Aufgabensammlung zur Differentialgeometrie 1

SS 2005

Andreas Kriegl

Euklid'ische Räume

1.1. Zusammensetzung von Spiegelungen.
Zeige, daß die Zusammensetzung von zwei Spiegelungen an Geraden im $\mathbb{R}^2$ eine Drehung um den doppelten des zwischen den Geraden eingeschlossenen Winkels liefert. **Hinweis:** Es genügt (warum?) das Bild eines (geschickt gewählten) Vektors zu bestimmen.

1.2. Matrixdarstellung einer Spiegelung.
In der VO haben wir die Spiegelung an der Normalebene $w^\perp$ für $w = (w^1, w^2.w^3) \in S^2$ durch $\mathbb{R}^3 \ni v \mapsto v - 2\langle v|w\rangle\, w \in \mathbb{R}^3$ beschrieben. Wie sieht ihre Matrixdarstellung bzgl. der Standardbasis aus.

1.3. Formel für Drehung im $\mathbb{R}^3$.
Finde eine Formel für die Drehung um die von $w \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ erzeugte Drehachse $\mathbb{R} \cdot w$ um den Winkel φ. **Hinweis:** Betrachte für jedes von w linear unabhängige $v \in \mathbb{R}^3$ die orthogonal-Basis w, $v \times w$, $v - \langle v|w\rangle w$ und verwende, daß eine Drehung um den Winkel φ in der Ebene bzgl. jeder orthonormal-Basis $\mathcal{E}$ durch $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ gegeben ist.

1.4. Fluglage in Koordinaten.
Um eine Körper (also z.B. ein Flugzeug oder einen Hängegleiter) in eine allgemeine Lage im Raum zu bringen, kann man folgendermaßen vorgehen: Zuerst drehen wir es um die Senkrechte in jene Richtung in welche es fliegt (Winkel ψ), dann drehen wir es um sein Querachse um den Winkel (des Anstiegs) θ und danach (falls es eine Kurve fliegt) um seine Längsachse um einen Winkel φ und schließlich verschieben wir es noch vom Ursprung in die gewünschte Lage $p \in \mathbb{R}^3$. Wie sieht die Matrixdarstellung des linearen Teils dieser Bewegung aus? **Hinweis:** Verfahre ähnlich wie bei den Eulerwinkeln.

1.5. Konforme lineare Abbildungen.
Zeige, daß eine bijektive lineare Abbildung $f : E \to E$ des Euklid'ischen Raums E genau dann konform (d.h. winkelerhaltend) ist, wenn ein $\lambda > 0$ existiert, s.d. $\langle f(x)|f(y)\rangle = \lambda\langle x|y\rangle$ für alle $x, y \in E$ gilt, also $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} f$ eine Isometrie ist. **Hinweis:** ($\Rightarrow$) Für $v \in E$ definiere $\lambda(v) > 0$ durch $\|f(v)\|^2 = \lambda(v)\,\|v\|^2$. Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine orthonormal-Basis. Dann ist $e_i + e_j \perp e_i - e_j$ und somit auch die Bilder unter f. Schließe daraus $\lambda(e_i) = \lambda(e_j)$. Schließe weiter, daß λ auf ganz E konstant ist und verwende schließlich die Polarisierungsgleichung um die gewünschte Identität zu erhalten.

Kurven in der Ebene

1.6. Beispiele von Bogenlängen.
Versuche in mindestens 2 der in (72.3)–(72.14) gegebenen Kurven die Bogenlängenfunktion zu berechnen und wenn möglich auch die Bogenlängenparametrisierung zu bestimmen.

1.7. Krümmung in Polarkoordinaten.
Sei $r : \varphi \mapsto r(\varphi)$ die Polarkoordinatendarstellung einer Kurve, d.h. $c(\varphi) := (r(\varphi)\cos(\varphi), r(\varphi)\sin(\varphi))$ ist eine Parametrisierung, und sei $r' := \frac{dr}{d\varphi}$. Zeige, daß die Bogenlänge gegeben ist durch $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi$ und die Krümmung durch $\frac{r^2+2(r')^2-rr''}{(r^2+(r')^2)^{3/2}}$.

1.8. Krümmung einer Kurve die als Graph gegeben ist.
Es sei eine Kurve durch den Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschrieben. Zeige, daß ihre Krümmung gegeben ist durch:

$$\frac{f''(x)}{\sqrt{1+f'(x)^2}^3}$$

1.9. Krümmung für implizit gegebene Kurve.
Es sei eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $t \mapsto (x(t), y(t))$ durch eine Gleichung $f(x(t), y(t)) = 0$ gegeben. Wähle eine Orientierung der Kurve und zeige, daß mit der Bezeichungsweise $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xy} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, etc. ihre Krümmung gegeben ist durch

$$\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{(f_x^2+f_y^2)^{3/2}}.$$

1.10. Beispiele zur Krümmung.
Versuche für eine der in (72.3)–(72.14) gegebenen Kurven die Krümmung und die Krümmungsmittelpunkte zu bestimmen.

72.16. Evolute.
Unter welchen Bedingungen an eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve c definiert die Evolute $e_c(s) := c(s) + \frac{1}{K(s)}\nu(s)$ wieder eine (geometrische) Kurve. Zeige, daß die Krümmung der Evolute gegeben ist durch $\frac{K^3(s)}{|K'(s)|}$.

72.17. Involute.
Unter welchen Bedingungen an eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve c definiert die Involute $i_c(s) := c(s) - s\tau(s)$ wieder eine (geometrische) Kurve. Zeige, daß die Krümmung der Involute gegeben ist durch $\operatorname{sign}(sK(s))\frac{1}{s}$.

72.18. Involute und Evolute als Inverse.
Zeige, daß für eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ folgendes gilt:

(a) Unter den in Beispiel (72.16) behandelten Bedingungen ist die Evolute der Involute von c wieder c.

(b) Unter den in Beispiel (72.17) behandelten Bedingungen existiert eine Bogenlängenparametrisierung der Evolute von c, so daß deren Involute wieder c ist.

72.24. Charakterisierung von Geraden.
Zeige, eine Kurve im $\mathbb{R}^n$ parametrisiert genau dann eine Gerade, wenn ihre Tangenten einen Punkt gemeinsam haben.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf Kurven im $\mathbb{R}^3$, die hinreichend regulär sind:

72.25. Krümmung und Torsion für bel. parametrisierte Kurven.
Zeige, daß Krümmung und Torsion einer beliebig parametrisierte Kurve c gegeben sind durch: $K = |c' \times c''|/|c'|^3$ und $T = \det(c', c'', c''')/|c' \times c''|^2$.

72.26. Krümmung und Torsion als infinitesimale Winkeländerung.
Sei c nach der Bogenlänge parametrisiert.

(a) Für den Winkel $\varphi(s_1, s_2)$ von $\tau(s_1)$ nach $\tau(s_2)$ gilt: $\frac{\varphi(s_1,s_2)}{s_2-s_1} \to K(s)$ für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$. (Hinweis: $\varphi \sim 2\sin\frac{\varphi}{2} = |\tau(s_1) - \tau(s_2)|$.)

(b) Für den Winkel $\varphi(s_1, s_2)$ von $\beta(s_1)$ nach $\beta(s_2)$ gilt: $\frac{\varphi(s_1,s_2)}{s_2-s_1} \to |T(s)|$ für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$.

(c) Wogegen konvergiert $\frac{\varphi(s_2,s_1)}{s_1-s_2}$ für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$, wenn $\varphi(s_1, s_2)$ der Winkel von $\nu(s_1)$ nach $\nu(s_2)$ ist?

72.27. Darboux-Vektor.
Finde eine Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ mit $\nu_i' = w \times \nu_i$ für $i = 0, 1, 2$ (Setze $w := T\tau + K\beta$).

72.28. Charkterisierung ebener Kurven.
Zeige, eine Kurve ist genau dann eine Gerade, wenn $K = 0$. Eine Kurve mit $\forall t : K(t) \neq 0$ liegt genau dann in einer Ebene, wenn $T = 0$.

72.29. Weitere Charakterisierung ebener Kurven.
Zeige, daß eine Kurve, deren Schmiegebenen einen Punkt gemeinsam haben, eine ebene Kurve ist.

72.30. Charakterisierung des Kreises.
Zeige, daß eine Kurve, deren Hauptnormalen einen Punkt gemeinsam haben, auf einem Kreis liegt.

72.31. Charakterisierung sphärischer Kurven.
Zeige, daß eine Kurve genau dann auf einer Sphäre liegt, wenn ihre Normalebenen einen Punkt gemeinsam haben.

72.32. Berührsphäre.
Zeige, daß die Sphäre welche eine Kurve c bei s am besten approximiert $(c + \frac{1}{K}\nu + \frac{1}{T}(\frac{1}{K})'\beta)(s)$ als Mittelpunkt M und $R^2 = (\frac{1}{K^2} + (\frac{1}{T}(\frac{1}{K})')^2)(s)$ als Radius R hat (Hinweis: Versuche möglichst viele Ableitungen von $g : t \mapsto |c(t) - M|^2$ at der Stelle $t = s$ zum Verschwinden zu bringen).

72.33. Sphärische Kurven.
Zeige, daß eine Kurve genau dann auf einer Sphäre mit Radius R liegt, falls $(\frac{1}{K^2} + (\frac{1}{T}(\frac{1}{K})')^2)(s) = R^2$. Sie liegt genau dann auf irgendeiner Sphäre, wenn $\frac{T}{K} + \left(\left(\frac{1}{K}\right)' \frac{1}{T}\right)' = 0$ ist.

72.34. Helix.
Zeige, daß folgende Aussagen für eine Kurve äquivalent sind:

1. τ schließt mit einem festen Vektor einen fixen Winkel ein.
2. β schließt mit einem festen Vektor einen fixen Winkel ein.
3. ν liegt immer in einer fixen Ebene durch 0.
4. K und T sind proportional.
5. c läßt sich schreiben als $c(t) = c_0(t) + tw$, wobei $w \neq 0$ ein fixer Vektor und c_0 eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in der Ebene $w^\perp$ ist.

So eine Kurve c heißt HELIX. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Krümmung und Torsion von c und c_0.
(Hinweis: $K = T \tan\alpha \Rightarrow \tau\cos\alpha + \beta\sin\alpha$ ist konstant).

72.35. Charakterisierung von Helixen.
Zeige: Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist genau dann eine Helix falls $\det(c'', c''', c'''') = 0$.

72.36. Schraubenlinie ist Helix.
Zeige, daß $t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt)$ eine Helix ist und berechne K und T.

72.37. Beispiel einer Helix.
Zeige, daß die Kurve $t \mapsto (at, bt^2, t^3)$ genau dann eine Helix ist, wenn $4\,b^4 = 9\,a^2$ ist.

72.38. Bertrand Kurven.
Zeige, daß es zu einer Kurve eine zweite gibt, welche die gleiche Hautnormale (als Gerade im $\mathbb{R}^3$) besitzt, genau dann wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt mit $aK + bT = 1$.
(Hinweis: Sei c eine Bogenlängenparametrisierte Kurve mit Begleitbein τ, ν, β. Daß eine Kurve $\bar c$ die gleiche Hauptnormale besitzt bedeutet $\bar c(s) = c(s) + a(s)\nu(s)$. Schließe aus $\bar c' \perp \nu$, daß a konstant ist. Daß $\bar c''$ im Erzeugnis von $\bar\tau$ und ν liegt, liefert eine Differentialgleichung für K und T deren Lösung $1 = aK + bT$ erfüllt).

72.39. Kurven mit gleicher Hauptnormalen.
Zeige: falls es mehr als 2 Kurven mit gleicher Hauptnormalen gibt, so gibt es unendlich viele (und diese sind Helixen).

72.40. Konformität der stereographischen Projektion.
Zeige, daß die stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ winkelerhaltend ist, d.h. ihre Ableitung an jeder Stelle konform ist. **Hinweis:** Zeige, daß die Umkehrabbildung $h : \mathbb{R}^n \to S^n$ konform ist.

72.41. Hypersphären unter der stereographischen Projektion.
Zeige, dass die stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ alle $(n-1)$-Sphären auf $(n-1)$-Sphären bzw. Hyperebenen des $\mathbb{R}^n$ abbildet. **Hinweis:** Die Gleichung einer $(n-1)$-Sphäre bzw. Hyperebene ist

$$\alpha(x_1^2 + \dots + x_n^2) + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n + \gamma = 0$$

mit $4\alpha\gamma < \beta_1^2 + \dots + \beta_n^2$ und die stereographische Projektion bildet $(y_1, \dots, y_{n+1})$ ab auf $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i = \frac{y_i}{1-y_{i+1}}$.

15.1. Glattheit der Abbildung Bild.
Zeige, daß $T \mapsto \mathrm{Bild}(T)$, $L_r(m.n) \to G(r, n)$ C^∞ ist. **Hinweis:** Beschreibe diese Abbildung lokal als Zusammensetzung

$$L_r(m, n) \to L_r(r, n) \to V(r, n) \to G(r, n)$$

wobei die erste (lokale!) Abbildung durch Einschränken auf eine geeignet gewählten r-dimensionalen Teilraum gegeben ist, die zweite Gram-Schmidt-Orthonormalisieren der Spalten der Matrix bedeutet und die letzte das Bild nehmen aus der VO ist.

15.11. Möbiusband, Teil 1.
Es sei $M := [-1, 1] \times (-1, 1)/\sim$, wobei $\sim$ die von $\forall s : (-1, -s) \sim (1, s)$ erzeugte Äquivalenzrelation ist, und $q : [-1, 1] \times (-1, 1) \to M$ die Quotientenabbildung $(t, s) \mapsto [(t, s)]$.

Weiters seien $\bar\varphi_0, \bar\varphi_1 : (-1, 1) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\bar\varphi_0(t, s) := (t, s) \text{ und } \bar\varphi_1(t, s) := \begin{cases} (t+1, s) & \text{für } t < 0 \\ (t-1, -s) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

und $\varphi_i := q \circ \bar{\varphi}_i$. Zeige, daß $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ ein C^∞-Atlas für M ist.

15.12. Möbiusband, Teil 2.
Zeige daß die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (t,s) \mapsto \Big(\big(1 + s\cos(\tfrac{\pi}{2}t)\big)\cos(\pi t), \big(1 + s\cos(\tfrac{\pi}{2}t)\big)\sin(\pi t), s\sin(\tfrac{\pi}{2}t)\Big)$$

einen Diffeomorphismus $\tilde{f} : [(t,s)] \mapsto f(t,s)$ von M aus Beispiel (15.11) mit der Teilmannigfaltigkeit Möb:= $f(\mathbb{R} \times (-1,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$ induziert.
Hinweis: Verwende, daß f lokal eine Parametrisierung von Möb ist und $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$ für $x, y \in [-1,1] \times (-1,1)$ gilt.

15.2. Glattheit der Abbildung Kern.
Zeige, daß $T \mapsto \operatorname{Ker}(T)$, $L_r(m,n) \to G(m-r,m)$ C^∞ ist. **Hinweis:** $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Bild} T^t)^\perp$.

72.46. Quadriken.
Es sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilinear, symmetrisch und $a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Finde hinreichende Bedingungen, unter welchen die Quadrik $M := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x,x) + a(x) = 1\}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ist. Identifiziere Paraboloid, Hyperboloid und Ellipsoid als Spezialfall.

15.3. Flächen von beliebigen Geschlecht.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞. Unter welchen Bedingungen an $\varepsilon > 0$ wird durch die Gleichung

$$(f(x) + y^2)^2 - \varepsilon\,(f(x) + y^2) + z^2 = 0$$

eine Mannigfaltigkeit beschrieben. Falls f ein Polynom mit $2g$ einfachen Nullstellen und positiven höchsten Koeffizienten ist und ε geeignet gewählt wird, dann ist diese Mannigfaltigkeit eine orientierte Fläche vom Geschlecht g. **Hinweis:** Hinweise betrachte die Schnittkurven mit den zur y-z-Ebene parallelen Ebenen für $f(x) < 0$ und für $f(x) > 0$.

15.10. Erweiterung der stereographischen Projektion.
In (10.4) haben wir gezeigt und in (15.3) verwendet, daß sich lokale Parametrisierungen zu lokalen Diffeomorphismen erweitern lassen. Finde für die stereographische Projektion mit Pol $p \in S^n$ eine explizite Erweiterung zu einem Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{tp : t \geq 0\} \to p^\perp \times \mathbb{R}p$.
Hinweis: Wähle Φ so, daß Halbstrahlen durch 0 auf Geraden normal zu $p^\perp$ abgebildet werden.

20.1. Kettenregel.
Beweise die Kettenregel aus (20.4): $T_p(g \circ f) = T_{f(p)} g \circ T_p f$.

20.2. Satz über inverse Funktionen.
Beweise den Satz über inverse Funktionen aus (20.4):
f ist genau dann lokal bei p ein Diffeomorphismus, wenn $T_p f$ bijektiv ist.

20.3. Tangentialraum der Rang k Abbildungen.
Bestimme den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit $L_k(n,m)$ an der Stelle $f : (x,y) \mapsto (x,0)$, $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k})$.

20.4. Tangentialraum der Grassmannmannigfaltigkeit.
Bestimme den Tangentialraum der Grassmannmannigfaltigkeit $G(k,n)$ im Punkte $P : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x,0)$.

20.5. Tangentialraum der Stiefelmannigfaltigkeit.
Bestimme den Tangentialraum der Stiefelmannigfaltigkeit $V(k,n)$ im Punkte $A : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x,0)$.

20.6. Normalraum einer Fläche.
Zeige, daß der Normalraum $(T_pM)^\perp$ jeder 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^3$ durch den Gradienten $\operatorname{grad}_p f$ einer regulären Gleichung bzw. auch durch das Kreuzprodukt $\partial_1\varphi(0) \times \partial_2\varphi(0)$ einer Parametrisierung φ mit $\varphi(0) = p$ erzeugt wird.

20.7. Universelles Vektorbündel.
Zeige, daß $E(k,n) := \{(\varepsilon, v) \in G(k,n) \times \mathbb{R}^n : v \in \varepsilon\} \to G(k,n)$, $(\varepsilon, v) \mapsto \varepsilon$ ein (das sogenannte universelle) Vektorbündel über der Grassmannmannigfaltigkeit ist. Seine Faser über einen Punkt in $G(k,n)$ also über einer k-Ebene ε im $\mathbb{R}^n$ ist somit gerade diese Ebene. **Hinweis:** Um $E(k,n)$ als Mannigfaltigkeit und gleichzeitig als Vektorbündel zu erkennen betrachte die lokal definierte Abbildung $\varphi : G(k,n) \to GL(n)$,

$$\varphi : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, daß $\varphi(\varepsilon)(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \varepsilon$ ist und somit $(\varepsilon, v) \mapsto (\varepsilon, \varphi(\varepsilon) \cdot v)$ ein lokaler Diffeomorphismus von $G(k,n) \times \mathbb{R}^n$ ist, welcher lokal den Teilraum $G(k,n) \times \mathbb{R}^k \times \{0\}$ auf $E(k,n)$ abbildet.

20.8. Pullback-Bündel.
Es sei $q : Q \to N$ ein Faserbündel und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Definiere $f^*Q := \{(x,z) \in M \times Q : f(x) = q(z)\}$. Zeige, daß $f^*q := \mathrm{pr}_1 : f^*Q \to M$ ein Faserbündel ist, das sogenannte Pullback der Bündels q längs f. Falls q eine Vektorbündel ist, so gilt gleiches auch für $f^*q : f^*Q \to M$. **Hinweis:** Um f^*Q als Mannigfaltigkeit und f^*q als Faserbündel zu erkennen genügt es Bijektionen $\varphi : U \times F \to f^*Q|_U$ so zu finden, daß die zugehörigen U eine offene Überdeckung von M bilden und die Kartenwechselabbildungen $\psi^{-1} \circ \varphi : (U \cap W) \times F \to (U \cap W) \times F$ glatt sind, wobei $\psi : W \times F \to f^*Q|_W$ auch so eine Bijektion bezeichnet. Aus Trivialsierungen $V \times F \to Q|_V$ von $q : Q \to N$ konstruiere nun assoziierte Trivialisierungen $f^{-1}(V) \times F \to f^*(Q)|_{f^{-1}(V)}$.

20.9. Parallelisierbarkeit von Lie-Gruppen.
Eine Mannigfaltigkeit M heißt parallelisierbar, wenn eine globale Trivialisierung $\varphi : M \times \mathbb{R}^m \to TM$ des Tangentialbündels existiert. Zeige, daß jede Lie-Gruppe G parallelisierbar ist. **Hinweis:** Betrachte die Multiplikation $\mu : G \times G \to G$ und differenziere diese nach der zweiten Variable um eine glatte

Abbildung $\varphi : G \times TG \to TG$ zu erhalten. Deren Einschränkung $G \times T_eG \to TG$ ist ein faserlinearer Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $TG \to G \times T_eG$ gegeben durch $v \mapsto (\pi(v), \varphi(\pi(v)^{-1}, v))$, wobei e das neutrale Element der Lie-Gruppe bezeichnet.

20.10. Kettenregel.
Beweise für abstrakte Mannigfaltigleiten das Lemma (20.4).
Hinweis: Um T_pf zu bestimmen evaluiere diesen Ausdruck auf $\partial \in \mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ und das Ergebnis auf $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, betrachte also $(T_pf)(\partial)(h)$. Für die Produktregel verwende den Isomorphismus $\mathrm{Der}_p(C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $\partial \mapsto \partial(\mathrm{id})$.

53.1. Krümmungen der Minimal-Fläche von Enneper.
Bestimme alle Krümmungen der durch $(t, s) \mapsto (t - t^3/3 + ts^2, s - s^3/3 + st^2, t^2 - s^2)$ parametrisierten Fläche von Enneper.

53.2. Krümmungen am Beispiel eines Graphens.
Bestimme Gauß- und mittlere Krümmung für die Fläche die als Graph von $(t, s) \mapsto ts^2$ gegeben ist.

53.4. Theorem von Joachimsthal.
Es sei c eine Krümmungslinien einer Fläche die auch in einer zweiten Fläche liegt. Zeige daß diese genau dann auch Krümmungslinie der zweiten Fläche ist, wenn der Winkel der beinden Flächen(-Normalen) längs c konstant ist.
Hinweis: Es seien ν_1 und ν_2 die Gaußabbildungen der beiden Flächen M_i und $v_i := \nu_i \circ c$. Dann ist c genau dann Krümmungslinie auf der Fläche M_i, wenn $v_i' = \lambda_i \cdot c'$ für eine Funktion λ_i. Beachte, daß $c' \in v_1^\perp \cap v_2^\perp$.

53.5. Tangentialfläche.
Die Parametrisierung $\varphi : (s, \theta) \mapsto c(\theta) + s\, c'(\theta)$ einer Tangentialfläche erfüllt nicht die Bedingung $c' \perp w$. Wie sieht die nach (55.2) existierende Umparametrisierung (mit $|c'| = 1 = |w'|$ und $c' \perp w'$) aus?

53.6. Hyperbolisches Paraboloid.
Zeige, daß das hyperbolische Paraboloid eine Regelfläche aber keine Torse ist.
Hinweis: Verifiziere die in (55.3.4) angegebene Parametrisierung.

53.7. Einschalige Hyperboloid.
Zeige, daß das einschalige Hyperboloid eine Regelfläche aber keine Torse ist.
Hinweis: Verifiziere die in (55.3.5) angegebene Parametrisierung.

56.1. Isothermale Koordinaten für Minimalflächen.
Zeige, daß jede Minimalfläche ohne Nabelpunkte eine konforme lokale Parametrisierung besitzt. **Hinweis:** Verwende Lemma (56.5) und Aufgabe (72.40).

54.1. Konforme Diffeomorphismen zwischen Rotationsflächen.
Zeige, daß je zwei Rotationsflächen lokal konform diffeomorph sind. **Hinweis:** Verwende Parametrisierungen $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \to M_i$ wie in der Vorlesung mit zugehörigen Koeffizienten $E = 1$, $F = 0$ und $G = r_i(s)^2$. Nun suche einen lokalen Diffeomorphismus $f : M_1 \to M_2$ für welchen die Ableitung $\tilde{f}'(s, \theta)$ der Kartendarstellung $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(s_1, \theta_1) \mapsto (s_2, \theta_2) = (h(s_1), \theta_1)$ die Basis-Vektoren wie folgt abbildet:

$$r_1(s_1)e_1 \mapsto r_2(s_2)e_1 \text{ und } e_2 \mapsto e_2.$$

53.3. Inhaltserhaltende Parametrisierungen.
Zeige, daß jede Fläche $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine inhaltbewahrende lokale Parametrisierung besitzt. **Hinweis:** Versuche aus einer gegebenen Parametrisierung eine Reparametrisierung zu erhalten, welche Flächen

bewahrt, d.h. für welche $E \cdot G - F^2 = 1$ ist. Zeige dazu, daß sich dieser Ausdruck mit dem Quadrat der Funktionaldeterminante des Parameterwechsels transformiert.

57.1. Geodäten die zu minimalen Breitenkreis spiralen.
Verwende die Parametrisierung einer minimalen Drehfläche aus (54.9) (mit $r(s)^2 = s^2 + 1$) und bestimme jenen Winkel mit dem eine Geodäte auf einem fix gegebenen Breitenkreis starten muß, damit sie zum Breitenkreis mit minimalen Durchmesser spiralt. Gibt die Zeit an die benötigt wird um einen anderen Breitenkreis zu erreichen. Kannst Du auch die Änderung der Längengrade bis zu diesen Zeitpunkt bestimmen? **Hinweis:** Versuche mittels der Differentialgleichung aus (57.5) t als Funktion von s zu bestimmen.

58.1. Beispiele für Geodätengleichung.
Bestimme für eine Parametrisierung einer Fläche Deiner Wahl mit $K \neq 0$ die Christoffelsymbole erster und zweiter Art und schreibe die Geodätengleichung in diesen lokalen Koordinaten auf.

15.4 Addieren von Teilräumen ist glatt.
Zeige, $M := \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in G(k_1, n) \times G(k_2, n) : \dim(\varepsilon_1 \cap \varepsilon_2) = \{0\}\}$ ist eine offene Teilmannigfaltigkeit von $G(k_1, n) \times G(k_2, n)$ (sogar ein Faserbündel über $G(k_1, n)$ und für $k_1 + k_2 = n$ ein Vektorbündel) und die Addition $+ : M \to G(k_1 + k_2, n)$, $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mapsto \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ist glatt.