Proseminar zur Funktionalanalysis 1

Aufgaben für den 9. Oktober 2002

1. Aufgabe.
Suche in der Bibliothek ein Buch über Funktionalanalysis, notiere die bibliographischen Daten inklusive Inventarnummer, notiere die Kapitelüberschriften, und versuche aus dem Vorwort schlau zu werden.

2. Aufgabe.
Zeige, daß die Supremumsnorm wirklich eine Norm ist.

3. Aufgabe.
Zeige, daß der Raum der Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{K}$ von beschränkter Variation bzgl. der Variationsnorm ein normierter Raum ist.

Aufgaben für den 16. Oktober 2002

4. Aufgabe.
Zeige: Für alle $x \in \mathbb{K}^n$ gilt

$$\frac{1}{\sqrt[q]{n}} \|x\|_1 \leq \|x\|_p \leq \sqrt[p]{n} \, \|x\|_\infty, \text{ wobei } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Lösung:
Mittels Hölderungleichung:

$$\begin{aligned}
\|x\|_1 &= \|1 \cdot x\|_1 \leq \|1\|_q \, \|x\|_p = \sqrt[q]{n} \, \|x\|_p \\
\|x\|_p &= \|x \cdot 1\|_p \leq \|x\|_\infty \, \|1\|_p = \|x\|_\infty \sqrt[p]{n}.
\end{aligned}$$

5. Aufgabe.
Zeige die Jensen-Ungleichung: Für $x \in \mathbb{K}^n$ und $1 < p \leq q < \infty$ gilt $\|x\|_q \leq \|x\|_p$.
Hinweis: O.B.d.A. sei $\|x\|_p = 1$ und somit $|x_k| \leq 1$ für alle k.

Lösung:

$$\begin{aligned}
& 1 = \|x\|_p = \Big(\sum_k |x_k|^p\Big)^{1/p} \geq |x_k| \\
\Rightarrow \quad & |x_k|^q \leq |x_k|^p \\
\Rightarrow \quad & \|x\|_q^q = \sum_k |x_k|^q \leq \sum_k |x_k|^p = \|x\|_p^p = 1
\end{aligned}$$

und somit

$$1 \geq \Big\| \frac{x}{\|x\|_p} \Big\|_q = \frac{\|x\|_q}{\|x\|_p}.$$

6. Aufgabe.
Zeige: Für $x \in \mathbb{K}^n$ gilt $\|x\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|x\|_p$.
Hinweis: O.B.d.A. sei $\|x\|_\infty = 1$.

Lösung:

$$\|x\|_\infty = 1 \Rightarrow \exists k : |x_k| = 1 \qquad \Rightarrow 1 \le \|x\|_p \le \sqrt[p]{n}\|x\|_\infty = \sqrt[p]{n}$$
$$\Rightarrow \lim_{p\to\infty} \|x\|_p = \lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{n} = 1$$

und somit ist

$$1 = \lim_{p\to\infty} \|\frac{x}{\|x\|_\infty}\|_p = \frac{\lim_{p\to\infty}\|x\|_p}{\|x\|_\infty}.$$

7. Aufgabe.
Gib eine Beschreibung aller sublinearen Funktionen, aller linearen Funktionen, aller Seminormen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Lösung:
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sublinear. Dann ist $f(\lambda) = |\lambda|\, f(\operatorname{sgn}(\lambda))$, also durch $f(\pm 1)$ eindeutig bestimmt. Es ist

- f linear $\Leftrightarrow f(-1) = -f(1)$
- f sublinear $\Leftrightarrow f(-1) + f(1) \ge 0$
- f seminorm $\Leftrightarrow f(-1) = f(1) \ge 0$

8. Aufgabe.
Zeige:

(a) Endliche Summen und beliebige Durchschnitte konvexer Mengen sind wieder konvex.

(b) Es sei $A \subseteq E$ eine Teimenge des Vektorraumes E. Zeige: Die Menge
$$\Big\{\sum_{i=1}^n \lambda_i a_i : n \in \mathbb{N}, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1, \lambda_i \ge 0, a_i \in A\ \forall i \in \{1,\dots,n\}\Big\}$$
ist die kleinste konvexe Teilmenge von E, welche A enthält, die sog. *konvexe Hülle* von A.

Lösung:
(a) Es sei A und B konvex. Dann ist $A\cap B$ konvex, denn $x, y \in A\cap B$, $0 < \lambda < 1 \Rightarrow x, y \in A$ und $x, y \in B \Rightarrow \lambda\, x+(1-\lambda)\, y \in A, B \Rightarrow \lambda\, x+(1-\lambda)\, y \in A\cap B$. Es ist $A+B$ konvex, denn sei $x, y \in A+B$, also $x = a_1+b_1$ und $y = a_2+b_2$ mit $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ und $0 < \lambda < 1$. Dann ist $\lambda\, x + (1-\lambda)\, y = (\lambda\, a_1 + (1-\lambda)\, a_2 + (\lambda\, b_1 + (1-\lambda)\, b_2 \in A + B$. (b) Sei $\langle A\rangle := \{\sum_{a\in A} \lambda\, a : \sum_{a\in A} \lambda_a = 1, \lambda_a \ge 0, \lambda_1 = 0$ für fast alle $a\}$. Dann ist $\langle A\rangle$ konvex, denn seien $x := \sum_a \lambda_a\, a$ und $y := \sum_a \mu_a\, a$ in $\langle A\rangle$ und $0 < \rho < 1$ dann ist

$$\rho\, x + (1-\rho)\, y = \sum_a (\rho\, \lambda_a + (1-\rho)\, \mu_a)\, a$$

und

$$\sum_a (\rho\, \lambda_a + (1-\rho)\, \mu_a) = \rho \sum_a \lambda_a + (1-\rho) \sum_a \mu_a = \rho + (1-\rho) = 1.$$

Sei nun $A \subseteq B$ und B konvex und $x = \sum_a \lambda_a\, a \in \langle A\rangle$. Dann ist $x = \sum_a \lambda_a\, a \in B$, da $a \in A \subseteq B$ und $\sum_a \lambda_a = 1$ mit $\lambda_a \ge 0$.

9. Aufgabe.
Zeige, daß für Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$ auf Vektorräumen E folgendes äquivalent ist:

1. f ist konvex;
2. $\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \le t\}$ ist konvex;
3. $\{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) < t\}$ ist konvex.

Lösung:
(1⇒2) Es sei $f(x_i) \le t_i$ und $\sum_i \lambda_i = 1$ mit $\lambda_i \ge 0$. Dann ist $f(\sum_i \lambda_i\, x_i) \le \sum_i \lambda_i\, f(x_i) \le \sum_i \lambda_i\, t_i$, also $\sum_i \lambda_i\,(x_i, t_i) = (\sum_i \lambda_i\, x_i, \sum_i \lambda_i\, t_i)$ in der Menge aus (2). (2⇒3) Es sei $f(x_i) < t_i$ und $\sum_i \lambda_i = 1$ mit $\lambda_i \ge 0$. Dann ist $(x_i, f(x_i))$ in der Menge aus (2) und somit auch $\sum_i \lambda_i\,(x_i, f(x_i))$, also $f(\sum_i \lambda_i\, x_i) \le \sum_i \lambda_i\, f(x_i) < \sum_i \lambda_i\, t_i$, also $\sum_i \lambda_i\,(x_i, t_i)$ in der Menge aus (3). (3⇒1) Es sei $0 < \lambda < 1$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist $(x, f(x)+\varepsilon)$ und $(y, f(y)+\varepsilon)$ in der Menge aus (3), also auch $\lambda\,(x, f(x)+\varepsilon) + (1-\lambda)\,(y, f(y)+\varepsilon)$ in dieser Menge, d.h. $f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y) < \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y) + \varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$ beliebig war ist $f(\lambda\, x + (1-\lambda)\, y) \le \lambda\, f(x) + (1-\lambda)\, f(y)$.

10. Aufgabe.
Zeige für jede sublineare Funktion $0 \le p : E \to \mathbb{R}$ gilt:

$$p(x) = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda \cdot p_{<1}\}.$$

Lösung:
Es ist $p(x) = \inf\{\lambda > 0 : p(x) < \lambda\} = \inf\{\lambda > 0 : x \in p_{<\lambda} = \lambda\, p_{<1}\}$,

11. Aufgabe.
Zeige, daß für sublineare Abbildungen $p \ge 0$ und $q \ge 0$ folgendes gilt:

$$p \le q \Leftrightarrow p_{\le 1} \supseteq q_{\le 1}.$$

Lösung:
(⇒) Cf. Vorlesung:

$$x \in q_{\le 1} \Rightarrow p(x) \le q(x) \le 1 \Rightarrow x \in p_{\le 1}.$$

(⇐) Vorlesung:

$$\begin{aligned} 0 \le q(x) < \lambda \Rightarrow q\left(\frac{x}{\lambda}\right) &= \frac{1}{\lambda}\, q(x) \le \frac{\lambda}{\lambda} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{x}{\lambda} \in q_{\le 1} \subseteq p_{\le 1} \\ &\Rightarrow p\left(\frac{x}{\lambda}\right) \le 1, \text{ i.e. } p(x) \le \lambda \\ &\Rightarrow p(x) \le \inf\{\lambda : \lambda > q(x)\} = q(x) \quad \square \end{aligned}$$

12. Aufgabe.
Es sei $p : E \to \mathbb{R}$ eine Seminorm, $\operatorname{Ker}(p) := \{x \in E : p(x) = 0\}$ und $\pi : E \to E/\operatorname{Ker}(p)$ die kanonische Quotientenabbildung, welche $x \in E$ auf die Nebenklasse $x + \operatorname{Ker}(p)$ abbildet. Zeige, daß eine eindeutig bestimmte Norm $\tilde{p} : E/\operatorname{Ker}(p) \to \mathbb{R}$ mit $p = \tilde{p} \circ \pi$ existiert.

Lösung:
Es sei $p : E \to \mathbb{R}$ eine Seminorm, dann ist der Kern $\operatorname{Ker}(p) := p^{-1}(0)$ von p ein linearer Teilraum, denn $p(x) = 0 = p(y)$ impliziert $p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = |\lambda| 0 = 0$ und $0 \le p(x+y) \le p(x) + p(y) = 0 + 0$. Somit ist $E_p := E/\operatorname{Ker}(p)$ mit $\tilde{p} : [x] \mapsto \inf\{p(x+y) : y \in \operatorname{Ker}(p)\}$ ein normierter Raum. Man beachte noch, daß $p_F = p$, denn $p(x) - 0 = p(x) - p(-y) \le p(x+y) \le p(x) + p(y) = p(x) + 0$ für $y \in \operatorname{Ker}(p)$. CHECK!!!

13. Aufgabe.
Es seien E und F seminormierte Räume. Auf welche Weise kann auf dem kartesischen Produkt $E \times F$ eine Subbasis von Seminormen für die koordinatenweise Konvergenz konstruiert werden? Ist $E \times F$ normierbar, wenn E und F es sind?

Lösung:
Es sei $\mathcal{P}$ und $\mathcal{Q}$ die stetigen Seminormen auf E und F. Dann ist $\{p \circ \mathrm{pr}_E : p \in \mathcal{P}\} \cup \{q \circ \mathrm{pr}_F : q \in \mathcal{Q}\}$ eine Subbasis von Seminormen auf $E \times F$. Offensichtlich konvergiert $(x_i, y_i) \to (x_\infty, y_\infty)$ im so erhaltenen SNR(!), wenn $p(x_i - x_\infty) \to 0$ und $q(y_i - y_\infty) \to$, d.h. $(x_i, y_i) \to (x_\infty, y_\infty)$ koordinatenweise.

14. Aufgabe.
Zeige, daß $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ zu einem abzählbar seminormierten Raum gemacht werden kann, der die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta beschreibt.
Beweise weiters, daß dieser Raum nicht normierbar ist.

Lösung:
Für $n \in \mathbb{N}$ sei $p_n(f) := \sup\{|f(x)| : |x| \le n\}$. Da jede kompakte Teilmenge $K \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist, also in einem Intervall der Form $[-n, n]$ enthalten ist beschreiben diese Seminormen die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta. Angenommen dieser Raum wäre normierbar. Dann gäbe es eine beschränkte 0-Umgebung, also ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $\varepsilon > 0$, s.d. $U := \{f : |f(x)| \le \varepsilon \text{ für alle } |x| \le N\}$ beschränkt ist, also auch p_{n+1} darauf durch eine Konstante $K > 0$ beschränkt. Sei nun $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $f|_[- n, n] = 0$ und $f(n+1) > K$ gewählt. Dann ist $f \in U$ aber $p_{n+1}(f) \ge f(n+1) > K$, ein Widerspruch.

15. Aufgabe.
Zeige, daß der Raum $C^\infty([0,1], \mathbb{R})$ der glatten reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[0,1]$ mit der gleichmäßigen Konvergenz in jeder Ableitung zu einem abzählbar seminormierten Raum gemacht werden kann.
Zeige weiters, daß dieser Raum nicht normierbar ist.

Lösung:
Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Seminorm $p_n(f) := \|f^{(n)}\|_\infty$. Für $n = 0$ ist dies eine Norm. Offensichtlich beschreibt dies die gleichmäßige Konvergenz in jeder Ableitung. Dieser SNR ist nicht normierbar, denn andernfalls gäbe es eine beschränkte 0-Umgebung also ein $N \in \mathbb{N}$ und ein $1 > \varepsilon > 0$, s.d. $U := \{f : p_n(f) \le \varepsilon \forall n \le N\}$ beschränkt ist. Insbesonders ist p_{n+1} durch eine Konstante $K \ge 1$ auf U beschränkt. Nun suchen wir eine Funktion f mit kleinen Ableitungen der Ordnung $\le N$ aber großer Ableitung der Ordnung $N+1$. Sei dazu $f(x) := \delta \sin(\mu\, x)$ oder $f(x) := \delta \cos(\mu\, x)$. Dann ist $p_j(f) \le \delta\, \mu^j$ und $p_{N+1}(f) = \delta\, \mu^{N+1}$. Wähle $\mu \ge 1$ mit $\delta\, \mu^N = \varepsilon$ und $\varepsilon\, \mu = \delta\, \mu^{N+1} = K + 1$, d.h. $\mu := \frac{K+1}{\varepsilon}$ und $\delta := \frac{\varepsilon}{\mu^N}$.

Aufgaben für den 23. Oktober 2002

Zusätzlich zu Aufgabe (14) und (15) vom letzten Mal sind Aufgaben (16)-(25) vorgesehen:

16. Aufgabe.
Es sei $f : E \to F$ linear zwischen zwei normierten Räumen, deren Normen wir beide mit $\|\_\|$ bezeichnen. Zeige folgende Identitäten:

$$\begin{aligned}\sup\{\|f(x)\| : \|x\| \le 1\} = \sup\{\|f(x)\| : \|x\| = 1\} &= \sup\left\{\tfrac{\|f(x)\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\}\\ &= \inf\{L : L \text{ ist eine Lipschitz-Konstante für } f\},\end{aligned}$$

wobei eine Lipschitz-Konstante eine Zahl $L > 0$ mit $\|f(x) - f(y)\| \le L\,\|x - y\|$ $\forall x, y \in E$ ist.

Lösung:
Siehe Vorlesung.

17. Aufgabe.
Es sei c der Raum aller konvergenten Folgen in $\mathbb{K}$, also

$$c := \left\{(x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists \lim_{n\to\infty} x_n\right\}.$$

Mittels Supremumsnorm wird dies zu einem normierten Raum. Zeige, daß die Abbildung $\lim : c \to \mathbb{K}$, $(x_n)_n \mapsto \lim_{n\to\infty} x_n$ linear und stetig ist. Berechne die Operatornorm $\|\lim\|$.

Lösung:
$|\lim_{n\to\infty} x_n| = \lim_{n\to\infty} |x_n| \le \|x\|_\infty$ und für konstante Folgen gilt Gleichheit.

18. Aufgabe.
Es sei $B : C([0,1]) \to C([0,1])$ jener Operator, der $u \in C([0,1])$ das Bernstein'sche Interpolations-Polynom $(Bu)(t) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u(\frac{k}{n}) t^k (1-t)^{n-k}$ zuordnet. Zeige B ist linear und wenn wir $C([0,1])$ mit der Supremumsnorm versehen ist die Operatornorm $\|B\| = 1$.

Lösung:

$$\begin{aligned}|(Bu)(t)| &\le \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} |u(\frac{k}{n})|\, t^k (1-t)^{n-k}\\ &\le \|u\|_\infty \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} = \|u\|_\infty \Big(t + (1-t)\Big)^n = \|u\|_\infty\end{aligned}$$

Für konstantes u gilt Gleichheit.

19. Aufgabe.
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Finde eine Norm die den Raum $C^1(I, \mathbb{K})$ der 1-mal stetig differenzierbaren Funktionen zu einen Banach-Raum macht. Ist es möglich $C^1(I, \mathbb{K})$ zu einer Banach-Algebra zu machen? Geht das auch für den Raum $C^n(I, \mathbb{R})$ der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit $n \in \mathbb{N}$?

Lösung:
Sei

$$\|f\| := \sum_{k\le n} \frac{1}{k!} \|f^{(k)}\|_\infty.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}\|f\cdot g\| &= \sum_{k\le n}\frac{1}{k!}\|(f\cdot g)^{(k)}\|_\infty\\ &\le \sum_{k\le n}\sum_{i+j=k}\|\frac{1}{i!j!}\,f^{(i)}\,g^{(j)}\|_\infty\\ &\le \sum_{i\le n}\frac{1}{i!}\|f^{(i)}\|_\infty\cdot\sum_{j\le n}\frac{1}{j!}\|g^{(j)}\|_\infty\\ &= \|f\|\cdot\|g\|.\end{aligned}$$

20. Aufgabe.
Es sei $I := [0,1]$ und $T : C^n(I,\mathbb{R}) \to C(I,\mathbb{R})$ jener Operator der jeder n-fach differenzierbaren Funktion f das Taylor-Polynom vom Grad n bei 0 zuordnet. Versehe die Räume C^n und C mit Normen und berechne die Operatornorm von T.

Lösung:
Bezüglich der Norm $\|\_\|$ aus Aufgabe (19) auf C^n und der Supremumsnorm auf Poly ist

$$\|t\mapsto\sum_{k\le n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,t^k\|_\infty \le \sum_{k\le n}\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!}\|t\mapsto t^k\|_\infty \le \sum_{k\le n}\frac{1}{k!}\,\|f^{(k)}\|_\infty = \|f\|$$

Für konstantes f gilt Gleichheit. Für Ableitungen gilt

$$\begin{aligned}\|t\mapsto\left(\frac{d}{dt}\right)^j\sum_{k\le n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,t^k\|_\infty &= \|t\mapsto\sum_{k\le n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,\frac{k!}{(k-j)!}\,t^{k-j}\|_\infty\\ &= \|t\mapsto\sum_{k\le n-j}\frac{f^{(k+j)}(0)}{k!}\,t^k\|_\infty\end{aligned}$$

21. Aufgabe.
Es sei $K : C([a,b],\mathbb{R}) \to C([a,b],\mathbb{R})$ gegeben durch

$$(Kx)(s) := \int_a^b k(s,t)\,x(t)\,dt$$

mit stetigem Kern $k : [a,b]\times[a,b] \to \mathbb{R}$.
Zeige: K ist linear und stetig mit Operatornorm

$$\|K\| = \max\Big\{\int_a^b |k(s,t)|\,dt : a\le t\le b\Big\}.$$

Lösung:
Es ist

$$|(Kx)(s)| \le \int_a^b |k(s,t)|\,|x(t)|\,dt \le \|x\|_\infty\int_a^b |k(s,t)|\,dt$$

und somit $\|K\| \le \sup\{\int_a^b |k(s,t)|\,dt\} = \max\{\int_a^b |k(s,t)|\,dt\}$, da $s\mapsto\int_a^b |k(s,t)|\,dt$ stetig ist. Sei also $\int_a^b |k(s,t)|.\,dt \le \int_a^b |k(s_0,t)|\,dt$ und $x(t) = \operatorname{sgn} k(s_0,t)$ für $|k(s_0,t)| \ge$

ε mit $\|x\|_\infty = 1$. Dann ist

$$\begin{aligned}(Kx)(s_0) &= \int_a^b k(s_0,t)\,x(t)\,dt \\ &= \int_{|k(s_0,t)|\geq\varepsilon} |k(s_0,t)|\,dt + \int_{|k(s_0,t)|<\varepsilon} k(s_0,t)\,x(t)\,dt \\ &\geq \int_{|k(s_0,t)|\geq\varepsilon} |k(s_0,t)|\,dt - \varepsilon\,(b-a) \\ &\geq \int_a^b |k(s_0,t)|\,dt - 2\,\varepsilon\,(b-a)\end{aligned}$$

Also ist $\|Kx\|_\infty \geq \max\{\int_a^b |k(s,t)|\,dt\} - 2\,\varepsilon\,(b-a)$, d.h. $\|K\| \geq \max\{\int_a^b |k(s,t)|\,dt\}$.

22. Aufgabe.
Es bezeichne ℓ^∞ den Raum der beschränkten Zahlenfolgen mit der Supremumsnorm. Weiters sei $A : \ell^\infty \to \ell^\infty$ definiert durch $A(x_1, x_2, \dots) := (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots)$. Zeige:

1. A ist injektiv und stetig mit Norm $\|A\| = 1$, aber nicht surjektiv.
2. A^{-1} ist (dort wo definiert) nicht stetig.

Lösung:
Es ist

$$\|Ax\|_\infty = \sup\{\left|\frac{x_i}{i}\right| : i \geq 1\} \leq \sup\{|x_i| : i \geq 1\} = \|x\|_\infty$$

Für e_1 gilt $Ae_1 = e_1$, also ist $\|A\| = 1$. Inkektivität ist offensichtlich. Die Folge $(1, 1, \dots) \in \ell^\infty$ liegt nicht im Bild, denn eindeutiges Urbild wäre $(1, 2, 3, \dots) \notin \ell^\infty$. Die Inverse ist nicht stetig (bei 0), denn $\|A^{-1}e_i\|_\infty = \|i\,e_i\|_\infty = i \to \infty$ aber $\|e_i\|_\infty = 1$.

23. Aufgabe.
Es bezeichne c_k den Raum der endlichen Folgen (k steht für **k**ompakter Träger). Wir können c_k als Teilraum von $\mathbb{K}^\mathbb{N}$, gebildet von jenen Folgen die schließlich 0 sind, auffassen.
Zeige, daß die lineare Abbildung $A : c_k \to \mathbb{K}$, $(x_i)_i \mapsto \sum_{i=1}^\infty x_i$ nicht stetig ist, wenn wir c_k mittels Supremumsnorm normieren.

Lösung:
Es ist $x_n := \chi_{\{1,\dots,n\}} \in c_k$ mit $\|f_n\|_\infty = 1$, aber $\sum(x_n) = n \to \infty$.

24. Aufgabe.
Es c_0 der Raum der gegen 0 konvergenten Folgen, versehen mit der Supremumsnorm. Zeige, daß dieser Raum vollständig ist und gerade der Abschluß des Teilraums $c_k \subseteq \ell^\infty$ ist. Wie sieht der Abschluß von c_k in ℓ^p für $1 \leq p < \infty$ aus?

Lösung:
Es genügt zu zeigen, daß dies der Abschluß con c_k ist. Sei also $x \in c_0$. Dann konvergiert $x_n := x \cdot \chi_{\{1,\dots,n\}} \in c_k$ gegen x in c_0. Weiters ist c_0 abgeschlossen, denn wenn $y_n \in c_0$ gleichmäßig gegen ein $y_\infty \in \ell^\infty$ konvergiert, dann existiert für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|y_N - y_\infty\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2}$ und wegen $(y_n)_j \to 0$ für $j \to \infty$ existiert ein $J \in \mathbb{N}$ mit $|(y_\infty)_j| \leq \|y_\infty - y_N\| + |(y_N)_j| \leq 2\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ für alle $j \geq J$. Hingegen ist c_k dicht in ℓ^p für $1 \leq p < \infty$, denn für $x \in \ell^p$ ist $\|x - x \cdot \chi_{\{1,\dots,n\}}\|_p = \left(\sum_{k>n} |x_k|^p\right)^{1/p} \to 0$ für $n \to \infty$.

25. Aufgabe.
Zeige, daß eine lineare Abbildung $A : c_0 \to \mathbb{K}$ existiert, welche nicht stetig ist.
Hinweis: Betrachte die Standardbasis $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ und erweitere diese zu einer Basis des Vektorraums c_0. Es sei b eines der hinzugefügten Basis-Elemente. Dann ist das zugehörige Koeffizientenfunktional nicht stetig ($c_k \subseteq f^{-1}(0)$).

Lösung:
Sei $B \supseteq \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine Basis des Vektorraums c_0 und $b_0 \in B \setminus \{e_i : i \in \mathbb{N}\}$. Dann besitzt jedes $x \in c_0$ eine eindeutige Darstellung $x = \sum_b x_b \cdot b$ und für jedes $b \in B$ ist $\mathrm{ev}_b : x \mapsto x_b$ eine lineare Abbildung $c_0 \to \mathbb{K}$. ev_{b_0} ist Null auf $B \setminus \{b_0\}$ also insbesonders auf $c_k = \langle\{e_i : i \in \mathbb{N}\}\rangle_{VR}$. Wäre ev_{b_0} stetig, so wäre diese Abbildung auch 0 am Abschluß $\overline{c_k} = \ell^p$ von c_k.

26. Aufgabe.
Es sei $A = (a_{i,j})_{i,j\le n}$ eine reelle $n \times n$-Matrix. Verifiziere die angebenen Ausdrücke für die Operatornorm $\|A\|$ von $A : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ wobei $\mathbb{K}^n$ mit folgenden Normen versehen wird:

Bzgl. ∞-Norm auf $\mathbb{K}^n$ gilt $\|A\| = \max\Big\{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| : 1 \le i \le n\Big\}$.
Bzgl. 1-Norm auf $\mathbb{K}^n$ gilt $\|A\| = \max\Big\{\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| : 1 \le j \le n\Big\}$.

Bestimme weiters die Opernorm von A bzgl. der 2-Norm am $\mathbb{R}^n$.
Hinweis: $\|Ax\|_2$ wird für ein x mit $\|x\|_2 = 1$ genau dann maximal, wenn die quadratische symmetrische Form $x^t A^t A x = \|Ax\|_2^2$ es wird (wobei ^{t} transponieren bezeichnet). Nun verwende aus der linearen Algebra die Diagonalisierbarkeit der symmetrischen Matrix $A^t A$.

Lösung:

$$\begin{aligned}
|(Ax)_i| &\le \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\,|x_j| \le \|x\|_\infty \sum_{j=1}^n |a_{i,j}| \\
&\le \|x\|_\infty \max\{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| : i \le n\} \\
&\Rightarrow \|Ax\|_\infty \le \max\{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| : i \le n\}\,\|x\|_\infty
\end{aligned}$$

Gleichheit erhalten wir für $x_j := \operatorname{sgn} a_{i_0,j}$ wenn $\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = \max\{\sum_{j=1}^n |a_{i,j}| : i \le n\}$.

$$\|Ax\|_1 = \sum_{i=1}^n |(Ax)_i| \le \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|\,|x_j| \le \|x\|_1 \max\Big\{\sum_{i=1}^n |a_{i,j}| : j \le n\Big\}$$

Wegen

$$\|Ae_j\|_1 = \sum_{i=1}^n |(Ae_j)_i| = \sum_{i=1}^n |a_{i,j}|$$

gilt Gleichheit. Es ist $(A^tA)^t = A^tA^{tt} = A^tA$ also existiert eine ONB $\{u_i : i \in I\}$ bestehend aus Eigenvektoren zu reellen Eigenwerten λ_i. Wegen $\lambda_i\,\|u_i\|^2 =$

$\langle A^t A u_i, u_i\rangle = \langle Au_i, Au_i\rangle = \|Au_i\|^2$ ist $\lambda_i \geq 0$ und

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \langle A^t Ax, x\rangle = \langle A^t A(\sum_i x_i u_i), \sum_j x_j u_j\rangle$$
$$= \sum_{i,j} \lambda_i\, x_i\, x_j\, \langle u_i, u_j\rangle = \sum_i \lambda_i\, x_i^2$$

dies wird maximal $\max\{\lambda_i : i = 1, \ldots, n\}$ für $\|x\|_2^2 = \sum_i \|x_i\|^2 = 1$.

27. Aufgabe.
Zeige: ℓ^p ist vollständig für $1 \leq p < \infty$.
Hinweis: Zeige zuerst die koordinatenweise Konvergenz. Dann betrachte für ein fixes $\varepsilon > 0$ die Cauchy-Bedingung für die ersten n-Koordinaten und gehe mit einen Index gegen ∞ um Abstand $\leq \varepsilon$ ab einem Index der nur von ε abhängt zu erhalten.

Lösung:
Sei $(x^{(n)})_n$ eine Cauchy-Folge in ℓ^p, d.h.

$$\|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p \to 0 \text{ für } n, m \to \infty.$$

Wegen $|x_i\| \leq \|x\|_p$ ist $(x_i^{(n)})_n$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{K}$ und somit existiert $\lim_{n\to\infty} x_i^{(n)} =: x_i^{(\infty)}$. Sei nun $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k\leq K} \|x_k^{(n)} - x_k^{(m)}\|^p \leq \|x^{(n)} - x^{(m)}\|_p^p < \varepsilon^p \text{ für } n, m \geq N \text{ und für beliebiges } K$$

und somit

$$\sum_{k\leq K} \|x_k^{(n)} - x_k^{(\infty)}\|^p \leq \varepsilon^p \text{ für } n \geq N \text{ und jedes K.}$$

Also ist

$$\|x^{(n)} - x^{\infty}\| \leq \varepsilon \text{ für } n \geq N$$

Insbesonders ist $x^\infty \in \ell^p$ und $x^{(n)} \to x^{(\infty)}$ in ℓ^p.

28. Aufgabe.
Zeige: Der Raum $R([a, b])$ der Riemann-integrierbaren Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ ist nicht vollständig bezüglich der Seminorm $\|\_\|_1 : f \mapsto \int_a^b |f(t)|dt$.
Hinweis: Betrachte die Folge $f_n := (\frac{3}{2})^n \chi_{I_n}$, wobei χ_{I_n} die charakteristische Funktion des Intervalls $(\frac{1}{2^{n+1}}, \frac{1}{2^n}]$ sei. Es ist $\sum_k f_k$ absolut-summierbar aber nicht in $R([a, b])$ konvergent bezüglich $\|\_\|_1$.

Lösung:
Es ist

$$\sum_k \|f_k\|_1 = \sum_k (\frac{3}{2})^n (\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}) = \sum_k \frac{3^n}{4^n\, 2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{3}{4}}$$

Angenommen es existiert ein $f \in R([a, b]) \subseteq B([a, b])$ mit $\sum_k f_k \to f$. Dann existiert in unendlich vielen I_n mindestens ein Punkt mit $x_n \in I_n$ mit $|(f - \sum_{k\leq n} f_k)(x_n)| < 1$, andernfalls gäbe es ein N s.d. $|(f - \sum_{k\leq m} f_k)(x)| \geq 1$ für $m \geq n \geq N$ und $x \in I_n$. Somit ist $\|f - \sum_{k\leq m} f_k|_1 \geq \int_{I_N} \|(f - \sum_{k\leq m} f_k)|_{I_N}\|_\infty = |I_N| > 0$. Somit ist $|f(x_n) - (\frac{3}{2})^n| < 1$ und folglich $f(x_n)$ unbeschränkt.

Aufgaben für den 29. Oktober und den 5. November 2002

Ab Aufgabe (22).

29. Aufgabe.
Es seien A und B (absolut) konvex. Dann ist die (absolut) konvexe Hülle von $A \cup B$ durch $\{t\, a + (1-t)\, b : 0 \leq t \leq 1\}$ gegeben.

Lösung:
Es genügt zu zeigen, daß diese Menge (absolut) konvex ist. Seien also $a_i \in A$, $b_i \in B$, $0 \leq t_i \leq 1$ und $\lambda_i \in \mathbb{K}$. Die Punkte $t_i\, a_i + (1-t_i)\, b_i$ liegen auf gegenüberliegenden Seiten des Detraeders $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$. Der Teilungspunkt $\lambda_1(t_1\, a_1 + (1-t_1)\, b_1) + \lambda_2(t_2\, a_2 + (1-t_2)\, b_2)$ liegt somit im Inneren des Detraeders und kann durch einen Punkt einer Verbindungsstrecke zwischen der Seite $a_1 a_2 \subseteq A$ und $b_1 b_2 \subseteq$ dargestellt werden.

30. Aufgabe.
Zeige: Surjektive lineare Abbildungen $f : E \to F$ zwischen normierten Räumen besitzten genau dann stetige Inverse, wenn ein $K > 0$ existiert mit $\|f(x)\| \geq K\|x\|$ für alle $x \in E$.

Lösung:
Aus $\|f(x)\| \geq K\|x\|$ folgt Injektivität, denn $f(x) = 0$ impliziert $\|x\| = 0$. Somit existiert $g := f^{-1}$ und erfüllt $\|g(y)\| = \|g(f(x))\| = \|x\| \leq \frac{1}{K}\|f(x)\| = \frac{1}{K}\|y\|$. Umgekehrt sei f bijektiv und $g := f^{-1}$ stetig. Dann ist $\|g(y)\| \leq \|g\|\,\|y\|$ und mit $y := f(x)$ ist $\|x\| = \|g(y)\| \leq \|g\|\,\|f(x)\|$, also $K := \frac{1}{\|g\|}$ die gesuchte Konstante.

31. Aufgabe.
Zeige: Surjektive lineare Abbildungen $f : E \to F$ zwischen normierten Räumen besitzten genau dann keine stetige Inverse, wenn eine Folge $x_n \in E$ existiert mit $\|x_n\| = 1$ und $f(x_n) \to 0$.

Lösung:
Falls f kein stetiges Inverses besitzt, so ist existieren nach Aufgabe (30) $x_n \in E$ mit $\|f(x_n)\| < \frac{1}{n}\|x_n\|$ und o.B.d.A. $\|x_n\| = 1$. Umgekehrt sei x_n eine Folge wie angeben. Dann kann kein $K > 0$ existieren mit $\|f(x_n)\| \geq K = K\|x_n\|$, also f nicht stetig invertierbar sein.

32. Aufgabe.
Zeige, daß für ein nicht-kompaktes X deiner Wahl $C_0(X)$ in $B(X)$ abgeschlossen ist.

Lösung:
Sei $C_0(X) \ni f_n \to f \in B(X)$. Für $\varepsilon > 0$ existiert ein N, s.d. $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Weiters existiert eine kompakte Menge $K \subseteq X$ s.d. $|f_N(x)| < \varepsilon$ für alle $x \notin K$, also ist $|f(x)| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x)| < 2\varepsilon$ für alle $x \notin K$, d.h. $f \in C_0(X)$.

33. Aufgabe.
Man betrachte folgende Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\prod_{c_0} \mathbb{R}$: Für $\lambda \in c_0$ sei die λ-te Koordinate $x^{(n)}_\lambda := \lambda(n)$. Zeige (indirekt), daß zwar $x^{(n)} \to 0$ in $\prod_{c_0} \mathbb{R}$, aber $x^{(n)}$ nicht Mackey-konvergent ist (und auch keine ihrer Teilfolgen).

Lösung:
Falls doch, so existieren $\mu_n \to \infty$ mit $\{\mu_n\, x^{(n)} : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt in $\prod_{c_0} \mathbb{R}$. Nun

sei $\lambda_n := 1$ für $\mu_n = 0$ und $\lambda_n := \frac{1}{\sqrt{|\mu_n|}}$ andernfalls. Dann ist die λ-te Koordinate nicht beschränkt, denn $|\mu_m\, x^{(n)}_\lambda| = |\mu_n\, \lambda_n| = \sqrt{|\mu_n|} \to \infty$.

34. Aufgabe.
Betrachte den Raum $E := \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : x_n = 0 \text{ für fast alle } n\}$ aller endlichen reellen Folgen.Versehe diesen mit der finalen Struktur bzgl. aller Inklusionen $\mathrm{inj}_n : \mathbb{R} \to E$ die durch $x \mapsto xe_n$ gegeben sind, wobei e_n die Folge ist, welche als n-te Koordinate 1 und alle anderen Koordinaten 0 hat. Zeige, daß eine Subbasis der Seminormen von E gegeben ist durch $\{(x_n)_n \mapsto \sum_n |y_n x_n| : y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$ oder auch durch $\{(x_n)_n \mapsto \max\{|y_n x_n| : n \in \mathbb{N}\} : y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\}$.

Zeige, daß dieser Raum nicht abzählbar seminormiert ist.

Zeige, daß zu jeder beschränkten Teilmenge $B \subseteq E$ ein $n \in \mathbb{N}$ existiert, s.d. B in $\mathbb{R}^n \times \{0\} \subseteq E$ enthalten ist. Folgere daraus, daß eine Folge in E genau dann konvergiert, wenn sie ganz in einem $\mathbb{R}^n \times \{0\}$ enthalten ist und dort konvergiert.

35. Aufgabe.
Zeige: Der Raum ℓ^1 versehen mit der Faltung ist eine kommutative Banachalgebra, wobei die Faltung $f \star g$ zweier Elemente $f, g \in \ell^1$ durch

$$(f \star g)(n) := \sum_{k=0^n} f(k)\, g(n-k)$$

gegeben ist.

36. Aufgabe.
Zeige, daß die Faltung stetiger Funktionen mit kompaktem Träger kommutativ und assoziativ ist.

37. Aufgabe.
Es sei P eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Der Köthe-Folgenraum $\Lambda(P)$ ist dann definiert als

$$\Lambda(P) := \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\lambda_n\, x_n)_n \in \ell^1 \forall (\lambda_n)_n \in P\}.$$

Für $\lambda \in P$ und $x \in \Lambda(P)$ sei $p_\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n\, x_n|$. Die Menge $\{p_\lambda : \lambda \in P\}$ fungiere als Subbasis von Seminormen.

Unter welchen Voraussetzungen an P ist dieser Raum separiert? Ist er vollständig?

38. Aufgabe.
Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Betrachte Funktionen $u : U \to \mathbb{R}$ die auf offenen Teilmengen $U \supseteq A$ stetig sind. Nenne zwei solche Funktionen $u : U \to \mathbb{R}$ und $v : V \to \mathbb{R}$ äquivalent, wenn sie auf einer offenen Teilmenge $W \supseteq A$ ihres gemeinsamen Definitionsbereiches übereinstimmen. Der Raum E der Äquivalenz-Klassen $[f]$ heißt Raum der Keime stetiger Funktionen bei A. Versehe diesen mit der finalen Struktur bzgl. aller Abbildungen $C(U, \mathbb{R}) \to E$, $f \mapsto [f]$. Zeige, daß für $n = 1$ und $A = \{0\}$ dieser Raum nicht separiert ist.
Hinweis: Es sei eine Funktion $h(t) = 1$ für $|t| \geq 2$ und $h(t) = 0$ für $|t| \leq 1$ fix gewählt. Für stetige u mit $u(0) = 0$ konvergiert die Folge der Funktionen $u_n : t \mapsto u(t)\, h(n\, t)$ gleichmäßig gegen u und $[u_n] = 0$ aber nicht notwendigerweise $[u] = 0$.

Lösung:
Sei $A = \{0\}$. Hinweis: Es sei $f(0) = 0$ und p eine stetige SN auf E. Dann ist

$p([f]) = 0$, denn sei

$$d_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } d(x,A) \geq 2/n \\ 0 & \text{für } d(x,A) \leq 1/n \\ nd(x,A) - 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

so konvergiert $f_n := f\, d_n$ gleichmäßig gegen f für $n \to \infty$, denn für $\varepsilon > 0$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$, s.d. $|f(x)| < \varepsilon$ für alle x mit $d(x,A) \leq 2/n$. Somit ist $|(f\, d_n)(x)| \leq |f(x)| < \varepsilon$ für diese x und für alle anderen x ist $d(x,A) > 2/n \geq 2/m$ für $m \geq n$ und somit $d_m(x) = 1$, also $f_m = f$. Damit konvergiert $0 = p([f_n]) \to p([f])$, also ist $p([f]) = 0$. Dies steht im Gegensatz zu holomorphen Keimen.

39. Aufgabe.
Für $r > 0$ sei E_r der Raum der Potenzreihen mit Konvergenzradius $> r$ versehen mit der Norm $\|a\|_r := \sup\{r^k |a_k| : k \in \mathbb{N}\}$. Weiters sei $E = \bigcup_{r>0} E_r$ der Raum der Potenzreihen mit positiven Konvergenzradius versehen mit der finalen Struktur bzgl. aller Inklusionen $E_r \subseteq E$. Zeige, daß die Inklusion $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ stetig ist und folgere daraus die Separiertheit. Zeige, daß für $0 < r < s$ die Inklusion $E_s \to E_r$ stetig ist.

In den folgenden Beispielen versuchen wir die kompakten Teilmenge von gegebenen abzählbar SNR'en zu bestimmen. Wir verwenden dabei, daß eine Teilmenge eines metrischen Raums genau dann kompakt ist, wenn jede Folge in ihr eine in ihr konvergente Teilfolge besitzt.

40. Aufgabe.
Zeige, daß eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ genau dann kompakt ist, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.
Hinweis: Für eine beschränkte Folge wähle iterative für jede Koordinate eine konvergente Teilfolge und betrachte die "Diagonalfolge".

Lösung:
Wenn die Folge beschränkt ist, dann ist auch jede Koordinate beschränkt und somit können wir eine konvergente Teilfolge der ersten Koordinate wählen. Für diese Teilfolge existiert seinerseits eine konvergente Teilfolge der 2-ten Koordinate

41. Aufgabe.
Zeige: Eine Teilmenge $K \subseteq c_0$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist und zusätzlich $\sup\{|x_k| : k \geq n\}$ gegen 0 konvergiert und zwar gleichmäßig für $x = (x_1, x_2, \dots) \in K$.
Hinweis: Beginne wie in Aufgabe (40).

42. Aufgabe.
Es sei $1 \leq p < \infty$. Zeige: Eine Teilmenge $K \subseteq \ell^p$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist, und $\sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^p$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert und zwar gleichmäßig für $x = (x_1, x_2, \dots) \in K$.
Hinweis: Beginne wie in Aufgabe (40) und (41).

Aufgaben für den 19. November 2002

43. Aufgabe.
Es sei E ein SNR. Zeige, daß nur für normierbare Räume E eine Struktur eines SNR auf E^* existiert für welche die Evaluationsabbildung $\mathrm{ev} : E^* \times E \to \mathbb{K}$ stetig ist.
Hinweis: Folgere aus der Existenz einer Nullumgebung $U \times V$ mit $\mathrm{ev}(U \times V) \subseteq \{z \in \mathbb{K} : |z| \leq 1\}$, daß V (skalar) beschränkt ist.

44. Aufgabe.
Zeige, daß es keine Baire'sche SNR mit abzählbar unendlicher Dimension gibt. Verwende dies um einen metrisierbaren Baire'schen nicht vollständigen SNR anzugeben.
Hinweis:Ergänze die Standard-Basis $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ in ℓ^p zu einer Vektorraum-Basis B. Wähle abzählbar viele Elemente f_j unter den Hinzugefügten. Es sei E_k das (dichte) lineare Erzeugnis von $B \setminus \{f_j : j > k\}$, dann ist $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ der gesuchte Raum.

45. Aufgabe.
Zeige, daß (echte) strikte induktive Limiten (d.h. $n \mapsto E_n$ ist nicht schießlich konstant) nicht Baire'sch sind.

46. Aufgabe.
Es seien E_1 und E_2 zwei Fréchet-Räume und $f_i : E \to F$ stetig linear in einen SNR F. Für jedes $x_1 \in E_1$ existiere ein eindeutiges $x_2 \in E_2$ mit $f_1(x_1) = f_2(x_2)$.
Zeige, daß die Abbildung $x_1 \mapsto x_2$ (mit $f_1(x_1) = f_2(x_2)$) stetig ist.

47. Aufgabe.
Es ist c_0 ein abgeschlossener Teilraum von ℓ^∞ aber kein direkter Summand.
Hinweis: Andernfalls gäbe es eine Projektion p von ℓ^∞ auf c_0 und somit eine injektive Abbildung $p^* : \ell^1 = (c_0)^* \to (\ell^\infty)^*$, $f \mapsto f \circ p$. Die Bilder $p^*(e^k)$ der Standard-Basis-Vektoren $e^k \in \ell^1$ konvergieren gegen 0 bzgl. $\sigma((\ell^\infty)^*, \ell^\infty)$ und somit müßte $e^k \to 0$ bzgl. $\sigma(\ell^1, \ell^\infty)$ konvergieren.

48. Beispiel.
Finde ein Beispiel einer linearen Abbildung mit abgeschlossenen Graphen und Werten in einen Banach-Raum, die nicht stetig ist. Und ebenso ein Beispiel einer Abbildung auf einen Banach-Raum.
Hinweis: Betrachte einerseits die Identität auf einen Dualraum bzgl. verschiedener Strukturen. und andererseits für einen Banachraum E ein unstetig lineares Funktional $\ell : E \to \mathbb{K}$ und nun die Identität von E nach E mit der initialen Struktur bzgl. Identität nach E und ℓ.

49. Aufgabe.
Zeige, daß das Banach-Steinhaus-Theorem nicht für Netze gilt.
Hinweis: Sei $\ell : E \to \mathbb{K}$ ein unstetiges Funktional. Für jeden endlich dimensionalen Teilraum $F < E$ konstruiere ein $\ell_F \in E^*$ mit $\ell_F|_F = \ell|_F$.

Aufgaben für den 3. Dezember 2002

50. Aufgabe.
Zeige für Folgen in ℓ^2 gilt:

$x_n \to 0$ bzgl. der Norm $\Rightarrow x_n \to 0$ bzgl. der schwachen Topologie $\sigma(\ell^2, (\ell^2)^*) \Rightarrow x_n \to 0$ koordinatenweise.

Zeige weiters, daß die Umkehrungen falsch sind.

51. Aufgabe.
Zeige in Hilberträumen gilt: $x_n \to x \Leftrightarrow \|x_n\| \to \|x\|$ und $\forall y : \langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$.

52. Aufgabe.
Zeige ℓ^p ist für $p \neq 2$ kein Hilbertraum.

53. Aufgabe.
Es sei $A \neq \emptyset$ abgeschlossen und konvex im Hilbertraum E. Zeige, daß die Abbildung, die jedem $x \notin A$ das eindeutig bestimmte $a_x \in A$ mit minimalen Abstand zuordnet, stetig ist.

54. Aufgabe.
Ein Banachraum heißt gleichmäßig konvex, falls $\|x_n - y_n\| \to 0$ aus $\|x_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ und $\|x_n + y_n\| \to 2$ folgt. Zeige, daß für gleichmäßig konvexe Räume der Satz (6.9) über minimalisierende Vektoren gilt. (Man kann zeigen, daß ℓ^p und L^p für $1 < p < \infty$ gleichmäßig konvex ist).

55. Aufgabe.
Zeige, daß der abgeschlossene affine Teilraum $A := \{f \in C[0,1] : f(0) = 0, \int_0^1 f = 1\}$ kein Element mit minimaler Norm besitzt.

56. Aufgabe.
Zeige, daß In Hiberträumen $x \perp y \Rightarrow \forall \lambda \in \mathbb{K} : \|x\| \leq \|x + \lambda\, y\|$ gilt. Zeige weiters (Anhand von $\mathbb{R}^2$), daß dies nicht als vernünftige Definition von Orthogonalität in Banachräumen verwendet werden kann.

57. Aufgabe.
Es sei H ein Hilbertraum und $P : H \to H$ linear mit $P^2 = P$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

1. P ist Ortho-Projektion, d.h. $P(H) = \operatorname{Ker}(P)^\perp$;
2. P ist stetig und $\|P\| \leq 1$;
3. $P = P^*$

Hinweis: Für (1⇒3) benutze $x = Px + (1 - P)x$;

58. Aufgabe.
Es sei I ein Intervall mit $0 \in I$ und $F := \{f \in C(I) : f(0) = 0\}$. Zeige, daß $C(I) \cong F \times \mathbb{R}$ vermöge $f \mapsto (f - f(0), f(0))$. Es sei $P : C(I) \to E$ irgend eine Projektion (d.h. stetig, linear, surjektiv und $P^2 = P$). Wähle $f_0 \in C(I)$ mit $P(f_0) = 1$. Zeige für jedes $f \in C(I)$ ist $f - P(f) = f(0)\, f_0$. Daraus folgt $\|P\| = 2$.

59. Aufgabe.
Wende das Gram-Schmidt Orthonormalisierungsverfahren auf die Monome $(t \mapsto t^n) \in L^2[-1,1]$ an um die ersten 3 Legendre Polynome P_n zu erhalten. Verifiziere, daß diese die entsprechende Differentialgleichung lösen.