Aufgabensammlung zur Differentialgeometrie 1

SS 2005

Andreas Kriegl

Euklid'ische Räume

1.1.
Zeige, daß die Zusammensetzung von zwei Spiegelungen an Geraden im $\mathbb{R}^2$ eine Drehung um den doppelten des zwischen den Geraden eingeschlossenen Winkels liefert. **Hinweis:** Es genügt (warum?) das Bild eines (geschickt gewählten) Vektors zu bestimmen.

1.2.
In der VO haben wir die Spiegelung an der Normalebene $w^\perp$ für $w = (w^1, w^2.w^3) \in S^2$ durch $\mathbb{R}^3 \ni v \mapsto v - 2\langle v|w\rangle\, w \in \mathbb{R}^3$ beschrieben. Wie sieht ihre Matrixdarstellung bzgl. der Standardbasis aus.

1.3.
Finde eine Formel für die Drehung mit der durch $w \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ erzeugte die Drehachse $\mathbb{R} \cdot v$ um den Winkel φ. **Hinweis:** Betrachte für jedes von w linear unabhängige $v \in \mathbb{R}^3$ die orthogonal-Basis w, $v \times w$, $v - \langle v|w\rangle w$ und verwende, daß eine Drehung um den Winkel φ in der Ebene bzgl. jeder orthonormal-Basis $\mathcal{E}$ durch $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ gegeben ist.

1.4.
Um eine Körper (also z.B. ein Flugzeug oder einen Hängegleiter) in eine allgemeine Lage im Raum zu bringen, kann man folgendermaßen vorgehen: Zuerst drehen wir es um die Senkrechte in jene Richtung in welche es fliegt (Winkel ψ), dann drehen wir es um sein Querachse um den Winkel (des Anstiegs) θ und danach (falls es eine Kurve fliegt) um seine Längsachse um einen Winkel φ und schließlich verschieben wir es noch vom Ursprung in die gewünschte Lage $p \in \mathbb{R}^3$. Wie sieht die Matrixdarstellung des linearen Teils dieser Bewegung aus? **Hinweis:** Verfahre ähnlich wie bei den Eulerwinkeln.

1.5.
Zeige, daß eine bijektive lineare Abbildung $f : E \to E$ des Euklid'ischen Raums E genau dann konform (d.h. winkelerhaltend) ist, wenn ein $\lambda > 0$ existiert, s.d. $\langle f(x)|f(y)\rangle = \lambda\langle x|y\rangle$ für alle $x, y \in E$ gilt, also $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} f$ eine Isometrie ist. **Hinweis:** ($\Rightarrow$) Für $v \in E$ definiere $\lambda(v) > 0$ durch $\|f(v)\|^2 = \lambda(v)\,\|v\|$. Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine orthonormal-Basis. Dann ist $e_i + e_j \perp e_i - e_j$ und somit auch die Bilder unter f. Schließe daraus $\lambda(e_i) = \lambda(e_j)$. Schließe weiter, daß λ auf ganz E konstant ist und verwende schließlich die Polarisierungsgleichung um die gewünschte Identität zu erhalten.

Kurven in der Ebene

1.6.
Versuche in mindestens 2 der in (72.3)–(72.14) gegebenen Kurven die Bogenlängenfunktion zu berechnen und wenn möglich auch die Bogenlängenparametrisierung zu bestimmen.

1.7.
Krümmung in Polarkoordinaten. Sei $r : \varphi \mapsto r(\varphi)$ die Polarkoordinatendarstellung einer Kurve, d.h. $c(\varphi) := (r(\varphi)\cos(\varphi), r(\varphi)\sin(\varphi))$ ist eine Parametrisierung, und sei $r' := \frac{dr}{d\varphi}$. Zeige, daß die Bogenlänge gegeben ist durch $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}\, d\varphi$ und die Krümmung durch $\frac{r^2+2(r')^2-rr''}{(r^2+(r')^2)^{3/2}}$.

1.8.
Krümmung einer Kurve die als Graph einer Funktion gegeben ist. Es sei eine Kurve durch den Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschrieben. Zeige, daß ihre Krümmung gegeben ist durch:

$$\frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}^3}$$

1.9.
Krümmung für implizite Funktionen. Es sei eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $t \mapsto (x(t), y(t))$ durch eine Gleichung $f(x(t), y(t)) = 0$ gegeben. Wähle eine Orientierung der Kurve und zeige, daß mit der Bezeichungsweise $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xy} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, etc. ihre Krümmung gegeben ist durch

$$\frac{f_{xx} f_y^2 - 2 f_{xy} f_x f_y + f_{yy} f_x^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

1.10.
Versuche für mindestens 2 der in (72.3)–(72.14) gegebenen Kurven die Krümmung und die Krümmungsmittelpunkte zu bestimmen.

Als nächstes behandeln wir die Beispiele: (72.16)–(72.18), (72.23)–(72.39).

72.16.
Evolute Unter welchen Bedingungen an eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve c definiert die Evolute $e_c(s) := c(s) + \frac{1}{K(s)}\nu(s)$ wieder eine (geometrische) Kurve. Zeige, daß die Krümmung der Evolute gegeben ist durch $\frac{K^3(s)}{|K'(s)|}$.

72.17.
Involute Unter welchen Bedingungen an eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve c definiert die Involute $i_c(s) := c(s) - s\tau(s)$ wieder eine (geometrische) Kurve. Zeige, daß die Krümmung der Evolute gegeben ist durch $\operatorname{sign}(sK(s))\frac{1}{s}$.

72.18.
Zeige, daß für eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve $c : I \to \mathbb{R}^2$ folgendes gilt:

(a). Unter den in Beispiel (72.16) behandelten Bedingungen ist die Evolute der Involute von c wieder c.

(b). Unter den in Beispiel (72.17) behandelten Bedingungen existiert eine Bogenlängenparametrisierung der Evolute von c, so daß deren Involute wieder c ist.

72.24.
Zeige, eine Kurve parametrisiert genau dann eine Gerade, wenn ihre Tangenten einen Punkt gemeinsam haben.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf Kurven im $\mathbb{R}^3$, die hinreichend regulär sind:

72.25.
Zeige, daß Krümmung und Torsion einer beliebig parametrisierte Kurve c gegeben sind durch: $K = |c' \times c''|/|c'|^3$ und $T = \det(c', c'', c''')/|c' \times c''|^2$.

72.26.
Sei c nach der Bogenlänge parametrisiert.

(a). Für den Winkel $\varphi(s_1, s_2)$ von $\tau(s_1)$ nach $\tau(s_2)$ gilt: $\frac{\varphi(s_1,s_2)}{s_2-s_1} \to K(s)$ für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$. (Hinweis: $\varphi \sim 2\sin\frac{\varphi}{2} = |\tau(s_1) - \tau(s_2)|$.)

(b). Für den Winkel $\varphi(s_1, s_2)$ von $\beta(s_1)$ nach $\beta(s_2)$ gilt: $\frac{\varphi(s_1,s_2)}{s_2-s_1} \to |T(s)|$ für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$.

(c). Wogegen konvergiert $\frac{\varphi(s_2,s_1)}{s_1-s_2}$ für $s_1, s_2 \to s$, $s_2 > s_1$, wenn $\varphi(s_1, s_2)$ der Winkel von $\nu(s_1)$ nach $\nu(s_2)$ ist?

72.27.
Finde eine Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ mit $\nu_i' = v \times \nu_i$ für $i = 0, 1, 2$ (Setze $v := T\tau + K\beta$).

72.28.
Zeige, eine Kurve ist genau dann eine Gerade, wenn $K = 0$. Eine Kurve mit $K \neq 0$ liegt genau dann in einer Ebene, wenn $T = 0$.

72.29.
Zeige, daß eine Kurve, deren Schmiegebenen einen Punkt gemeinsam haben, eine ebene Kurve ist.

72.30.
Zeige, daß eine Kurve, deren Hauptnormalen einen Punkt gemeinsam haben, auf einem Kreis liegt.

72.31.
Zeige, daß eine Kurve genau dann auf einer Sphäre liegt, wenn ihre Normalebenen einen Punkt gemeinsam haben.

72.32.
Berührsphäre Zeige, daß die Sphäre welche eine Kurve c von Ordnung 3 bei s berührt $(c + \frac{1}{K}\nu + \frac{1}{T}(\frac{1}{K})'\beta)(s)$ als Mittelpunkt M und $R^2 = (\frac{1}{K^2} + (\frac{1}{T}(\frac{1}{K})')^2)(s)$ als Radius R hat (Hinweis: man differenziere $g(s) := |c(s) - M|^2$).

72.33.
Sphärische Kurven Zeige, daß eine Kurve genau dann auf einer Sphäre mit Radius R liegt, falls $(\frac{1}{K^2} + (\frac{1}{T}(\frac{1}{K})')^2)(s) = R^2$. Sie liegt genau dann auf irgendeiner Sphäre, wenn $\frac{T}{K} + \left((\frac{1}{K})'\frac{1}{T}\right)' = 0$ ist.

72.34.
Helix Zeige, daß folgende Aussagen für eine Kurve äquivalent sind:

1. τ schließt mit einen festen Vektor einen fixen Winkel ein.
2. β schließt mit einen festen Vektor einen fixen Winkel ein.
3. ν liegt immer in einer fixen Ebene.

4. K und T sind proportional.
5. c läßt sich schreiben als $c(t) = c_0(t) + tv$, wobei c_0 eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in einer Ebene ist, und v ein fixer Vektor (welcher normal auf diese Ebene gewählt werden kann).

So eine Kurve c heißt HELIX. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Krümmung und Torsion von c und c_0.
(Hinweis: $K = T \tan\alpha \Rightarrow \tau\cos\alpha + \beta\sin\alpha$ ist konstant).

72.35.
Zeige: eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist genau dann eine Helix falls $\det(c'', c''', c'''') = 0$.

72.36.
Zeige, daß $t \mapsto (a\cos t, a\sin t, bt)$ eine Helix ist und berechne K und T.

72.37.
Zeige, daß die Kurve $t \mapsto (at, bt^2, t^3)$ genau dann eine Helix ist, wenn $4\,b^4 = 9\,a^2$ ist.

72.38.
Bertrand Kurven Zeige, daß es zu einer Kurve eine zweite gibt, welche die gleiche Hautnormale (als Gerade im $\mathbb{R}^3$) besitzt, genau dann wenn es $a, b \in \mathbb{R}$ gibt mit $aK + bT = 1$.
(Hinweis: Sei c eine Bogenlängenparametrisierte Kurve mit Begleitbein τ, ν, β. Daß eine Kurve $\bar{c}$ die gleiche Hauptnormale besitzt bedeutet $\bar{c}(s) = c(s) + a(s)\nu(s)$. Schließe aus $\bar{c}' \perp \nu$, daß a konstant ist. Daß $\bar{c}''$ im Erzeugnis von $\bar{\tau}$ und ν liegt, liefert eine Differentialgleichung für K und T deren Lösung $1 = aK + bT$ erfüllt).

72.39.
Zeige: falls es mehr als 2 Kurven mit gleicher Hauptnormalen gibt, so gibt es unendlich viele (und diese sind Helixen).

72.40.
Konformität der stereographischen Projektion. Zeige, daß die stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ winkelerhaltend ist. **Hinweis:** Zeige, daß die Umkehrabbildung $h : \mathbb{R}^n \to S^n$ konform ist.

72.41.
Zeige, dass die stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ alle $(n-1)$-Sphären auf $(n-1)$-Sphären und Hyperebenen des $\mathbb{R}^n$ abbildet. **Hinweis:** Die Gleichung einer $(n-1)$-Sphäre bzw. Hyperebene ist

$$\alpha(x_1^2 + \cdots + x_n^2) + \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n + \gamma = 0$$

mit $4\alpha\gamma < \beta_1^2 + \cdots + \beta_n^2$ und die stereographische Projektion bildet $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ ab auf $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_i = \frac{y_i}{1-y_{i+1}}$.

15.1.
Zeige, daß $T \mapsto \mathrm{Bild}(T)$, $L_r(m.n) \to G(r,n)$ C^∞ ist. **Hinweis:** Beschreibe diese Abbildung lokal als Zusammensetzung

$$L_r(m,n) \to L_r(r,n) \to V(r,n) \to G(r,n)$$

wobei die erste (lokale!) Abbildung durch Einschränken auf eine geeignet gewählten r-dimensionalen Teilraum gegeben ist, die zweite Gram-Schmidt-Orthonormalisieren der Spalten der Matrix bedeutet und die letzte das Bild nehmen aus der VO ist.

15.2.
Zeige, daß $T \mapsto \mathrm{Ker}(T)$, $L_r(m,n) \to G(m-r,m)$ C^∞ ist. **Hinweis:** $\mathrm{Ker}\, T = (\mathrm{Bild}\, T^t)^\perp$.

72.46.
Quadrik Es sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilinear, symmetrisch und $a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Finde Bedingungen, unter welchen die Quadrik $M := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x,x) + a(x) = 1\}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$ ist. Identifiziere Paraboloid, Hyperboloid und Ellipsoid als Spezialfall.

15.3.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞. Unter welchen Bedingungen an $\varepsilon > 0$ wird durch die Gleichung

$$(f(x) + y^2)^2 - \varepsilon\,(f(x) + y^2) + z^2 = 0$$

eine Mannigfaltigkeit beschrieben. Falls f ein Polynom mit $2g$ einfachen Nullstellen und positiven höchsten Koeffizienten ist und ε geeignet gewählt wird, dann ist diese Mannigfaltigkeit eine orientierte Fläche vom Geschlecht g. **Hinweis:** Hinweise betrachte die Schnittkurven mit den zur y-z-Ebene parallelen Ebenen für $f(x) < 0$ und für $f(x) > 0$.

20.1.
Beweise die Kettenregel aus (20.4): $T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f$.

20.2.
Beweise den Satz über inverse Funktionen aus (20.4):
f ist genau dann lokal bei p ein Diffeomorphismus, wenn $T_p f$ bijektiv ist.

20.3.
Bestimme den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit $L_k(n,m)$ an der Stelle $f : (x,y) \mapsto (x,0)$, $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k})$.

20.4.
Bestimme den Tangentialraum der Grassmannmannigfaltigkeit $G(k,n)$ im Punkte $\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x,0)$.

20.5.
Bestimme den Tangentialraum der Stiefelmannigfaltigkeit $V(k,n)$ im Punkte $\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x,0)$.

20.6.
Zeige, daß der Normalraum $(T_pM)^\perp$ jeder 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^3$ durch den Gradienten $\operatorname{grad}_p f$ einer regulären Gleichung bzw. auch durch das Kreuzprodukt $\partial_1\varphi(0) \times \partial_2\varphi(0)$ einer Parametrisierung φ mit $\varphi(0) = p$ erzeugt wird.

20.7.
Zeige, daß $E(k,n) := \{(\varepsilon, v) \in G(k,n) \times \mathbb{R}^n : v \in \varepsilon\} \to G(k,n)$, $(\varepsilon, v) \mapsto \varepsilon$ ein (das sogenannte universelle) Vektorbündel über der Grassmannmannigfaltigkeit ist. Seine Faser über einen Punkt in $G(k,n)$ also über einer k-Ebene ε im $\mathbb{R}^n$ ist somit gerade diese Ebene. **Hinweis:** Um $E(k,n)$ als Mannigfaltigkeit und gleichzeitig als Vektorbündel zu erkennen betrachte die lokal definierte Abbildung $\varphi : G(k,n) \to GL(n)$,

$$\varphi : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, daß $\varphi(\varepsilon)(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \varepsilon$ ist und somit $(\varepsilon, v) \mapsto (\varepsilon, \varphi(\varepsilon) \cdot v)$ ein lokaler Diffeomorphismus von $G(k,n) \times \mathbb{R}^n$ ist, welcher lokal den Teilraum $G(k,n) \times \mathbb{R}^k \times \{0\}$ auf $E(k,n)$ abbildet.

20.8.
Es sei $q : Q \to N$ ein Faserbündel und $f : M \to N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Definiere $f^*Q := \{(x,z) \in M \times Q : f(x) = q(z)\}$. Zeige, daß $f^*q := \mathrm{pr}_1 : f^*Q \to M$ ein Faserbündel ist, das sogenannte Pullback der Bündels q längs f. Falls q eine Vektorbündel ist, so gilt gleiches auch für $f^*q : f^*Q \to M$. **Hinweis:** Um f^*Q als Mannigfaltigkeit und f^*q als Faserbündel zu erkennen

genügt es Bijektionen $\varphi : U \times F \to f^*Q|_U$ so zu finden, daß die zugehörigen U eine offene Überdeckung von M bilden und die Kartenwechselabbildungen $\psi^{-1} \circ \varphi : (U \cap W) \times F \to (U \cap W) \times F$ glatt sind, wobei $\psi : W \times F \to f^*Q|_W$ auch so eine Bijektion bezeichnet. Aus Trivialsierungen $V \times F \to Q|_V$ von $q : Q \to N$ konstruiere nun assoziierte Trivialisierungen $f^{-1}(V) \times F \to f^*(Q)|_{f^{-1}(V)}$.

20.9.
Eine Mannigfaltigkeit M heißt parallelisierbar, wenn eine globale Trivialisierung $\varphi : M \times \mathbb{R}^m \to TM$ des Tangentialbündels existiert. Zeige, daß jede Lie-Gruppe G parallelisierbar ist. **Hinweis:** Betrachte die Multiplikation $\mu : G \times G \to G$ und differenziere diese nach der zweiten Variable um eine glatte Abbildung $\varphi : G \times TG \to TG$ zu erhalten. Deren Einschränkung $G \times T_eG \to TG$ ist ein faserlinearer Diffeomorphismus mit Umkehrabbildung $TG \to G \times T_eG$ gegeben durch $v \mapsto (\pi(v), \varphi(\pi(v)^{-1}, v))$, wobei e das neutrale Element der Lie-Gruppe bezeichnet.

53.1.
Bestimme alle Krümmungen der durch $(t, s) \mapsto (t - t^3/3 + ts^2, s - s^3/3 + st^2, t^2 - s^2)$ parametrisierten Fläche von Enneper.

53.2.
Bestimme Gauß- und mittlere Krümmung für die Fläche die als Graph von $(t, s) \mapsto ts^2$ gegeben ist.

56.1.
Zeige, daß jede Minimalfläche ohne Nabelpunkte eine konforme lokale Parametrisierung besitzt. **Hinweis:** Verwende Lemma (56.5) und Aufgabe (72.40).

54.1.
Zeige, daß je zwei Rotationsflächen lokal konform diffeomorph sind. **Hinweis:** Verwende Parametrisierungen $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \to M_i$ wie in der Vorlesung mit zugehörigen Koeffizienten $E = 1$, $F = 0$ und $G = r_i(s)^2$. Nun suche einen lokalen Diffeomorphismus $f : M_1 \to M_2$ für welchen die Ableitung $\tilde{f}'(s, \theta)$ der Kartendarstellung $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(s_1, \theta_1) \mapsto (s_2, \theta_2) = (h(s_1), \theta_1)$ die Basis-Vektoren wie folgt abbildet:

$$r_1(s_1)e_1 \mapsto r_2(s_2)e_1 \text{ und } e_2 \mapsto e_2.$$

53.3.
Zeige, daß jede Fläche $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine inhaltbewahrende lokale Parametrisierung besitzt. **Hinweis:** Versuche aus einer gegebenen Parametrisierung eine Reparametrisierung zu erhalten, welche Flächen bewahrt, d.h. für welche $E \cdot G - F^2 = 1$ ist. Zeige dazu, daß sich dieser Ausdruck mit dem Quadrat der Funktionaldeterminante des Parameterwechsels transformiert.

57.1.
Verwende die Parametrisierung einer minimalen Drehfläche aus (54.9) (mit $r(s)^2 = s^2 + 1$) und bestimme jenen Winkel mit dem eine Geodäte auf einem fix gegebenen Breitenkreis starten muß, damit sie zum Breitenkreis mit minimalen Durchmesser spiralt. Gibt die Zeit an die benötigt wird um einen anderen Breitenkreis zu erreichen. Kannst Du auch die Änderung der Längengrade bis zu diesen Zeitpunkt bestimmen? **Hinweis:** Versuche mittels der Differentialgleichung aus (57.5) t als Funktion von s zu bestimmen.

58.1.
Bestimme für eine Parametrisierung einer Fläche Deiner Wahl mit $K \neq 0$ die Christoffelsymbole erster und zweiter Art und schreibe die Geodätengleichung in diesen lokalen Koordinaten auf.