26.23 Proposition. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche und X_1, X_2 punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf M. Dann existiert eine lokale Parametrisierung φ von M mit $\partial_i\varphi(u)$ parallel zu $X_i(\varphi(u))$ für $i \in \{1,2\}$.*

Für Hyperflächen im $\mathbb{R}^n$ mit $n > 3$ ist der analoge Satz falsch!

Direkter Beweis. Sei ψ eine lokale Parametrisierung von M und Y_i die lokalen Vektorfelder auf $\mathbb{R}^2$ mit $T_v\psi \cdot Y_i(v) = X_i(\psi(v))$. Wir suchen einen lokalen Diffeomorphismus $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(v^1, v^2) \mapsto (u^1, u^2)$ mit $\varphi := \psi \circ h^{-1}$ wie gewünscht, d.h. $\partial_i\varphi(u)$ parallel zu $X_i(\varphi(u))$. Dies bedeutet: $0 = (u^i)'(v)\cdot Y_j(v) = \sum_{k=1}^2 \partial_k u^i(v)\cdot Y_j^k(v)$ für $i \neq j$, denn dann ist $(h^{-1})'(u)\cdot e_i = h'(h^{-1}(u))^{-1}\cdot e_i$ parallel zu $Y_i(h^{-1}(u))$ und somit $\partial_i\varphi(u) = T_{h^{-1}(u)}\psi \cdot (h^{-1})'(u)\cdot e_i$ parallel zu $T_{h^{-1}(u)}\psi \cdot Y_i(h^{-1}(u)) = X_i(\psi(h^{-1}(u))) = X_i(\varphi(u))$. Obige partielle Differentialgleichungen von der Form $\partial_1 u(v)\cdot Y^1(v) + \partial_2 u(v)\cdot Y^2(v) = 0$ sind lösbar, denn sei $t \mapsto v(t)$ eine Integralkurve des Vektorfelds Y, dann ist $\frac{d}{dt}u(v(t)) = \partial_1 u(v(t))\cdot (v^1)'(t) + \partial_2 u(v)\cdot (v^2)'(t) = \partial_1 u(v(t))\cdot Y^1(v(t)) + \partial_2 u(v(t))\cdot Y^2(v(t)) = 0$ für jede Lösung u der partiellen Differentialgleichung, also $u \circ v$ konstant. Also ist $u(\mathrm{Fl}^Y(t,v)) = u(v)$. Wenn wir somit v auf einer Kurve normal zu Y vorgeben, so ist u dadurch lokal definiert und erfüllt die partielle Differentialgleichung. □

Beweis mittels kommutierender Vektorfelder. Vergleiche dies mit (29.12). Seien X_1, X_2 punktweise linear unabhängig. Dann existieren lokal Funktionen $a_i > 0$ mit $0 = [a_1X_1, a_2X_2] = a_1a_2[X_1,X_2] + a_1X_1(a_2)X_2 - a_2X_2(a_1)X_1 = a_1a_2\Big([X_1,X_2] + \frac{X_1(a_2)}{a_2}X_2 - \frac{X_2(a_1)}{a_1}X_1\Big)$ und somit nach (29.12) für $k = 2$ eine Karte φ mit $\partial_i\varphi = a_iX_i$ für $i = 1,2$, denn $[X_1,X_2] = b_1X_1 + b_2X_2$ mit glatten Koeffizienten Funktionen b_1 und b_2 und somit müssen wir nur die partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{X_1(a_2)}{a_2} = b_2$ und analog $\frac{X_2(a_1)}{a_1} = -b_1$ lösen, was offensichtlich möglich ist, denn dazu können wir die Werte auf einer Kurve transversal zu X_1 beliebig vorgeben (nach (29.12) für $k = 1$ können wir zu einem nicht verschwindenden Vektorfeld X eine Karte φ mit $X = \partial_1\varphi$ finden). □

26.24 Folgerung. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche ohne Nabelpunkte. Dann existiert eine Parametrisierung φ, sodaß die Parameterlinien Krümmungslinien sind.*

Beweis. Wir können die (bis auf Vorzeichen) eindeutig bestimmten normierten Hauptkrümmungsrichtungen betrachten. Diese sind punktweise linear unabhängige Vektorfelder und sind glatt, denn die Koeffizienten K und H des charakteristischen Polynoms von L sind glatt und somit auch die zwei (verschiedenen) Hauptkrümmungen und damit auch die zugehörigen bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmten normierten Eigenvektoren. Somit existiert nach (26.23) eine Parametrisierung φ mit $\partial_i\varphi$ proportional zu den normierten Hauptkrümmungsrichtungen, also sind deren Parameterlinien Krümmungslinien. □

56.1 Definition (Minimalfläche)

Eine Fläche heißt Minimalfläche, falls sie (lokal) ein kritischer Punkt für die Oberfläche ist, d.h. wenn wir sie nur lokal (bzw. auf einem kompakten Teil) variieren. Wir brauchen also nicht die gesamte Oberfläche (die unendlich sein kann), sondern nur jenen Teil, der sich ändert, betrachten.

Nach [**?**, 8.1.5] ist die Oberfläche einer durch Parametrisierung $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq K \to M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit kompakten J-meßbaren K durch

$$\mathrm{vol}(M) := \int_K \|\partial_1\varphi \times \partial_2\varphi\|$$

gegeben, also

$$\mathrm{vol}(M) := \int_K \sqrt{\|\partial_1\varphi\|^2\|\partial_2\varphi\|^2 - \langle\partial_1\varphi|\partial_2\varphi\rangle} = \int_K \sqrt{E\,G - F^2} = \int_K \sqrt{\det((g_{i,j})_{i,j\in\{1,2\}})},$$

wobei $g_{i,j} := \langle g_i|g_j\rangle$ die Koeffizienten der ersten Fundamentalform mit $g_i := \partial_i\varphi$ sind. Allgemeiner gilt für parametrisierte Hyperflächen $M \subseteq \mathbb{R}^n$, daß ihr $n-1$-dimensionales Volumen durch

$$\mathrm{vol}(M) = \int_K \sqrt{\det((g_{i,j})_{i,j})}$$

gegeben ist.

56.2 Satz, [?]. *Eine Fläche ist genau dann eine Minimalfläche, wenn $H = 0$.*

Beweis. Das vorliegende Variationsproblem besteht also darin, die kritischen Punkte der Funktion $M \mapsto \mathrm{vol}(M) \in \mathbb{R}$ zu bestimmen. Sei die Fläche M ein kritischer Punkt dieses Funktionals. Jede in der Nähe von M liegende Fläche läßt sich (per Definition) als $\{x + f(x)\nu(x) : x \in M\}$ mit einer reellwertigen glatten Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ darstellen. Somit muß $\frac{\partial}{\partial t}\Big|_{t=0} \mathrm{vol}(M^t) = 0$ sein, wobei M^t die Fläche $\{x+t\,f(x)\nu(x)\}$ ist. Dazu müssen wir $\frac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{vol}_{M^t}$ bestimmen. Wir wählen eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \to M$ von M mit zugehörigen lokalen Koordinaten $(u^1,\dots,u^m)$. Eine lokale Parametrisierung von M^t ist dann $\varphi^t(u) = \varphi(u) + t\,f(\varphi(u))\nu(\varphi(u))$. Lokal ist

$$vol_{M^t} = \sqrt{\det(g^t_{i,j})}\, du^1 \wedge \dots \wedge du^m,$$

wobei

$$g^t_i := \partial_i\varphi^t = \partial_i\varphi + t\Big(\partial_i(f\circ\varphi)\cdot(\nu\circ\varphi) + (f\circ\varphi)\cdot\partial_i(\nu\circ\varphi)\Big)$$

und $g_{i,j} := \langle g_i, g_j\rangle$. Also ist

$$\tfrac{d}{dt}\Big|_0 g^t_i = \Big(\partial_i(f\circ\varphi)\cdot(\nu\circ\varphi) + (f\circ\varphi)\cdot L(\partial_i\varphi)\Big) = \Big(\tfrac{\partial f}{du^i}\cdot\nu + f\cdot L(g_i)\Big)$$

Somit ist

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\Big|_0 g^t_{i,j} &= \langle g_i, \tfrac{d}{dt}\Big|_0 g^t_j\rangle + \langle \tfrac{d}{dt}\Big|_0 g^t_i, g_j\rangle\\ &= f\cdot\Big(\langle L(\partial_i\varphi), \partial_j\varphi\rangle + \langle\partial_i\varphi, L(\partial_j\varphi)\rangle\Big) =: 2f\,h_{i,j},\end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\Big|_0 \sqrt{\det(g^t_{i,j})} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\det(g_{i,j})}}\det(g_{i,j})\,\mathrm{Spur}\Big((g_{i,j})^{-1}(\tfrac{d}{dt}\Big|_0 g^t_{i,j})\Big)\\ &= \sqrt{\det(g_{i,j})}(f\circ\varphi)\,\mathrm{Spur}\Big((g_{i,j})^{-1}(h_{i,j})\Big)\\ &= \sqrt{\det(g_{i,j})}(f\circ\varphi)\,\mathrm{Spur}\,L\\ &= m\sqrt{\det(g_{i,j})}(f\circ\varphi)\,H.\end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, daß $\det'(A)(B) = \det A\cdot\mathrm{Spur}(A^{-1}B)$. Also:

$$\tfrac{d}{dt}\Big|_0 \mathrm{vol}_{M^t} = mf\,H\;\mathrm{vol}_M$$

Schlußendlich gilt:

$$\begin{aligned}\tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}\operatorname{vol}(M^t) &= \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}\int \operatorname{vol}_{M^t} = \int \tfrac{d}{dt}\Big|_{t=0}\operatorname{vol}_{M^t}\\ &= m\int_M f\,H\,vol_M.\end{aligned}$$

Soll das für alle in der Nähe von M liegenden Flächen gelten, d.h. für alle $f : M \to \mathbb{R}$, so muß $H = 0$ sein (wähle $f = H$). □

59.1 Satz (Gauß-Krümmung als Störung der Maße von Kreisen). *Seien geodätische Polarkoordinaten φ um $x \in M$ gewählt. Mit $L(r)$ bezeichnen wir die Länge bzw. mit $A(r)$ die Fläche des Inneren der geodätischen Kreise $\theta \mapsto \varphi(r,\theta)$ so gilt:*

1. $K(x) = \frac{3}{\pi}\lim_{r\searrow 0}\frac{2r\pi - L(r)}{r^3}$ [BertrandPuiseaux1848]
2. $K(x) = \frac{12}{\pi}\lim_{r\searrow 0}\frac{r^2\pi - A(r)}{r^4}$ [Diquet1848]

Die Gauß-Krümmung mißt also infinitesimal um wieviel der Umfang, beziehungsweise die Fläche eines geodätischen Kreises im Vergleich zu einem Euklidischen Kreis zu klein bzw. zu groß ist.

Beweis. Geodätische Polarkoordinaten φ sind nach (58.5) gegeben durch $\varphi(r,\theta) = \exp_x(r\,v(\theta))$ mit $v(\theta) = \cos(\theta)\,v + \sin(\theta)\,v^\perp$. Wir wissen bereits folgendes über die Funktion $\sqrt{G} := |\varphi_\theta|$: Die Funktion $G = |\varphi_\theta|^2$ ist glatt und verschwindet nur für $r = 0$. Also ist auch $\sqrt{G}$ glatt für $r \neq 0$ aber nicht notwendigerweise für $t = 0$. Wir müssen aber das Verhalten bei 0 studieren. Dazu verwenden wir die Jacobi-Gleichung $K\sqrt{G} + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2\sqrt{G} = 0$ aus (53.9). Die Taylorformel der Ordnung 1 mit Integralrestglied (siehe [**?**, 6.3.11])

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \int_0^1 (1-t)f''(tx)(x,x)dt$$

liefert

$$\begin{aligned}\varphi(r,\theta) &= \exp_x(r\,v(\theta))\\ &= \underbrace{\exp_x(0)}_{} = x + \underbrace{\exp_x'(0)}_{=\mathrm{id}}(r\,v(\theta)) + \int_0^1 (1-t)\exp_x''(t\,r\,v(\theta))(r\,v(\theta), r\,v(\theta))\,dt\\ &= x + r\,v(\theta) + r^2\underbrace{\int_0^1 (1-t)\exp_x''(t\,r\,v(\theta))(v(\theta),v(\theta))\,dt,}_{=:g(r,\theta)}\end{aligned}$$

wobei g eine glatte $\mathbb{R}^n$-wertige Funktion ist. Durch partielles Differenzieren nach θ ergibt sich:

$$\varphi_\theta(r,\theta) = r\left(v'(\theta) + r\,\tfrac{\partial}{\partial\theta}g(r,\theta)\right)$$

und somit ist für $r \geq 0$

$$\sqrt{G(r,\theta)} = |\varphi_\theta(r,\theta)| = r\sqrt{|v'(\theta)|^2 + 2r\,\langle v'(\theta)|\tfrac{\partial}{\partial\theta}g(r,\theta)\rangle + r^2\langle\tfrac{\partial}{\partial\theta}g(r,\theta)|\tfrac{\partial}{\partial\theta}g(r,\theta)\rangle}$$

glatt (wegen $|v'(\theta)| = 1$) und insbesonders gilt für die rechtsseitige Ableitung bei 0:

$$\tfrac{\partial}{\partial r}|_{r=0}\sqrt{G(r,\theta)} = 0 + 1.$$

Aus der Jacobi-Gleichung (53.9) folgt

$$\left(\tfrac{\partial}{\partial r}\right)^2|_{r=0}\sqrt{G(r,\theta)} = -K(x)\sqrt{G(0,\theta)} = 0 \quad \text{und durch Differenzieren}$$

$$\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}(r,\theta) = -\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial r}\,K - \sqrt{G}\,\frac{\partial K}{\partial r}, \qquad \text{also}$$

$$\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}(0,\theta) = -1\,K(x) + 0$$

Aus der Taylorformel der Ordnung 2 mit Integralrestglied (siehe [**?**, 6.3.11]) ist

$$\sqrt{G}(r,\theta) = 0 + r + 0 + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!}\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}(t\,r,\theta)\,r^3\,dt$$

also

$$\begin{aligned}\lim_{r\to 0+}\frac{\sqrt{G}(r,\theta)-r}{r^3} &= \lim_{r\to 0+}\int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!}\frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}(t\,r,\theta)\,dt\\ &= \frac{\partial^3\sqrt{G}}{\partial r^3}(0,\theta)\int_0^1\frac{(1-t)^2}{2!}\,dt = -K(x)\,\frac{1}{3!}.\end{aligned}$$

Somit ist wegen $L(r) = \int_0^2 \pi|\varphi_\theta(r,\theta)|\,d\theta$

$$\begin{aligned}K(x) &= \frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{K(x)}{6}\,d\theta = \lim_{r\to 0+}\frac{3}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r-\sqrt{G(r,\theta)}}{r^3}\,d\theta\\ &= \frac{3}{\pi}\lim_{r\to 0+}\frac{2r\pi - L(r)}{r^3}\end{aligned}$$

Für die Fläche erhalten wir

$$A(r) = \int_0^r\int_0^{2\pi}\sqrt{G(\rho,\theta)}\,d\theta\,d\rho \Rightarrow A'(r) = \int_0^{2\pi}\sqrt{G(r,\theta)}\,d\theta = L(r) \Rightarrow$$

$$\lim_{r\to 0+}\frac{r^2\pi - A(r)}{r^4} = \lim_{r\to 0+}\frac{2r\pi - L(r)}{4r^3} = \frac{1}{4}\,\frac{K(x)\pi}{3} = K(x)\frac{\pi}{12}. \quad \square$$