

Ergänzungen und Errata zur Differentialgeometrie 1

Andreas Kriegl

Author address:

FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT WIEN
NORDBERGSTR. 14, 1090 WIEN

E-mail address: andreas.kriegl@univie.ac.at

Hier findet man die aktuellen Ergänzungen und Korrekturen welche sich im Zuge der Vorlesung ergeben haben. Korrigierte Fehler habe ich dabei entweder in **rot** oder mit **rosa Hintergrund** dargestellt. Ergänzungen sind wie dieser Absatz durch einen schwarzen Balken am linken Rand gekennzeichnet.

In der ersten VO-Woche (der 9. Kalenderwoche) habe wir die Abschnitte 1.1 bis 1.3 behandelt. Ich habe in diesen Ergänzungen abgesehen von wenigen kleinen Korrekturen vor allem ein paar Zeichnungen hinzugefügt, insbesondere eine JAVA-Animation der Euler-Winkel, siehe

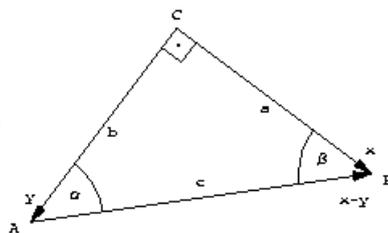
<http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Lehrveranstaltungen/Differentialgeometrie-SS2005/euler-angles.html> und den Zusammenhang zwischen inneren Produkt und Winkelmessung detaillierter herausgearbeitet.

- * ... umfassenderen Skriptums, welches als PDF-Datei unter <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/diffgeom.pdf> downloadbar ist.
- ... Liste der gemachten Abschnitte unter <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/LVA-SS2005.html> auflegen.

Ad 1.1

- * Mit deren Hilfe können wir nicht nur die LÄNGE $|x| \geq 0$ eines Vektors x durch $|x|^2 = \langle x, x \rangle$ berechnen, sondern auch WINKEL $\sphericalangle xy \in [0, \pi]$ mittels $\cos(\sphericalangle xy) = \langle x|y \rangle / (|x||y|)$.

- * Wenn wir das von orthogonal stehenden Vektoren x und y erzeugte rechtwinkelige Dreieck mit Kathetenlängen $a := |x|$, $b := |y|$, Hypothenusenlänge $c = |x - y|$ und Winkel α Für rechtwinkelige Dreiecke mit Katheten a , b , Hypothenuse $c = a + b$, Winkel $\alpha = \sphericalangle(x - y, -y)$ in der x gegenüberliegenden Ecke und $\beta = \sphericalangle(y - x, -x)$ in der y gegenüberliegenden Ecke folgt damit umgekehrt der Satz von Pythagoras



$$c^2 = |x - y|^2 = \langle x - y | x - y \rangle = \langle x | x \rangle - \langle x | y \rangle - \langle y | x \rangle + \langle y | y \rangle = |x|^2 - 2\langle x | y \rangle + |y|^2 = a^2 + b^2$$

sowie die üblichen Formel

$$\cos(\alpha) = \cos(\sphericalangle(x - y, -y)) = \frac{\langle x - y | -y \rangle}{|x - y| \cdot |-y|} = \frac{|y|^2 - \langle x | y \rangle}{|x - y| \cdot |y|} = \frac{b}{c}$$

also $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ und analog

$$\cos(\beta) = \frac{a}{c} \text{ mit } 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

wegen Pythagoras also

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 &= \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \cos(\beta)^2 = 1 - \cos(\alpha)^2 = \sin(\alpha)^2 \\ &\Rightarrow \sin(\alpha) = \cos(\beta) = \frac{a}{c} \text{ und } \alpha + \beta = \pi. \end{aligned}$$

- * Dann läßt sich jeder Vektor $x \in E$ als $x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$ mit eindeutigen Koeffizienten $x^j \in \mathbb{R}$ (seinen Koordinaten) schreiben, d.h. die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \sum_j x^j e_j \in E$$

ist ein Isomorphismus. Wir setzen

$$[x]_{\mathcal{E}} := \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

dann ist $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ der dazu inverse Isomorphismus

$$E \cong \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}.$$

- * Mit S^{n-1} bezeichnet wir die $(n - 1)$ -dimensionale SPHÄRE

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

*

$$[B \circ A]_{\mathcal{E}, \mathcal{G}} [x]_{\mathcal{E}} = [BAx]_{\mathcal{G}} = [B]_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} [Ax]_{\mathcal{F}} = [B]_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} [x]_{\mathcal{E}},$$

- * Mit der Abkürzung $[A]_{\mathcal{E}} := [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}$ und $\bar{\mathcal{E}} = R(\mathcal{E})$ besagt dies:

$$[A]_{\mathcal{E}} \cdot [R]_{\mathcal{E}} = [R]_{\mathcal{E}} \cdot [A]_{R(\mathcal{E})}.$$

Wir werden diese Identität bei der Konstruktion der Eulerwinkel in 1.3 verwenden.

Ad 1.2

- * Die Abbildung $R \in O(E)$ ist in diesem Fall also sogar ein Element der SPEZIELLEN LINEAREN GRUPPE

$$SL(E) := \{T \in L(E) : \det(T) = 1\},$$

also eine Volums-erhaltendene lineare Abbildung, und somit liegt R auch in der SPEZIELLEN ORTHOGONALEN LINEAREN GRUPPE

$$SO(E) := \{T \in O(E) : \det(T) > 0\},$$

d.h. ist eine Drehung.

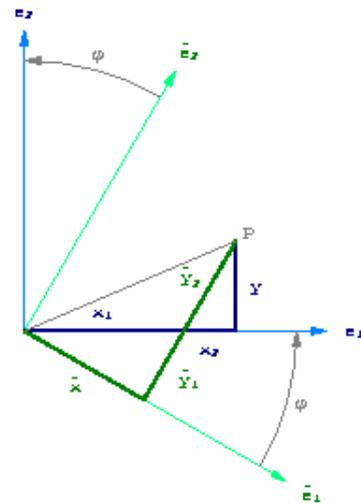
Ad 1.3

★ Es ist

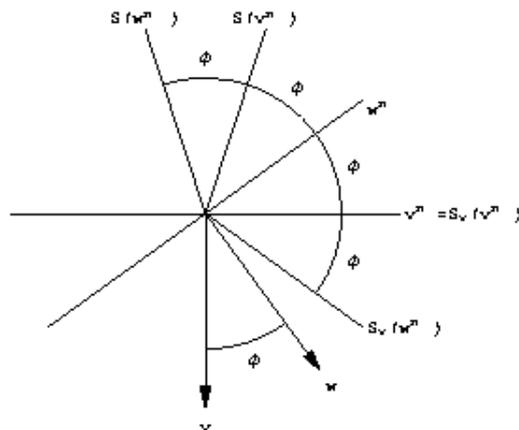
- (1) $x = x_1 + x_2$
- (2) $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$
- (3) $y = \bar{y}_2 \cos \varphi$
- (4) $x_2 = \bar{y}_2 \sin \varphi$
- (5) $\bar{x} = x_1 \cos \varphi$
- (6) $\bar{y}_1 = x_1 \sin \varphi$

und somit sukzessive

- (3) $\Rightarrow \bar{y}_2 = y \frac{1}{\cos \varphi}$
- (4) $\Rightarrow x_2 = \bar{y}_2 \sin \varphi = y \tan \varphi$
- (5), (1) $\Rightarrow \bar{x} = x_1 \cos \varphi = x \cos \varphi - y \sin \varphi$
- (6), (1) $\Rightarrow \bar{y}_1 = x_1 \sin \varphi = x \sin \varphi - y \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$
- (2) $\Rightarrow \bar{y} = x \sin \varphi + y \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$



★ Drehung als Zusammensetzung von Spiegelungen:



- ★ Sei nun $\dim(\text{Fix}(A)) = \dim E - 1$, d.h. es existiert ein $0 \neq v \in E$ mit $F = \{v\}^\perp$. O.B.d.A. dürfen wir $|v| = 1$ annehmen. Da F invariant ist unter A , ist es auch F^\perp (denn sei $x' \in F^\perp$ und $x \in F$, dann ist $0 = \langle x'|x \rangle = \langle Ax'|Ax \rangle = \langle Ax'|x \rangle$, also $Ax' \in F^\perp$) und somit ist $Av = \pm v$. Wegen $v \notin F$ ist folglich $Av = -v$, und damit $x - \langle x, v \rangle v \in F$ für alle $x \in E$, denn $\langle x - \langle x, v \rangle v, v \rangle = \langle x, v \rangle - \langle x, v \rangle \cdot \langle v, v \rangle = 0$.
Somit ist

$$\begin{aligned} Ax &= A\left((x - \langle x, v \rangle v) + \langle x, v \rangle v\right) \\ &= x - \langle x, v \rangle v + \langle x, v \rangle (-v) \\ &= x - 2\langle x, v \rangle v. \end{aligned}$$

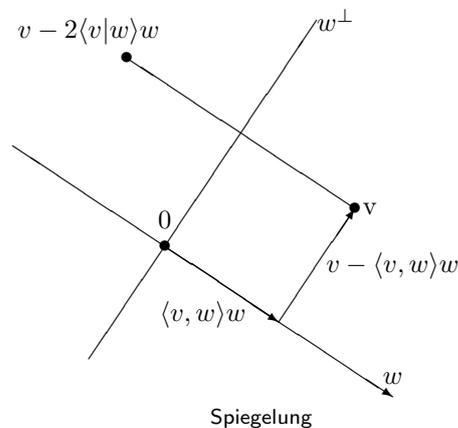
Dies beschreibt also eine Spiegelung an der $F = \{v\}^\perp$ -Ebene.

- ★ Für $A \in O(3)$ kann auch der Fall $F = \{0\}$ auftreten, z.B.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

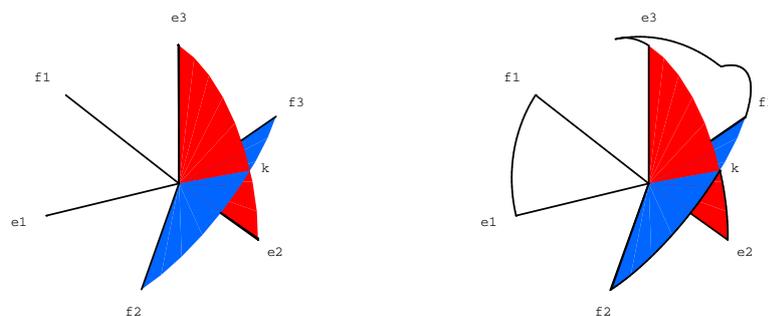
Dann betrachten wir das Bild $Av \neq v$ eines beliebigen $v \in S^2$ und die Spiegelung S an der Symmetrieebene $(Av - v)^\perp$. Diese bildet ebenfalls v auf Av ab und somit ist $v \in \text{Fix}(S^{-1} \circ A)$, also $S^{-1} \circ A$ eine Spiegelung oder eine Drehung und damit Zusammensetzung zweier Spiegelungen.

- ★ Mittels Induktion von oben nach der Dimension der Fixpunktraums kann man leicht zeigen, daß $O(n)$ von den Spiegelungen erzeugt wird (siehe auch 14.10), ... auch dazu verwenden das ZENTRUM (also jene Elemente die mit allen anderen kommutieren) der Gruppe $O(n)$ zu bestimmen, siehe 24.28.
- ★ Insbesondere folgt, daß die $SO(n)$ wegzusammenhängend ist, denn jede Drehung läßt sich mit der Identität verbinden.
Hingegen besitzt $O(n)$ zwei Zusammenhangskomponenten nämlich $SO(n)$ und $\{A \in O(n) : \det(A) = -1\} = S_v \cdot SO(n)$, wobei S_v eine beliebige Spiegelung bezeichnet.
- ★ Beachte dazu, daß eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ genau dann über eine surjektive Abbildung $p : X \rightarrow \tilde{X}$ zu einer eindeutig bestimmten Abbildung $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow Y$ faktorisiert, wenn $f(x_1) = f(x_2)$ aus $p(x_1) = p(x_2)$ folgt, denn die einzige mögliche Definition von \tilde{f} ist $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f}(p(x)) = f(x)$, wobei wir ein x im Urbild von \tilde{x} bzgl. p gewählt haben. Diese Definition macht genau dann Sinn, hängt also nicht von der Wahl des x ab, wenn $f(x_1) = f(x_2)$ aus $p(x_1) = t\tilde{x} = p(x_2)$ folgt.
Beachte weiters, daß unter diesen Voraussetzungen \tilde{f} genau dann surjektiv ist, wenn f es ist.
- ★ Kugelkoordinaten $(\varphi, \theta) \mapsto (\cos(\varphi) \cos(\theta), \sin(\varphi) \cos(\theta), \sin(\theta))$ liefern eine surjektive Abbildung $S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ und somit erhalten wir auch eine surjektive Abbildung



$S^1 \times S^1 \times S^1 \twoheadrightarrow S^2 \times S^1 \twoheadrightarrow SO(3)$. Eine geometrischere Beschreibung von Drehungen durch 3 Winkel ist die folgende.

★



id

R_3

Es sei $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standard-Basis, $\mathcal{E}' = R_1(\mathcal{E}) = (e_1, k, \dots)$ und $\mathcal{E}'' = (R_2 \circ R_1)(\mathcal{E}) = R_2(\mathcal{E}') = (f_1, k, \dots)$. Dann sehen die Matrizen-Darstellungen der zugehörigen Drehungen R_1 , R_2 und R_3 wie folgt aus:

$$[R_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$[R_2]_{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$[R_3]_{\mathcal{E}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix}$$

Folglich ist nach dem am Ende von 1.1 Gezeigten:

$$\begin{aligned} [R_3 \circ R_2 \circ R_1]_{\mathcal{E}} &= [R_3]_{\mathcal{E}''} \cdot [R_2 \circ R_1]_{\mathcal{E}} = [R_2 \circ R_1]_{\mathcal{E}} \cdot [R_3]_{\mathcal{E}''} \\ &= [R_2]_{\mathcal{E}'} \cdot [R_1]_{\mathcal{E}} \cdot [R_3]_{\mathcal{E}''} = [R_1]_{\mathcal{E}} \cdot [R_2]_{\mathcal{E}'} \cdot [R_3]_{\mathcal{E}''} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & -\sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beweis von 3.3. Die Streckensymmetrale zwischen $c(t_1)$ und $c(t_2)$ ist in Normalvektorform gegeben durch

$$\left\{ z : \langle c(t_2) - c(t_1) | z - \frac{c(t_1) + c(t_2)}{2} \rangle = 0 \right\}.$$

Die Streckensymmetrale zwischen $c(t_2)$ und $c(t_3)$ in Parameterform durch

$$\left\{ \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \lambda \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Mittelpunkt $M(t_1, t_2, t_3)$ des Kreises durch die 3 Punkte $c(t_1)$, $c(t_2)$ und $c(t_3)$ liegt somit am Schnittpunkt der beiden Streckensymmetralen, d.h. ist gegeben durch

$$M(t_2, t_2, t_3) := \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \lambda \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp,$$

wobei λ Lösung der Gleichung

$$0 = \left\langle c(t_2) - c(t_1) \mid \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \lambda \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp - \frac{c(t_1) + c(t_2)}{2} \right\rangle,$$

also

$$\lambda = \frac{\langle c(t_2) - c(t_1) \mid c(t_1) - c(t_3) \rangle}{2 \det(c(t_3) - c(t_2), c(t_2) - c(t_1))}$$

ist. Also ist

$$M(t_2, t_2, t_3) = \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \frac{\langle c(t_2) - c(t_1) \mid c(t_1) - c(t_3) \rangle}{2 \det(c(t_3) - c(t_2), c(t_2) - c(t_1))} \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp.$$

Für $t_1, t_2, t_3 \rightarrow t$ geht

$$\begin{aligned} c(t_1), c(t_2), c(t_3) &\rightarrow c(t) \\ \frac{c(t_2) - c(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{c(t_1) - c(t_3)}{t_1 - t_3}, \frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2} &\rightarrow c'(t) \\ \left(\frac{c(t_1) - c(t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2} \right) / (t_1 - t_3) &\rightarrow c''(t) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} M(t_2, t_2, t_3) &= \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \frac{\langle c(t_2) - c(t_1) \mid c(t_1) - c(t_3) \rangle}{2 \det(c(t_3) - c(t_2), c(t_2) - c(t_1))} \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp \\ &= \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \\ &\quad + \frac{\langle \frac{c(t_2) - c(t_1)}{t_2 - t_1} \mid \frac{c(t_1) - c(t_3)}{t_1 - t_3} \rangle}{2 \det\left(\frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2}, \frac{c(t_2) - c(t_1)}{(t_2 - t_1) \cdot (t_1 - t_3)} - \frac{c(t_3) - c(t_2)}{(t_3 - t_2) \cdot (t_1 - t_3)}\right)} \cdot \left(\frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2}\right)^\perp \\ &\rightarrow c(t) + \frac{\langle c'(t) \mid c'(t) \rangle}{2 \det(c'(t), c''(t))} \cdot (c'(t))^\perp = c(t) + \frac{1}{K(t)} \nu(t). \quad \square \end{aligned}$$

3.15 Einhüllende - Enveloppe

Zu jeder geometrischen ebene Kurve ist die Familie ihrer Tangenten assoziiert. Wir wollen nun bestimmen, welche Geraden-Scharen auf diese Weise auftreten können. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Parametrisierung der Kurve, dann ist die Tangente an der Stelle t durch $\{c(t) + sc'(t) : s \in \mathbb{R}\}$ gegeben, oder implizit durch

$$\{z : \langle z | \nu(t) \rangle = h(t)\}, \text{ mit } \nu(t) := \tau(t)^\perp \text{ und } h(t) := \langle c(t), \nu(t) \rangle.$$

Nach 3.9 existiert eine eindeutig bestimmte glatte Funktion $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $e^{i\theta(t)} = \tau(t)$ und somit $(-\sin(\theta(t)), \cos(\theta(t))) = i e^{i\theta(t)} = i \tau(t) = \nu(t)$. Falls c nach der Bogenlänge parametrisiert ist, so ist $\theta' = K$ nach 3.6. Für allgemeine Parametrisierungen ist somit $\theta'(t) \neq 0$ genau dann, wenn die Krümmung $K(t)$ nicht verschwindet, denn sei \bar{c} eine Bogenlängenparametrisierung, also $c(t) = \bar{c}(s(t))$, dann ist $c'(t) = s'(t) \bar{c}'(s(t)) = s'(t) \tau(t) = s'(t) e^{i\theta(t)}$ und $c''(t) = s''(t) e^{i\theta(t)} + s'(t) i \theta'(t) e^{i\theta(t)}$ und somit

$$K(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{|c'(t)|^3} = \frac{s'(t)^2 \theta'(t)}{s'(t)^3} = \frac{\theta'(t)}{s'(t)}.$$

Sei nun umgekehrt eine Schar von Geraden in Hess'scher Normalvektorform

$$\{z : \langle z | i e^{i\theta(t)} \rangle = h(t)\}, \text{ mit } \theta \text{ und } h \text{ glatt und } \theta'(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in I$$

gegeben. Wir suchen eine Kurve c mit diesen Geraden als Tangenten, d.h. eine Lösung von

$$\begin{aligned} \langle c(t) | i e^{i\theta(t)} \rangle &= h(t) \\ \langle c'(t) | i e^{i\theta(t)} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Differenzieren der 1. Gleichung und Einsetzen der 2. liefert:

$$h'(t) = \langle c'(t) | i e^{i\theta(t)} \rangle + \langle c(t) | i^2 e^{i\theta(t)} \theta'(t) \rangle = -\theta'(t) \langle c(t) | e^{i\theta(t)} \rangle.$$

Damit kennen wir aber die Normalprojektionen von $c(t)$ auf die Orthonormalbasis $(e^{i\theta(t)}, i e^{i\theta(t)})$ und somit ist die sogenannte einhüllende Kurve c gegeben durch

$$c(t) = \langle c(t) | e^{i\theta(t)} \rangle e^{i\theta(t)} + \langle c(t) | i e^{i\theta(t)} \rangle i e^{i\theta(t)} = -\frac{h'(t)}{\theta'(t)} e^{i\theta(t)} + h(t) i e^{i\theta(t)}.$$

Für die Ableitungen von c erhalten wir somit:

$$\begin{aligned} c' &= \frac{h' \theta'' - h'' \theta' - h (\theta')^3}{(\theta')^2} e^{i\theta} + 0 \\ c'' &= \frac{h' \theta'' - h'' \theta' - h (\theta')^3}{(\theta')^2} i \theta' e^{i\theta} + \left(\frac{h' \theta'' - h'' \theta' - h (\theta')^3}{(\theta')^2} \right)' e^{i\theta} \end{aligned}$$

also eine reguläre Kurve genau dort wo $h' \theta'' - h'' \theta' - h (\theta')^3 \neq 0$ ist und für die Krümmung

$$\begin{aligned} K &= \frac{\det(c', c'')}{|c'|^3} = \left(\frac{h' \theta'' - h'' \theta' - h (\theta')^3}{(\theta')^2} \right)^2 \theta' \left| \frac{h' \theta'' - h'' \theta' - h (\theta')^3}{(\theta')^2} \right|^{-3} \\ &= \frac{(\theta')^3}{|h' \theta'' - h'' \theta' - h (\theta')^3|} \end{aligned}$$

Insbesondere liegt die Kurve lokal immer auf der $\text{sign}(\theta')$ Seite der Tangente. In 6.3 werden wir dies noch expliziter machen indem wir als bessere Parametrisierung jene nach dem Winkel der Tangente verwenden werden. Eine klassischere Lösungsmethode dieser Aufgabenstellung ist die im Skriptum in 3.15 behandelte.

Ad 9.4

Ein Indizienbeweis dafür geht mittels Chirurgie wie folgt: Man sucht eine einfach geschlossene Kurve auf der Fläche M , welche M nicht in zwei Teile zerschneidet, und verbreitert diese Kurve zu einem Band, also einem am Ende verklebten Rechteck. Je nachdem ob dieses verdreht verklebt ist oder nicht, ist es ein Möbiusband oder ein Zylinder. Wir entfernen diese Band und kleben an den/die beiden Schnittkreise eine/zwei Kreisscheiben und erhalten eine neue Fläche M' . Umgekehrt entsteht also M aus M' durch Ankleben eines Kreuzhaube oder eines Henkels. Wir fahren mit diesem Prozeß fort, bis die entstandene Fläche längs jeder einfach geschlossenen Kurve in zwei Teil zerfällt. Man überzeugt sich, daß diese dann homöomorph zur Sphäre ist, denn jede solche Schnittlinie läßt sich zu einem Zylinder erweitern und klebt man an die beiden Restteile Scheiben, so haben die kleineren entstandenen Flächen die selbe Eigenschaft. Also entsteht M aus der Sphäre durch Ankleben von Henkeln und Kreuzhauben. Allerdings ist auch nicht offensichtlich, daß obiger Prozeß wirklich nach endlich vielen Schritten abbricht. Weiters bleibt noch zu zeigen, daß es genügt nur ausschließlich Henkel oder ausschließlich Kreuzhauben anzukleben. Dazu genügt es zu zeigen, daß wenn man in einen Torus ein Loch schneidet und daran ein Möbiusband klebt, so ist das das Gleiche, wie wenn man in eine Klein'sche Flasche ein Loch schneidet und daran ein Möbiusband klebt.

In den folgenden Beispielen habe ich an vielen Stellen mehr Details hinzugefügt, darum habe ich sie hier nochmals vollständig aufgenommen.

11.2 Zylinder

1. Gleichung: $x^2 + y^2 + 0 \cdot z = R^2$.
Beachte, daß dies die gleiche Gleichung wie jene vom Kreis ist, allerdings nun aufgefaßt als Gleichung am \mathbb{R}^3 .
2. Parametrisierung: $(\varphi, z) \mapsto (R \cdot \cos \varphi, R \cdot \sin \varphi, z)$. Wir erhalten diese Parametrisierung indem wir einen Erzeuger des Zylinders vermöge $z \mapsto (R, 0, z)$ nach Bogenlänge parametrisieren und diese mittels Winkel φ vermöge

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

um die z -Achse drehen also

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

betrachten.

3. Graph: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ oder $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$.
4. Trivialisierung: $(\varphi, r, z) \leftrightarrow (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi, z)$, das sind die Zylinderkoordinaten.

Eine Parametrisierung $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist (per Definition) genau dann längenbewahrend, wenn die Länge jeder Kurve $c : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ gleich jener der Bildkurve $f \circ c : [a, b] \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, also

$$\int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b |(f \circ c)'(t)| dt = \int_a^b |f'(c(t))(c'(t))| dt$$

gilt. Die ist genau dann erfüllt, wenn $f'(p)$ für alle $p \in U$ eine Isometrie ist, also

$$|f'(p)(v)| = |v| \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^m$$

erfüllt, denn sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $c_s : t \mapsto p + tsv$. Dann ist $c_s : [0, 1] \rightarrow U$ für alle $s > 0$ nahe 0 und somit

$$s|v| = \int_0^1 |c'_s(t)| dt = \int_0^1 |f'(c_s(t))(sv)| dt = s \int_0^1 |f'(c_s(t))(v)| dt$$

und da $c_s \rightarrow c_0$ für $s \rightarrow 0$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ konvergiert ist auch

$$|v| = \int_0^1 |f'(c_0(t))(v)| dt = \int_0^1 |f'(p)(v)| dt = |f'(p)(v)|.$$

Die Umkehrung ist offensichtlich.

Obige Parametrisierung $f : (\varphi, z) \mapsto (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$ ist nicht längenbewahrend, denn

$$|f'(\varphi, z)(1, 0)| = \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\varphi, z) \right| = |R(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)| = R \neq |(1, 0)|,$$

für $R \neq 1$. Dies kann aber leicht korrigiert werden, wenn wir die neue Parametrisierung $f : (\varphi, z) \mapsto (R e^{i\varphi/R}, z)$ betrachten. Deren Ableitung ist

$$f'(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\varphi}{R}) & 0 \\ \cos(\frac{\varphi}{R}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Spalten bilden nun ein Orthonormalsystem, also ist $f'(\varphi, z)$ eine Isometrie und somit f Längenbewahrend.

11.3 Kegel

Drehung einer Geraden durch Null mit Anstieg α um die z -Achse.

1. Gleichung: $\tan \alpha = z/\sqrt{x^2 + y^2}$ oder $(x^2 + y^2) \tan^2 \alpha = z^2$. Ersters beschreibt den Kegel, letzteres den Doppelkegel. Die Gleichung ist nicht regulär bei $(0, 0, 0)$, also müssen wir die Spitze entfernen, denn dort ist der (Doppel-)Kegel keine Mannigfaltigkeit.
2. Parametrisierung: $(\varphi, s) \mapsto (s \cos \alpha \cos \varphi, s \cos \alpha \sin \varphi, s \sin \alpha)$.
Diese Parametrisierung erhalten wir, indem wir eine Erzeuger der Kegels nach Bogenlänge als $s \mapsto (s \cos \alpha, 0, s \sin \alpha)$ parametrisieren und diese mittels Winkel φ vermöge

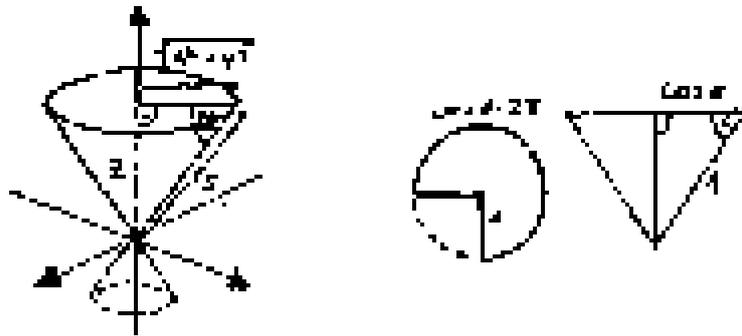
$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

um die z -Achse drehen also

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \cos \alpha \\ 0 \\ s \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \alpha \cos \varphi \\ s \cos \alpha \sin \varphi \\ s \sin \alpha \end{pmatrix}$$

betrachten.

3. Graph: $z = \pm \tan \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$
4. Trivialisierung: $(\varphi, \alpha, s) \leftrightarrow (s \cos \alpha \cos \varphi, s \cos \alpha \sin \varphi, s \sin \alpha)$, das sind die Kugelkoordinaten.



Eine bessere Parametrisierung erhält man durch Aufrollen des Kegels in eine Ebene:

$$(x, y) \mapsto (r, \psi) \mapsto \left(s := r, \varphi := \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ r \cos \alpha \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ r \sin \alpha \end{pmatrix},$$

wobei (x, y) kartesische und (ψ, r) Polarkoordinaten in der Ebene sind.

Die Ableitung dieser Parametrisierung ist die Zusammensetzung von

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) & -r \cos \alpha \cdot \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ \cos \alpha \cdot \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) & r \cos \alpha \cdot \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ \sin \alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos \alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & -r \sin \psi \\ \sin \psi & r \cos \psi \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \psi \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) - \sin \psi \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) & \cos \alpha \sin \psi \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) - \cos \psi \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ \cos \alpha \cos \psi \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) + \sin \psi \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) & \cos \alpha \sin \psi \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) + \cos \psi \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ \cos \alpha \cos \psi & \sin \alpha \sin \psi \end{pmatrix}$$

von der man mit längerer direkter Rechnung zeigen kann, daß sie isometrisch ist.

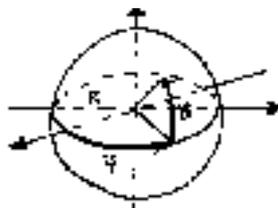
11.4 Sphäre

1. Gleichung: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
2. Parametrisierung: $(\varphi, \theta) \mapsto (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta)$ mit Längengrade φ und Breitengrade θ . Wieder erhalten wir diese Fläche indem wir die Schnittkurve mit der x - z -Ebene betrachten, dem vermöge $\theta \mapsto R(\cos \theta, 0, \sin \theta)$ parametrisierten (Halb-)Kreis und diesen mittels Winkel φ um die z -Achse drehen um

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \cos \theta \\ 0 \\ R \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi \\ R \sin \theta \end{pmatrix}$$

zu erhalten.

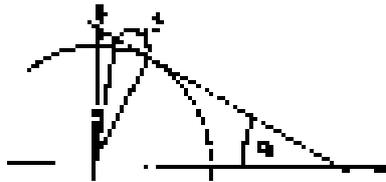
3. Graph: $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$
4. Trivialisierung: Kugelkoordinaten.



Man kann eine Sphäre auch parametrisieren, indem man auf den berührenden Kegel mit Anstieg α projiziert:

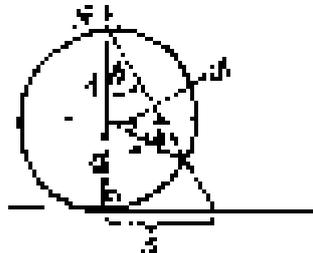
$$(x, y) \mapsto (\varphi, s) \mapsto (\varphi, \theta(s)) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi \\ R \sin \theta \end{pmatrix},$$

dabei sind (φ, s) die Parameter der obigen Parametrisierung des Kegels und (φ, θ) die Parameter der Sphäre sind.



Spezielle Wahlen der Funktion θ liefern die Radialprojektion, bzw. die Normalprojektion auf die Erzeugenden des Kegels, siehe Aufgabe 72.42. Insbesondere ist man an Flächen- bzw. an Winkel-erhaltenden Abbildungen interessiert, denn wie wir noch sehen werden ist eine Längenerhaltende Abbildung nicht möglich – man kann die Sphäre nicht durch Aufwickeln eines Blatt Papiers erzeugen.

Besonders wichtig ist die stereographische Projektion: Man projiziert von einem Punkt der Sphäre (o.B.d.A. dem Nordpol) auf die Tangentialebene im antipodalen Punkt.



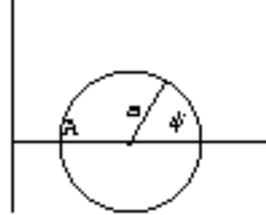
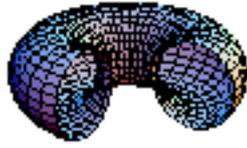
Es ist $2\beta + (\frac{\pi}{2} - \theta) = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$ und somit ist

$$\frac{s}{2} = \tan \beta = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 + \tan(\theta/2)}{1 - \tan(\theta/2)}.$$

Diese Projektion ist winkelerhaltend und Kreise werden auf Kreise oder Geraden abgebildet, siehe Aufgabe 72.41.

Für die Seefahrt ist diese Darstellung der Sphäre allerdings nicht optimal: Dort ist man besonders an den Loxodromen interessiert, daß sind jene Kurven auf der Sphäre, welche die Längenkreise unter einen fixen Winkel schneiden, denn das sind gerade die Bahnen die man zurücklegt wenn man bezüglich Norden (Polarstern oder Kompass) konstanten Kurs hält. In der stereographischen Projektion sind die Bilder der Längenkreise Geraden durch 0, also die Loxodrome komplizierte Spiralen. Projiziert man hingegen auf den längs des Äquators berührenden Zylinder, dann werden die Längenkreise parallele Geraden und wenn man die Projektion Winkel-erhaltend wählt (die sogenannte Merkator-Projektion) dann sind auch die Loxodrome Geraden, also der Kurs sehr leicht durch Einzeichnen der Verbindungsgerade zwischen Start- und Zielort zu bestimmen.

11.6 Torus



1. Gleichung: $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - A)^2 = a^2$
2. Parametrisierung:

$$(\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} (A + a \cos \psi) \cos \varphi \\ (A + a \cos \psi) \sin \varphi \\ a \sin \psi \end{pmatrix},$$

mit Längengrade φ und Breitengrade ψ .

Für den speziellen Torus $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - A)^2 = A^2 - 1 = a^2$ mit $A > 1$ berechnen wir das Urbild unter der stereographischen Projektion $\mathbb{R}^4 \supset S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bezüglich des Punktes $(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ wie folgt:

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto \frac{1}{1 - y_2} (x_1, y_1, x_2, 0) \text{ da } y = \frac{x - \langle x, p \rangle p}{1 - \langle x, p \rangle} \text{ ist.}$$

Diesem Torus entspricht folgende Teilmenge des \mathbb{R}^4 :

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1 \\ \left(\frac{x_2}{1 - y_2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{1 - y_2} - A \right)^2 = A^2 - 1 = a^2 \end{cases}$$

Unter Verwendung der ersten Gleichung formen wir die zweite wie folgt um:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{x_2}{1 - y_2} \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{1 - y_2} - A \right)^2 - A^2 + 1 \\ &= \frac{x_2^2}{(1 - y_2)^2} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{(1 - y_2)^2} - 2A \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{1 - y_2} + 1 \\ &= \frac{1 - y_2^2}{(1 - y_2)^2} - 2A \frac{\sqrt{1 - (x_2^2 + y_2^2)}}{1 - y_2} + 1 \\ &\Leftrightarrow 2 = 1 + y_2 + (1 - y_2) = 2A \sqrt{1 - (x_2^2 + y_2^2)} \end{aligned}$$

Also wird der Torus durch folgendes Gleichungssystem beschrieben:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1 \\ 1 - (x_2^2 + y_2^2) = \frac{1}{A^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{A^2} \dots \text{Kreis im } \mathbb{R}^2 \times \{(0, 0)\} \\ x_2^2 + y_2^2 = \frac{A^2 - 1}{A^2} = \frac{a^2}{A^2} \dots \text{Kreis im } \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

Der Torus ist also das kartesische Produkt $S^1 \times S^1$ von zwei aufeinander normalstehenden Kreisen.

Die Parametrisierung

$$(\varphi, \psi) \mapsto \left(\frac{1}{A^2} \cos(A^2 \varphi), \frac{1}{A^2} \sin(A^2 \varphi), \frac{a^2}{A^2} \cos\left(\frac{A^2 \varphi}{a^2}\right), \frac{a^2}{A^2} \sin\left(\frac{A^2 \varphi}{a^2}\right) \right)$$

ist dann Längenbewahrend, also läßt sich ein Torus im \mathbb{R}^4 durch Einrollen einer Ebene erzeugen.

11.8 Beispiel.

Der Raum $L_r(n, m)$ aller $T \in L(n, m)$ von fixen Rang r ist eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension $r(n + m - r)$.

Für maximales $r = \min\{n, m\}$ ist diese Dimension $n \cdot m = \dim(L(n, m))$, also ist $L_r(n, m)$ offen in $L(n, m)$.

Beweis. Wir beschreiben $L_r(n, m)$ lokal als Graph. Sei dazu $T_0 \in L_r(n, m)$, d.h. $\text{rang}(T_0) = \dim \text{Bild } T_0 = r$. Es sei $F := \text{Bild } T_0$ und $E := \text{Ker } T_0^\perp$. Dann ist $T_0|_E : E \rightarrow F$ injektiv, und wegen $\dim E = n - \dim \text{Ker } T_0 = \dim \text{Bild } T_0 = \dim F$ sogar bijektiv. Bezüglich der orthogonal-Zerlegungen $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$ und $\mathbb{R}^m = F \oplus F^\perp$ hat also T_0 folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \text{ mit } B_0 = 0, C_0 = 0, D_0 = 0 \text{ und } A_0 \text{ invertierbar.}$$

Sei nun U die (wegen $GL(E) \subseteq L(E, E)$ offen) offene Umgebung aller Matrizen $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit A invertierbar. Dann liegt T in $L_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ genau dann wenn, $\dim \text{Bild } T = r$. Es ist

$$T \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av + Bw \\ Cv + Dw \end{pmatrix}.$$

Somit ist $T \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0$ genau dann, wenn $v = -A^{-1}Bw$ und $Cv + Dw = 0$, oder äquivalent $v = -A^{-1}Bw$ mit $CA^{-1}Bw = Dw$. Es ist also $r = \text{rang } T = \dim \text{Bild } T = \dim \text{Dom } T - \dim \text{Ker } T = n - \dim \text{Ker } T$ genau dann, wenn alle $w \in E^\perp$ die Gleichung $CA^{-1}Bw = Dw$ erfüllen, d.h. $D = CA^{-1}B$ ist.

Die Abbildung

$$g : \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in L(n, m) : A \in GL(E, F) \right\} \rightarrow L(E^\perp, F^\perp), \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \mapsto CA^{-1}B$$

ist auf der offenen Teilmenge U des linearen Teilraums

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(n, m) : D = 0 \right\}$$

definiert und glatt und ihr Graph beschreibt $L_r(n, m)$ in der offenen Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(n, m) : A \in GL(E, F) \right\}$$

Die Dimension von $L_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist somit $nm - (n - r)(m - r) = r(n + m - r)$. \square

11.9 Beispiel.

Die Graßmannmannigfaltigkeit $G(r, n)$ der r -Ebenen durch 0 im \mathbb{R}^n ist eine Teilmannigfaltigkeit von $L(n, n)$ der Dimension $r(n - r)$.

Wenn wir $r = 1$ wählen, dann erhalten wir als Spezialfall die projektiven Räume $\mathbb{P}^{n-1} = G(1, n)$ der Geraden durch 0 in \mathbb{R}^n .

Beweis. Wir identifizieren die linearen Teilräume des \mathbb{R}^n mit den orthogonal-Projektionen auf sie. Damit ist $G(r, n)$ eine Teilmenge der Mannigfaltigkeit $L_r(n, n)$. Sei E_0

ein Teilraum von \mathbb{R}^n der Dimension r und P_0 die ortho-Projektion auf E_0 . Bezüglich der Zerlegung $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_0^\perp$ ist P_0 dann durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Eine Umgebung von P_0 in $L_r(n, n)$ ist dann durch die Matrizen $\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$ mit invertierbaren A gegeben. Eine lineare Abbildung P ist genau dann eine ortho-Projektion, wenn sie idempotent ($P^2 = P$) und selbstadjungiert $P = P^t$ ist, oder äquivalent mit einer Gleichung, wenn $P^t P = P$ ist. In der Tat: Daß P eine Projektion ist, bedeutet $P|_{\text{Bild } P} = \text{id}$, d.h. $P^2 = P$, und eine Orthogonalprojektion zu sein bedeutet $\text{Ker}(P) = \text{Bild}(P)^\perp$. Aus $P^2 = P$ folgt aber $\text{Ker}(P) = \text{Bild}(1 - P)$, denn $P(1 - P) = 0$ und $Px = 0 \Rightarrow x = x - Px = (1 - P)x$. Somit ist $\text{Ker}(P) \perp \text{Bild}(P)$ genau dann, wenn $0 = \langle (1 - P)x, Py \rangle = \langle x, (1 - P^t)Py \rangle$ für alle x, y , d.h. $P = P^t P$. Umgekehrt folgt $P^t = (P^t P)^t = P^t P = P$ und somit $P = P^t P = P^2$. Für die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$ ist das genau dann der Fall, wenn $A = A^t$ und $B^t = C$ (dann ist auch $(CA^{-1}B)^t = B^t(A^t)^{-1}C^t = CA^{-1}B$) und

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A^t A + C^t C & A^t B + C^t C A^{-1} B \\ B^t A + B^t (A^t)^{-1} C^t C & B^t B + B^t (A^t)^{-1} C^t C A^{-1} B \end{pmatrix} &= \\ &= \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & B^t (A^t)^{-1} C^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & C A^{-1} B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & C A^{-1} B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oder äquivalent $A^t A + C^t C = A$ und damit

$$\begin{aligned} A^t B + C^t C A^{-1} B &= A^t B + (A - A^t A) A^{-1} B = B, \\ B^t A + B^t (A^t)^{-1} C^t C &= B^t A + B^t (A^t)^{-1} (A - A^t A) = B^t (A^t)^{-1} A = C \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} B^t B + B^t (A^t)^{-1} C^t C A^{-1} B &= B^t B + B^t (A^t)^{-1} (A - A^t A) A^{-1} B \\ &= B^t (A^t)^{-1} B = C A^{-1} B \end{aligned}$$

Zusammen sind die Gleichungen also $A^t A + C^t C = A$ ($\Rightarrow A^t = A$), $B = C^t$ und $D = C A^{-1} B$. Dies sind $r^2 + (n - r)^2 + r(n - r)$ unabhängige Gleichungen, und folglich sollte die Dimension von $G(r, n)$ gerade $n^2 - (r^2 + n^2 - 2nr + r^2 + nr - r^2) = nr - r^2 = r(n - r)$ sein. Diese Gleichungen beschreiben $G(r, n)$ lokal als Graph von $(A, C) \mapsto (B, D) = (C^t, C A^{-1} C^t)$ über der Teilmenge $\{(A, C) \in L(E_0, \mathbb{R}^n) : A \in GL(E_0), A^t A + C^t C = A\}$

Es bleibt also zu zeigen, daß die Gleichungen regulär sind und dafür ist es genug die Regularität der ersten Gleichung $A^t A + C^t C - A = 0$ zu zeigen. Ihr Differential in Richtung (X, Y) ist $(X, Y) \mapsto X^t A + A^t X - X + Y^t C + C^t Y$. Wir müssen also die Gleichung $X^t A + A^t X - X + Y^t C + C^t Y = Z$ für $(A, C) = (1, 0)$ also $X^t = Z$ nach (X, Y) lösen. Offensichtlich ist $(Z^t, 0)$ eine Lösung. \square

14.19 Niedere Dimensionen

$$SL(2) \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\},$$

wobei der Isomorphismus durch Konjugation mit $U := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ & i \end{pmatrix}$ gegeben ist, siehe 34.5 und 72.62, denn

$$U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \beta_1 + i\beta_2 \\ \beta_1 - i\beta_2 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} \cdot U = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ -\alpha_2 - \beta_2 & \alpha_1 - \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{a+d}{2} \\ \alpha_2 = \frac{b-c}{2} \\ \beta_1 = \frac{a-d}{2} \\ \beta_2 = -\frac{b+c}{2} \end{cases}$$

Beachte daß die Quadrik $\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 - |b|^2 = 1\}$ vermöge $(a, b) \mapsto (\frac{a}{|a|}, b) = (\frac{a}{\sqrt{1+|b|^2}}, b)$ diffeomorph zu $S^1 \times \mathbb{C}$ ist. Allerdings sieht die induzierte Gruppenstruktur auf $S^1 \times \mathbb{C}$ sehr kompliziert aus.

15.2 Beispiele glatter Abbildungen.

- Die Bild-Abbildung $\text{Bild} : V(k, n) \rightarrow G(k, n)$ ist glatt, denn als Abbildung von $V(k, n) := \{T \in L(k, n) : T^t T = \text{id}\} \rightarrow G(k, n) \subset L_k(n, n)$ ist sie durch $T \mapsto T T^t$ gegeben: Offensichtlich ist $T T^t$ die ortho-Projektion ($(T T^t)^t (T T^t) = T^t T T T^t = T \text{id} T^t = T T^t$) mit $\text{Bild } T \supseteq \text{Bild } T T^t \supseteq \text{Bild } T T^t T = \text{Bild } T$.

20. Tangentialraum und Derivationen

Die Ableitung $f'(x)$ einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ an der Stelle x ist definiert als die lineare Approximation an die nach 0 verschobenen Funktion f .

20.6 Satz (Tangentialvektoren als Derivationen).

Die Abbildung

$$T_p M \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, f) \mapsto (T_p f)(v)$$

induziert einen linearen Isomorphismus

$$\Phi : \begin{cases} T_p M \rightarrow \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ v \mapsto \partial_v \left(: f \mapsto (T_p f)(v) \right) \end{cases}$$

Für jedes glatte $f : M \rightarrow N$ entspricht der Tangentialabbildung $T_x f$ von f via Φ folgende Zuordnung auf der Seite der Derivation:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{\Phi_p} & \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \ni & \partial \\ \downarrow T_p f & & \downarrow (f^*)^* & & \downarrow \\ T_{f(p)} N & \xrightarrow{\Phi_{f(p)}} & \text{Der}_{f(p)}(C^\infty(N, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \ni & (g \mapsto \partial(g \circ f)) = \partial \circ f^* \end{array}$$

Beweis. Wohldefiniertheit: Die Abbildung $T_p M \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, f) \mapsto (T_p f)(v)$ ist klarerweise bilinear, also induziert sie eine lineare Abbildung $T_p M \rightarrow L(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ durch $v \mapsto (f \mapsto (T_p f)(v))$. Diese Abbildung hat Werte im Raum der

Derivationen über p , denn seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ zwei glatte Funktionen und $v \in T_p M$ dann gilt nach der Produktregel 20.4:

$$\partial_v(f \cdot g) = T_p(f \cdot g)(v) = f(p) \cdot (T_p g)(v) + g(p) \cdot (T_p f)(v).$$

Sei $f : M \rightarrow N$ glatt und $x \in M$. Dann kommutiert obiges Diagramm, denn für $v \in T_x M$ und $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ ist $(\Phi_{f(x)} \circ T_x f)(v)(g) = (T_{f(x)} g)((T_x f)(v)) = (T_x(g \circ f))(v) = \partial(g \circ f)$, da $\partial := \Phi_x(v)$ auf $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ durch $\partial(h) = (T_x h)(v)$ wirkt.

Lokalität von Derivationen: Wir zeigen zuerst, daß jede Derivation ∂ von $C^\infty(M, \mathbb{R})$ über $p \in M$ ein lokaler Operator ist, d.h. der Wert $\partial(f)$ nur von $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ nahe p abhängt.

Seien also $f_1, f_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f_1 = f_2$ nahe p vorgegeben. Sei $f := f_1 - f_2$ und sei $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ so gewählt, daß $g(p) = 1$ und daß der Träger von g in der Menge der x mit $f(x) = 0$ enthalten ist. Dann gilt:

$$0 = \partial(0) = \partial(g \cdot f) = \underbrace{g(p)}_1 \cdot \partial(f) + \underbrace{f(p)}_0 \cdot \partial(g) = \partial(f).$$

Daraus ergibt sich auch, daß $\partial(f) = 0$ für alle konstanten Funktionen f , denn $\partial(1) = \partial(1 \cdot 1) = 1 \cdot \partial(1) + \partial(1) \cdot 1$, also $\partial(1) = 0$.

Bijektivität für offene Teilmannigfaltigkeiten: Wir wollen zuerst für den Spezialfall $0 = p \in M = U \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$ die Bijektivität von Φ beweisen. Sei $(e_i)_{i=1}^m$ die Standardbasis im \mathbb{R}^m ist, dann kann jeder Vektor $v \in T_p M = \mathbb{R}^m$ in der Basis als $v = \sum_i v^i e_i$ entwickelt werden. Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} \Phi : T_p M \ni v &\mapsto \partial_v \in \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ \text{mit } \partial_v(f) &:= (T_p f)(v) = f'(p)(v) = \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(p) \cdot v^i, \end{aligned}$$

wobei $\partial_i f$ die i -te partielle Ableitung von f ist, d.h.

$$(\partial_i f)(p) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_0 f(p + t e^i) = f'(p)(e^i).$$

Also ist die Derivation ∂_v nichts anderes als ‘‘Richtungsableitung d_v in Richtung v zu nehmen’’ und Φ ist injektiv, denn die Komponenten von v können vermöge

$$\partial_v(\text{pr}_j) = \sum_{i=1}^m \underbrace{(\partial_i \text{pr}_j)(p)}_{\delta_{i,j}} \cdot v^i = v^j$$

aus ∂_v eindeutig rekonstruiert werden.

Umgekehrt ist Φ aber auch surjektiv, denn für $\partial \in \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ und $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ folgendes:

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^1 f'(tx)(x) dt = \int_0^1 \sum_i (\partial_i f)(tx) x^i dt \\ &= \sum_{i=1}^m x^i \underbrace{\int_0^1 (\partial_i f)(tx) dt}_{=: h_i(x)}. \end{aligned}$$

und weiters, da ∂ ein lokaler Operator ist,

$$\begin{aligned} \partial(f) &= \partial(f(0)) + \partial\left(\sum_{i=1}^m \text{pr}^i \cdot h_i\right) = 0 + \sum_{i=1}^m \left(\underbrace{\partial(\text{pr}^i)}_{(\partial_i f)(0)} \underbrace{h_i(0)}_{=0} + \text{pr}^i(0) \cdot \partial(h_i) \right) \\ &\Rightarrow \partial(f) = \sum_{i=1}^m \underbrace{\partial(\text{pr}^i)}_{=:v^i} \cdot (\partial_i f)(0). \end{aligned}$$

Also ist $\partial(f) = \partial_v(f) = \Phi(v)(f)$ für alle f .

Bijektivität im Allgemeinen: Sei nun M eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und φ eine lokale Parametrisierung von M zentriert bei p . Folgendes Diagramm zeigt, daß Φ_p eine Isomorphismus ist:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^m & \xlongequal{\quad} & T_0U & \xrightarrow[\cong]{T_0\varphi} & T_pM \hookrightarrow \mathbb{R}^n \\ & & \Phi_0 \downarrow \cong & & \Phi_p \downarrow \\ & & \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \xrightarrow[\cong]{(\varphi^*)^*} & \text{Der}_p(C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R}), \mathbb{R}) \xrightarrow[\cong]{(\text{incl}^*)^*} & \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{array}$$

Dabei ist $T_0\varphi$ ein Isomorphismus nach 20.4; Φ_0 ist einer wegen des Spezialfalls; $(\varphi^*)^* : \partial \mapsto (f \mapsto \delta(f \circ \varphi))$ ist einer, da $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ ein Diffeomorphismus ist; und schließlich ist der rechte untere ein solcher, da Derivationen lokale Operatoren sind; Also ist auch Φ_p ein Isomorphismus, und somit der Satz bewiesen. \square

25.3 Bemerkungen

⋮

Die Ableitung von $T\varphi$ an der Stelle $(x, v) \in TU = U \times \mathbb{R}^m$ in Richtung $(w, h) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ist

$$(T\varphi)'(x, v)(w, h) = (\varphi'(x)(w) + 0, \varphi''(x)(w, v) + \varphi'(x)(h)).$$

Die Jacobimatrix von $T\varphi$ bei (x, v) ist somit:

$$\begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ \varphi''(x)(-, v) & \varphi'(x) \end{pmatrix}.$$

Da φ regulär ist, ist $\varphi'(x)$ invertierbar und somit auch die Jacobimatrix von $T\varphi$, d.h. $T\varphi$ ist regulär.

⋮

25.7 Bemerkungen

1. Zu zwei Vektorbündelkarten $\psi_U : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow p^{-1}(U)$ und $\psi_V : V \times \mathbb{R}^M \rightarrow p^{-1}(V)$ ist der Vektorbündelkartenwechsel

$$\psi_V^{-1} \circ \psi_U : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U \cap V) \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$$

von der Form

$$(x, v) \mapsto \left(\underbrace{(\text{pr}_1 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, v)}_{=x}, \underbrace{(\text{pr}_2 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, v)}_{=: \psi_{VU}(x) \cdot v} \right).$$

Die wesentliche Komponente $(\text{pr}_2 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U) : (U \times V) \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ haben wir dabei durch $\psi_{UV} := (\text{pr}_2 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U)^\vee : U \cap V \rightarrow L(k, k)$ beschrieben

(beachte dabei, daß $\psi_V^{-1} \circ \psi_U$ faserweise linear ist). Diese Abbildung ψ_{VU} heißt TRANSITIONSFUNKTION. Es hat ψ_{VU} Werte in $GL(k) \subset L(k, k)$, denn die Inverse zu $\psi_{VU}(x)$ ist $\psi_{UV}(x)$.

4. Nach Konstruktion ist die Abbildung $\hat{\psi}_{UV} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $\hat{\psi}_{UV} : (x, v) \mapsto \psi_{VU}(x) \cdot v$ glatt. Und wir behaupten nun, daß dies dazu äquivalent ist, daß $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow GL(k) \subseteq L(k, k)$ selbst glatt ist. Um das zu beweisen, bezeichnen wir mit ev die glatte (da bilineare) Evaluationsabbildung $ev : L(k, k) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k, (A, v) \mapsto A \cdot v$.
 (\Leftarrow) gilt, da

$$\hat{\psi}_{VU} = ev \circ (\psi_{VU} \times \text{id}|_{\mathbb{R}^k}) : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow L(k, k) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$$

(\Rightarrow) Es ist $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow L(k, k) C^\infty$, falls $ev_y \circ \psi_{VU}$ glatt ist $\forall y \in \mathbb{R}^k$. Das ist der Fall, denn

$$\begin{aligned} (ev_y \circ \psi_{VU})(x) &= \psi_{VU}(x) \cdot y = \hat{\psi}_{VU}(x, y) \\ &\Rightarrow ev_y \circ \psi_{VU} = \hat{\psi}_{VU}(-, y) \text{ ist } C^\infty \quad \forall y. \end{aligned}$$

5. Sei nun M eine Mannigfaltigkeit und $p : E \rightarrow M$ eine auf einer Menge E definierte Abbildung so, daß eine Familie von faserstreuen Abbildungen $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U)$ existiert, wobei die U eine offene Überdeckung von M bilden und die zugehörigen Transitionsfunktionen $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow GL(k)$ wohldefiniert und glatt sind.

Dann können wir E auf eindeutige Weise zu einer Mannigfaltigkeit machen, sodaß $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Vektorbündelkarten ψ_U wird:

Als Parametrisierungen von E können wir $\psi_U \circ (\varphi \times \mathbb{R}^k)$ verwenden, wobei die ψ_U die gegebenen faserstreuen Abbildungen und φ Parametrisierungen von M sind. Die Kartenwechselabbildungen sind dann $(\psi_V \circ (\varphi_2 \times \mathbb{R}^k))^{-1} \circ (\psi_U \circ (\varphi_1 \times \mathbb{R}^k)) = (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1, \hat{\psi}_{VU} \circ ((\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1) \times \mathbb{R}^k))$. Nach Konstruktion sind somit die ψ_U Faserbündelkarten und wir können die Fasern E_x vermögen diesen zu Vektorräumen machen und zwar so, daß die ψ_U faserlinear werden.

Beweis von 28.3.

⋮

Wir zeigen jetzt, daß $U \subseteq \mathbb{R} \times M$ offen in der Produkttopologie ist und Fl darauf C^∞ : Für $p \in M$ sei

$$\begin{aligned} I := \{t' \in [0, t_+^p) : \text{Fl ist auf einer offenen Umgebung} \\ \text{von } [0, t'] \times \{p\} \subseteq U \text{ definiert und glatt}\}. \end{aligned}$$

Wir zeigen indirekt, daß $I = [0, t_+^p)$ ist (analog geht man für t_-^p vor):

Angenommen $I \subset [0, t_+^p[$. Sei $t_0 := \inf([0, t_+^p[\setminus I)$ und $q := \text{Fl}(t_0, p)$. Für $p \in M$ existiert nach dem Satz über Differentialgleichungen im \mathbb{R}^m eine offene Umgebung von $(0, p) \in \mathbb{R} \times M$, auf welcher der Fluß Fl definiert und glatt ist, somit ist $t_0 > 0$.

Ebenso ist Fl auf einer Umgebung $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W$ von $(0, q)$ glatt und wegen der Stetigkeit von $t \mapsto \text{Fl}(t, p)$ bei t_0 existiert ein $0 < \delta \leq \varepsilon$ so, daß $\text{Fl}(t_0 - \delta, p)$ in W enthalten ist. Nach Konstruktion von t_0 ist Fl auch auf einer Umgebung von $[0, t_0 - \delta] \times \{p\}$ glatt. Somit bildet $x \mapsto \text{Fl}(t_0 - \delta, x)$ eine Umgebung von x_0 glatt nach W ab und damit ist die Zusammensetzung $(s, x) \mapsto \text{Fl}(s, \text{Fl}(t_0 - \delta, x))$ auf einer Umgebung von $[0, \delta] \times \{p\}$ glatt. Wegen der Einparametergruppen-Eigenschaft ist $\text{Fl}(s, \text{Fl}(t_0 - \delta, x)) = \text{Fl}(s + t_0 - \delta, x)$, also Fl lokal um $[t_0 - \delta, t_0] \times \{p\}$ glatt. Insgesamt ist Fl auf einer Umgebung von $([0, t_0 - \delta] \cup [t_0 - \delta, t_0]) \times$

$\{p\} = [0, t_0] \times \{p\}$ glatt, und damit eine Umgebung von t_0 in I enthalten, ein Widerspruch zur Annahme.

⋮

Ad 52.3

3 ... Eine Kurve $c : s \mapsto (x(s), t(s))$ ist genau dann Krümmungslinie, wenn $s \mapsto t(s)$ oder $s \mapsto x(s)$ konstant ist.

Ad 52.5

Wegen $\lambda(x) := \frac{1}{m} \text{Spur}(L_{\varphi(x)})$ ist $\lambda : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ glatt.

Ad 52.9

Es sei nun: $g(t; x, y, z) := \frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} - 2z + c + t$ mit $a > b$ und $c \in \mathbb{R}$.

Ad 52.11

Den Fall $m = 2$ haben wir bereits in 33.10 behandelt.

Es wird auf das Dreieck mit Ecken $f(0) = 0, f(e_1), \rho(r) f(e_2)$ abgebildet.

Ad 53.4

$$\nu := \frac{\varphi_t \times \varphi_s}{|\varphi_t \times \varphi_s|}, \dots$$

26.23 Proposition.

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche und X_1, X_2 punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf M . Dann existiert eine lokale Parametrisierung φ von M mit $\partial_i \varphi(u)$ parallel zu $X_i(\varphi(u))$ für $i \in \{1, 2\}$.

Für Hyperflächen im \mathbb{R}^n mit $n > 3$ ist der analoge Satz falsch!

Direkter Beweis. Sei ψ eine lokale Parametrisierung von M und Y_i die lokalen Vektorfelder auf \mathbb{R}^2 mit $T_v \psi \cdot Y_i(v) = X_i(\psi(v))$. Wir suchen einen lokalen Diffeomorphismus $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (v^1, v^2) \mapsto (u^1, u^2)$ mit $\varphi := \psi \circ h^{-1}$ wie gewünscht, d.h. $\partial_i \varphi(u)$ parallel zu $X_i(\varphi(u))$. Dies bedeutet: $0 = (u^i)'(v) \cdot Y_j(v) = \sum_{k=1}^2 \partial_k u^i(v) \cdot Y_j^k(v)$ für $i \neq j$, denn dann ist $(h^{-1})'(u) \cdot e_i = h'(h^{-1}(u))^{-1} \cdot e_i$ parallel zu $Y_i(h^{-1}(u))$ und somit $\partial_i \varphi(u) = T_{h^{-1}(u)} \psi \cdot (h^{-1})'(u) \cdot e_i$ parallel zu $T_{h^{-1}(u)} \psi \cdot Y_i(h^{-1}(u)) = X_i(\psi(h^{-1}(u))) = X_i(\varphi(u))$. Obige partielle Differentialgleichungen von der Form $\partial_1 u(v) \cdot Y^1(v) + \partial_2 u(v) \cdot Y^2(v) = 0$ sind lösbar, denn sei $t \mapsto v(t)$ eine Integralkurve des Vektorfelds Y , dann ist $\frac{d}{dt} u(v(t)) = \partial_1 u(v(t)) \cdot (v^1)'(t) + \partial_2 u(v(t)) \cdot (v^2)'(t) = \partial_1 u(v(t)) \cdot Y^1(v(t)) + \partial_2 u(v(t)) \cdot Y^2(v(t)) = 0$ für jede Lösung u der partiellen Differentialgleichung, also $u \circ v$ konstant. Also ist $u(\text{Fl}^Y(t, v)) = u(v)$. Wenn wir somit v auf einer Kurve normal zu Y vorgeben, so ist u dadurch lokal definiert und erfüllt die partielle Differentialgleichung. \square

Beweis mittels kommutierender Vektorfelder. Vergleiche dies mit 29.12. Seien X_1, X_2 punktweise linear unabhängig. Dann existieren lokal Funktionen $a_i > 0$ mit $0 = [a_1 X_1, a_2 X_2] = a_1 a_2 [X_1, X_2] + a_1 X_1(a_2) X_2 - a_2 X_2(a_1) X_1 = a_1 a_2 \left([X_1, X_2] + \frac{X_1(a_2)}{a_2} X_2 - \frac{X_2(a_1)}{a_1} X_1 \right)$ und somit nach 29.12 für $k = 2$ eine Karte φ mit $\partial_i \varphi = a_i X_i$

für $i = 1, 2$, denn $[X_1, X_2] = b_1 X_1 + b_2 X_2$ mit glatten Koeffizienten Funktionen b_1 und b_2 und somit müssen wir nur die partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{X_1(a_2)}{a_2} = b_2$ und analog $\frac{X_2(a_1)}{a_1} = -b_1$ lösen, was offensichtlich möglich ist, denn dazu können wir die Werte auf einer Kurve transversal zu X_1 beliebig vorgeben (nach 29.12 für $k = 1$ können wir zu einem nicht verschwindenden Vektorfeld X eine Karte φ mit $X = \partial_1 \varphi$ finden). \square

53.6a Folgerung.

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche ohne Nabelpunkte. Dann existiert eine Parametrisierung φ , sodaß die Parameterlinien Krümmungslinien sind.

Beweis. Wir können die (bis auf Vorzeichen) eindeutig bestimmten normierten Hauptkrümmungsrichtungen betrachten. Diese sind punktweise linear unabhängige Vektorfelder und sind glatt, denn die Koeffizienten K und H des charakteristischen Polynoms von L sind glatt und somit auch die zwei (verschiedenen) Hauptkrümmungen und damit auch die zugehörigen bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmten normierten Eigenvektoren. Somit existiert nach 26.23 eine Parametrisierung φ mit $\partial_i \varphi$ proportional zu den normierten Hauptkrümmungsrichtungen, also sind deren Parameterlinien Krümmungslinien. \square

56.1 Definition (Minimalfläche)

Eine Fläche heißt MINIMALFLÄCHE, falls sie (lokal) ein kritischer Punkt für die Oberfläche ist, d.h. wenn wir sie nur lokal (bzw. auf einem kompakten Teil) variieren. Wir brauchen also nicht die gesamte Oberfläche (die unendlich sein kann), sondern nur jenen Teil, der sich ändert, betrachten.

Nach [?, 8.1.5] ist die Oberfläche einer durch Parametrisierung $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq K \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit kompakten J -meßbaren K durch

$$\text{vol}(M) := \int_K \|\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi\|$$

gegeben, also

$$\begin{aligned} \text{vol}(M) &:= \int_K \sqrt{\|\partial_1 \varphi\|^2 \|\partial_2 \varphi\|^2 - \langle \partial_1 \varphi | \partial_2 \varphi \rangle} = \int_K \sqrt{EG - F^2} \\ &= \int_K \sqrt{\det((g_{i,j})_{i,j \in \{1,2\}})}, \end{aligned}$$

wobei $g_{i,j} := \langle g_i | g_j \rangle$ die Koeffizienten der ersten Fundamentalform mit $g_i := \partial_i \varphi$ sind. Allgemeiner gilt für parametrisierte Hyperflächen $M \subseteq \mathbb{R}^n$, daß ihr $n - 1$ -dimensionales Volumen durch

$$\text{vol}(M) = \int_K \sqrt{\det((g_{i,j})_{i,j})}$$

gegeben ist.

56.2 Satz, [?].

Eine Fläche ist genau dann eine Minimalfläche, wenn $H = 0$.

Beweis. Das vorliegende Variationsproblem besteht also darin, die kritischen Punkte der Funktion $M \mapsto \text{vol}(M) \in \mathbb{R}$ zu bestimmen. Sei die Fläche M ein kritischer Punkt dieses Funktionals. Jede in der Nähe von M liegende Fläche läßt sich (per Definition) als $\{x + f(x)\nu(x) : x \in M\}$ mit einer reellwertigen glatten Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ darstellen. Somit muß $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \text{vol}(M^t) = 0$ sein, wobei M^t die Fläche $\{x + t f(x)\nu(x)\}$

ist. Dazu müssen wir $\frac{d}{dt} \Big|_0 \text{vol}_{M^t}$ bestimmen. Wir wählen eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow M$ von M mit zugehörigen lokalen Koordinaten (u^1, \dots, u^m) . Eine lokale Parametrisierung von M^t ist dann $\varphi^t(u) = \varphi(u) + t f(\varphi(u)) \nu(\varphi(u))$. Lokal ist

$$\text{vol}_{M^t} = \sqrt{\det(g_{i,j}^t)} du^1 \wedge \dots \wedge du^m,$$

wobei

$$g_i^t := \partial_i \varphi^t = \partial_i \varphi + t \left(\partial_i (f \circ \varphi) \cdot (\nu \circ \varphi) + (f \circ \varphi) \cdot \partial_i (\nu \circ \varphi) \right)$$

und $g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle$. Also ist

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 g_i^t = \left(\partial_i (f \circ \varphi) \cdot (\nu \circ \varphi) + (f \circ \varphi) \cdot L(\partial_i \varphi) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot \nu + f \cdot L(g_i) \right)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_0 g_{i,j}^t &= \langle g_i, \frac{d}{dt} \Big|_0 g_j^t \rangle + \langle \frac{d}{dt} \Big|_0 g_i^t, g_j \rangle \\ &= f \cdot \left(\langle L(\partial_i \varphi), \partial_j \varphi \rangle + \langle \partial_i \varphi, L(\partial_j \varphi) \rangle \right) =: 2f h_{i,j}, \end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_0 \sqrt{\det(g_{i,j}^t)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{i,j})}} \det(g_{i,j}) \text{Spur} \left((g_{i,j})^{-1} \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 g_{i,j}^t \right) \right) \\ &= \sqrt{\det(g_{i,j})} (f \circ \varphi) \text{Spur} \left((g_{i,j})^{-1} (h_{i,j}) \right) \\ &= \sqrt{\det(g_{i,j})} (f \circ \varphi) \text{Spur} L \\ &= m \sqrt{\det(g_{i,j})} (f \circ \varphi) H. \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, daß $\det'(A)(B) = \det A \cdot \text{Spur}(A^{-1}B)$. Also:

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 \text{vol}_{M^t} = m f H \text{vol}_M$$

Schlußendlich gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{vol}(M^t) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int \text{vol}_{M^t} = \int \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{vol}_{M^t} \\ &= m \int_M f H \text{vol}_M. \end{aligned}$$

Soll das für alle in der Nähe von M liegenden Flächen gelten, d.h. für alle $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, so muß $H = 0$ sein (wähle $f = H$). \square

Ad 57.2

Obige Fragestellung ist natürlich ein Variationsproblem und die Methode ist jene von Euler-Lagrange, siehe [?, 9.4.16–9.4.18].

Ad 57.4

... da $c''(t) \in (T_{c(t)}M)^\perp$ und somit $c''(t) \perp (x(t)^\perp, 0)$ gilt.

59.1 Satz (Gauß-Krümmung als Störung der Maße von Kreisen).

Seien geodätische Polarkoordinaten φ um $x \in M$ gewählt. Mit $L(r)$ bezeichnen wir

die Länge bzw. mit $A(r)$ die Fläche des Inneren der geodätischen Kreise $\theta \mapsto \varphi(r, \theta)$ so gilt:

1. $K(x) = \frac{3}{\pi} \lim_{r \searrow 0} \frac{2r\pi - L(r)}{r^3}$ [BertrandPuisseaux1848]
2. $K(x) = \frac{12}{\pi} \lim_{r \searrow 0} \frac{r^2\pi - A(r)}{r^4}$ [Diquet1848]

Die Gauß-Krümmung mißt also infinitesimal um wieviel der Umfang, beziehungsweise die Fläche eines geodätischen Kreises im Vergleich zu einem Euklidischen Kreis zu klein bzw. zu groß ist.

Beweis. Geodätische Polarkoordinaten φ sind nach 58.5 gegeben durch $\varphi(r, \theta) = \exp_x(r v(\theta))$ mit $v(\theta) = \cos(\theta) v + \sin(\theta) v^\perp$. Wir wissen bereits folgendes über die Funktion $\sqrt{G} := |\varphi_\theta|$: Die Funktion $G = |\varphi_\theta|^2$ ist glatt und verschwindet nur für $r = 0$. Also ist auch \sqrt{G} glatt für $r \neq 0$ aber nicht notwendigerweise für $t = 0$. Wir müssen aber das Verhalten bei 0 studieren. Dazu verwenden wir die Jacobi-Gleichung $K\sqrt{G} + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G} = 0$ aus 53.9. Die Taylorformel der Ordnung 1 mit Integralrestglied (siehe [?, 6.3.11])

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \int_0^1 (1-t) f''(tx)(x, x) dt$$

liefert

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= \exp_x(r v(\theta)) \\ &= \underbrace{\exp_x(0)}_x = x + \underbrace{\exp'_x(0)}_{=\text{id}}(r v(\theta)) + \int_0^1 (1-t) \exp''_x(t r v(\theta))(r v(\theta), r v(\theta)) dt \\ &= x + r v(\theta) + r^2 \underbrace{\int_0^1 (1-t) \exp''_x(t r v(\theta))(v(\theta), v(\theta)) dt}_{=: g(r, \theta)}, \end{aligned}$$

wobei g eine glatte \mathbb{R}^n -wertige Funktion ist. Durch partielles Differenzieren nach θ ergibt sich:

$$\varphi_\theta(r, \theta) = r \left(v'(\theta) + r \frac{\partial}{\partial \theta} g(r, \theta) \right)$$

und somit ist für $r \geq 0$

$$\sqrt{G(r, \theta)} = |\varphi_\theta(r, \theta)| = r \sqrt{|v'(\theta)|^2 + 2r \langle v'(\theta) | \frac{\partial}{\partial \theta} g(r, \theta) \rangle + r^2 \langle \frac{\partial}{\partial \theta} g(r, \theta) | \frac{\partial}{\partial \theta} g(r, \theta) \rangle}$$

glatt (wegen $|v'(\theta)| = 1$) und insbesondere gilt für die rechtsseitige Ableitung bei 0:

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \sqrt{G(r, \theta)} = 0 + 1.$$

Aus der Jacobi-Gleichung 53.9 folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \Big|_{r=0} \sqrt{G(r, \theta)} &= -K(x) \sqrt{G(0, \theta)} = 0 \quad \text{und durch Differenzieren} \\ \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(r, \theta) &= -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} K - \sqrt{G} \frac{\partial K}{\partial r}, \quad \text{also} \\ \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(0, \theta) &= -1 K(x) + 0 \end{aligned}$$

Aus der Taylorformel der Ordnung 2 mit Integralrestglied (siehe [?, 6.3.11]) ist

$$\sqrt{G}(r, \theta) = 0 + r + 0 + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(t r, \theta) r^3 dt$$

also

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{G}(r, \theta) - r}{r^3} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(tr, \theta) dt \\ &= \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(0, \theta) \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} dt = -K(x) \frac{1}{3!}. \end{aligned}$$

Somit ist wegen $L(r) = \int_0^{2\pi} \pi |\varphi_\theta(r, \theta)| d\theta$

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(x)}{6} d\theta = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r - \sqrt{G}(r, \theta)}{r^3} d\theta \\ &= \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r\pi - L(r)}{r^3} \end{aligned}$$

Für die Fläche erhalten wir

$$\begin{aligned} A(r) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{G(\rho, \theta)} d\theta d\rho \Rightarrow A'(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r, \theta)} d\theta = L(r) \Rightarrow \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2\pi - A(r)}{r^4} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r\pi - L(r)}{4r^3} = \frac{1}{4} \frac{K(x)\pi}{3} = K(x) \frac{\pi}{12}. \quad \square \end{aligned}$$

59.6 Folgerung.

Sei M eine kompakte Riemann-Fläche, dann gilt:

1. Es gibt Punkte $p \in M$ mit $\text{sgn}(K(p)) = \text{sgn}(\chi(M))$.
2. Ist $K \geq 0$ aber nicht konstant 0, so ist $\chi(M) = 2$, d.h. M ist diffeomorph zur Sphäre S^2 , oder $\chi(M) = 1$, d.h. diffeomorph zur projektiven Ebene \mathbb{P}^2 .
3. Ist $K = 0$, so ist $\chi(M) = 0$, d.h. M ist diffeomorph zum Torus oder zur Kleinschen Flasche.
4. Ist $K \leq 0$ aber nicht konstant 0, so ist $\chi(M) < 0$, d.h. M ist diffeomorph zu einer Sphäre mit mindestens 2 Henkeln oder mindestens 3 Möbiusbändern.

55.6 Lemma (Schmiegtorse).

Sei c eine Kurve in einer Fläche M , für welche es ein Vektorfeld w in TM längs c gibt, mit $\Pi(c'(t), w(t)) = 0$ und $\{c'(t), w(t)\}$ linear unabhängig für alle t . Dann ist $(s, \theta) \mapsto c(\theta) + sw(\theta)$ eine Torse, die sogenannte SCHMIEGTORSE, da sie die Fläche längs c berührt.

Die Existenz so eines Vektorfelds w ist unter der Voraussetzung $K(c'(t)) = 0$ für alle t gewährleistet.

Beweis. Es sei $K(c'(t)) = 0$ für alle t . Sei \bar{w} ein Vektorfeld in TM längs c welches punktweise linear unabhängig von c' ist (also z.B. $\bar{w}(t) := c'(t) \times \nu(c(t))$). Wir machen den Ansatz $w(t) := \bar{w}(t) + \lambda(t)c'(t)$. Dann ist auch w punktweise linear unabhängig von c' und tangential an M . Schließlich ist $0 = \Pi(c'(t), w(t)) = \Pi(c'(t), \bar{w}(t) + \lambda(t)c'(t)) = \Pi(c'(t), \bar{w}(t)) + \lambda(t)K(c'(t))$ (also das gesuchte Vektorfeld w) genau dann, wenn $\lambda(t) = \frac{\Pi(c'(t), \bar{w}(t))}{K(c'(t))}$.

Sei nun w so ein Vektorfeld und o.B.d.A. $|c'(t)| = 1 = |w(t)|$. Dann parametrisiert $\varphi : (s, \theta) \mapsto c(\theta) + sw(\theta)$ für s nahe 0 eine Regelfläche, denn

$$\begin{aligned} \varphi_s(s, \theta) &= w(\theta), \text{ und } \varphi_\theta(s, \theta) = c'(\theta) + s w'(\theta), \\ &\Rightarrow \{\varphi_s(0, \theta), \varphi_\theta(0, \theta)\} \text{ ist linear unabhängig.} \end{aligned}$$

Diese Regelfläche ist sogar eine Torse, d.h. nach $K = 0$, denn mit $v(t) := \nu(c(t))$ erhalten wir

$$e = -\frac{1}{D} \det(\varphi_s, \varphi_\theta, \varphi_{s,s}) = -\frac{1}{D} \det(w, c' + s w', 0) = 0$$

$$f = -\frac{1}{D} \det(\varphi_s, \varphi_\theta, \varphi_{s,\theta}) = -\frac{1}{D} \det(w, c' + s w', w')$$

$$= -\frac{1}{D} \det(w, c', \langle w'|v \rangle v) = \frac{\langle w|v' \rangle}{D} \det(w, c', v) = \frac{\text{II}(w, c')}{D} \det(w, c', v) = 0$$

$$\Rightarrow K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0. \quad \square$$

Was wir in Kapitel I behandelt haben:

- 1. komplett
- 2. komplett
- 3. ohne 3.10
- 7. komplett

Was wir in Kapitel II behandelt haben:

- 9. komplett
- 10. komplett
- 11.1–11.6, 11.8, 11.9
- 14.1, 14.2 nur für $A \in GL(n)$, $b \in \mathbb{R}^n$, 14.5, 14.6, 14.19 nur für $SO(2)$, $SL(2)$ und $SO(3)$
- 15. komplett
- 16.1, 16.2, 16.4, 16.8, 16.12.2
- 18.1, 18.2, 18.5, 18.6

Was wir in Kapitel III behandelt haben:

- 20.1–20.9
- 23. komplett
- 25.1–25.6, 25.7.1, 25.7.4, 25.7.5
- 27.1–27.4
- 28.1–28.3

Was wir in Kapitel VIII behandelt haben:

- 51. komplett
- 52.1–52.3, 52.5–52.8, 52.10, 52.11 (ohne Bew.)
- 53.1–53.9
- 54.1, 54.3, 54.9
- 55.1, 55.6
- 56.1–56.2, 56.4 (ohne Bew.), 56.5
- 57. komplett
- 58.2–58.5, 58.7
- 59.1, 59.3 (ohne Bew.), 59.4–59.6
- 60.1
- 61.1–61.8
- 62.1, 62.5 (Koordinatenbew.)

Graßmann-Mannigfaltigkeiten



11.11 Bemerkung. Verschiedene Beschreibungen von $G(k, n)$.

Es beschreibt

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $A \in GL(k)$ genau dann eine Orthoprojektion vom Rang k , wenn $A^t A + C^t C = A$, $B = C^t$ und $D = CA^{-1}B$ gilt. Eine **lokale Gleichung** für $G(k, n)$ wird somit beschrieben durch

$$f : \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(n, n) : A \in GL(k) \right\} \rightarrow L(k, k) \times L(n-k, k) \times L(n-k, n-k)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto (A^t A + C^t C - A, B - C^t, D - CA^{-1}B).$$

Die erste Gleichung können wir durch Multiplikation mit $(A^{-1})^t$ von links und A^{-1} von rechts in $\text{id} + (CA^{-1})^t(CA^{-1}) = (A^{-1})^t$ umwandeln also wegen $A^t = (A^t A + C^t C)^t = A^t A + C^t C = A$ in $A = (1 + Z^t Z)^{-1}$ für $Z := CA^{-1}$. Beachte dabei, daß $1 + Z^t Z \in GL(k)$, da $x + Z^t Z x = 0 \Rightarrow 0 = \langle x + Z^t Z x | x \rangle = \|x\|^2 + \|Zx\|^2 \Rightarrow x = 0$. Also wird $G(k, n)$ **lokal parametrisiert** durch

$$\varphi : L(k, n-k) \ni Z \mapsto \begin{pmatrix} A := (1 + Z^t Z)^{-1} & B := C^t \\ C := ZA & D := CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

denn eine **Retraktion** ψ (d.h. ein Linksinverses) dazu ist gegeben durch

$$\psi : \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(n, n) : A \in GL(k) \right\} \rightarrow L(k, n-k) \mapsto Z := CA^{-1}$$

Wegen $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\varphi'(0)(Z) = \begin{pmatrix} 0 & Z^t \\ Z & 0 \end{pmatrix}$ ist

$$T_{\varphi(0)}G(k, n) = \text{Bild}(\varphi'(0)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Z^t \\ Z & 0 \end{pmatrix} : Z \in L(k, n-k) \right\}$$

und

$$\left(T_{\varphi(0)}G(k, n) \right)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & D \end{pmatrix} \in L(n, n) \right\}$$

Ein **lokale Trivialisierung** $\Phi : L(n, n) \rightarrow L(n, n)$ ist somit durch

$$\Phi : L(n, n) \cong L(k, n-k) \times (L(k, k) \times L(k, n-k) \times L(n-k, n-k)) \rightarrow L(n, n),$$

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \mapsto \varphi(Z) + \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^t & W \end{pmatrix}$$

gegeben. Daß dies ein lokaler Diffeomorphismus nahe 0 ist, sieht man auch expliziter:

Denn sei $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \in L(n, n)$, dann bedeutet

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} = \Phi \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A := (1 + Z^t Z)^{-1} & B := C^t \\ C := Z A & D := C A^{-1} B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^t & W \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} A := (1 + Z^t Z)^{-1} & X + A = Q & Y + C^t = R \\ C := Z A & -Y^t + C = S & W + C A^{-1} C^t = T \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} A := (1 + Z^t Z)^{-1} & X + A = Q & Y = \frac{1}{2}(R - S^t) \\ C := Z A & C := \frac{1}{2}(S + R^t) & W + C A^{-1} C^t = T \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} C := \frac{1}{2}(S + R^t) & C = Z(1 + Z^t Z)^{-1} & A := (1 + Z^t Z)^{-1} \\ X = Q - A & Y = \frac{1}{2}(R - S^t) & W = T - C A^{-1} C^t \end{cases} \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung $C = Z(1 + Z^t Z)^{-1}$ beschreibt einen lokalen Diffeomorphismus bei 0, denn die Ableitung von $Z \mapsto C$ bei 0 in Richtung Z ist $0 \cdot (*) + Z \cdot 1^{-1} = Z$. Dies ist kein globaler Diffeomorphismus, denn für $k = 1 = n - k$ hat $z \mapsto \frac{z}{1+z^2}$ Werte in $\{c : |z| \leq \frac{1}{2}\}$ und ist nur für $|z| < 1$ injektiv. Im allgemeinen existiert wegen dem Banach'schen Fixpunktsatz für $\|C\| < \frac{1}{2}$ ein eindeutiges Z mit $\|Z\| \leq 1$ mit $Z = f(Z) := C(1 + Z^t Z)$, denn

$$\|f(Z)\| = \|C\| \|1 + Z^t Z\| \leq \|C\| (1 + \|Z^t Z\|) = \|C\| (1 + \|Z\|^2) < \frac{1}{2}(1 + 1) = 1$$

$$f'(Z)(W) = C(W^t Z + Z^t W) \Rightarrow$$

$$\|f'(Z)(W)\| \leq \|C\| (\|W^t\| \|Z\| + \|Z^t\| \|W\|) = 2 \|C\| \|Z\| \|W\| \Rightarrow$$

$$\|f'(Z)\| \leq 2 \|C\| \|Z\| \leq 2 \|C\| < 1.$$

Wegen $\|f(Z)\| < \|Z\|$ ist $\|Z\| < 1$ für den Fixpunkt Z . Es ist die Bijektion $Z \mapsto C$ ein Diffeomorphismus von $\{Z : \|Z\| < 1\} \rightarrow \{C : \|C\| < 12\}$, denn ihre Ableitung an einer Stelle Z mit $\|Z\| < 1$ ist

$$\begin{aligned} W \mapsto & W \cdot (1 + Z^t Z)^{-1} - Z \cdot (1 + Z^t Z)^{-1} (W^t Z + Z^t W) (1 + Z^t Z)^{-1} = \\ & = \left(W - (1 + Z Z^t)^{-1} Z (W^t Z + Z^t W) \right) (1 + Z^t Z)^{-1} \\ & = (1 + Z Z^t)^{-1} \left((1 + Z Z^t) W - Z W^t Z - Z Z^t W \right) (1 + Z^t Z)^{-1} \\ & = (1 + Z Z^t)^{-1} (W - Z W^t Z) (1 + Z^t Z)^{-1} \end{aligned}$$

und verschwindet somit auf $W \neq 0$ genau dann, wenn $W = Z W^t Z$, also $\|W\| = \|Z W^t Z\| \leq \|Z\|^2 \|W\| < \|W\|$, ein Widerspruch.

Beachte weiters, daß für $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ durch

$$P_1 := (A \ B), \quad P_2 := \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

zwei lineare Abbildungen $P_1 \in L(n, k)$ und $P_2 \in L(k, n)$ geben sind mit maximalen Rang (wegen $A \in GL(k)$), welche $\text{Ker}(P_1) = \text{Ker}(P)$ und $\text{Bild}(P_2) = \text{Bild}(P)$ erfüllen, denn $\text{Bild}(P_2) = \text{Bild}(P|_{\mathbb{R}^k}) \subseteq \text{Bild} P$ mit $\dim(\text{Bild}(P_2)) = k = \dim(\text{Bild}(P))$ und $\text{Ker}(P_1) = \text{Ker}(\text{pr}_1 \circ P) \supseteq \text{Ker}(P)$ mit $\dim(\text{Ker}(P_1)) = n - \dim(\text{Bild}(P_1)) = n - k = \dim(\text{Ker}(P))$. Schließlich ist der durch P beschriebene Teilraum $\text{Bild}(P)$ der Graph von $Z := C A^{-1}$, denn $\text{Bild}(P) = \text{Bild}(P_2) = \{(Ax, Cx) : x \in \mathbb{R}^k\} = \{(y, C A^{-1} y) :$

$y \in \mathbb{R}^k\} = \text{Graph}(Z)$ oder auch $\text{Bild}(P) = \text{Ker}(P)^\perp = \text{Ker}(P_1)^\perp = \{(x, z) : Ax + Bz = 0\}^\perp = \{(-A^{-1}Bz, z) : z\}^\perp = \{(u, v) : \langle B^t(A^t)^{-1}u | z \rangle = \langle u | A^{-1}Bz \rangle = \langle v | z \rangle \forall z\} = \{(u, B^t A^{-1}u) : u\}$.

Um schlußendlich $G(k, n)$ noch lokal als **Graph** einer Abbildung

$$g : \overbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & Z^t \\ Z & 0 \end{pmatrix} : Z \in L(k, n-k) \right\}}^{T_{\varphi(0)}G(k, n)} \rightarrow \overbrace{\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & D \end{pmatrix} \in L(n, n) \right\}}^{(T_{\varphi(0)}G(k, n))^\perp} \\
 Z \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & D \end{pmatrix}$$

zu beschreiben, muß

$$\begin{pmatrix} 0 & Z^t \\ Z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & D \end{pmatrix} \in G(k, n)$$

liegen, also $A \in GL(k)$, $Z^t - B = (Z - B^t)^t = Z^t + B$ (d.h. $B = 0$), $D = ZAZ^t$ und $A^t A + Z^t Z = A$ gelten. Die letzte Gleichung ist wegen dem impliziten Funktionensatz für $\|Z\|$ nahe 0 in A nahe id eindeutig glatt lösbar, denn die zweite partielle Ableitung von $(Z, A) \mapsto A^t A + Z^t Z - A$ an der Stelle $(0, \text{id})$ ist $A \mapsto A^t + A - A = A^t$ ein Isomorphismus. Expliziter erhalten wir dies aus dem Banach'schen Fixpunktsatz für $\|Z\| < \frac{1}{2}$ mit $\|A\| \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \|Z\|^2} =: \frac{c}{2} < \frac{1}{2}$, denn dann hat die Ableitung von $A \mapsto A^t A + Z^t Z$ Operatornorm $\leq \|A^t\| + \|A\| = 2\|A\| \leq c < 1$ und $\|A^t A + Z^t Z\| \leq \|A^t A\| + \|Z^t Z\| = \|A\|^2 + \|Z\|^2 \leq \frac{c^2}{4} + \|Z\|^2 = \frac{c}{2}$. Da A genau dann eine Lösung ist, wenn $1 - A$ eine ist, erhalten wir auch eine eindeutige Lösung A mit $\|1 - A\| \leq \frac{c}{2}$. Die glatte Abhängigkeit von Z folgt, da die Ableitung von $A \mapsto A^t A + Z^t Z - A$ für solche A invertierbar ist, denn diese ist durch $S \mapsto A^t S + S^t A - S$ gegeben, wäre also $A^t S + S^t A - S = 0$, dann wäre für $S \neq 0$

$$\begin{aligned}
 \|S\| &= \|S^t\| = \|(S - A^t S)A^{-1}\| \\
 &\leq \|1 - A^t\| \|S\| \|A^{-1}\| = \|1 - A\| \|S\| \|(1 - (1 - A))^{-1}\| \\
 &\leq \frac{c}{2} \|S\| \sum_{k=0}^{\infty} \|1 - A\|^k \leq \|S\| \frac{c}{2} \frac{1}{1 - \frac{c}{2}} < \|S\|,
 \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Wir wollen nun das Bild der Parametrisierung $\varphi : L(k, n-k) \rightarrow G(k, n)$ geometrisch beschreiben. Es ist $\varphi(0)$ (die Orthoprojektion auf) die Ebene $\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x, 0)$. Es ist $P := \varphi(Z)$ die Orthoprojektion auf $\text{Bild}(P) = \text{Graph}(Z) =: \varepsilon$ und offensichtlich ist $\varepsilon \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) = \{(0, y) \in \text{Graph}(Z)\} = \{0\}$. Umgekehrt sei ε eine beliebige k -Ebene die $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ trivial schneidet, dann ist $\text{pr}_1|_\varepsilon : \varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^k$ injektiv, denn $\text{Ker}(\text{pr}_1) = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ und aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus, also

$$\varepsilon = \{z = (\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z)) : z \in \varepsilon\} = \{(x, (\text{pr}_2 \circ (\text{pr}_1|_\varepsilon)^{-1})(x)) : x \in \mathbb{R}^k\} = \text{Graph}(Z),$$

wobei $Z := \text{pr}_2 \circ (\text{pr}_1|_\varepsilon)^{-1} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \in L(k, n-k)$. Es ist

$$\varepsilon^\perp = \{(x, y) : \forall v \in \mathbb{R}^k : \underbrace{\langle x | v \rangle + \langle y | Z(v) \rangle}_{= \langle x + Z^t y | v \rangle} = 0\} = \{(-Z^t y, y) : y \in \mathbb{R}^{n-k}\}.$$

Somit erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \cong \varepsilon \times \varepsilon^\perp \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

gegeben durch $(a, b) \mapsto (a, Za) + (-Z^t b, b) = (a - Z^t b, Za + b) =: (x, y)$. Dessen Inverses erhalten wir durch Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = a - Z^t b \\ y = Za + b \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + Z^t y = (a - Z^t b) + Z^t(Za + b) = (1 + Z^t Z)a \\ y - Zx = (Za + b) - Z(a - Z^t b) = (1 + ZZ^t)b \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = (1 + Z^t Z)^{-1}(x + Z^t y) \\ b = (1 + ZZ^t)^{-1}(y - Zx) \end{cases}, \end{aligned}$$

wobei $1 + Z^t Z$ und $1 + ZZ^t$ invertierbar sind, da $0 = \langle 1 + Z^t Z x | x \rangle = |x|^2 + |Zx|^2 \Rightarrow x = 0$ und ebenso $0 = \langle 1 + ZZ^t y | y \rangle = |y|^2 + |Z^t y|^2 \Rightarrow y = 0$. Die ortho-Projektion P auf ε ist somit durch

$$P : (x, y) \mapsto a := (1 + Z^t Z)^{-1}(x + Z^t y) \mapsto (a, Za)$$

gegeben. Dies zeigt auch eine direkte Rechnung, denn das Bild von P liegt offensichtlich in $\varepsilon = \text{Graph}(Z)$, der Kern von P ist $\{(x, y) : (1 + Z^t Z)^{-1}(x + Z^t y) = 0\} = \{(x, y) : x = -Z^t y\} = \varepsilon^\perp$ und $P|_\varepsilon$ ist offensichtlich id. Also ist

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + Z^t Z)^{-1} & (1 + Z^t Z)^{-1} Z^t \\ Z(1 + Z^t Z)^{-1} & Z(1 + Z^t Z)^{-1} Z^t \end{pmatrix} = \varphi(Z).$$

Da jede Ebene ε das Bild $g(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ eines Isomorphismuses $g \in GL(n)$ ist, erhalten wir somit Karten $L(k, n - k) \rightarrow G(k, n)$ zentriert bei ε .



11.12 Folgerung.

Es ist $M := \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in G(k, n) \times G(n - k, n) : \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \{0\}\}$ eine offene Teilmenge der Produktmannigfaltigkeit $G(k, n) \times G(n - k, n)$ und bzgl. $\text{pr}_1|_M : M \rightarrow G(k, n)$ ein Vektorbündel über $G(k, n)$ mit typischer Faser $L(n - k, n)$.

Beweis. Wir betrachten vorerst den ausgezeichneten Teilraum $\varepsilon_0 = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ und die Parametrisierung $\varphi : L(k, n - k) \rightarrow G(k, n)$ aus 11.11 auf die offenen Umgebung $U_0 := \{\varepsilon_1 \in G(k, n) : \varepsilon_1 \cap \varepsilon_0^\perp = \{0\}\}$ von ε_0 in $G(k, n)$. Diese induziert eine glatte Abbildung

$$\gamma : U_0 \rightarrow GL(n), \quad \varepsilon_1 \mapsto Z := \varphi^{-1}(\varepsilon_1) \mapsto g := \begin{pmatrix} 1 & -Z^t \\ Z & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } g^{-1} = \begin{pmatrix} A := (1 + Z^t Z)^{-1} & Z^t D \\ -ZA & D := (1 + ZZ^t)^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\text{denn } AZ = (1 + Z^t Z)^{-1} Z = Z(1 + ZZ^t)^{-1} = ZD.$$

Es ist $g(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \text{Graph}(Z) = \text{Bild}(P) = \varepsilon_1$ nach 11.11 und $g(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) = \{(-Z^t y, y) : y \in \mathbb{R}^{n-k}\} = \{(x, Zx) : x \in \mathbb{R}^k\}^\perp = \text{Graph}(Z)^\perp = \varepsilon_1^\perp$. Es gilt für $\varepsilon_2 \in G(n - k, n)$ genau dann $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in M$, wenn $\{0\} = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$, also wenn $\{0\} = \gamma(\varepsilon_1)^{-1}(\varepsilon_1) \cap \gamma(\varepsilon_1)^{-1}(\varepsilon_2) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap \gamma(\varepsilon_1)^{-1}(\varepsilon_2)$, d.h. $\gamma(\varepsilon_1)^{-1}(\varepsilon_2) \in U_1 := \{\varepsilon \in G(n - k, n) : \varepsilon_0 \cap \varepsilon = \{0\}\}$ und diese offene Menge ist das Bild der bei ε_1^\perp zentrierten Parametrisierung $\varphi_1 : L(n - k, n) \rightarrow U_1 \subseteq G(n - k, n)$ aus 11.11. Somit erhalten wir eine Bijektion

$$\begin{aligned} \Phi : U_0 \times L(n - k, n) &\rightarrow U_0 \times U_1 \rightarrow \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in M : \varepsilon_1 \in U_0\} \\ &(\varepsilon_1, Z_1) \mapsto (\varepsilon_1, \varphi_1(Z_1)) \mapsto (\varepsilon_1, \gamma(\varepsilon_1)(\varphi_1(Z_1))). \end{aligned}$$

Diese Bijektion ist glatt, da γ und φ_1 glatt sind und $GL(n) \times G(n - k, n) \rightarrow G(n - k, n)$, $(g, \varepsilon_2) \mapsto g(\varepsilon_2) = g(\text{Bild}(P_2)) = \text{Bild}(g \circ P_2)$ es ist. Die Inverse ist durch

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mapsto (\varepsilon_1, \varphi_1^{-1}(\gamma(\varepsilon_1)^{-1}(\varepsilon_2)))$$

gegeben und somit ebenfalls glatt. Wenn nun ein anderes fixes Element in $G(k, n)$ gegeben ist, dann existiert eine Drehung $g_0 \in O(n)$ so, daß $g_0(\varepsilon_0) = g_0(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ diese fixe Element ist. Und

$$\begin{aligned} \Phi_{g_0} : (g_0)_*(U_0) \times L(n-k, n) &\xrightarrow{g_0^{-1} \times \text{id}} U_0 \times L(n-k, n) \xrightarrow{\Phi} M \xrightarrow{g_0 \times g_0} M, \\ (\varepsilon_1, Z_1) &\mapsto (g_0 \times g_0)(\Phi(g_0^{-1}(\varepsilon_1), Z_1)) = (\varepsilon_1, g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1}(\varepsilon_1)) \cdot \varphi_1(Z_1)) \end{aligned}$$

ist dann eine entsprechende lokale Trivialisierung bei $g_0(\varepsilon_0)$ mit Inverser

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \xrightarrow{\Phi_{g_0}^{-1}} (g_0 \times \text{id}) \left(\Phi^{-1} \left(g_0^{-1}(\varepsilon_1), g_0^{-1}(\varepsilon_2) \right) \right) = \left(\varepsilon_1, \varphi_1^{-1} \left(\gamma(g_0^{-1})^{-1} \cdot g_0^{-1} \cdot \varepsilon_2 \right) \right).$$

Die Transitionsfunktionen dieses Faserbündel-Atlases berechnen sich nun wie folgt: Seien dazu $g_0, g_1 \in O(n)$ beliebig, dann ist für $\varepsilon_1 \in g_0(U_0) \cap g_1(U_0)$ und $Z_1 \in L(n-k, n)$:

$$\begin{aligned} (\Phi_{g_1}^{-1} \circ \Phi_{g_0})(\varepsilon_1, Z_1) &= \left((g_1 \times 1) \circ \Phi^{-1} \circ (g_1 \times g_1)^{-1} \circ (g_0 \times g_0) \circ \Phi \circ (g_0^{-1} \times 1) \right) (\varepsilon_1, Z_1) \\ &= \underbrace{\left(\varepsilon_1, \underbrace{g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)}_{(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1, \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)) \cdot \varphi_1(Z_1)} \cdot \varphi_1(Z_1) \right)}_{(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1, g_1^{-1} \cdot g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)) \cdot \varphi_1(Z_1)} \\ &= \underbrace{\left(\varepsilon_1, \underbrace{g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)}_{(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1, \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)) \cdot \varphi_1(Z_1)} \cdot \varphi_1(Z_1) \right)}_{(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1, \varphi_1^{-1}(\gamma(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1)^{-1} \cdot g_1^{-1} \cdot g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)) \cdot \varphi_1(Z_1))} \\ &= \left(\varepsilon_1, \varphi_1^{-1} \left(\underbrace{\gamma(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1)^{-1} \cdot g_1^{-1} \cdot g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)}_{=: g} \cdot \varphi_1(Z_1) \right) \right) \end{aligned}$$

Es bildet $g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)$ den Teilraum $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ auf $g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1$ und weiter auf ε_1 ab und den Teilraum $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ auf $(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)^\perp = g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1^\perp$ und weiter auf ε_1^\perp . Somit läßt $g := \gamma(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1)^{-1} \cdot g_1^{-1} \cdot g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)$ die Teilräume $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ invariant, ist also von der Form $g = h_1 \times h_2$ und somit ist

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1}(g \cdot \varphi_1(Z_1)) &= \varphi_1^{-1} \left((h_1 \times h_2) \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \right) = \varphi_1^{-1} \begin{pmatrix} h_1 \cdot A & h_1 \cdot B \\ h_2 \cdot C & h_2 \cdot D \end{pmatrix} \\ &= (h_2 \cdot C) \cdot (h_1 \cdot A)^{-1} = h_2 \cdot Z_1 \cdot h_1^{-1}. \end{aligned}$$

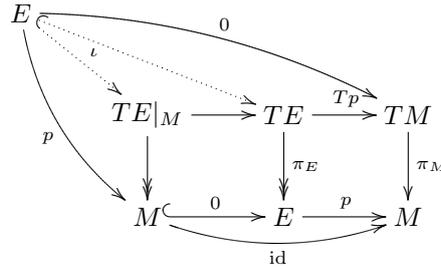
Folglich ist die Transitionsfunktion faserweise $Z_1 \mapsto h_2 \cdot Z_1 \cdot h_1^{-1}$, also linear und $M \rightarrow G(k, n)$ ein Vektorbündel. \square

Vektorbündel

26.9 Proposition.

Es sei $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Dann ist $TE|_M := 0^*(TE) \cong E \oplus TM$ als Vektorbündel über M , wobei $0 : M \hookrightarrow E$ den Nullschnitt bezeichnet.

Beweis. Wir betrachten folgendes Diagramm:



Die obere Abbildung ist durch $v \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0}tv$ gegeben und die diagonale Abbildung existiert wegen der Eigenschaft des Pullbacks. Nach Konstruktion ist $Tp \circ \iota = 0$. Offensichtlich ist ι ein Vektorbündelmonomorphismus und $Tp|_{TE|_M}$ ein Vektorbündelepimorphismus, denn $T0 : TM \rightarrow TE|_M \rightarrow TE$ ist ein Rechtsinverses. Exaktheit von

$$0 \rightarrow E \rightarrow TE|_M \rightarrow TM \rightarrow 0$$

folgt, denn lokal wird E durch $M \times \mathbb{R}^k$, weiters TE durch $TM \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ und $TE|_M$ durch $TE \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$ beschrieben. Weiters ist ι lokal durch $(x, v) \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0}(x, tv) = (0_x, 0, v)$ und Tp auf $TE|_M$ durch $(\xi, 0, v) \mapsto \xi$. \square

26.10 Proposition.

Jedes Vektorbündel $p : E \rightarrow M$ ist isomorph zu einem Teilvektorbündel eines trivialen Bündels $M \times \mathbb{R}^s \rightarrow M$.

Beweis. Es sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}^s$ eine Einbettung (oder auch nur eine Immersion) der Mannigfaltigkeit E in einen \mathbb{R}^s . Dann ist $Tf : TE \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ ein Vektorbündelmonomorphismus über $f : E \rightarrow \mathbb{R}^s$ und somit $Tf \circ \iota : E \hookrightarrow TE|_M \hookrightarrow TE \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ ein Vektorbündelmonomorphismus über $M \rightarrow E \rightarrow \mathbb{R}^s$, also $(p, \text{pr}_2 \circ Tf \circ \iota) : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$ ein Vektorbündelmonomorphismus über id_M . \square

Man kann zeigen (siehe [?, 4.3.1]), daß so ein Vektorbündelmonomorphismus bereits für $s = \dim(E)$ existiert. Dies benötigt

26.11 Globalisierungs Theorem.

[?, S53, 2,2,11] Es sei X eine Menge und \mathcal{U} eine Menge von Teilmengen von X die X enthält und unter Vereinigung abgeschlossen ist. Sei weiters F ein Funktor von der bzgl. Inklusionen geordneten Kategorie \mathcal{U} in die Kategorie der Mengen, also zu $U \supseteq V$ ist eine Abbildung $F(U) \rightarrow F(V)$ gegeben. Dieser sei nicht trivial, d.h. $\exists U \in \mathcal{U}$ mit $F(U) \neq \emptyset$, stetig, d.h. falls $\mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ linear geordnet ist, so ist $F(\bigcup \mathcal{U}_0) = \text{projlim}_{U \in \mathcal{U}_0} F(U)$, und lokal erweiterbar, d.h.

$$\forall x \in X \exists x \in U \in \mathcal{U} \forall V \in \mathcal{U} : F(U \cup V) \rightarrow F(V) \text{ ist surjektiv.}$$

Dann ist $F(X) \rightarrow F(U)$ surjektiv für alle $U \in \mathcal{U}$ mit $F(U) \neq \emptyset$. Insbesondere ist $F(X) \neq \emptyset$.

Beweis. Es sei $a_0 \in F(U_0)$ und $\mathcal{M} := \{(a, U) : U_0 \subseteq U \in \mathcal{U}, a \in F(U), a \mapsto a_0\}$ partiell geordnet durch $(a_1, U_1) \preceq (a_2, U_2) :\Leftrightarrow U_1 \subseteq U_2$ und $a_2 \mapsto a_1$. Jede linear geordnete Teilmenge \mathcal{M}_0 von \mathcal{M} besitzt wegen der Stetigkeit von F ein maximales

Element (a_∞, U_∞) mit $U_\infty := \bigcup \mathcal{M}_0$. Nach Zorn's Lemma existiert ein maximales Element welches wir wieder mit (a_∞, U_∞) bezeichnen von \mathcal{M} . Angenommen $U_\infty \subset X$. Sei $x \in X \setminus U_\infty$. Da F lokal erweiterbar ist existiert ein $x \in U \in \mathcal{U}$ mit $F(U \cup U_\infty) \rightarrow F(U_\infty)$ surjektiv für alle V . Sei $U' := U \cup U_\infty \supset U_\infty$ und a' ein Urbild in $F(U')$ von $a_\infty \in F(U_\infty)$. Dann steht (a', U') im Widerspruch zur Maximalität. \square

26.13 Lemma.

[?, S89, 4.1.1] Sei $p : E \rightarrow M \times I$ ein Vektorbündel. Dann existiert zu jeden $x \in M$ eine Umgebung $U \subseteq M$, sodaß $E|_{U \times I}$ trivial ist.

Beweis. Da I kompakt ist existierten $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$ und Umgebungen U_i von x , sodaß E auf einer Umgebung von $U_i \times [t_i, t_{i+1}]$ trivial ist. Sei $U := \bigcap U_i$. Wir zeigen mittels Induktion, daß E auf einer Umgebung von $U \times [0, t_i]$ ebenfalls trivial ist. Es genügt dazu den Fall $i = 2$ zu betrachten. Seien dazu φ^i Trivialisierungen längs Umgebungen von $U \times [t_i, t_{i+1}]$. Auf den Durchschnitt, eine Umgebung von $U \times \{t_1\}$ können wir die Transitionsfunktion $x \mapsto (\varphi_x^1)^{-1} \circ (\varphi_x^0) \in GL(k)$ betrachten. Dazu können wir eine Abbildung g auf einer Umgebung von $U \times [t_1, t_2]$ finden, welche lokal um $U \times \{t_1\}$ mit der Transitionsfunktion übereinstimmt (Aufblasen des Definitionsbereichs). Dann können wir φ^0 durch $(y, v) \mapsto \varphi^1(y, g(y) \cdot v)$ zu einer Trivialisierung auf eine Umgebung von $U \times [t_0, t_2]$ erweitern. \square

26.14 Lemma.

[?, S90, 4.1.3] Es sei $V, U \subseteq N$ offen mit $V \subseteq \bar{V} \subseteq U$ und folgendes kommutatives Digramm gegeben:

$$\begin{array}{ccc} U \times \{0\} & \hookrightarrow & U \times I \\ \downarrow & & \downarrow g \\ N \times \{0\} & \xrightarrow{f} & M \end{array}$$

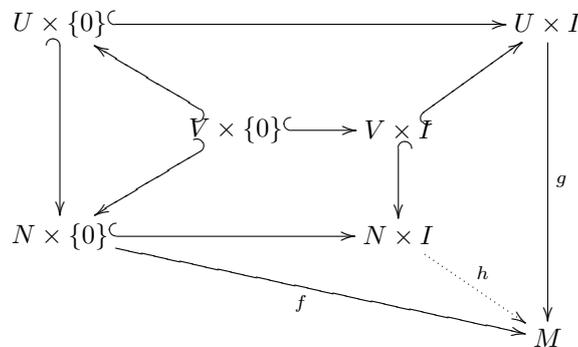
Dann existiert eine Abbildung $h : N \times I \rightarrow M$ mit $h|_{N \times \{0\}} = f$ und $h|_{V \times I} = g|_{V \times I}$.

Dies ist eine Art Homotopieerweiterungstheorem.

Beweis. Es sei $\rho : N \rightarrow [0, 1]$ C^∞ mit $\rho|_V = 1$ und $\text{supp}(\rho) \subseteq U$. Dann erfüllt $h : N \times I \rightarrow M$ definiert durch

$$h(x, t) := \begin{cases} f(x) & \text{für } x \in N \setminus \text{supp}(\rho) \\ g(x, \rho(x)t) & \text{für } x \in U \end{cases}$$

das Gewünschte. \square



26.16 Theorem.

[?, S90, 4.1.5] Jedes Vektorbündel $p : E \rightarrow M \times I$ ist isomorph zu $E|_{M \times \{0\}} \times I$.

Beweis. Wir betrachten eine lokal endliche Überdeckung \mathcal{A} mit Mengen $A \subseteq M$ sodaß E längs einer Umgebung von $A \times I$ trivial ist. So eine Überdeckung existiert wegen 26.13, da M parakompakt. Sei \mathcal{U} die Menge aller Vereinigungen von Teilmengen von \mathcal{A} .

Für $N \subseteq M$ betrachte Paare (f, U) , wobei $U \subseteq M$ eine offene Umgebung von N sei und $f : E|_U \times I \rightarrow E|_U \times I$ ein VB-Isomorphismus. Mit $F(N)$ bezeichnen wir die Äquivalenzklasse solcher Paare, wobei $(f_1, U_1) \sim (f_2, U_2)$ falls eine Umgebung $U \subseteq U_1 \cap U_2$ von N existiert mit $f_1|_{U \times I} = f_2|_{U \times I}$. Klarerweise ist der Funktor F stetig und wegen 26.13 ist er nicht trivial und sogar lokal erweiterbar: Sei nämlich $A \in \mathcal{A}$ und $N \in \mathcal{U}$. Dann müssen wir zeigen, daß $F(A \cup N) \rightarrow F(N)$ surjektiv ist, also der Keim eines Vektorbündelisomorphismuses $E \cong E|_M \times I$ über N sich zu einem solchen über $A \cap N$ erweitern läßt. Nach Voraussetzung ist $E|_{A \times I}$ und damit auch $E|_{A \times \{0\}} \times I$ trivial und der Vektorbündelisomorphismus durch den Keim eine Abbildung $g : (N \cap A) \times I \rightarrow GL(k)$ mit Einschränkung zum konstanten Keim id auf $N \cap A \subseteq M$ gegeben. Nach 26.14 können wir diese Abbildung zu einem Keim $g : A \times I \rightarrow GL(k)$ erweitern, also erhalten wir eine Fortsetzung des Keims des Vektorbündelisomorphismuses über $N \times I$ zu einem über $(N \cap A) \times I$.

Nach 26.11 ist somit $F(N) \neq \emptyset$ die gewünschte Konklusion. \square

26.17 Theorem.

[?, S100, 4.3.4] *Es sei $s > k + \dim(M)$. Dann sind zwei k -Ebenenbündel über M genau dann isomorph, wenn die klassifizierenden Abbildungen $M \rightarrow G(k, s)$ homotop sind.*

Beweis. Es sei $H : M \times I \rightarrow N$ eine Homotopie und $p : E \rightarrow N$ ein Vektorbündel. Dann ist H^*E ein Bündel über $M \times I$ und somit nach 26.16 isomorph zu $H^*E|_{M \times \{i\}} \times I = (H_i)^*(E) \times I$ für $i \in \{0, 1\}$ wobei $H_i : x \mapsto H(x, i)$. Somit sind auch die Einschränkungen $(H_i)^*E$ auf $M \hookrightarrow M \times I$ isomorph.

Umgekehrt seien zwei Bündel über M isomorph und f eine klassifizierende Abbildung eines der Bündel. Dann klassifiziert dieses klarerweise auch das andere Bündel. Da klassifizierende Abbildungen wegen der nachfolgenden Bemerkung für $s > k + \dim(M)$ bis auf Homotopie eindeutig sind, ist alles gezeigt. \square

26.18 Bemerkung.

Es seien zwei klassifizierende Abbildungen $f^i : M \rightarrow G(k, s)$ des Vektorbündels $E \rightarrow M$ gegeben. Diese beschreiben also zwei VB-Monomorphismen $\varphi^i : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$ über die Identität mit $f^i(x) = \text{Bild}(\varphi_x^i)$. Nach 26.19 Existiert ein VB-Monomorphismus $\varphi : E \times I \rightarrow M \times I \times \mathbb{R}^s$ welcher beide φ^i erweitert. Dieser induziert eine Homotopie $f : M \times I \rightarrow G(k, s)$ zwischen den f_i vermöge $f(x, t) = \text{Bild}(\varphi_{x,t} : E_x \rightarrow \mathbb{R}^s)$.

26.19 Proposition.

[?, S100, 4.3.2] *Es sei $E \rightarrow M \times I$ ein k -Ebenen Bündel und $\varphi_i : E|_{M \times \{i\}} \rightarrow (M \times \{i\}) \times \mathbb{R}^s$ VB-Monos für $s > k + \dim(M)$. Dann existiert eine Erweiterung $\varphi : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$ zu einem VB-Mono über $M \times I$.*

Beweis. Nach 26.16 existiert eine Erweiterung $\varphi : E|_U \rightarrow U \times \mathbb{R}^s$ zu einem VB-Mono über einer offenen Umgebung von $M \times \{0, 1\} \subseteq M \times I$ dieser läßt sich lokal nach [?, 4.3.1] (siehe die Bemerkung nach 26.10) zu einem globalen VB-Mono erweitern. \square

Isothermale Koordinaten

55.7 Bemerkung.

Nach Aufgabe 72.73 lautet die Koordinatenformel für den Laplace-Operator Δ auf Funktionen f :

$$\begin{aligned} -\Delta f &= \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{G} \frac{\partial f}{\partial u^j} g^{i,j}) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} g^{i,j} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{G} g^{i,j}) \frac{\partial f}{\partial u^j} \right) \\ &= \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} g^{i,j} + \frac{\partial f}{\partial u^j} \left(g^{i,j} \frac{\partial G}{\partial u^i} \frac{1}{\sqrt{G}} + \frac{\partial g^{i,j}}{\partial u^i} \right) \right). \end{aligned}$$

und für die Christoffel-Symbole nach 58.2

$$\begin{aligned} \partial_k g_{i,j} &\stackrel{58.2}{=} \Gamma_{i,k,j} + \Gamma_{j,k,i} \\ \partial_k g^{i,j} &= \sum_{l,p} \partial_k g^{i,p} g_{p,l} g^{l,j} \\ &= \sum_l g^{l,j} \left(\partial_k \left(\sum_p g^{i,p} g_{p,l} \right) - \sum_p g^{i,p} \partial_k g_{p,l} \right) \\ &= - \sum_{p,l} g^{l,j} g^{p,i} \partial_k g_{p,l} \\ \Gamma_{i,j,k} &:= \langle \varphi_{i,j}, \varphi_k \rangle = \frac{1}{2} \left(\partial_j g_{i,k} + \partial_i g_{k,j} - \partial_k g_{i,j} \right) \\ \Gamma_{i,j}^k &= \sum_{l=1}^m \Gamma_{i,j,l} g^{l,k} \\ \Gamma^k &:= \sum_{i,j} g^{i,j} \Gamma_{i,j}^k = \sum_{i,j,l} \Gamma_{i,j,l} g^{l,k} g^{i,j} \\ &= \sum_{i,j,l} \frac{1}{2} \left(\partial_j g_{i,l} + \partial_i g_{l,j} - \partial_l g_{i,j} \right) g^{l,k} g^{i,j} \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{i,j,l} \partial_j g_{i,l} g^{l,k} g^{i,j} + \sum_{i,j,l} \partial_i g_{l,j} g^{l,k} g^{i,j} - \sum_{i,j,l} \partial_l g_{i,j} g^{l,k} g^{i,j} \right) \\ &= \sum_{i,j,l} \partial_j g_{i,l} g^{l,k} g^{i,j} - \frac{1}{2} \sum_{i,j,l} \partial_l g_{i,j} g^{l,k} g^{i,j} \\ \sum_i \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{G} g^{i,k}) &= \sum_i \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \det((g_{j,k}))}{\partial u^i} g^{i,k} + \sum_i \frac{\partial g^{i,k}}{\partial u^i} \\ &= \sum_{i,j,l} g^{j,l} \partial_i g_{l,j} g^{i,k} + \sum_i \frac{\partial g^{i,k}}{\partial u^i} \\ &= \sum_{i,j,l} \partial_i g_{l,j} g^{i,k} g^{j,l} - \sum_{i,p,l} \partial_i g_{p,l} g^{l,i} g^{p,k} \\ -\Delta f &= \sum_{i,j=1}^m \left(\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} g^{i,j} + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial u^i} (\sqrt{G} g^{i,j}) \frac{\partial f}{\partial u^j} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} g^{i,j} - \sum_j \Gamma^j \frac{\partial f}{\partial u^j} \\
 -\Delta u^k &= \sum_{i,j} \frac{\partial^2 u^k}{\partial u^i \partial u^j} g^{i,j} - \sum_j \Gamma^j \frac{\partial u^k}{\partial u^j} \\
 &= 0 - \Gamma^k
 \end{aligned}$$

Es seien $(u^i)_i$ isothermale Koordinaten, d.h. $g_{i,j} = \lambda \cdot \delta_{i,j}$ und somit $g^{i,j} = -\frac{1}{\lambda} \delta^{i,j}$.
Dann ist

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{i,j,k} &= \frac{1}{2} (\partial_j g_{i,k} + \partial_i g_{j,k} - \partial_k g_{i,j}) = \frac{1}{2} (\partial_j \lambda \delta_{i,k} + \partial_i \lambda \delta_{j,k} - \partial_k \lambda \delta_{i,j}) \\
 \Gamma_{i,j}^l &= \sum_k \Gamma_{i,j,k} g^{k,l} \\
 &= \frac{1}{2} \sum_k (\partial_j \lambda \cdot \delta_{i,k} + \partial_i \lambda \cdot \delta_{j,k} - \partial_k \lambda \cdot \delta_{i,j}) \cdot \frac{1}{\lambda} \delta^{k,l} \\
 \Gamma^l &= \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^l \frac{1}{\lambda} \delta^{i,j} \\
 &= \sum_i \Gamma_{i,i}^l \frac{1}{\lambda} \\
 &= \sum_i \frac{1}{2\lambda} \sum_k (\partial_i \lambda \cdot \delta_{i,k} + \partial_i \lambda \cdot \delta_{i,k} - \partial_k \lambda \cdot \delta_{i,i}) \cdot \frac{1}{\lambda} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

und somit u^l harmonisch.

2 Proposition.

[?, S139] *Es sei L ein elliptischer Operator der Ordnung m mit C^∞ Koeffizienten und $f \in L^2$. Dann ist jede distributionelle Lösung u von $L(u) = f$ in L^2 .*

3 Analytizitäts-Theorem.

[?, S136, S139] *Es sei L ein elliptischer Operator der Ordnung m mit C^ω Koeffizienten und $f \in C^\omega$. Dann ist jede Lösung u von $L(u) = f$ C^ω .*

Für einen Beweis siehe [?, SS207].

3 Proposition. Hopf und Douglis-Nirenberg.

[?, S136] *Es sei $\alpha < 1$. Es sei L ein elliptischer Operator der Ordnung m mit $C^{n+\alpha}$ Koeffizienten und $f \in C^{n+\alpha}$. Dann ist jede Lösung u von $L(u) = f$ $C^{m+n+\alpha}$.*

Für die einfachste elliptische Gleichung die Poisson-Gleichung $\Delta(u) = f$ existiert keine C^m -Lösung.

4 Proposition.

[?, 4.2.1] *Es sei G ein beschränktes Gebiet und L ein elliptischer Operator mit C^∞ -Koeffizienten auf \bar{G} . Es sei u eine distributionelle Lösung von $L(u) = f$ auf G . Falls $f \in L^2$ dann hat u Ableitungen der Ordnung m in L^2 . Falls f Ableitungen der Ordnung n in L^2 hat, dann hat u Ableitungen der Ordnung $n+m$ in L^2 . Falls $f \in C^\infty$ so auch u .*

1 Proposition.

[?, 5.4.1] *Es sei L ein elliptischer Operator der Ordnung m mit Hölder stetigen Koeffizienten und f Hölder stetig. Dann existiert lokal um 0 eine (nicht eindeutige) Lösung u von $L(u) = f$ mit Hölder stetigen Ableitungen der Ordnung m und vorgegebener Taylor-Reihe bei 0 bis zur Ordnung $m - 1$.*

Unter einen elliptischen (partiellen Differential-)Operator L versteht man einen Operator der Form

$$L(u)(x) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \partial^\alpha u(x)$$

wobei für jedes x die Form

$$v \mapsto \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) v^\alpha$$

definit ist.

Beweis. Es sei $L_0(u)(x) := \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(0) \partial^\alpha u(x)$ und J_0 die Fundamentallösung von $L_0(J_0) = 0$ die sogenannte Parametrix von L bei 0. Sei $S_0(v)(x) := \int J_0(x-y) v(y) dy$ der Lösungsoperator von $L_0(u) = v$ und $T_0 := S_0(L_0 - L)$. Für u mit kompakten Träger und $u = T_0(u) + S_0(f)$ dann ist $L(u) = f$, denn $Lu = L_0 S_0 Lu = L_0 S_0 f = f$, da $(T_0 + S_0 L)u = S_0 L_0 u = u = T_0 u + S_0 f$ und somit $S_0 Lu = S_0 f$.

Es ist $L_0 S_0 u = u$ für $u \in C^\alpha(R)$ mit $u|_{\{|x|=R\}} = 0$.

Es sei $\zeta \in C^\infty$ mit $\zeta|_{\{|x| < \frac{1}{2}\}} = 1$ und $\zeta|_{\{|x| > 1\}} = 0$ und $M_0 u := T_0 \eta u$ und $\eta(x) = \zeta(\frac{x}{R})$. Dann ist $M_0 \in L(C^{m+\alpha}(R))$ und $\|M_0\| < 1$ also $(1 - M_0)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} M_0^k$. Sei g ein Polynom vom Grad $< m$. Dann ist $L_0 g = 0$ und $Lu = 0$ auf $\{x : |x| < \frac{R}{2}\}$ für $u := (1 - M_0)^{-1} g$. Weiters ist $\partial^\alpha u - \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha g$ beliebig klein für $|\alpha| < m$. Wenn wir für g die Basis-Elemente $x \mapsto x^\alpha$ der Polynome verwenden und die entsprechenden u mit u^α bezeichnen, dann suchen wir eine Lösung $u = \sum_{|\alpha| < m} c_\alpha u^\alpha$ mit

$$\sum_{|\alpha| < m} c_\alpha \partial^\beta u^\alpha(0) = \beta_\alpha \text{ für } |\beta| < m.$$

Approximativ können wir dieses lineare Gleichungssystem lösen, also auch exakt, dies zeigt das Theorem für $f = 0$.

Sei nun $f \in C^\alpha(R)$. Es genügt eine Lösung u von $u = M_0u + S_0f$ zu finden. Wegen $\|M_0\| < 1$ ist $u := (1 - M_0)^{-1}S_0f$ eine solche. \square

5 Bemerkung.

Beltrami-Equation [?, 6.2,SS267].