenkugel, 136  
Riemann'scher Abbildungssatz, 138  
Riemann-Fläche, 135  
Riemann-Krümmung, 142  
Riemann-Mannigfaltigkeit, 120  
Riemann-Metrik, 120  
Riemannschen Normalkoordinaten, 155
- Satz von Frobenius für totale Differentialgleichungen, 90  
Satz von Hopf-Rinow, 128  
Satz von Korn-Lichtenstein, 135  
Satz von Nash, 122  
Satz von Nomitsu-Ozeki, 130  
Satz von Stokes, 210  
Schnittkrümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 153  
semi-lokal einfachzusammenhängend, 64  
Skalarkrümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 157  
Stiefel-Mannigfaltigkeit, 109  
strikt diskontinuierliche Gruppen-Wirkung, 139  
strikt unstetige Wirkung einer Gruppe, 55

## INDEX

---

- Strukturgruppe des Hauptfaserbündels, 107
- submersive Abbildung, 31
  
- Tangentialabbildung einer Abbildung, 26, 73
- Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit, 26
- Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit, 73
- Teilvektorbündel, 87
- Tensoralgebra, 163
- Tensorprodukt von Formen, 161
- Tensorprodukt von Vektorbündel, 168
- Tensorprodukt von Vektorräumen, 161
- Topologie einer Mannigfaltigkeit, 4
- topologische Mannigfaltigkeit, 6
- totale Differential einer Funktion, 111
- Transitionsfunktion eines Vektorbündels, 74
- transversale Abbildung, 43
- Transversalitätssatz, 45
- Triangulierung, 202
- Trivialisierung, 46
- tubuläre Umgebung, 127
- typische Faser eines Faserbündels, 46
  
- Uniformisierungssatz, 139
- Unter-Lie-Gruppe, 103
  
- VB = Vektorbündel, 73
- Vektorbündel, 73
- Vektorbündelkarte, 73
- Vektorraum aller graduierten Derivationen, 181
- Vektorraum der glatten  $p$ -fach kontravariant und  $q$ -fach kovarianten Tensorfelder, 170
- Vektorraum der glatten Differentialformen vom Grad  $p$ , 170
- verwandte Vektorfelder, 79
- Volumenform einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 210
  
- Whitney-Summe von Vektorbündel, 168
- winkelerhaltende Abbildung, 131
  
- zurückgezogene Form, 179
- Zylinderkoordinaten, 28