

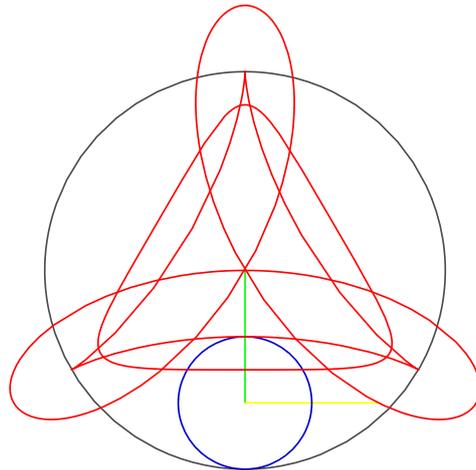
Differentialgeometrie

Andreas Kriegl

email: andreas.kriegl@univie.ac.at

<http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/LVA.html>

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
A-1090 Wien, Nordbergstr. 14



Dies ist das Skriptum zu meiner gleichnamigen Vorlesung im Sommersemester 2007. Es besteht aus ausgewählten Teilen des viel umfassenderen Skriptums, welches als PDF-Datei unter <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/Skripten/diffgeom.pdf> downloadbar ist. Natürlich werden wir in den 3 Semesterstunden nur einen Teil selbst dieser Auswahl behandeln können und ich werde am Ende des Semesters eine Liste der gemachten Abschnitte unter <http://www.mat.univie.ac.at/~kriegl/LVA-SS2007.html> auflegen.

Bei der Auswahl des Inhalts habe ich mich von folgenden Ideen leiten lassen: Wir beginnen mit den 1-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten der Ebene, den Kurven, die bereits zur Zeit Eulers sehr untersucht waren. Besonderes Augenmerk legen wir dabei auf das Studium der Krümmung, welches sich als roter Faden durch das ganze Skriptum zieht. Im Kapitel 2 führen wir Mannigfaltigkeiten zuerst als Teilmengen eines Euklidischen Raums und erst danach als abstrakte Objekte, welche durch Verkleben von Euklidischen Räumen entstehen, ein. Diese Methode, alle Begriffe zuerst für Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n zu entwickeln und sie in der Folge auf abstrakte Mannigfaltigkeiten zu übertragen, wurde im ganzen Skriptum durchgezogen, und wird der LeserInnen hoffentlich helfen, die geometrische Anschauung nicht zu verlieren. Im Kapitel 3 wird das Konzept der Ableitung auf Mannigfaltigkeiten übertragen. Das führt zu Tangentialraum und Tangentialabbildung und wird benutzt, um einen Begriff von Teil- und Quotientenobjekten von Mannigfaltigkeiten zu bekommen. Gewöhnliche Differentialgleichungen auf Mannigfaltigkeiten werden im Kapitel 4 eingeführt. Dazu werden die Tangentialräume zum Tangentialbündel vereinigt und Vektorfelder als Schnitte dieses Bündels untersucht. Es folgt ein Kapitel über Hyperflächen. Insbesondere werden hier Drehflächen, Regelflächen und Minimalflächen behandelt. Geodäten, Paralleltransport und kovariante Ableitung werden für Hyperflächen und dann allgemein für Riemann-Mannigfaltigkeiten besprochen.

Da man in der Differentialgeometrie auf den zu untersuchenden Objekten eine sehr reichhaltige Struktur zu Verfügung hat, fließen aus den diversesten Gebieten der Mathematik Methoden in sie ein. Voraussetzung zur erfolgreichen Bewältigung des dargebotenen Stoffes ist eine gründliche Kenntnis der Grundvorlesungen aus Analysis und der (dazu bereits benötigten) (multi)linearen Algebra. Natürlich wird die aufmerksame LeserIn (Tipp-)Fehler finden können. Ich möchte hier gleich die Bitte aussprechen, mir diese mitzuteilen (Geteiltes Leid ist halbes Leid). Zukünftige Generationen von StudentInnen werden es zu schätzen wissen.

Andreas Kriegl, Wien im Februar 2007

Inhaltsverzeichnis

I. Kurven	1
1. Euklidische Räume	1
2. Grundlegendes über Kurven in der Ebene	11
3. Krümmung von Kurven in der Ebene	16
7. Kurven im höher Dimensionalen	35
II. Mannigfaltigkeiten	41
9. Beispiele zweidimensionaler Flächen	41
10. Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n	48
11. Beispiele von Teilmannigfaltigkeiten	52
14. Beispiele von Lie-Gruppen	69
15. Glatte Abbildungen	94
16. Abstrakte Mannigfaltigkeiten	96
17. Produkte und Summen von Mannigfaltigkeiten	104
18. Zerlegungen der Eins	106
III. Tangentialraum	111
20. Tangentialraum und Derivationen	111
21. Immersionen	121
22. Submersionen	129
23. Faserbündel	130
25. Tangentialbündel	132
27. Vektorfelder	137
28. Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung	140
29. Lie-Klammer	144
32. Riemann-Mannigfaltigkeiten	154
33. Isometrische und konforme Diffeomorphismen	155
34. Riemann-Flächen	161
VIII. Hyperflächen	165
51. Normalkrümmungen	165
52. Haupt-, Gauß- und mittlere Krümmung	167
53. Formeln für Hyperflächen	175

54. Drehflächen	185
55. Regelflächen und Torsen	194
56. Minimalflächen	203
57. Geodäten	207
58. Exponentialabbildung	211
59. Integralsatz von Gauß-Bonnet	217
60. Flächen konstanter Krümmung	225
61. Paralleltransport	227
62. Kovariante Ableitung	229
63. Jacobi-Felder	243
64. Riemann-, Ricci- und Schnittkrümmung	247
65. Rückblick auf Krümmungen	263
Aufgaben	265
Literaturverzeichnis	273
Index	277

I. Kurven

In den Grundvorlesungen über Analysis behandelt man Funktionen, die auf offenen Teilmengen eines \mathbb{R}^n definiert sind. An manchen Stellen hatten sich aber schon Definitionsbereiche eingeschlichen, die allgemeiner waren. So z.B. bei der Methode der Lagrange-Multiplikatoren, wo man versucht, Extremwerte von reellwertigen Funktionen zu finden, welche auf Mengen der Gestalt $g^{-1}(0)$ definiert sind. Auch bei den Integralsätzen von Gauß und Stokes kamen Teilmengen des \mathbb{R}^n vor, die als Kurven und Flächen bezeichnet wurden. Mengen dieser Art heißen Mannigfaltigkeiten. Auf ihnen wollen wir in dieser Vorlesung die Analysis entwickeln. In diesem Kapitel werden wir uns mit den einfachsten, nämlich den 1-dimensionalen, Mannigfaltigkeiten (kurz Kurven) beschäftigen.

Wir wollen uns aber zuerst nochmals jene Räume in Erinnerung rufen, auf denen dies alles aufbaut und in denen sich der größte Teil abspielen wird, nämlich die

1. Euklidische Räume

1.1 Definition (Euklidische Räume)

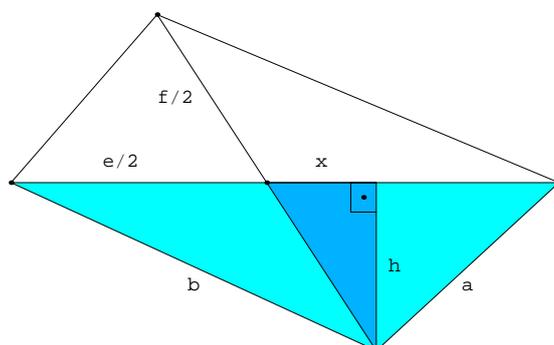
Zum Begriff des EUKLIDISCHEN RAUMS gelangt man, wenn man die Eigenschaften der Räume, in denen man (Euklidische) Geometrie treiben kann, zusammenfaßt. Natürlich bestehen diese Räume aus Punkten. Man kann orientierte Strecken zwischen je zwei Punkten betrachten und parallele, gleich lange und gleich orientierte Strecken zu VEKTOREN \vec{ab} zusammenfassen. Vektoren kann man mit reellen Skalaren strecken und man kann sie addieren, indem man ihre Repräsentanten aneinanderhängt. Vektoren bilden also einen VEKTORRAUM \vec{E} . Nach Wahl eines URSPRUNGS 0 , können wir Punkte a mit ihren Ortsvektoren $\vec{0a}$ identifizieren.

Wir wollen aber auch die LÄNGE von Strecken messen können und benötigen dafür eine Norm $|x|$ für Vektoren $x \in E$. Da diese Norm geometrisch relevant sein soll, sollte der Satz von Pythagoras gelten, und allgemeiner die PARALLELOGRAMMGLEICHUNG $|a-b|^2 + |a+b|^2 = 2(|a|^2 + |b|^2)$ für die Diagonalen $a+b$ und $a-b$ eines Parallelogramms mit erzeugenden Seiten-Vektoren a und b gelten. Daß der Satz von Pythagoras diese Gleichung impliziert sieht man wie folgt: Seien e und f die beiden Diagonalen des Parallelogramms und h die Höhe einer Ecke auf die Diagonale e und x der Abstand des Höhenfußpunktes zum Schnittpunkt der Diagonalen. Dann gilt nach Pythagoras

$$a^2 = \left(\frac{e}{2} - x\right)^2 + h^2, \quad b^2 = \left(\frac{e}{2} + x\right)^2 + h^2, \quad \text{und} \quad \left(\frac{f}{2}\right)^2 = h^2 + x^2,$$

und somit nach Addition und Einsetzen

$$a^2 + b^2 = 2\left(\frac{e}{2}\right)^2 + 2(x^2 + h^2) = 2\left(\frac{e}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{f}{2}\right)^2.$$



Die Parallelogramm-Gleichung gewährleistet, daß die POLARISIERUNGSFORMEL

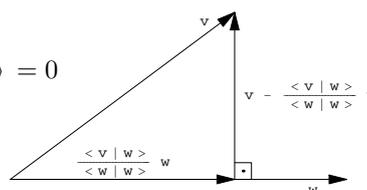
$$\langle x | y \rangle := \frac{1}{2}(|x + y|^2 - |x|^2 - |y|^2) \text{ oder auch } \langle x | y \rangle := \frac{1}{2}(|x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2)$$

eine Bilinearform, das sogenannte skalare Produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$, definiert, siehe [58, 6.2.2] Mit deren Hilfe können wir nicht nur die LÄNGE $|x| \geq 0$ eines Vektors x durch $|x|^2 = \langle x | x \rangle$ berechnen, sondern auch WINKEL $\sphericalangle xy \in [0, \pi]$ mittels $\cos(\sphericalangle xy) = \langle x | y \rangle / (|x||y|)$.

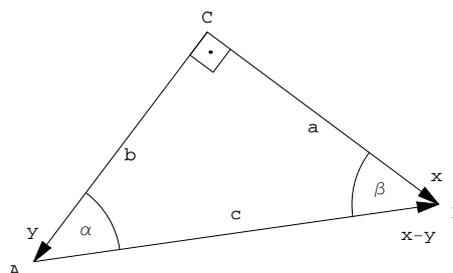
Insbesondere gilt: $x \perp y \Leftrightarrow \langle x | y \rangle = 0$ und $x \parallel y \Leftrightarrow |\langle x | y \rangle| = |x||y|$. Beachte, daß wegen

$$\left\langle v - \frac{\langle v | w \rangle}{|w|} \frac{w}{|w|} \mid w \right\rangle = \langle v | w \rangle - \frac{\langle v | w \rangle}{|w|^2} \langle w | w \rangle = 0$$

das innere Produkt $\langle v | w \rangle$ das Produkt aus der Länge $|w|$ des Vektors w mit der (mit Vorzeichen behafteten) Länge der normal-Projektion des Vektors v auf die von w erzeugte Gerade ist.



Wenn wir das von orthogonal stehenden Vektoren x und y erzeugte rechtwinklige Dreieck mit Kathetenlängen $a := |x|$, $b := |y|$, Hypothenusenlänge $c = |x - y|$ und Winkel α betrachten, so folgt damit umgekehrt der Satz von Pythagoras



$$\begin{aligned} c^2 &= |x - y|^2 = \langle x - y | x - y \rangle = \langle x | x \rangle - \langle x | y \rangle - \langle y | x \rangle + \langle y | y \rangle \\ &= |x|^2 - 2\langle x | y \rangle + |y|^2 = a^2 + b^2 \end{aligned}$$

sowie die üblichen Formel

$$\cos(\alpha) = \cos(\sphericalangle(x - y, -y)) = \frac{\langle x - y | -y \rangle}{|x - y| \cdot |-y|} = \frac{|y|^2 - \langle x | y \rangle}{|x - y| \cdot |y|} = \frac{b}{c}$$

also $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ und analog

$$\cos(\beta) = \frac{a}{c} \text{ mit } 0 \leq \beta \leq \frac{\pi}{2}$$

wegen Pythagoras also

$$\begin{aligned} \cos(\alpha)^2 + \cos(\beta)^2 &= \frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = 1 \Rightarrow \cos(\beta)^2 = 1 - \cos(\alpha)^2 = \sin(\alpha)^2 \\ &\Rightarrow \sin(\alpha) = \cos(\beta) = \frac{a}{c} \text{ und } \alpha + \beta = \pi. \end{aligned}$$

Da wir uns in dieser Vorlesung auf endlich dimensionale Geometrie beschränken wollen, setzen wir voraus, daß der Vektorraum E endlich dimensional ist.

Es sei eine (geordnete) Basis $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ von E gewählt. Dann läßt sich jeder Vektor $x \in E$ als $x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$ mit eindeutigen Koeffizienten $x^j \in \mathbb{R}$ (seinen Koordinaten) schreiben, d.h. die Abbildung

$$\mathbb{R}^n \ni \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \mapsto \sum_j x^j e_j \in E$$

ist ein Isomorphismus. Wir setzen

$$[x]_{\mathcal{E}} := \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n,$$

dann ist $x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}$ der dazu inverse Isomorphismus

$$E \cong \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto [x]_{\mathcal{E}}.$$

Ist die Basis zusätzlich orthonormal gewählt (i.e. $|e_i| = 1$ und $e_i \perp e_j$ für $i \neq j$), so gilt für die Koordinaten $x^k = \langle x | e_k \rangle$ (denn $\langle x | e_k \rangle = \langle \sum_i x^i e_i | e_k \rangle = \sum_i x^i \langle e_i | e_k \rangle = x^k$) und $|x|^2 = \sum_{k=1}^n (x^k)^2$ und das skalare Produkt hat die Form $\langle x | y \rangle = \sum_{k=1}^n x^k y^k$.

Mit S^{n-1} bezeichnet wir die $(n-1)$ -dimensionale SPHÄRE

$$S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}.$$

Es sei $A : E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen, $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ eine geordnete Basis von E und $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_m)$ eine geordnete Basis von F . Dann ist A durch seine Werte $A(e_j)$ eindeutig bestimmt, und diese ihrerseits durch ihre Koeffizienten a_j^k bzgl. der Basis \mathcal{F} , i.e. $A(e_j) = \sum_{k=1}^m a_j^k f_k$. Für ein allgemeines $x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$ ist

$$A(x) = A\left(\sum_j x^j e_j\right) = \sum_j x^j A(e_j) = \sum_j x^j \sum_k a_j^k f_k = \sum_j \left(\sum_k a_j^k x^j\right) f_k,$$

d.h.

$$[A(x)]_{\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{pmatrix} =: [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} \cdot [x]_{\mathcal{E}},$$

wobei der Multiplikationspunkt die Matrizenmultiplikation bezeichnet. Wir bezeichnen also die Matrix-Darstellung einer linearen Abbildung $A : E \rightarrow F$ bezüglich Basen $\mathcal{E} := (e_1, \dots, e_n)$ von E und $\mathcal{F} := (f_1, \dots, f_m)$ von F mit $[A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$.

Die Abbildung $A \mapsto [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$ liefert dann einen Isomorphismus des Raums $L(E, F)$ aller linearer Abbildungen von E nach F mit dem Raum der $n \times m$ -Matrizen $L(n, m)$:

$$L(E, F) \cong L(n, m), \quad A \mapsto [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$$

Ist insbesondere $E = F$ und $A = \text{id}_E =: 1$, dann ist $[A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}$ die Matrix, die als j -te Spalte die Koeffizienten von e_j bzgl. der Basis $(f_j)_j$ besitzt.

Ist zusätzlich $B : F \rightarrow G$ linear und $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_k)$ eine Basis von G , dann gilt:

$$[B \circ A]_{\mathcal{E}, \mathcal{G}} [x]_{\mathcal{E}} = [BAx]_{\mathcal{G}} = [B]_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} [Ax]_{\mathcal{F}} = [B]_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} [x]_{\mathcal{E}},$$

also

$$[B \circ A]_{\mathcal{E}, \mathcal{G}} = [B]_{\mathcal{F}, \mathcal{G}} \cdot [A]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}.$$

Setzt man insbesondere $A = \text{id}$ oder $B = \text{id}$ so erhält man mit weiteren Basen $\bar{\mathcal{E}}$ von E und $\bar{\mathcal{F}}$ von F :

$$[A]_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = [1]_{\bar{\mathcal{F}},\mathcal{F}} \cdot [A]_{\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{F}}} \cdot [1]_{\mathcal{E},\bar{\mathcal{E}}}.$$

Ist also R die lineare Basiswechsel-Abbildung $e_j \mapsto \bar{e}_j$ für $j = 1, \dots, n$, dann ist $[R]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [1]_{\bar{\mathcal{E}},\mathcal{E}}$ und somit $[R]_{\bar{\mathcal{E}},\mathcal{E}}^{-1} = [R^{-1}]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [1]_{\mathcal{E},\bar{\mathcal{E}}}$ und somit für $A \in L(E, E)$:

$$[A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [1]_{\bar{\mathcal{E}},\mathcal{E}} \cdot [A]_{\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{E}}} \cdot [1]_{\mathcal{E},\bar{\mathcal{E}}} = [R]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [A]_{\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{E}}} \cdot [R]_{\bar{\mathcal{E}},\mathcal{E}}^{-1},$$

also

$$[A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [R]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = [R]_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \cdot [A]_{\bar{\mathcal{E}},\bar{\mathcal{E}}}.$$

Mit der Abkürzung $[A]_{\mathcal{E}} := [A]_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ und $\bar{\mathcal{E}} = R(\mathcal{E})$ besagt dies:

$$[A]_{\mathcal{E}} \cdot [R]_{\mathcal{E}} = [R]_{\mathcal{E}} \cdot [A]_{R(\mathcal{E})}.$$

Wir werden diese Identität bei der Konstruktion der Eulerwinkel in [1.3](#) verwenden.

1.2 Bewegungen

Da wir im allgemeinen weder einen Ursprung noch ausgezeichnete Basis-Richtungen gegeben haben, sollten alle Konzepte, die wir in der (Differential-)Geometrie entwickeln werden, invariant unter Bewegungen sein. Als Bewegungen kennen wir Translationen und Drehungen (sowie deren Zusammensetzungen). Diese sind alle längenbewahrend. Ist umgekehrt eine längenbewahrende Abbildung (eine sogenannte ISOMETRIE) $f : E \rightarrow E$ gegeben und ist die Abbildung $R : E \rightarrow E$ durch $R(x) := f(x) - f(0)$ definiert, dann ist $R(0) = 0$ und für alle x, y ist

$$|R(x) - R(y)|^2 = |f(x) - f(y)|^2 = |x - y|^2$$

Insbesondere ist $|R(x)| = |x|$ (für $y = 0$) und somit gilt:

$$2\langle R(x), R(y) \rangle = |R(x)|^2 + |R(y)|^2 - |R(x) - R(y)|^2 = |x|^2 + |y|^2 - |x - y|^2 = 2\langle x, y \rangle.$$

Sei nun $(e_k)_{k=1, \dots, n}$ eine Orthonormalbasis von E . Es ist dann auch $(R(e_k))_{k=1, \dots, n}$ eine Orthonormalbasis, und für $x = \sum_{k=1}^n x^k e_k$ ist

$$R(x) = \sum_{k=1}^n \langle R(x), R(e_k) \rangle \cdot R(e_k) = \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \cdot R(e_k) = \sum_{k=1}^n x^k R(e_k)$$

Also ist R linear, i.e.

$$R \in L(E) := L(E, E) := \left\{ T : T \text{ ist eine lineare Abbildung von } E \text{ nach } E \right\}.$$

Weiters folgt aus $\langle R(x) | R(y) \rangle = \langle x | y \rangle$, daß $R^t \circ R = \text{id}_E$ und somit $1 = \det(\text{id}_E) = \det(R^t \circ R) = \det(R)^2$. Also liegt R in der ALLGEMEINEN LINEAREN GRUPPE

$$GL(E) := \{ T \in L(E) : T \text{ ist invertierbar} \} = \{ T \in L(E) : \det(T) \neq 0 \}$$

und sogar in der ORTHOGONALEN LINEAREN GRUPPE

$$O(E) := \{ T \in GL(E) : T^t \circ T = \text{id}_E \} = \{ T \in L(E) : \forall x, y : \langle Tx | Ty \rangle = \langle x | y \rangle \}.$$

Auch alle Spiegelungen gehören zu $O(E)$. Eigentliche Bewegungen sollten solche sein, wo man die Punkte im Laufe der Zeit t von der Anfangstellung für $t = 0$ in die Endstellung für $t = 1$ bewegen kann. Wir suchen also nicht nur eine Abbildung f , sondern eine "stetig" durch $t \in [0, 1]$ parametrisierte Familie von Bewegungen $f_t : E \rightarrow E$ mit $f_0 = \text{id}_E$ und f_1 der gegebene Endwert. Für Translationen $f_b : x \mapsto x + b$ erhalten wir eine stetige Kurve von Bewegungen durch $f_{tb} : x \mapsto x + tb$ und für Drehungen R_φ um den Winkel φ durch $R_{t\varphi}$. Allgemein sollte der translationsfreie Teil $R_t : x \mapsto f_t(x) - f_t(0)$ eine stetige Kurve in $O(E)$ sein. Da die

Determinantenfunktion als Polynom stetig ist auf $O(E) \subset L(E)$ und Werte in $\{\pm 1\}$ hat, muß sie konstant sein, d.h. $\det(R_1) = \det(R_0) = \det(\text{id}_E) = 1$. Die Abbildung $R \in O(E)$ ist in diesem Fall also sogar ein Element der SPEZIELLEN LINEAREN GRUPPE

$$SL(E) := \{T \in L(E) : \det(T) = 1\},$$

also eine Volums-erhaltendene lineare Abbildung, und somit liegt R auch in der SPEZIELLEN ORTHOGONALEN LINEAREN GRUPPE

$$SO(E) := \{T \in O(E) : \det(T) > 0\},$$

d.h. ist eine Drehung. Zur Übersicht folgendes Diagramm:

$$\begin{array}{ccccc} & & L(E) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R} \\ & & \uparrow & & \uparrow \\ SL(E) & \hookrightarrow & GL(E) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ SO(E) & \hookrightarrow & O(E) & \xrightarrow{\det} & \mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Für $E := \mathbb{R}^n$ mit der standard-Bilinearform bezeichnet man $SO(E)$ auch als $SO(n)$ und analog für die anderen oben erwähnten Gruppen. Um hingegen z.B. eine Spiegelung an einer Achse in der Ebene zu realisieren können wir die Ebene an dieser Achse im Raum um 180° drehen, z.B. ist die Spiegelung an der e_1 -Achse die Einschränkung auf $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2 \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ von

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \pi & -\sin \pi \\ 0 & \sin \pi & \cos \pi \end{pmatrix}$$

Dazu müssen wir allerdings den zugrundeliegenden Raum (in diesem Fall die Ebene) verlassen. Bewegungen, bei denen das nicht notwendig ist, sind also die sogenannten ORIENTIERUNGSERHALTENDEN Abbildung, d.h. der linearen Anteil R hat positive Determinante. Zwei geordnete Basen (e_k) und (f_k) heißen gleich orientiert, falls der Basiswechsel (das ist jene lineare Abbildung, welche e_k auf f_k für alle k abbildet) orientierungserhaltend ist. Eine ORIENTIERUNG auf E ist eine Äquivalenzklasse von gleich orientierten Basen. Es gibt also genau zwei Orientierungen auf E , und diese sind durch Angabe einer Basis festgelegt.

Umgekehrt werden wir weiter unten (siehe auch [24.45](#)) zeigen, daß jedes $R \in SO(n)$ sich durch eine glatte Kurve in $SO(n)$ mit id_E verbinden läßt, d.h. $SO(n)$ wegzusammenhängend ist. Wir haben damit gezeigt, daß die Bewegungen genau die Kompositionen von je einer Translation und einer Drehung sind.

Unter einer EIGENTLICHEN BEWEGUNG wollen wir also eine orientierungs- und längenerhaltende Abbildung verstehen. Diese ist von der Form $f : x \mapsto Ax + b$ mit $x \in E$ und $A \in SO(E)$. Die zugehörige Gruppe wird auch als $Ax + b$ -Gruppe bezeichnet, siehe [14.2](#).

Jede eigentliche Bewegung erhält also abgesehen von einer additiven vektoriiellen Konstante:

1. Längen (nach Definition);
2. das innere Produkt (wegen der Polarisierungsformel);
3. Winkel (wegen der Cosinusformel);
4. Linearkombinationen (d.h. ist linear);

5. Volumen (d.h. die Determinante);
6. Orientierung (wegen der Determinante).

1.3 Drehungen.

Wie sieht die $SO(n)$ nun aus:

$$O(1) = \{\pm 1\} \cong \mathbb{Z}_2, \quad SO(1) = \{1\}.$$

$O(2) \cong S^1$: (Siehe auch 14.19). Sei $A \in SO(2)$, dann ist $A = (Ae_1, Ae_2)$ und $(Ae_i)_{i=1}^2$ ist eine orthonormal Basis. Es ist also $Ae_j \in S^1 := \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 : a^2 + b^2 = 1\}$ und $Ae_1 \perp Ae_2$, d.h. wenn wir $Ae_1 = (a, b)$ setzen, so ist $Ae_2 = \lambda(-b, a)$ und wegen $|Ae_2| = 1 = |Ae_1|$ ist $\lambda = \pm 1$. Schließlich ist $1 = \det(A) = \lambda(a^2 + b^2) = \lambda$. Wir bezeichnen mit z^\perp denjenigen NORMALVEKTOR auf $z \neq 0$ der gleichen Länge wie $z \in \mathbb{R}^2$, und zwar jenen so daß (z, z^\perp) eine positiv orientierte Basis ist.

Bekanntlich können wir S^1 durch $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ mit $\varphi \in \mathbb{R}$ parametrisieren, also existiert zu $(a, b) \in S^1$ ein $\varphi \in \mathbb{R}$ mit $(a, b) = (\cos(\varphi), \sin(\varphi))$. Wir wollen nun zeigen, daß die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

eine Drehung R_φ der Punkte der Ebene um den Winkel φ beschreibt. Anstatt den Punkt z zu drehen und dann die Koordinaten $[R_\varphi(z)]_{\mathcal{E}}$ des Bild-Punktes im Bezug auf die gegebene Basis \mathcal{E} zu bestimmen, können wir aber auch die Basis um den Winkel $-\varphi$ drehen, und die Koordinaten $[z]_{\bar{\mathcal{E}}}$ des ursprünglichen Punktes bezüglich dieser neuen Basis $\bar{\mathcal{E}} := (R_\varphi)^{-1}(\mathcal{E})$ bestimmen.

Es ist mit $[z]_{\mathcal{E}} =: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ und $[z]_{\bar{\mathcal{E}}} =: \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$:

- (1) $x = x_1 + x_2$
- (2) $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$
- (3) $y = \bar{y}_2 \cos \varphi$
- (4) $x_2 = \bar{y}_2 \sin \varphi$
- (5) $\bar{x} = x_1 \cos \varphi$
- (6) $\bar{y}_1 = x_1 \sin \varphi$

und somit sukzessive

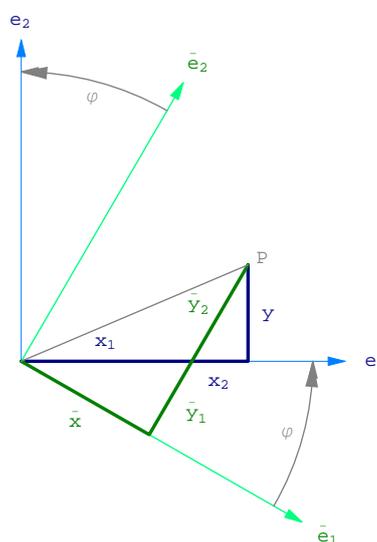
$$(3) \Rightarrow \bar{y}_2 = y \frac{1}{\cos \varphi}$$

$$(4) \Rightarrow x_2 = \bar{y}_2 \sin \varphi = y \tan \varphi$$

$$(5), (1) \Rightarrow \bar{x} = x_1 \cos \varphi = x \cos \varphi - y \sin \varphi$$

$$(6), (1) \Rightarrow \bar{y}_1 = x_1 \sin \varphi = x \sin \varphi - y \frac{\sin^2 \varphi}{\cos \varphi}$$

$$(2) \Rightarrow \bar{y} = x \sin \varphi + y \frac{1 - \sin^2 \varphi}{\cos \varphi} = x \sin \varphi + y \cos \varphi.$$



Beachte, daß wegen $R_\varphi \circ R_\psi = R_{\varphi+\psi}$ daraus die Additionstheoreme der Winkelfunktionen folgen:

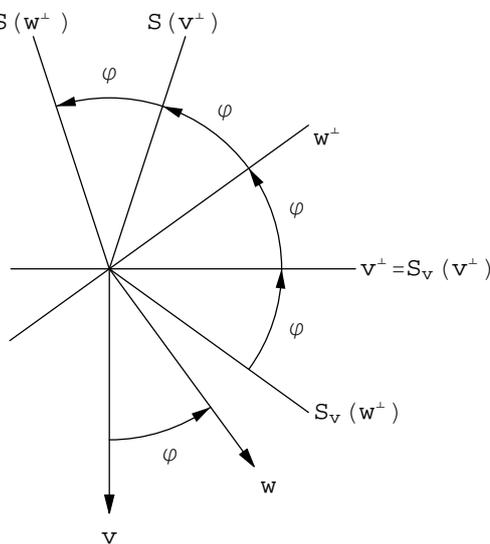
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos(\varphi + \psi) \\ \sin(\varphi + \psi) \end{pmatrix} &= R_{\varphi+\psi} \cdot e_1 = R_\varphi \cdot R_\psi \cdot e_1 = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot \cos \psi - \sin \varphi \cdot \sin \psi \\ \sin \varphi \cdot \cos \psi + \cos \varphi \cdot \sin \psi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Für jeden Vektor $z \neq 0$ im \mathbb{R}^2 erhalten wir somit den Normalvektor z^\perp durch eine Drehung $R_{\pi/2}$ um $\frac{\pi}{2}$ aus z :

$$z^\perp = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

Man beachte weiters, daß obiger Isomorphismus S^1 zu einer Gruppe macht. Kennen wir diese Gruppenmultiplikation? Ja es ist die Einschränkung der Multiplikation von $\mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$.

Da die Drehungen genau die Zusammensetzungen von je zwei Spiegelungen sind (Die Zusammensetzung $S = S_w \circ S_v$ zweier Spiegelungen S_v und S_w ist die Drehung um den doppelten Winkel ϕ der Spiegelungsachsen v^\perp und w^\perp), wird die Gruppe $O(2)$ der orthogonalen Abbildungen durch die Spiegelungen erzeugt. Genauer gesagt ist jedes $A \in O(2)$ Zusammensetzung von höchstens zwei Spiegelungen, und zwar ist jede Zusammensetzung einer geraden Anzahl von Spiegelungen eine Drehung und für jede ungerade Anzahl eine Spiegelung.



Nun zu $O(3)$. Für jedes $A \in O(E)$ bezeichnen wir mit $\text{Fix}(A) := \{x \in E : Ax = x\}$ die Menge der Fixpunkte, oder auch den Eigenraum zum Eigenwert 1. Wenn $F := \text{Fix}(A) = E$ ist, dann ist $A = \text{id}_E$.

Sei nun $\dim(\text{Fix}(A)) = \dim E - 1$, d.h. es existiert ein $0 \neq v \in E$ mit $F = \{v\}^\perp$. O.B.d.A. dürfen wir $|v| = 1$ annehmen. Da F invariant ist unter A , ist es auch F^\perp (denn sei $x' \in F^\perp$ und $x \in F$, dann ist $0 = \langle x' | x \rangle = \langle Ax' | Ax \rangle = \langle Ax' | x \rangle$, also $Ax' \in F^\perp$) und somit ist $Av = \pm v$. Wegen $v \notin F$ ist folglich $Av = -v$, und damit $x - \langle x | v \rangle v \in F$ für alle $x \in E$, denn

$$\langle x - \langle x | v \rangle v | v \rangle = \langle x | v \rangle - \langle x | v \rangle \cdot \langle v | v \rangle = 0.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} Ax &= A\left((x - \langle x | v \rangle v) + \langle x | v \rangle v\right) \\ &= x - \langle x | v \rangle v + \langle x | v \rangle (-v) \\ &= x - 2\langle x | v \rangle v. \end{aligned}$$

Dies beschreibt also eine Spiegelung an der $F = \{v\}^\perp$ -Ebene.

Sei nun $A \in SO(3)$ beliebig und sei $p(\lambda) := \det(\lambda - A)$ das charakteristische Polynom zu A . Es gilt:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\lambda - A) = \det((\lambda - A)^t) = \det(\lambda - A^t) = \det(\lambda - A^{-1}) \\ &= \det\left(-\lambda \left(\frac{1}{\lambda} - A\right) A^{-1}\right) = \det(-\lambda) \cdot \det\left(\frac{1}{\lambda} - A\right) \cdot \det A^{-1} \\ &= (-\lambda)^n p \cdot \left(\frac{1}{\lambda}\right) \cdot 1, \end{aligned}$$

d.h. p ist ein reziprokes Polynom und für $\lambda = 1$ und $n = 3$ erhalten wir $2p(1) = 0$. Somit ist 1 immer ein Eigenwert, d.h. $F \neq \{0\}$. Falls also $\dim F = 1$, d.h. $F = \langle v \rangle$ für einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 ist, dann ist auch die Ebene $\{v\}^\perp$ invariant, und A auf dieser eine Drehung, also ist A eine Drehung um die v -Achse.

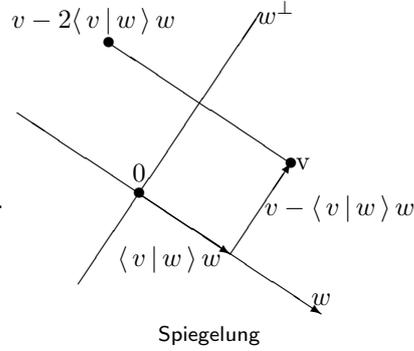
Für $A \in O(3)$ kann auch der Fall $F = \{0\}$ auftreten, z.B. die Punktspiegelung

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Dann betrachten wir das Bild $Av \neq v$ eines beliebigen $v \in S^2$ und die Spiegelung S an der Symmetrieebene $(Av - v)^\perp$. Diese bildet ebenfalls v auf Av ab und somit ist $v \in \text{Fix}(S^{-1} \circ A)$, also $S^{-1} \circ A$ eine Spiegelung oder eine Drehung und damit Zusammensetzung zweier Spiegelungen. Wir erhalten also auch für die Gruppe $O(3)$, daß sie von den Spiegelungen erzeugt wird, und zwar benötigen wir jeweils höchstens 3 Stück.

Mittels Induktion von oben nach der Dimension der Fixpunktraums kann man leicht zeigen, daß $O(n)$ von den Spiegelungen erzeugt wird (siehe auch [14.10](#)), und das allgemein höchstens n viele benötigt werden. Man kann obige Überlegungen über die Fixpunkt mengen auch dazu verwenden das ZENTRUM (also jene Elemente die mit allen anderen kommutieren) der Gruppe $O(n)$ zu bestimmen, siehe [24.28](#).

Insbesondere folgt, daß die $SO(n)$ wegzusammenhängend ist, denn jede Drehung läßt sich mit der Identität verbinden. Hingegen besitzt $O(n)$ zwei Zusammenhangskomponenten nämlich $SO(n)$ und $\{A \in O(n) : \det(A) = -1\} = S_v \cdot SO(n)$, wobei S_v eine beliebige Spiegelung bezeichnet.



Jeder Einheitsvektor $v \in S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}$ zusammen mit $z \in S^1$ bestimmt eine eindeutige Drehung mit Achse v und ‘Winkel’ z . Also erhalten wir eine surjektive Abbildung $S^2 \times S^1 \rightarrow SO(3)$. Diese Abbildung ist nicht injektiv, denn (v, z) und $(-v, -z)$ beschreibt die gleiche Drehung und alle $(v, 1)$ wirken als Identität. Die Zusammensetzung dieser Abbildung mit $\text{id} \times e^{i\pi} : S^2 \times [-1, 1] \rightarrow S^2 \times S^1$ faktorisiert über $S^2 \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{D}^3 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| \leq 1\}, (x, t) \mapsto tx$:

$$\begin{array}{ccc} S^2 \times [-1, 1] & \twoheadrightarrow & S^2 \times S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^3 & \dashrightarrow & SO(3) \end{array}$$

Beachte dazu, daß eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ genau dann über eine surjektive Abbildung $p : X \rightarrow \tilde{X}$ zu einer eindeutig bestimmten Abbildung $\tilde{f} : \tilde{X} \rightarrow Y$ faktorisiert, wenn $f(x_1) = f(x_2)$ aus $p(x_1) = p(x_2)$ folgt, denn die einzige mögliche Definition von \tilde{f} ist $\tilde{f}(\tilde{x}) = \tilde{f}(p(x)) = f(x)$, wobei wir ein x im Urbild von \tilde{x} bzgl. p gewählt haben. Diese Definition macht genau dann Sinn, hängt also nicht von der Wahl des x ab, wenn $f(x_1) = f(x_2)$ aus $p(x_1) = t\tilde{x} = p(x_2)$ folgt.

Beachte weiters, daß unter diesen Voraussetzungen \tilde{f} genau dann surjektiv ist, wenn f es ist.

Die untere Zeile obigen Diagramms ist bis auf die Identifizierung $z \sim -z$ für $z \in S^2 = \partial\mathbb{D}^3$ injektiv und ist eine Quotientenabbildung, die den projektiven Raum \mathbb{P}^3 , den wir in [16.12.5](#) und [11.9](#) kennenlernen werden, als Bild hat. Also ist $SO(3) \cong \mathbb{P}^3$.

Es gibt noch eine schönere Parametrisierung der $SO(3)$, und zwar mittels eines surjektiven Gruppen-Homomorphismuses $S^3 \rightarrow SO(3)$ mit Kern \mathbb{Z}_2 , siehe [14.19](#) und [24.40](#).

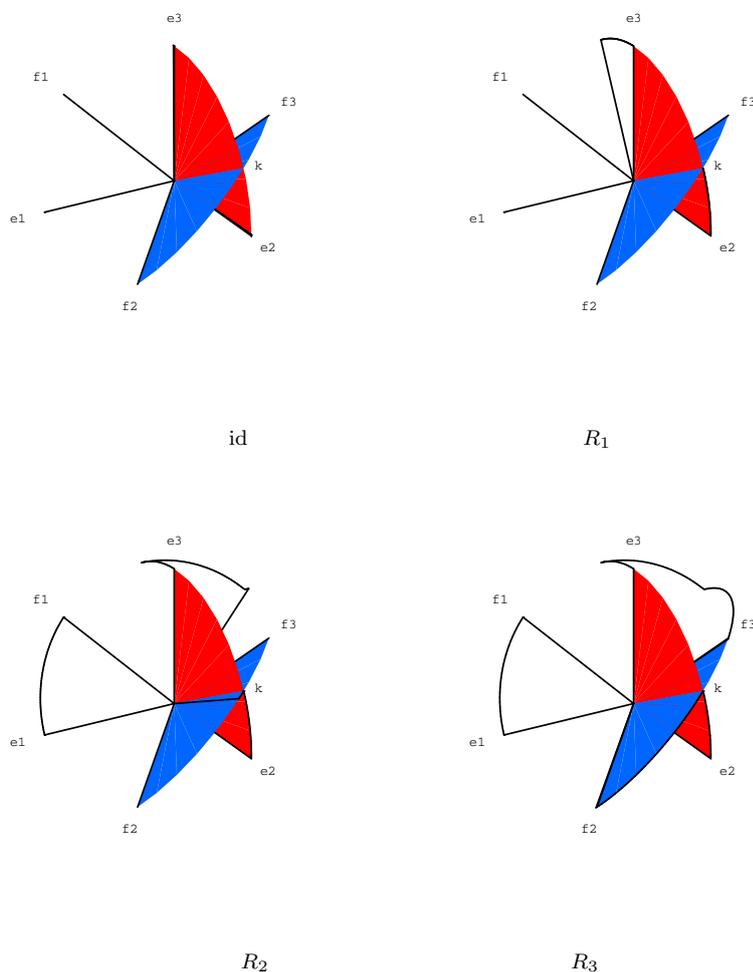
Kugelkoordinaten $(\varphi, \vartheta) \mapsto (\cos(\varphi) \cos(\vartheta), \sin(\varphi) \cos(\vartheta), \sin(\vartheta))$ liefern eine surjektive Abbildung $S^1 \times S^1 \rightarrow S^2$ und somit erhalten wir auch eine surjektive Abbildung $S^1 \times S^1 \times S^1 \rightarrow S^2 \times S^1 \rightarrow SO(3)$.

Eine geometrischere Beschreibung von Drehungen durch 3 Winkel ist die folgende Beschreibung $S^1 \times S^1 \times S^1 \rightarrow SO(3)$ durch Euler-Winkel:

Es sei $R \in SO(3)$ beliebig und $f_j := R(e_j)$ das Bild der Standard-Basis in \mathbb{R}^3 . Wir wollen nun R als Komposition von 3-Drehungen, die jeweils eine Koordinaten-Achse fix lassen, darstellen. Es genügt die Werte der Drehungen auf e_1 und e_2 zu beschreiben, denn $e_3 = e_1 \times e_2$ ist der eindeutig bestimmte Vektor, der normal auf e_1 und e_2 steht und zwar so, daß (e_1, e_2, e_3) positiv orientiert ist.

Um e_1 in f_1 zu drehen, müssen wir um eine Achse $k \in \{e_1\}^\perp \cap \{f_1\}^\perp = \langle \{e_2, e_3\} \rangle \cap \langle \{f_2, f_3\} \rangle$ drehen. Um nun noch e_2 in f_2 zu drehen, und dabei die Zuordnung $e_1 \mapsto f_1$ nicht zu zerstören, können wir zuerst um e_1 den Vektor e_2 nach k drehen und zuletzt um f_1 den Vektor k nach f_2 zu drehen.

$$\begin{array}{ccccccc} e_1 & \xrightarrow{R_1} & e_1 & \xrightarrow{R_2} & f_1 & \xrightarrow{R_3} & f_1 \\ e_2 & \xrightarrow{\quad} & k & \xrightarrow{\quad} & k & \xrightarrow{\quad} & f_2 \end{array} \quad \img alt="A blue ribbon diagram showing a sequence of three rotations: R1, R2, and R3. The diagram consists of three blue arrows pointing to the right, connected by a blue ribbon that loops around them." data-bbox="612 861 662 896"/>$$



Es seien also $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ die sogenannten Eulerwinkel von R , welche gegeben sind durch

$$\varphi_1 := \angle e_2 k; \quad \varphi_2 := \angle e_1 f_1; \quad \varphi_3 := \angle k f_2.$$

Es sei $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ die Standard-Basis, $\mathcal{E}' = R_1(\mathcal{E}) = (e_1, k, \dots)$ und $\mathcal{E}'' = (R_2 \circ R_1)(\mathcal{E}) = R_2(\mathcal{E}') = (f_1, k, \dots)$. Dann sehen die Matrizen-Darstellungen der zugehörigen Drehungen R_1 , R_2 und R_3 wie folgt aus:

$$[R_1]_{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}$$

$$[R_2]_{\mathcal{E}'} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix}$$

$$[R_3]_{\mathcal{E}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix}$$

Folglich ist nach dem am Ende von [1.1](#) Gezeigten:

$$\begin{aligned}
[R_3 \circ R_2 \circ R_1]_{\mathcal{E}} &= [R_3]_{\mathcal{E}} \cdot [R_2 \circ R_1]_{\mathcal{E}} = [R_2 \circ R_1]_{\mathcal{E}} \cdot [R_3]_{\mathcal{E}''} \\
&= [R_2]_{\mathcal{E}} \cdot [R_1]_{\mathcal{E}} \cdot [R_3]_{\mathcal{E}''} = [R_1]_{\mathcal{E}} \cdot [R_2]_{\mathcal{E}'} \cdot [R_3]_{\mathcal{E}''} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ 0 & \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & 0 & -\sin \varphi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \varphi_2 & 0 & \cos \varphi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi_3 & -\sin \varphi_3 \\ 0 & \sin \varphi_3 & \cos \varphi_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 \sin \varphi_3 & -\sin \varphi_2 \cos \varphi_3 \\ -\sin \varphi_1 \sin \varphi_2 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & -\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 - \cos \varphi_1 \sin \varphi_3 \\ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2 & \sin \varphi_1 \cos \varphi_3 + \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \sin \varphi_3 & \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \cos \varphi_3 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Grundlegendes über Kurven in der Ebene

In diesem Abschnitt klären wir den Begriff der Kurve und behandeln die ausgezeichneten Parametrisierungen nach der Bogenlänge.

Wir werden des öfteren das skalare Produkt $\langle \cdot | \cdot \rangle$ differenzieren müssen. Dazu rufen wir aus der Analysis (siehe [\[56, 6.1.7.1\]](#) und [\[56, 6.1.8\]](#)) das folgende Lemma in Erinnerung:

2.1 Lemma (Produktregel).

Es sei $l : E \rightarrow F$ eine lineare Abbildung und $b : E_1 \times E_2 \rightarrow E$ eine bilineare Abbildung zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen. Dann ist die Ableitung von l und die von b gegeben durch

$$l'(x)(v) = l(v) \quad \text{und} \quad b'(x_1, x_2)(v_1, v_2) = b(x_1, v_2) + b(v_1, x_2).$$

Beweis. In der Tat ist die (Richtungs-)Ableitung

$$\begin{aligned}
l'(x)(v) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} l(x + t \cdot v) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (l(x) + t \cdot l(v)) = l(v) \quad \text{und} \\
b'(x_1, x_2)(v_1, v_2) &= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} b((x_1, x_2) + t(v_1, v_2)) \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} (b(x_1, x_2) + t(b(x_1, v_2) + b(v_1, x_2)) + t^2 b(v_1, v_2)) \\
&= 0 + b(x_1, v_2) + b(v_1, x_2) + 0 \quad \square
\end{aligned}$$

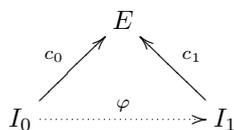
2.2 Definition (Kurven)

Eine PARAMETRISIERTE KURVE in einem Euklidischen Raum E ist eine Abbildung $c : I \rightarrow E$, wobei I ein (zumeist) offenes Intervall in \mathbb{R} und c genügend oft differenzierbar ist (wir wollen der Einfachheit halber immer unendlich oft differenzierbar (kurz gesagt glatt) voraussetzen) und $c'(t) \neq 0$ für alle $t \in I$ ist (c heißt dann auch regulär).

Da wir aber im wesentlichen nicht an der Parametrisierung der Kurve, sondern mehr an ihrer geometrischen Gestalt interessiert sind, geben wir noch folgende Definition:

Eine GEOMETRISCHE KURVE Γ ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei $c_0 : I_0 \rightarrow E$ und $c_1 : I_1 \rightarrow E$ ÄQUIVALENT heißen, falls ein DIFFEOMORPHISMUS $\varphi : I_0 \rightarrow I_1$ (d.h. φ bijektiv und sowohl φ als auch φ^{-1} glatt sind)

existiert, mit $c_1 \circ \varphi = c_0$.



Eine ORIENTIERTE GEOMETRISCHE KURVE ist eine Äquivalenzklasse von parametrisierten Kurven, wobei c_1 und c_2 ÄQUIVALENT heißen, falls ein φ wie oben existiert, welches zusätzlich $\varphi'(t) > 0$ für alle t erfüllt (d.h. streng monoton wachsend ist).

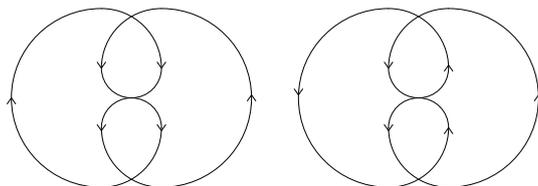
Also ist eine (orientierte) geometrische Kurve durch Angabe einer PARAMETRISIERUNG, d.h. einer parametrisierten Kurve in dieser Klasse, bereits festgelegt. Wir können uns im folgenden also darauf beschränken, Konzepte für parametrisierte Kurven zu entwickeln, sollten aber immer darauf achten, daß diese Konzepte wirklich geometrischer Natur sind, d.h. nicht von der Auswahl der Repräsentanten (= Parametrisierungen) abhängen und auch invariant unter Bewegungen sind.

Unter dem BILD EINER GEOMETRISCHEN KURVE versteht man das Bild einer (jeder) Parametrisierung.

2.3 Bemerkungen

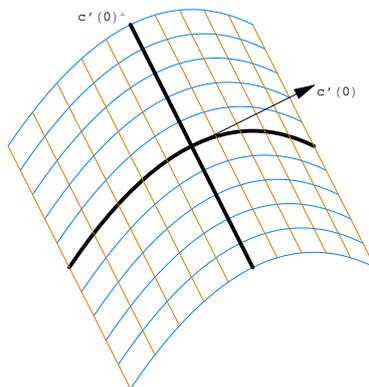
Verschiedene geometrische Kurven können sehr wohl das gleiche Bild besitzen:

1. Der Kreis: $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ wobei man jedes (offene) Intervall der Länge größer als 2π als Parameter Intervall verwenden kann, z.B. also $I_1 := \mathbb{R}$ oder $I_2 :=]0, 3\pi[$.
2. Ein weniger triviales Beispiel ist:



Wir können aber zeigen, daß der Parameter einer parametrisierten Kurve $c : I \rightarrow E$ lokal aus den Bildpunkten berechnet werden kann:

Sei dazu $0 \in I$ und $c'(0) \neq 0$. Wir definieren eine glatten Funktion $\Psi : I \times c'(0)^\perp \rightarrow E$ durch $\Psi(t, x) := c(t) + x$.



Für die partiellen Ableitungen von Ψ erhalten wir $\partial_1 \Psi(0, 0) = c'(0)$ und $\partial_2 \Psi(0, 0) \cdot v = v$. Die Ableitung $\Psi'(0, 0)$ ist somit gegeben durch

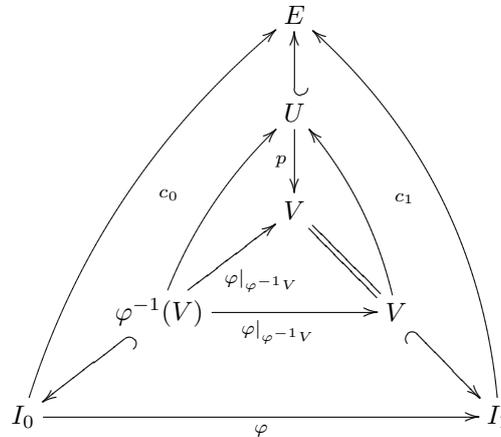
$$\Psi'(0, 0) : (s, v) \mapsto \partial_1 \Psi(0, 0) \cdot s + \partial_2 \Psi(0, 0) \cdot v = s \cdot c'(0) + v,$$

ein linearer Isomorphismus $\mathbb{R} \times c'(0)^\perp \rightarrow E$. In Koordinaten können wir das auch wie folgt sehen: Sei (f_1, \dots) eine Basis von $c'(0)^\perp$, dann ist die Jakobi-Matrix der Ableitung $\Psi'(0, 0)$ bzgl. der Basen $\mathcal{E} := ((1, 0), f_2, \dots)$ und $\mathcal{F} := (c'(0), f_2, \dots)$ gegeben durch

$$[\Psi'(0, 0)]_{\mathcal{E}, \mathcal{F}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \text{id}_{c'(0)^\perp} \end{pmatrix},$$

und somit invertierbar. Nach dem inversen Funktionensatz (siehe [10.2](#)) ist Ψ ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. es gibt eine offene Umgebung von 0 (o.B.d.A. der Form $I_1 \times V$ mit $I_1 \subseteq \mathbb{R}$ und $V \subseteq c'(0)^\perp$ offen) und eine offene Umgebung U von $c(0)$, so daß $\Psi : I_1 \times V \rightarrow U$ ein Diffeomorphismus ist. Da $\Psi(t, 0) = c(t)$ ist, gilt $\Psi^{-1}(c(t)) = (t, 0)$ für alle $t \in I_1$. Die Zusammensetzung $p := \text{pr}_1 \circ \Psi^{-1} : U \rightarrow I_1 \times V \rightarrow I_1$ ist dann eine lokale Linksinverse zu c .

Dies zeigt auch, daß wir den Parameterwechsel in der Definition geometrischer Kurven bloß als Homöomorphismus voraussetzen brauchen, denn er ist dann automatisch ein Diffeomorphismus. In der Tat, wenn für zwei parametrisierte Kurven $c_j : I_j \rightarrow E$ mit $(j \in \{0, 1\})$ ein Homöomorphismus $\varphi : I_0 \rightarrow I_1$ mit $c_1 \circ \varphi = c_0$ gegeben ist, dann finden wir für jedes $t_0 \in I_0$ eine Umgebung U von $c_0(t_0) = c_1(\varphi(t_0))$ und V von $\varphi(t_0)$ und ein glattes Linksinverses p zu $c_1 : V \rightarrow U$. Somit ist aber $\varphi = p \circ c_1 \circ \varphi = p \circ c_0$ auf $\varphi^{-1}(V)$ und somit glatt auf der (wegen der Stetigkeit von φ) offenen Umgebung $\varphi^{-1}(V)$ von t_0 .

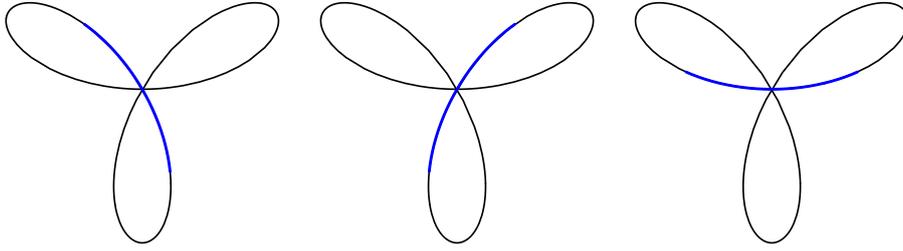


2.4 Definition (Punkte geometrischer Kurven)

Ein PUNKT auf einer geometrischen Kurve Γ ist eine Äquivalenzklasse von Paaren (c, t) mit $c \in \Gamma$ (d.h. $c : I \rightarrow E$ ist eine Parametrisierung von Γ) und $t \in I$, wobei $(c_1, t_1) \sim (c_2, t_2) \Leftrightarrow$ es existiert ein Diffeomorphismus $\varphi : I_2 \rightarrow I_1$ mit $c_2 = c_1 \circ \varphi$ und $\varphi(t_2) = t_1$.

Unter der VIELFACHHEIT eines Punktes versteht man die Kardinalität der Menge $\{t' : c(t') = c(t)\}$ für einen (jeden) Repräsentanten (c, t) . Ein Punkt mit Vielfachheit $1, 2, \dots$ heißt EINFACHER PUNKT, DOPPELPUNKT, \dots

Ein Punkt läßt sich am besten als ein Zweig der Kurve durch einen Bildpunkt vorstellen:



2.5 Die Tangente

Die TANGENTE an eine parametrisierte Kurve c im Punkt t ist die affine Gerade $c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(t)$.

Lemma.

Die Tangente ist ein geometrisches Konzept, d.h. reparametrisierungsinvariant und auch invariant unter Bewegungen.

Beweis. Zuerst zeigen wir die Invarianz unter Reparametrisierungen. Seien (c, t) und (\bar{c}, \bar{t}) zwei Repräsentanten des gleichen Punktes einer geometrischen Kurve, und φ ein zugehöriger Parameterwechsel, d.h. $\bar{c} = c \circ \varphi$ und $t = \varphi(\bar{t})$. Die Tangente von \bar{c} in \bar{t} ist die von c in t , denn $\bar{c}(\bar{t}) + \mathbb{R} \cdot \bar{c}'(\bar{t}) = c(\varphi(\bar{t})) + \mathbb{R} \cdot (c \circ \varphi)'(\bar{t}) = c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(\varphi(\bar{t})) \cdot \varphi'(\bar{t}) = c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(t)$ (man verwende $\mathbb{R} \cdot \varphi'(t) = \mathbb{R}$).

Nun zur Bewegungs-Invarianz: Sei $x \mapsto A(x) + b$ eine Bewegung und (c, t) ein Punkt einer Kurve. Die bewegte Kurve ist dann $\bar{c} : t \mapsto A(c(t)) + b$. Die bewegte Tangente von c in t ist die Tangente der bewegten Kurve \bar{c} , denn

$$\begin{aligned} A(c(t) + \mathbb{R} \cdot c'(t)) + b &= A(c(t)) + b + \mathbb{R} \cdot A(c'(t)) = \\ &= (A(c(t)) + b) + \mathbb{R} \cdot (A \circ c)'(t) = \bar{c}(t) + \mathbb{R} \cdot \bar{c}'(t) \end{aligned}$$

(man verwende die Kettenregel (siehe [56, 5.5.2] oder [56, 6.1.9]) und $A'(x)(v) = A(v)$ nach [2.1], da A linear ist). \square

2.6 Definition (Tangentialvektor und Länge)

Der EINHEITSTANGENTIALVEKTOR $\tau(t)$ im Punkt einer parametrisierten Kurve ist definiert durch $\tau(t) := \frac{c'(t)}{|c'(t)|}$. Für die Wohldefiniertheit verwenden wir die Regularität der Kurve, d.h. $c'(t) \neq 0$. Man beachte, daß auch dieser ein geometrisches Konzept für orientierte geometrische Kurven darstellt, dazu muß man allerdings beachten, daß $c(t)$ zum Euklidischen Raum und $c'(t)$ hingegen zum zugehörigen Vektorraum gehört.

Sei $c : I \rightarrow E$ eine Kurve, $[a, b] \subset I$ ein abgeschlossenes Teilintervall, und $\mathcal{Z} = \{a = t_0 < \dots < t_m = b\}$ eine Zerlegung, dann ist $L_a^b(c, \mathcal{Z}) := \sum_{i=1}^m |c(t_i) - c(t_{i-1})|$ die Länge des Polygonzuges durch die Punkte $c(t_i)$. Die LÄNGE der Kurve von a bis b ist definiert als $L_a^b(c) := \sup_{\mathcal{Z}} L_a^b(c, \mathcal{Z})$. Für $a > b$ sei $L_a^b(c) := -L_b^a(c)$ und es gilt: $L_{a_1}^{a_3}(c) = L_{a_1}^{a_2}(c) + L_{a_2}^{a_3}(c)$.

2.7 Lemma (Länge als Integral).

Sei $c : I \rightarrow E$ eine Kurve (C^1 würde genügen) und $[a, b] \subset I$, dann gilt: $L_a^b(c) < \infty$, $L_a^b(c) = \int_a^b |c'(t)| dt$ und $\frac{\partial}{\partial t} L_a^t(c) = |c'(t)|$.

Beweis. Siehe [56, 6.5.12]. Wir zeigen zuerst, daß die Länge endlich ist:

$$\begin{aligned} L_a^b(c, \mathcal{Z}) &= \sum_{i=1}^m |c(t_i) - c(t_{i-1})| \stackrel{\text{HS}}{=} \sum_{i=1}^m \left| \int_{t_{i-1}}^{t_i} c'(t) dt \right| \stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \\ &\leq \sum_{i=1}^m \int_{t_{i-1}}^{t_i} |c'(t)| dt = \int_a^b |c'(t)| dt \\ &\Rightarrow L_a^b(c) \leq \int_a^b |c'(t)| dt < \infty. \end{aligned}$$

Nun zur Ableitung: Es ist

$$\left| \frac{c(t+h) - c(t)}{h} \right| \leq \frac{L_a^{t+h}(c)}{h} = \frac{L_a^{t+h}(c) - L_a^t(c)}{h} \leq \frac{1}{h} \int_t^{t+h} |c'(t)| dt$$

Beide Seiten dieser Ungleichung konvergieren gegen $|c'(t)|$ für $h \rightarrow 0$, also auch der mittlere Term, d.h. $\frac{\partial}{\partial t} L_a^t(c) = |c'(t)|$.

Weiters gilt wiederum wegen des Hauptsatzes [56, 5.2.2] der Analysis $L_a^b(c) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} L_a^t(c) dt = \int_a^b |c'(t)| dt$. \square

Da die Bogenlänge unter Reparametrisierungen und Bewegungen invariant ist, ist sie ebenfalls ein geometrisches Konzept.

2.8 Definition (Parametrisierung nach der Bogenlänge)

Eine Parametrisierung c einer Kurve heißt **PARAMETRISIERUNG NACH DER BOGENLÄNGE** falls $|c'(t)| = 1$ für alle t . Für die Länge bezüglich solcher Parametrisierungen gilt also $L_a^b(c) = b - a$.

2.9 Satz (Bogenlängenparametrisierung).

Jede geometrische Kurve besitzt eine solche Parametrisierung. Je zwei Parametrisierungen nach der Bogenlänge der gleichen Kurve sind über einen Parameterwechsel der Form $t \mapsto \pm t + a$ äquivalent.

Beweis. Zur Existenz: Sei $c : I \rightarrow E$ eine Parametrisierung einer Kurve, a ein Punkt im Intervall I und $s(t) := L_a^t(c)$ die nach [2.7] differenzierbare Längenfunktion $s : \mathbb{R} \supset I \rightarrow \mathbb{R}$, mit $s'(t) = |c'(t)| > 0$. Insbesondere ist $s(I)$ zusammenhängend und somit wieder ein Intervall. Die Umkehrfunktion $\varphi : s(I) \rightarrow I$, $s \mapsto t(s)$ ist C^∞ , da die Norm C^∞ auf $E \setminus \{0\}$ ist. Die Parametrisierung $\bar{c} := c \circ \varphi$ ist die gesuchte Parametrisierung nach der Bogenlänge, da

$$\frac{d\bar{c}}{ds} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{1}{\frac{ds}{dt}} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{1}{|c'(t)|} = \frac{dc}{dt} \cdot \frac{1}{\left| \frac{dc}{dt} \right|}.$$

Zur Eindeutigkeit: Seien c und $c \circ \varphi$ zwei Parametrisierungen nach der Bogenlänge, dann gilt:

$$1 = |(c \circ \varphi)'(t)| = |c'(\varphi(t))| \cdot |\varphi'(t)| = |\varphi'(t)|,$$

da $|(c \circ \varphi)'(t)| = 1 = |c'(\varphi(t))|$. Es folgt: $|\varphi'(t)| = 1$ für alle t , also $\varphi' = \pm 1$. Wir erhalten schließlich $\varphi(t) = \varphi(a) + \int_a^t \varphi'(r) dr = \varphi(a) \pm t$. \square

Beispiel

Betrachten wir einen Kreis $c : t \mapsto r(\cos t, \sin t) + M$. Für $s(t) := L_0^t(c)$ erhalten wir $|c'(t)| = r$ und damit $s(t) = \int_0^t |c'(x)| dx = t \cdot r$. Also ist die Umkehrfunktion $s \mapsto t(s) = \frac{s}{r}$, und eine Bogenlängenparametrisierung ist $s \mapsto c(t(s)) = r(\cos \frac{s}{r}, \sin \frac{s}{r}) + M$. Der Einheits tangentialvektor ist $\tau(s) = (-\sin \frac{s}{r}, \cos \frac{s}{r})$.

2.10 Lemma.

Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c gilt $c''(s) \perp c'(s)$ für alle s .

Beweis. Wir differenzieren die Gleichung $1 = |c'(s)|^2 = \langle c'(s) | c'(s) \rangle$ laut [2.1](#) und erhalten $0 = \langle c''(s) | c'(s) \rangle + \langle c'(s) | c''(s) \rangle = 2\langle c'(s) | c''(s) \rangle$. Also gilt $c''(s) \perp c'(s)$ für alle s . \square

3. Krümmung von Kurven in der Ebene

In diesem Abschnitt wird der zentrale Begriff der Krümmung für ebene Kurven studiert.

3.1 Definition

Unter dem EINHEITSNORMALVEKTOR ν an eine parametrisierte Kurve c im Punkte t versteht man $\nu(t) := \tau(t)^\perp$, wobei wir für jeden Vektor $x \neq 0$ im \mathbb{R}^2 mit x^\perp den eindeutig bestimmten Vektor bezeichnen, welcher normal auf x steht, gleiche Länge wie x hat und links von x liegt (d.h. (x, x^\perp) ist positiv orientiert), siehe [1.3](#). Dieser ist also durch eine Drehung um $\frac{\pi}{2}$ von x gegeben:

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}^\perp = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x^2 \\ x^1 \end{pmatrix}.$$

Wie der Tangentialvektor ist auch der Einheitsnormalvektor ein geometrisches Konzept für orientierte Kurven. Das Paar (τ, ν) nennt man das BEGLEITBEIN der Kurve. Für jeden Parameterwert t ist $(\tau(t), \nu(t))$ eine gut zur Kurve passende Basis der Ebene.

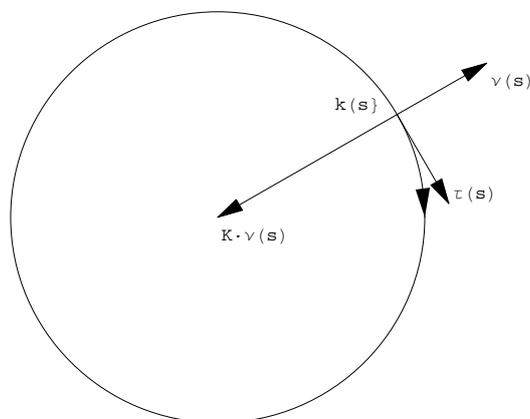
3.2 Definition (Krümmung)

Da ein Kreis umso stärker gekrümmt ist, je kleiner der Radius r ist, wollen wir als Maß für die Krümmung K des Kreises den Kehrwert $\frac{1}{r}$ verwenden. Falls der Kreis positiv orientiert ist, also eine Linkskurve beschreibt, sei seine Krümmung positiv, andernfalls negativ. Eine Gerade kann man als Grenzfall eines Kreises für $r \rightarrow \infty$ betrachten, und die entsprechende Definition für ihre Krümmung als $K := \frac{1}{\infty} = 0$ stimmt auch mit der Anschauung der nicht-Gekrümmtheit überein.

Wir können den Mittelpunkt M eines Kreises aus den ersten paar Ableitungen beim Punkt s einer Bogenlängenparametrisierung $k(s) = r(\cos \frac{\pm s}{r}, \sin \frac{\pm s}{r}) + M$ errechnen:

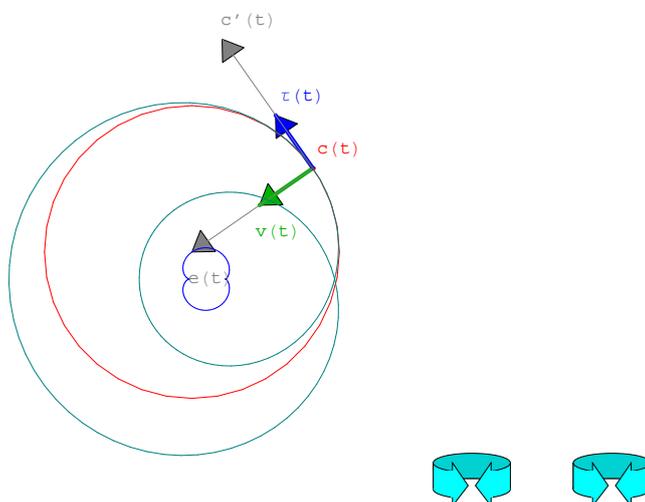
$$\begin{aligned} k'(s) &= \pm(-\sin \frac{\pm s}{r}, \cos \frac{\pm s}{r}) = \tau(s), & k''(s) &= -\frac{1}{r}(\cos \frac{\pm s}{r}, \sin \frac{\pm s}{r}) \Rightarrow \\ \Rightarrow |k''(s)| &= \frac{1}{r} = \pm K \quad \text{und} \end{aligned}$$

$$M = k(s) - r(\cos \frac{\pm s}{r}, \sin \frac{\pm s}{r}) = k(s) + k''(s) \cdot r^2 = k(s) + \frac{k''(s)}{|k''(s)|^2}.$$



Sei allgemeiner c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c''(s) \neq 0$. Unter dem KRÜMMUNGSKREIS im Punkt s versteht man jenen Kreis k , welcher c bei s von Ordnung 2 berührt, d.h. $c(s) = k(s)$, $c'(s) = k'(s)$ und $c''(s) = k''(s)$. Der Mittelpunkt dieses Kreises ist wegen obiger Formel durch $M = k(s) + \frac{k''(s)}{|k''(s)|^2} = c(s) + \frac{c''(s)}{|c''(s)|^2}$ gegeben und sein Radius ist $r = \frac{1}{|c''(s)|}$. Mittels dieses Ansatzes folgt auch seine Existenz.

Die Kurve der Krümmungsmittelpunkte (wohldefiniert, wo $|c''| \neq 0$) heißt EVOLUTEN. Unter der KRÜMMUNG $K(s)$ der Kurve c bei s versteht man die Krümmung des Krümmungskreises.



Für den Krümmungskreis gilt: $c''(s) = k''(s) = K(s) \cdot \nu(s)$, wo $\nu(s)$ die Einheitsnormale an k bzw. c und $K(s)$ die Krümmung ist. Nach dem Newtonschen Gesetz "Kraft = Masse \times Beschleunigung" mißt $K(s)$ die (skalare Größe der) Kraft, die nötig ist, um den, mit skalarer Geschwindigkeit $|c'(s)| = 1$ bewegten Punkt (mit Einheitsmasse) auf der Kurve zu halten.

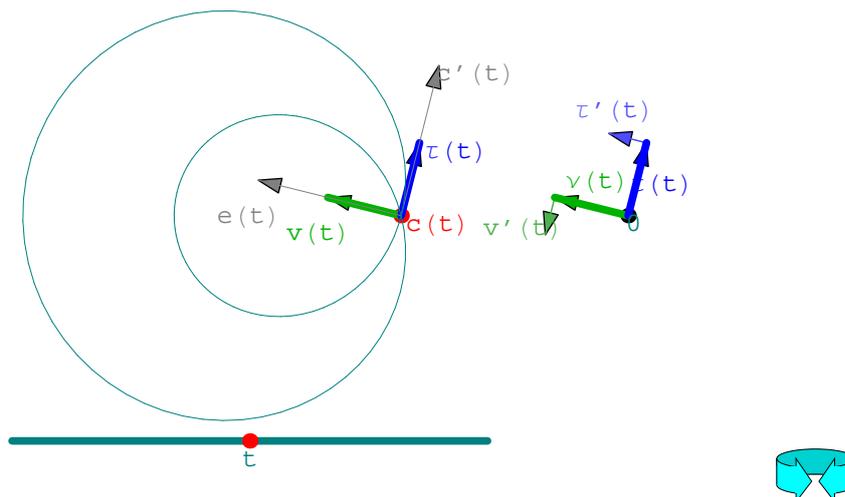
Wir können also K als den Koeffizienten von $\tau' = c''$ bzgl. des zweiten Vektors ν des Begleitbeins (τ, ν) auffassen. Wenn wir diese Gleichung $\tau' = K \cdot \nu$ mit einer Rotation R um $\pi/2$ drehen, dann erhalten wir

$$\nu' = R(\tau)' = R(\tau') = R(K \cdot \nu) = K \cdot R(\nu) = K \cdot R^2(\tau) = -K \cdot \tau.$$

Zusammen sind das die sogenannten FRENET'SCHEN ABLEITUNGSGLEICHUNGEN:

$$\begin{aligned}\tau' &= K \cdot \nu \\ \nu' &= -K \cdot \tau,\end{aligned}$$

die die Ableitung des Begleitbeins in der Basis, welche durch das Begleitbein gegeben ist, ausdrücken.



Mit $c(s) =: (x(s), y(s))$ ergibt sich folgende explizite Formel für die Krümmung

$$\begin{aligned}K(s) &= \langle K(s) \cdot \nu(s) \mid \nu(s) \rangle = \langle c''(s) \mid \nu(s) \rangle \\ &= \langle c''(s) \mid \tau(s)^\perp \rangle = \det(c'(s), c''(s)),\end{aligned}$$

denn

$$\det(x, y) = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1 = \left\langle \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \mid \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \langle y \mid x^\perp \rangle.$$

Falls c nicht nach der Bogenlänge parametrisiert ist, sei $t \mapsto s(t)$ die Bogenlängenfunktion und $\bar{c} = c \circ s^{-1}$ die Reparametrisierung nach der Bogenlänge. In diesem Fall erhalten wir für die Krümmung:

$$\begin{aligned}K_{\bar{c}}(s) &= \det(\bar{c}'(s), \bar{c}''(s)) = \det\left(c'(t) \frac{1}{s'}, (c''(t) - c'(t) \frac{1}{s'} s'') \frac{1}{(s')^2}\right) \\ &= \frac{1}{(s')^3} \det(c'(t), c''(t)) + 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow K_c(t) &= K_{\bar{c}}(s(t)) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{|c'(t)|^3} = \frac{\langle c'(t)^\perp \mid c''(t) \rangle}{|c'(t)|^3},\end{aligned}$$

wobei wir Folgendes verwendeten: $c = \bar{c} \circ s$, $c' = (\bar{c}' \circ s) s'$, $c'' = (\bar{c}'' \circ s) (s')^2 + (\bar{c}' \circ s) s''$.

Wir wollen nun zeigen, daß der Krümmungskreis unter Bewegungen invariant ist. Dazu genügt es, die Invarianz des Mittelpunktes

$$M(s) = c(s) + \frac{c''(s)}{|c''(s)|^2} = c(s) + \frac{K(s)\nu(s)}{|K(s) \cdot 1|^2} = c(s) + \frac{\nu(s)}{K(s)}$$

zu zeigen: Sei c nach der Bogenlänge parametrisiert und sei $\bar{c}(t) = R(c(t)) + a$ die durch $x \mapsto Rx + a$ bewegte Kurve. Die Krümmung von \bar{c} ist dann:

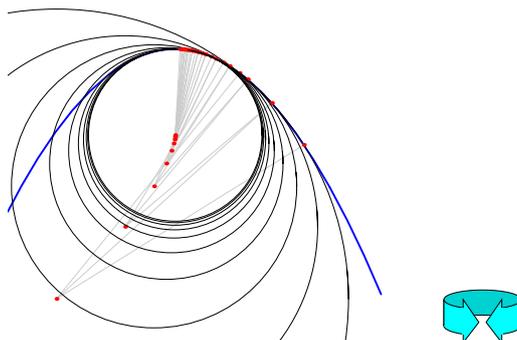
$$\begin{aligned}K_{\bar{c}}(t) &= \det(\bar{c}'(t), \bar{c}''(t)) = \det(R(c'(t)), R(c''(t))) \\ &= \det(R(c'(t), c''(t))) = \det R \cdot \det(c'(t), c''(t)) = K_c(t),\end{aligned}$$

da $\det R = +1$. Somit ist die Krümmung invariant und damit auch der Mittelpunkt.

3.3 Lemma (Krümmungskreis als Limes).

Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve, $c''(s) \neq 0$. Für je drei verschiedene Punkte s_1, s_2, s_3 sei $M(s_1, s_2, s_3)$ der Mittelpunkt des Kreises durch die Punkte $c(s_1), c(s_2), c(s_3)$ und $M(s)$ der Mittelpunkt des Krümmungskreises von c .

Dann gilt: $M(s_1, s_2, s_3) \rightarrow M(s)$ für $s_1, s_2, s_3 \rightarrow s$. Gleiches gilt auch für die Radien.



Beweis von 3.3. Die Streckensymmetrale zwischen $c(t_1)$ und $c(t_2)$ ist in Normalvektorform gegeben durch

$$\left\{ z : \left\langle c(t_2) - c(t_1) \mid z - \frac{c(t_1) + c(t_2)}{2} \right\rangle = 0 \right\}$$

und die Streckensymmetrale zwischen $c(t_2)$ und $c(t_3)$ in Parameterform durch

$$\left\{ \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \lambda \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp : \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Mittelpunkt $M(t_1, t_2, t_3)$ des Kreises durch die 3 Punkte $c(t_1)$, $c(t_2)$ und $c(t_3)$ liegt somit am Schnittpunkt der beiden Streckensymmetralen, d.h. ist gegeben durch

$$M(t_1, t_2, t_3) := \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \lambda \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp,$$

wobei λ Lösung der Gleichung

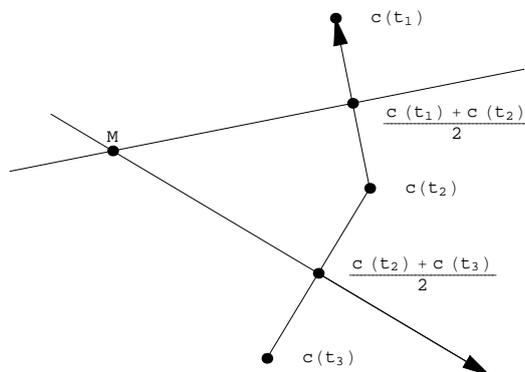
$$0 = \left\langle c(t_2) - c(t_1) \mid \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \lambda \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp - \frac{c(t_1) + c(t_2)}{2} \right\rangle,$$

also

$$\lambda = \frac{\left\langle c(t_2) - c(t_1) \mid c(t_1) - c(t_3) \right\rangle}{2 \det(c(t_3) - c(t_2), c(t_2) - c(t_1))}$$

ist, d.h.

$$M(t_1, t_2, t_3) = \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \frac{\left\langle c(t_2) - c(t_1) \mid c(t_1) - c(t_3) \right\rangle}{2 \det(c(t_3) - c(t_2), c(t_2) - c(t_1))} \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp.$$



Wegen

$$\frac{c(t_2) - c(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} c'(t) dt = \int_0^1 c'(t_1 + s(t_2 - t_1)) ds$$

$$\frac{\frac{c(t_1) - c(t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2}}{t_1 - t_3} = \int_0^1 \int_0^1 c''(t_2 + s_1(t_3 - t_2) + s_2 s_1(t_1 - t_3)) ds_2 ds_1$$

gilt

$$c(t_1), c(t_2), c(t_3) \rightarrow c(t)$$

$$\frac{c(t_2) - c(t_1)}{t_2 - t_1}, \frac{c(t_1) - c(t_3)}{t_1 - t_3}, \frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2} \rightarrow c'(t)$$

$$\left(\frac{c(t_1) - c(t_2)}{t_1 - t_2} - \frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2} \right) / (t_1 - t_3) \rightarrow c''(t)$$

für $t_1, t_2, t_3 \rightarrow t$, also

$$M(t_1, t_2, t_3) = \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} + \frac{\langle c(t_2) - c(t_1) \mid c(t_1) - c(t_3) \rangle}{2 \det(c(t_3) - c(t_2), c(t_2) - c(t_1))} \cdot (c(t_3) - c(t_2))^\perp$$

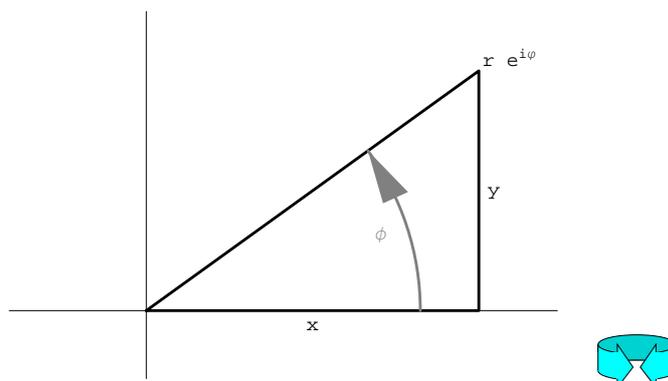
$$= \frac{c(t_2) + c(t_3)}{2} +$$

$$+ \frac{\langle \frac{c(t_2) - c(t_1)}{t_2 - t_1} \mid \frac{c(t_1) - c(t_3)}{t_1 - t_3} \rangle}{2 \det\left(\frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2}, \frac{c(t_2) - c(t_1)}{(t_2 - t_1) \cdot (t_1 - t_3)} - \frac{c(t_3) - c(t_2)}{(t_3 - t_2) \cdot (t_1 - t_3)}\right)} \cdot \left(\frac{c(t_3) - c(t_2)}{t_3 - t_2}\right)^\perp$$

$$\rightarrow c(t) + \frac{\langle c'(t) \mid c'(t) \rangle}{2 \det(c'(t), c''(t))} \cdot (c'(t))^\perp = c(t) + \frac{1}{K(t)} \nu(t). \quad \square$$

3.5 Polarkoordinaten versus kartesische Koordinaten

Aus den Grundvorlesungen kennen wir die Abbildung p , die den POLARKOORDINATEN $(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ die KARTESISCHEN KOORDINATEN $(x, y) := (r \cos \varphi, r \sin \varphi) = r \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ zuordnet.



Wir wollen nun umgekehrt Punkten im \mathbb{R}^2 , gegeben in kartesischen Koordinaten, zugehörige Polarkoordinaten auf differenzierbare Weise zuordnen.

Die Ableitung von p ist durch $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}$ gegeben und ist für $r = 0$ nicht invertierbar. Also ist dieses Problem lokal um $0 \in \mathbb{C}$ nicht lösbar, deshalb nehmen wir 0 aus, d.h. wir betrachten die Einschränkung von $p : (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Diese Einschränkung ist nach dem Inversen-Funktionensatz lokal ein Diffeomorphismus. Sie ist aber nur lokal injektiv. Um sie global injektiv zu machen schränken wir sie weiter zu einer Abbildung $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein. Noch immer ist der Winkel φ aber nur bis auf ein ganzzahliges Vielfaches von 2π festgelegt. Also müssen wir φ auf ein Intervall der Länge 2π beschränken - damit wir leicht von Differenzierbarkeit sprechen können - auf ein offenes Intervall. Bei gegebenem $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ sei dieses Intervall $]\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi[$. Dann ist $p : \mathbb{R}^+ \times]\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi[\rightarrow \mathbb{C} \setminus \{te^{i\varphi_0} : t \leq 0\}$ ein Diffeomorphismus. Das Bild bzgl. p ist die (komplexe) Ebene ohne einen Halbstrahl. Wir können sogar explizit die Umkehrfunktion $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\varphi = \arctan(\frac{y}{x})$ bzw. $\varphi = \operatorname{arccot}(\frac{x}{y})$ angeben, wenn wir für \arctan und arccot den passenden Zweig wählen.



3.6 Lemma (Krümmung als Richtungsänderung).

Sei $c : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit $c' : I \rightarrow S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Sei $s_0 \in I$ und $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ für s nahe s_0 eine differenzierbare Lösung von $e^{i\theta(s)} = c'(s)$. Dann folgt $K(s) = \theta'(s)$. Das bedeutet, daß die Krümmung K die infinitesimale Änderung des Winkels der Tangente mißt.

Beweis. Durch Differenzieren der Gleichung $c'(s) = e^{i\theta(s)}$ erhält man $c''(s) = i\theta'(s)e^{i\theta(s)} = \theta'(s)ic'(s) = \theta'(s)\nu(s)$, das ist aber die implizite Gleichung für die Krümmung $\Rightarrow K(s) = \theta'(s)$. \square

Zusammenfassung

Die Krümmung einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve kann aufgefaßt werden als:

1. Der Kehrwert $\frac{1}{r} = |c''(s)| = |K(s)|$ des Radius r des Krümmungskreises, d.h. jenes Kreises, der c am besten approximiert, versehen mit einem Vorzeichen welches sich daraus ergibt ob der Krümmungskreis positiv oder negativ orientiert ist, siehe [3.2](#).
2. Der skalare Wert der Beschleunigung $c''(s) = K(s)\nu(s)$, siehe [3.2](#).

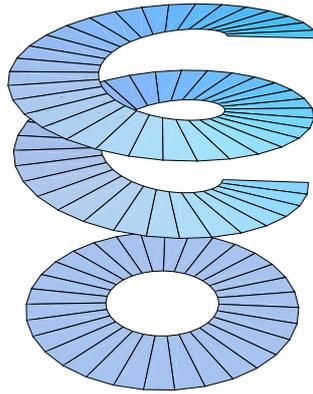
3. Die infinitesimale Änderung des Winkels der Tangente $K(s) = \theta'(s)$, nach Lemma 3.6.

3.7 Polarkoordinaten als Überlagerung

Wir wollen nun das globale Verhalten der Polarkoordinaten untersuchen. Sei $p : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$ wie in 3.5 die Abbildung $(r, \varphi) \mapsto re^{i\varphi}$, die Polarkoordinaten kartesische Koordinaten zuordnet.

Definition.

In der Topologie nennt man eine stetige Abbildung $p : X \rightarrow Y$ zwischen Hausdorffräumen eine **ÜBERLAGERUNG**, falls eine Überdeckung von Y mit offenen sogenannten **TRIVIALISIERENDEN MENGEN** $U \subset Y$ existiert, sodaß $p^{-1}(U)$ die disjunkte Vereinigung von offenen Teilmengen U_j , genannt **BLÄTTER**, mit $j \in J$ ist und $p|_{U_j} : U_j \rightarrow U$ ein Homöomorphismus für alle U und alle $j \in J$ ist. Falls die Kardinalität κ der Indexmenge J nicht von U abhängt, bezeichnet man $p : X \rightarrow Y$ auch als eine κ -**BLÄTTRIGE ÜBERLAGERUNG**.



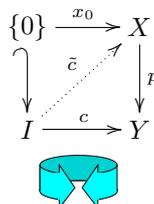
Das Urbild $p^{-1}(U)$ ist dann die topologische Summe seiner Blätter, denn eine Teilmenge $V \subseteq p^{-1}(U)$ ist genau dann offen, wenn $V \cap U_j$ offen ist für alle $j \in J$.

Sei $c : I \rightarrow X$ eine stetige Kurve für welche $(p \circ c)(I)$ ganz in einer trivialisierenden Umgebung U liegt, so ist $c(I)$ ganz in einem Blatt über U enthalten, denn die zusammenhängende Menge $c(I)$ kann nicht verschiedene Summanden der topologischen Summe $\bigsqcup_{j \in J} U_j$ treffen.

Längs Überlagerungen lassen sich Kurven liften:

3.8 Lemma (Liftung von Kurven).

Sei $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung, $c : I \rightarrow Y$ eine stetige Kurve mit $0 \in I$ und sei $x_0 \in p^{-1}(c(0))$. Dann existiert eine eindeutige stetige Kurve $\tilde{c} : I \rightarrow X$ genannt **LIFT** von c mit $p \circ \tilde{c} = c$ und $\tilde{c}(0) = x_0$.



Beweis. Zuerst die Eindeutigkeit: Seien c_1 und c_2 zwei Lifts. Dann ist $0 \in T := \{t \in I : c_1(t) = c_2(t)\}$ und T ist abgeschlossen. Zu einem $t \in T$ sei U eine trivialisierende Umgebung von $c(t)$ und U_0 das Blatt über U , welches $c_1(t) = c_2(t)$ enthält. Da c_1 und c_2 stetig sind, haben sie für t' nahe t Werte in U_0 , und da $p : U_0 \rightarrow U$ eine Bijektion ist, ist $c_1(t') = (p|_{U_0}^{-1} \circ c)(t') = c_2(t')$ für diese t' . Also ist T offen. Weil I ein Intervall und somit zusammenhängend ist, stimmt T mit I überein, d.h. $c_1 = c_2$.

Nun zur Existenz: Sei

$$T := \{t \in I : \text{Ein Lift } \tilde{c} \text{ von } c \text{ auf der Strecke von } 0 \text{ nach } t \text{ existiert}\}.$$

Klarerweise ist $0 \in T$ und T ein Intervall. Wir zeigen, daß T keinen Rand in I besitzt. Angenommen $t \in I$ wäre ein Randpunkt von T , o.B.d.A. $t \geq 0$. Sei U eine trivialisierende Umgebung von $c(t)$, dann ist $c(t') \in U$ für t' nahe t . Sei U_0 jenes (eindeutige) Blatt über U welches $\tilde{c}(t')$ enthält für alle hinreichend nahen $t' < t$ (bzw. im Falle $t = 0$ den Punkt x_0). Dann läßt sich \tilde{c} durch $p|_{U_0}^{-1} \circ c$ lokal um t (eindeutig) fortsetzen, und somit ist t kein Randpunkt von T ; ein Widerspruch. \square

3.9 Folgerung.

Sei $c : I \rightarrow S^1$ eine stetige Kurve, dann existiert ein stetiger Lift $\tilde{c} : I \rightarrow \mathbb{R}$, d.h. $e^{i\tilde{c}(t)} = c(t)$ für alle $t \in I$. Ist $t_0 \in I$, so ist \tilde{c} eindeutig durch Angabe von $\tilde{c}(t_0) \in \mathbb{R}$ mit $e^{i\tilde{c}(t_0)} = c(t_0)$ bestimmt. Falls c glatt ist, so auch \tilde{c} .

Beweis. Offensichtlich beschreibt $\theta \mapsto e^{i\theta}$ jene Überlagerung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$, die aus der in [3.5](#) durch Polarkoordinaten gegebenen Überlagerung $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch Einschränkung auf $\mathbb{R} \cong \{1\} \times \mathbb{R} = p^{-1}(S^1) \rightarrow S^1$ gegeben ist. Also haben wir die Liftungseigenschaft nach [3.8](#). Die Glattheit von \tilde{c} folgt, da p ein lokaler Diffeomorphismus ist. \square

2. Beweis. Wir geben nun einen zweiten direkteren Beweis, der auch gleichzeitig die Glattheit des Liftes liefert.

Zuerst eine Vorbemerkung: Sei \tilde{c} ein Lift von c . Wegen der Stetigkeit von c existiert ein $\delta > 0$ mit $|c(t) - c(t_0)| < 2$ für alle $|t - t_0| < \delta$. Dann ist $|\tilde{c}(t) - \tilde{c}(t_0)| < \pi$ für diese t , denn wäre es größer als π für ein t so nach dem Zwischenwertsatz auch gleich π für ein anderes t und somit $c(t) = -c(t_0)$ also $|c(t) - c(t_0)| = 2$, Widerspruch. Also ist $\tilde{c}(t) = \varphi(c(t))$ für $|t - t_0| < \delta$, mit φ wie in [3.5](#) und Anfangswert $\varphi_0 = \tilde{c}(t_0)$.

Nun zeigen wir die Eindeutigkeit lokaler Lifts: Seien $c_j : I_j \rightarrow \mathbb{R}$ zwei Lifts von $c|_{I_j}$ für $j = 1, 2$, wobei $I_j \ni t_0$ ein offenes Teilintervall von I ist. Sei $X := \{t \in I_1 \cap I_2 : c_1(t) = c_2(t)\}$. Wir müssen zeigen, daß $X = I_1 \cap I_2$. Die Menge X ist nicht leer, da $t_0 \in X$, und sie ist abgeschlossen in $I_1 \cap I_2$, da sie durch eine stetige Gleichung gegeben ist. Sei nun $t \in X$, dann ist $c_j(t') = \varphi(c(t'))$ für t' nahe t , wegen der Vorbemerkung. Also ist X auch offen. Da das offene Intervall $I_1 \cap I_2$ zusammenhängend ist, folgt $X = I_1 \cap I_2$.

Schließlich die Existenz: Sei X die Menge der $t \in I$, bis zu welchen ein (eindeutiger) Lift existiert, genauer: $t \in X \Leftrightarrow$ ein Lift $\tilde{c} : J \rightarrow \mathbb{R}$ von $c|_J$ existiert für ein offenes Teilintervall J von I , welches t und t_0 enthält. Die Menge X ist nicht leer da $t_0 \in X$, denn $\varphi \circ c$ ist ein lokaler Lift von c , wo φ wie in [3.5](#) mit Anfangswinkel $\tilde{c}(t_0)$ ist. Sie ist nach Konstruktion offen, da die Intervalle J als offen vorausgesetzt sind. Sie ist auch abgeschlossen in I : Sei nämlich $t \in I$ im Abschluß von X . Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von c auf kompakten Teilintervallen von I existiert ein $\delta > 0$ mit $|c(t') - c(t'')| < 2$ für $|t' - t''| < \delta$ mit $t' \in [t_0, t]$. Sei $t_1 \in X$ mit $|t_1 - t| < \delta$. Dann sind \tilde{c} und $\varphi \circ c$ lokale Lifts um t_1 von c , wobei φ wie in [3.5](#) mit Anfangswert $\tilde{c}(t_1)$ bei t_1 ist. Also stimmen sie wegen der Eindeutigkeit überein und ergeben zusammen einen lokalen Lift, der auf einer Umgebung von $[t_0, t]$ definiert

ist, i.e. $t \in X$. Da I zusammenhängend ist, folgt $X = I$, also existiert ein Lift auf ganz I .

3.10 Liften mittels des Kurvenintegrals

Eine dritte Methode den Lift \bar{c} für glattes c zu erhalten, verwendet das Kurvenintegral und die dazu notwendigen Differentialformen (mit denen wir uns in Kapitel [5](#) und [6](#) noch sehr eingehend beschäftigen werden):

Sei $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$, differenzierbar. Dann ist die Ableitung f' (oder auch das totale Differential df) von folgender Gestalt:

$$df = f' : U \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n) := \{T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n : T \text{ ist linear}\}.$$

Allgemein heißt eine Abbildung $\omega : U \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^n)$ 1-FORM (mit Werten im \mathbb{R}^n). Eine 1-Form heißt EXAKT $:\Leftrightarrow \exists f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ glatt mit $df = \omega$.

Für die linearen Abbildungen $x : (x, y) \mapsto x$ und $y : (x, y) \mapsto y$ ergeben sich nach [2.1](#) die zwei speziellen exakten 1-Formen dx und dy :

$$dx(x, y)(u, v) = u \quad \text{bzw.} \quad dy(x, y)(u, v) = v.$$

Für jedes glatte $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ haben wir allgemein

$$\begin{aligned} df(x, y)(u, v) &= df(x, y)(u \cdot (1, 0) + v \cdot (0, 1)) \\ &= u \cdot df(x, y)(1, 0) + v \cdot df(x, y)(0, 1) \\ &= dx(x, y)(u, v) \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + dy(x, y)(u, v) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{aligned}$$

oder kürzer nach Weglassen von $(u, v) \in \mathbb{R}^2$ als Gleichheit für Abbildungen in $L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$:

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot dx(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot dy(x, y),$$

wobei wir die Reihenfolge der Faktoren ausgetauscht haben, damit die Wirkung auf (u, v) klarer ist (Beachte: $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \in \mathbb{R}^m$ und $dx(x, y), dy(x, y) \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und das Produkt $v \cdot T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ ist definiert durch $(v \cdot T)(z) := T(z) \cdot v$ für $v \in \mathbb{R}^m, T \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ und $z \in \mathbb{R}^2$).

Noch kürzer können wir das nach Weglassen von $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ als Gleichheit für Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)$ schreiben als

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot dy.$$

Analog erhalten wir die Koordinatendarstellung einer allgemeinen 1-Form ω :

$$\begin{aligned} \omega(x, y)(u, v) &= u \cdot \omega(x, y)(1, 0) + v \cdot \omega(x, y)(0, 1) \\ &=: dx(x, y)(u, v) \cdot \omega_1(x, y) + dy(x, y)(u, v) \cdot \omega_2(x, y) \\ &\Rightarrow \omega = \omega_1 \cdot dx + \omega_2 \cdot dy \end{aligned}$$

wobei $\omega_i : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ definiert ist durch $\omega_1(x, y) := \omega(x, y)(1, 0)$ und $\omega_2(x, y) := \omega(x, y)(0, 1)$.

Sei $c : [a, b] \rightarrow U$ eine Kurve mit $c(t) = (x(t), y(t))$ und ω wie oben, dann berechnet sich das Kurvenintegral wie folgt:

$$\begin{aligned} \int_c \omega &= \int_c \omega_1(x, y) \cdot dx + \omega_2(x, y) \cdot dy := \int_a^b \omega(c(t))(c'(t)) dt \\ &= \int_a^b \omega_1(c(t)) \frac{dx}{dt}(t) dt + \omega_2(c(t)) \frac{dy}{dt}(t) dt \end{aligned}$$

Mittels des Kurvenintegrals läßt sich eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ aus ihrem Differential und einem Anfangswert rekonstruieren, denn

$$f(c(b)) - f(c(a)) = \int_a^b (f \circ c)'(t) dt = \int_a^b df(c(t))(c'(t)) dt = \int_c df,$$

für jede Kurve c von $c(a)$ nach $c(b)$. Die Überlagerung $p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ via Polarkoordinaten aus [3.5](#) war gegeben durch $(r, \varphi) \mapsto r e^{i\varphi}$. Wir wollen eine Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zu einer Kurve $\bar{c} : I \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ längs p liften. Die Projektion auf die erste Komponente $(r, \varphi) \mapsto r$ faktorisiert zu einer wohldefinierten glatten Funktion $r : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$. Somit ist $r(\bar{c}(t)) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} & & \\ \downarrow p & \searrow r & \\ \mathbb{C} \setminus \{0\} & & \mathbb{R} \end{array}$$

$\swarrow \sqrt{x^2+y^2}$

Für die zweite Projektion geht das nicht so (Der Winkel φ kann aus den kartesischen Koordinaten nur bis auf ganzzahliges Vielfaches von 2π berechnet werden). Aber wir können die zweite Komponente als Kurvenintegral schreiben

$$\varphi(\bar{c}(t)) = \varphi(\bar{c}(0)) + \int_{\bar{c}|_{[0,t]}} d\varphi$$

Da φ bis auf ein ganzzahliges Vielfaches auch auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bestimmt ist, kann man hoffen, daß das Differential $d\varphi$ zu einer 1-Form ω auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ hinunterfaktorisiert. Wegen der Kettenregel $d\varphi(u)(v) = \omega(p(u)) \cdot dp(u)(v)$ berechnen wir dazu das Differential der Überlagerungsabbildung $z = p : \mathbb{C} \supset \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \subset \mathbb{C}$, $(r, \varphi) \mapsto z := r e^{i\varphi}$:

$$dz = d(re^{i\varphi}) = \frac{\partial(re^{i\varphi})}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial(re^{i\varphi})}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = e^{i\varphi} dr + i r e^{i\varphi} d\varphi = r e^{i\varphi} \left(\frac{dr}{r} + i d\varphi \right)$$

Somit ist

$$\frac{dz}{z} = \frac{e^{i\varphi} dr + i r e^{i\varphi} d\varphi}{r e^{i\varphi}} = \frac{dr}{r} + i d\varphi = d(\ln r) + i d\varphi$$

als Abbildungen $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow L(\mathbb{R}^2, \mathbb{C}) \cong L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) + i L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Oder in kartesischen Koordinaten:

$$\begin{aligned} d(\ln r) + i d\varphi &= \frac{dz}{z} = \frac{dx + i dy}{x + i y} = \frac{(x - iy) dx + i(x - iy) dy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} + i \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

wobei $x, y : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \xrightarrow{z} \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$, und somit ist

$$d(\ln r) = \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad d\varphi = \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}.$$

Wir können aber x und y auch als Koordinatenprojektionen auf \mathbb{C} auffassen, und somit $\frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$ als 1-Form ω auf $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Für diese ist $d\varphi(u)(v) =$

$\omega(p(u))(dp(v))$ und somit erhalten wir schlußendlich

$$\begin{aligned}\varphi(\bar{c}(t)) &= \varphi(\bar{c}(0)) + \int_{\bar{c}|_{[0,t]}} d\varphi \\ &= \varphi(\bar{c}(0)) + \int_0^t d\varphi(\bar{c}(\tau))(\bar{c}'(\tau)) d\tau \\ &= \varphi(\bar{c}(0)) + \int_0^t \omega(c(\tau))(c'(\tau)) d\tau \\ &= \varphi(\bar{c}(0)) + \int_{c|_{[0,t]}} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2},\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile x und y die Koordinatenprojektionen $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bezeichnen. Insbesondere berechnet diese Formel $\bar{c}(t) \in \mathbb{R}$ für $c : I \rightarrow S^1 \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

3.11 Satz (Die Krümmung charakterisiert die Kurve).

Sei $K : I \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung, so gibt es, bis auf Bewegungen, genau eine Kurve, die eine Bogenlängenparametrisierung c besitzt, für die $K_c(s) = K(s)$ gilt.

Beweis. Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit der Krümmung K , d.h. $|c'(s)| = 1$ für alle s und $K(s) = \theta'(s)$ nach [3.6](#), wobei θ ein Lift von c' ist, und somit $e^{i\theta(s)} = c'(s)$ gilt. Also folgt

$$\begin{aligned}\theta(s) &= \theta(0) + \int_0^s \theta'(\tau) d\tau = \theta(0) + \int_0^s K(\tau) d\tau \text{ und} \\ c(s) &= c(0) + \int_0^s c'(\tau) d\tau = c(0) + \int_0^s e^{i\theta(\tau)} d\tau.\end{aligned}$$

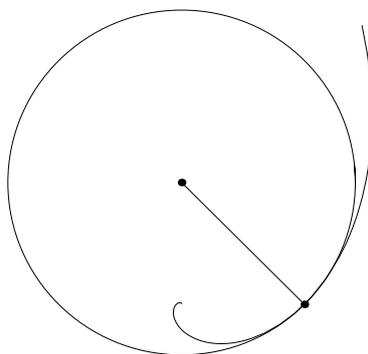
Dabei ist $c(0)$ der frei wählbare Anfangspunkt der Kurve, und $\theta(0)$ der frei wählbare Winkel der Anfangsrichtung. Je zwei solche Anfangsdaten liefern eine Bewegung, welche die zugehörigen Kurven ineinander überführt. Sei c wie oben definiert. Dann ist $c'(s) = e^{i\theta(s)}$, also $|c'(s)| = 1$, d.h. c ist nach der Bogenlänge parametrisiert. Da θ der Lift ist, gilt $K_c(s) = \theta'(s) = K(s)$. \square

3.12 Definition (Scheitel und Spiralbögen)

Falls $K(t) = 0$, dann heißt t ein FLACHPUNKT. Falls t ein Flachpunkt ist, an dem die Krümmung das Vorzeichen ändert, so heißt t ein WENDEPUNKT. Falls die Krümmung ein lokales Extremum bei t besitzt, so heißt t ein SCHEITEL. Falls K monoton und nirgends 0 ist, so heißt c ein SPIRALBOGEN.

3.13 Lemma, Kneser.

Sei c ein Spiralbogen. Dann ist jeder Krümmungskreis mit kleinerem Radius in jedem mit größerem enthalten. Für jeden Punkt s der Kurve, liegt die eine Hälfte von c im Inneren des Krümmungskreises bei s und die andere Hälfte im Äußeren.



Beweis. Wir betrachten die Ableitung der Evolute:

$$\begin{aligned}
 e(s) &:= c(s) + \frac{1}{K(s)}\nu(s) \quad \text{und setzen} \quad R(s) := \frac{1}{K(s)} \\
 \Rightarrow e'(s) &= c'(s) + R'(s)\nu(s) + R(s)\nu'(s) \\
 &= \tau(s) + R'(s)\nu(s) - R(s)K(s)\tau(s) = R'(s)\nu(s).
 \end{aligned}$$

Für die vorletzte Gleichheit verwendeten wir die Frenet'schen Ableitungsgleichungen. Die Bogenlänge der Evolute berechnen wir mit Hilfe des Integrals:

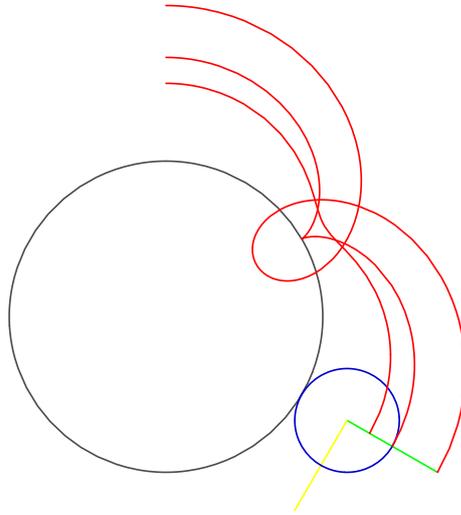
$$\begin{aligned}
 L_a^b(e) &= \int_a^b |e'(s)| ds = \int_a^b |R'(s)| ds = \quad (\text{da } R' \text{ konstantes Vorzeichen hat}) \\
 &= \left| \int_a^b R'(s) ds \right| = |R(b) - R(a)| \\
 \Rightarrow |e(b) - e(a)| &\leq L_a^b(e) = |R(b) - R(a)|
 \end{aligned}$$

d.h. der Kreis mit größerem Radius umfaßt den mit kleinerem. Man bemerke, daß Gleichheit $|e(b) - e(a)| = L_a^b(e)$ nur dann gilt, wenn e konstant ist oder die Strecke von $e(a)$ nach $e(b) \neq e(a)$ parametrisiert. Falls e konstant ist, so $0 = e' = R'\nu$, d.h. R ist konstant und damit c ein Kreisbogen. Andernfalls ist $0 \neq e'(s) \parallel \nu := e(b) - e(a) \neq 0$ lokal in s und somit auch $\nu(s) \parallel \nu$ und $\tau(s) \parallel \nu^\perp$ für s mit $R'(s) \neq 0$. Also parametrisiert c (zumindest lokal) eine Gerade und damit ist $K = 0$, ein Widerspruch.

Für den zweiten Teil der Aussage können wir o.B.d.A. annehmen, daß die Krümmung monoton wachsend bzw. R monoton fallend ist. Bei festem t und $t \leq t'$ schließen wir, daß $c(t')$ im Inneren des Krümmungskreises bei t liegt, da $c(t')$ auf dem Krümmungskreis bei t' liegt und dieser in jenem bei t enthalten ist ($R(t) \geq R(t')$). Falls $t' \leq t$ schließen wir analog. \square

3.14 Rollkurven

Gegeben seien zwei nach Bogenlänge parametrisierte Kurven c_0 und c_1 . Gesucht ist die Bahn c eines in der Ebene von c_1 fixierten Punktes p , wenn die Kurve c_1 längs jener von c_0 abrollt.



Wir wollen c nach der abgerollten Länge t parametrisieren. Das Abrollen von c_1 längs c_0 bedeutet, daß wir eine Bewegung B_t suchen, die den Punkt $c_1(t)$ auf $c_0(t)$, die Einheitstangente $\tau_1(t)$ auf $\tau_0(t)$ und somit die Einheitsnormale $\nu_1(t)$ auf $\nu_0(t)$. Aus der ersten Bedingung folgt, daß B_t die Form $B_t(x) = R_t(x - c_1(t)) + c_0(t)$ hat. Es sei $\theta_1(t)$ und $\theta_0(t)$ der Winkel der Tangente an c_1 und c_0 zum Zeitpunkt t . Dann muß R_t die Drehung um $\theta_0(t) - \theta_1(t)$ sein. Also ist die Gleichung der Rollkurve c durch

$$c(t) := e^{i(\theta_0(t) - \theta_1(t))}(p - c_1(t)) + c_0(t)$$

gegeben.

Für die Ableitung von c erhalten wir:

$$\begin{aligned} c'(t) &= i(\theta_0 - \theta_1)'(t)e^{i(\theta_0(t) - \theta_1(t))}(p - c_1(t)) - e^{i(\theta_0(t) - \theta_1(t))}c_1'(t) + c_0'(t) \\ &= i(K_0(t) - K_1(t))e^{i(\theta_0(t) - \theta_1(t))}(p - c_1(t)) - e^{i(\theta_0(t) - \theta_1(t))}e^{i\theta_1(t)} + e^{i\theta_0(t)} \\ &= (K_0(t) - K_1(t))ie^{i(\theta_0(t) - \theta_1(t))}(p - c_1(t)) \end{aligned}$$

Somit ist die skalare Geschwindigkeit:

$$v(t) = \left| \frac{d}{dt}c(t) \right| = |K_0(t) - K_1(t)| |p - c_1(t)|.$$

Die zweite Ableitung von c ist:

$$\begin{aligned} c''(t) &= i(K_0 - K_1)'(t)e^{i(\theta_0 - \theta_1)(t)}(p - c_1(t)) \\ &\quad + i(K_0 - K_1)(t)i(K_0 - K_1)(t)e^{i(\theta_0 - \theta_1)(t)}(p - c_1(t)) \\ &\quad - i(K_0 - K_1)(t)e^{i(\theta_0 - \theta_1)(t)}c_1'(t) \\ &= (K_0 - K_1)'(t)ie^{i(\theta_0 - \theta_1)(t)}(p - c_1(t)) \\ &\quad - ((K_0 - K_1)(t))^2 e^{i(\theta_0 - \theta_1)(t)}(p - c_1(t)) \\ &\quad - (K_0 - K_1)(t)ie^{i(\theta_0 - \theta_1)(t)}c_1'(t). \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}
 \det(c'(t), c''(t)) &= \\
 &= \det\left((K_0 - K_1)(t)ie^{i(\theta_0(t) - \theta_1(t))}(p - c_1(t)), \right. \\
 &\quad \left. - ((K_0 - K_1)(t))^2 e^{i(\theta_0 - \theta_1)(t)}(p - c_1(t)) - (K_0 - K_1)(t)ie^{i(\theta_0 - \theta_1)(t)}c_1'(t) \right) \\
 &= ((K_0 - K_1)(t))^3 \det(p - c_1(t), i(p - c_1(t))) \\
 &\quad - ((K_0 - K_1)(t))^2 \det(p - c_1(t), c_1'(t)) \\
 &= ((K_0 - K_1)(t))^3 |p - c_1(t)|^2 - ((K_0 - K_1)(t))^2 \det(p - c_1(t), c_1'(t)).
 \end{aligned}$$

Für die Krümmung K von c erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
 K(t) &= \frac{\det(c'(t), c''(t))}{|c'(t)|^3} \\
 &= \frac{(K_0 - K_1)(t)^3 |p - c_1(t)|^2 - (K_0 - K_1)(t)^2 \det(p - c_1(t), c_1'(t))}{|(K_0 - K_1)(t)|^3 |p - c_1(t)|^3} \\
 &= \frac{\text{sign}((K_0 - K_1)(t))}{|p - c_1(t)|} - \frac{1}{|(K_0 - K_1)(t)|} \det\left(\frac{p - c_1(t)}{|p - c_1(t)|^3}, c_1'(t) \right) \\
 &= \frac{\text{sign}((K_0 - K_1)(t))}{|p - c_1(t)|^3} \left(|p - c_1(t)|^2 - \frac{1}{(K_0 - K_1)(t)} \det(p - c_1(t), c_1'(t)) \right).
 \end{aligned}$$

Sei nun die abrollende Kurve c_1 ein Kreis mit Radius 1, d.h. $c_1(t) := e^{it}$ und $p = (a, 0)$. Dann ist

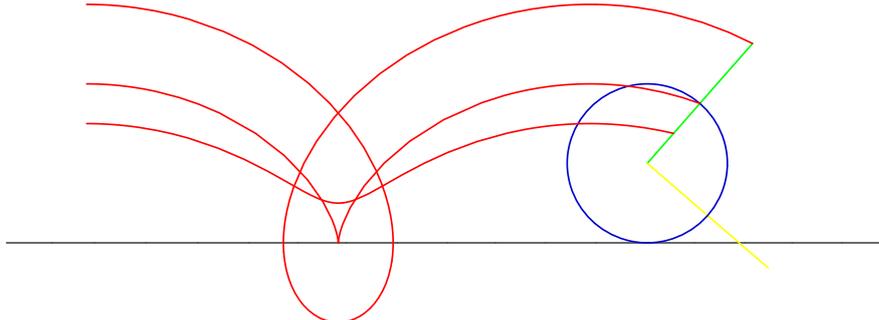
$$\begin{aligned}
 c_1'(t) &= ie^{it} \\
 K_1 &= 1 \\
 p - c_1(t) &= (a - \cos t, -\sin t) \\
 |p - c_1(t)|^2 &= a^2 - 2a \cos t + 1 = (a^2 + 1) - 2a \cos t \\
 \det(p - c_1(t), c_1'(t)) &= \det(a - e^{it}, ie^{it}) = a \cos t - 1
 \end{aligned}$$

und somit ist die Krümmung der Rollkurve

$$\begin{aligned}
 K(t) &= \frac{\text{sign}((K_0 - K_1)(t))}{|p - c_1(t)|^3} \left(|p - c_1(t)|^2 - \frac{1}{(K_0 - K_1)(t)} \det(p - c_1(t), c_1'(t)) \right) \\
 &= \frac{\text{sign}(K_0(t) - 1)}{|a^2 + 1 - 2a \cos t|^{3/2}} \left(a^2 + 1 - 2a \cos t - \frac{a \cos t - 1}{K_0(t) - 1} \right)
 \end{aligned}$$

Zykloiden.

Sei nun insbesondere c_0 eine Gerade, d.h. $c_0(t) = t$.





Dann ist $K_0(t) = 0$ und somit

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{-1}{|a^2 + 1 - 2a \cos t|^{3/2}} \left(a^2 + 1 - 2a \cos t - \frac{a \cos t - 1}{-1} \right) \\ &= \frac{a(\cos t - a)}{|a^2 + 1 - 2a \cos t|^{3/2}} \end{aligned}$$

Und speziell für $a = 1$, d.h. einen Punkt auf dem Kreis, ist

$$K(t) = -\frac{(1 - \cos t)}{|2 - 2a \cos t|^{3/2}} = -1/(2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}) = -\frac{1}{4|\sin(t/2)|}.$$

Nun wollen wir die Scheitel bestimmen. Dazu schreiben wir

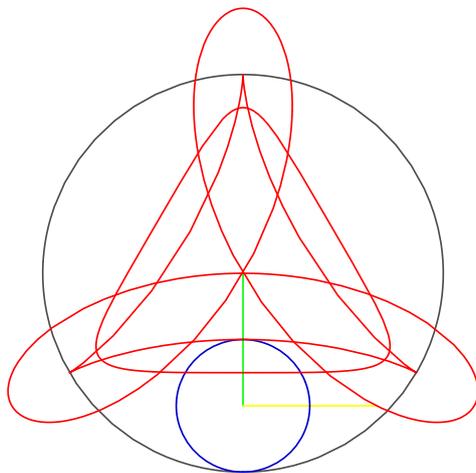
$$\sqrt{a}K(t) = \frac{\cos t - a}{(a + 1/a - 2 \cos t)^{3/2}}.$$

Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sqrt{a}K(t) &= -\sin t (a + 1/a - 2 \cos t)^{-5/2} ((a + 1/a - 2 \cos t) + 3(\cos t - a)) \\ &= -\sin t (a + 1/a - 2 \cos t)^{-5/2} (1/a - 2a + \cos t) \end{aligned}$$

Somit ist $\frac{d}{dt} \sqrt{a}K(t) = 0$ genau dann, wenn $\sin t = 0$ oder $\cos t = 2a - \frac{1}{a}$.

Epi- und Hypozykloiden Sei nun c_0 ein Kreis mit Radius R , d.h. $c_0(t) = R e^{\pm it/R}$.



Dann ist $K_0 = \pm 1/R$ und somit

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{\text{sign}(K_0(t) - 1)}{|a^2 + 1 - 2a \cos t|^{3/2}} \left(a^2 + 1 - 2a \cos t - \frac{a \cos t - 1}{K_0(t) - 1} \right) \\ &= \frac{\text{sign}(\pm 1/R - 1)}{|a^2 + 1 - 2a \cos t|^{3/2}} \left(a^2 + 1 - 2a \cos t - \frac{a \cos t - 1}{\pm 1/R - 1} \right) \end{aligned}$$

Ist insbesondere $a = 1$, d.h. p ein Punkt am abrollenden Kreis, dann ist

$$\begin{aligned} K(t) &= \frac{\text{sign}(\pm 1/R - 1)}{|2(1 - \cos t)|^{3/2}} \left(2(1 - \cos t) + \frac{1 - \cos t}{\pm 1/R - 1} \right) \\ &= \frac{\text{sign}(\pm 1/R - 1)}{2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}} \left(2 + \frac{1}{\pm 1/R - 1} \right) \\ &= \frac{\text{sign}(\pm 1/R - 1)}{2\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos t}} \cdot \frac{R \mp 2}{R \mp 1} \\ &= \text{sign}(\pm 1/R - 1) \cdot \frac{1}{4|\sin t/2|} \cdot \frac{R \mp 2}{R \mp 1} \end{aligned}$$

3.15 Einhüllende - Enveloppe

Zu jeder geometrischen ebenen Kurve ist die Familie ihrer Tangenten assoziiert. Wir wollen nun bestimmen, welche Geraden-Scharen auf diese Weise auftreten können. Sei $c : I \rightarrow \mathbb{C}$ eine Parametrisierung der Kurve, dann ist die Tangente an der Stelle t durch $\{c(t) + s c'(t) : s \in \mathbb{R}\}$ gegeben, oder implizit durch

$$\{z : \langle z | \nu(t) \rangle = h(t)\}, \text{ mit } \nu(t) := \tau(t)^\perp \text{ und } h(t) := \langle c(t) | \nu(t) \rangle.$$

Nach [3.9](#) existiert eine eindeutig bestimmte glatte Funktion $\vartheta : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $e^{i\vartheta(t)} = \tau(t)$ und somit $(-\sin(\vartheta(t)), \cos(\vartheta(t))) = i e^{i\vartheta(t)} = i \tau(t) = \nu(t)$. Falls c nach der Bogenlänge parametrisiert ist, so ist $\vartheta' = K$ nach [3.6](#). Für allgemeine Parametrisierungen ist somit $\vartheta'(t) \neq 0$ genau dann, wenn die Krümmung $K(t)$ nicht verschwindet, denn sei \bar{c} eine Bogenlängenparametrisierung, also $c(t) = \bar{c}(s(t))$, dann ist $c'(t) = s'(t) \bar{c}'(s(t)) = s'(t) \tau(t) = s'(t) e^{i\vartheta(t)}$ und $c''(t) = s''(t) e^{i\vartheta(t)} + s'(t) i \vartheta'(t) e^{i\vartheta(t)}$ und somit

$$K(t) = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{|c'(t)|^3} = \frac{s'(t)^2 \vartheta'(t)}{s'(t)^3} = \frac{\vartheta'(t)}{s'(t)}.$$

Sei nun umgekehrt eine Schar von Geraden in Hess'scher Normalvektorform

$$\{z : \langle z | i e^{i\vartheta(t)} \rangle = h(t)\}, \text{ mit } \vartheta \text{ und } h \text{ glatt und } \vartheta'(t) \neq 0 \text{ für alle } t \in I$$

gegeben. Wir suchen eine Kurve c mit diesen Geraden als Tangenten, d.h. eine Lösung von

$$\begin{aligned} \langle c(t) | i e^{i\vartheta(t)} \rangle &= h(t) \\ \langle c'(t) | i e^{i\vartheta(t)} \rangle &= 0 \end{aligned}$$

Differenzieren der 1. Gleichung und Einsetzen der 2. liefert:

$$h'(t) = \langle c'(t) | i e^{i\vartheta(t)} \rangle + \langle c(t) | i^2 e^{i\vartheta(t)} \vartheta'(t) \rangle = -\vartheta'(t) \langle c(t) | e^{i\vartheta(t)} \rangle.$$

Damit kennen wir aber die Normalprojektionen von $c(t)$ auf die Orthonormalbasis $(e^{i\vartheta(t)}, i e^{i\vartheta(t)})$ und somit ist die sogenannte einhüllende Kurve c gegeben durch

$$c(t) = \langle c(t) | e^{i\vartheta(t)} \rangle e^{i\vartheta(t)} + \langle c(t) | i e^{i\vartheta(t)} \rangle i e^{i\vartheta(t)} = -\frac{h'(t)}{\vartheta'(t)} e^{i\vartheta(t)} + h(t) i e^{i\vartheta(t)}.$$

Für die Ableitungen von c erhalten wir folglich

$$\begin{aligned} c' &= \frac{h' \vartheta'' - h'' \vartheta' - h (\vartheta')^3}{(\vartheta')^2} e^{i\vartheta} + 0 \\ c'' &= \frac{h' \vartheta'' - h'' \vartheta' - h (\vartheta')^3}{(\vartheta')^2} i \vartheta' e^{i\vartheta} + \left(\frac{h' \vartheta'' - h'' \vartheta' - h (\vartheta')^3}{(\vartheta')^2} \right)' e^{i\vartheta}, \end{aligned}$$

also eine reguläre Kurve genau dort wo $h' \vartheta'' - h'' \vartheta' - h(\vartheta')^3 \neq 0$ ist und für deren Krümmung

$$K = \frac{\det(c', c'')}{|c'|^3} = \left(\frac{h' \vartheta'' - h'' \vartheta' - h(\vartheta')^3}{(\vartheta')^2} \right)^2 \vartheta' \left| \frac{h' \vartheta'' - h'' \vartheta' - h(\vartheta')^3}{(\vartheta')^2} \right|^{-3} \\ = \frac{(\vartheta')^3}{|h' \vartheta'' - h'' \vartheta' - h(\vartheta')^3|}$$

Insbesondere liegt die Kurve lokal immer auf der $\text{sign}(\vartheta')$ Seite der Tangente. In 6.3 werden wir dies noch expliziter machen indem wir als bessere Parametrisierung jene nach dem Winkel der Tangente verwenden werden.

Eine klassischere Lösungsmethode dieser Aufgabenstellung ist die folgende:

Sei $c : I \rightarrow E$ eine Parametrisierung der Kurve, dann ist die Tangente durch $s \mapsto c(t) + sc'(t)$ gegeben, oder implizit durch

$$\left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \nu(t) \right\rangle = h(t), \text{ mit } \nu(t) := c'(t)^\perp \text{ und } h(t) := \langle c(t) | \nu(t) \rangle.$$

Nach Anwendung einer Drehung, können wir annehmen, daß e_1 der Einheitstangentenvektor in einem Punkt ist und somit für nahe t in der Tangentengleichung y nach x aufgelöst werden kann, d.h. die Form $y = a(t) \cdot x + b(t)$ besitzt, wobei $a(t)$ der Anstieg der Kurve $c : t \mapsto (x(t), y(t))$ zum Zeitpunkt t ist und $b(t)$ durch Einsetzen von $c(t)$ anstelle von (x, y) erhalten wird. Wenn die Krümmung K von c nicht verschwindet, dann muß $a'(t) \neq 0$ sein, denn $a(t) = y'(t)/x'(t)$ und somit ist

$$a'(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{x'(t)^2} = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{x'(t)^2} = \frac{|c'(t)|^3}{x'(t)^2} K(t).$$

Sei allgemein eine glatt parametrisierte Familie von Geraden vorgegeben. Nach Anwendung einer Drehung haben diese lokal die Gestalt

$$y = a(t) \cdot x + b(t).$$

Wir wollen nun versuchen eine Kurve c zu finden, die diese Geraden als Schar der Tangenten hat. Man nennt c dann die EINHÜLENDE oder ENVELOPPE dieser Geraden. Es soll also $c(t) = (x(t), y(t))$ sowohl

$$y(t) = a(t) \cdot x(t) + b(t) \text{ als auch } y'(t) = a(t) \cdot x'(t)$$

erfüllen. Der Fall, daß a konstant ist, ist nicht interessant, denn dann muß eine dazu passende Kurve c eine Gerade parametrisieren und somit auch b konstant sein. Darum setzen wir a als streng monoton oder besser ein wenig stärker $a'(t) \neq 0$ für alle t voraus. Falls c existiert, so bedeutet das nach dem Obigen, daß die Krümmung von c nicht verschwindet. Dann können wir den Anstieg als Parameter p verwenden. Die Gleichungen sind dann

$$y(p) = p \cdot x(p) + g(p) \text{ und } \frac{dy}{dx} = p,$$

mit $g := b \circ a^{-1}$. Beachte, daß die Existenz einer regulären Lösung c (mit nicht verschwindender Krümmung) das Folgende für g bedeutet:

$$\frac{dg}{dp} = \frac{dy}{dp} - 1 \cdot x - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dp} = -x \\ \frac{d^2g}{dp^2} = -\frac{dx}{dp} \neq 0$$

Wenn wir nun die Kurve nach x umparametrisieren (es ist ja $x'(p) \neq 0$), so ist die Gleichung die Clairaut'sche Differentialgleichung

$$y(x) = y'(x) \cdot x + g(y'(x)),$$

wobei wir die Bedingung, daß x als Parameter gewählt werden kann bedeutet, daß $p'(x) = y''$ nirgends verschwindet. Wenn wir diese Bedingung nicht verlangen, so erhalten wir als Lösungen auch jede Gerade der Schar (dann ist y' konstant p).

Um die Kurve c zu finden müssen wir also die Clairaut'sche Differentialgleichung

$$y = x \cdot y' + g(y') \text{ mit } g''(y) \neq 0$$

lösen. Dies ist eine implizite Differentialgleichung

$$F(x, y, y') = 0 \text{ mit } F(x, y, p) := x \cdot p + g(p) - y.$$

Wenn $\partial_p F \neq 0$ wäre, dann können wir diese implizite Gleichung nach dem impliziten Funktionensatz in eine explizite verwandeln. Aber wenn wir die Differentialgleichung nach x differenzieren, so erhalten wir

$$0 = \frac{d}{dx} F(x, y(x), y'(x)) = \partial_1 F(x, y, y') + \partial_2 F(x, y, y') \cdot y' + \partial_3 F(x, y, y') \cdot y'',$$

wobei $\partial_1 F(x, y, p) = p$, $\partial_2 F(x, y, p) = -1$ und $\partial_3 F(x, y, p) = x + g'(p)$ ist. Also ist $0 = y' - 1 \cdot y' + \partial_3 F(x, y, y') \cdot y''$. Falls y nicht eine Gerade beschreibt, so ist $y'' \neq 0$ und folglich $\partial_3 F(x, y, y') = 0$.

Die übliche Methode in dieser Situation ist, y' als neue Variable p zu verwenden (wegen $y'' \neq 0$ ist dies nach dem inversen Funktionensatz möglich). D.h. unsere Gleichung lautet nun $F(x(p), y(p), p) = 0$ zusammen mit $y'(p) = p \cdot x'(p)$. Differenzieren wir nun $F(x(p), y(p), p)$ nach p so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dp} F(x(p), y(p), p) = \partial_1 F(x, y, p) \cdot x' + \partial_2 F(x, y, p) \cdot y' + \partial_3 F(x, y, p) \cdot 1 \\ &= (\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F) \cdot x' + \partial_3 F \end{aligned}$$

und falls $\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F \neq 0$ ein System expliziter Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} x' &= -\frac{\partial_3 F}{(\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F)} \\ y' &= p \cdot x' = -\frac{p \cdot \partial_3 F}{(\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F)}. \end{aligned}$$

Dies führt nun zwar oft zum Ziel, nicht aber in unserer speziellen Situation, denn da ist, wie wir bereits gesehen haben, $\partial_1 F + p \cdot \partial_2 F = 0$. Nach dem Obigen ist dann aber $0 = \partial_3 F = x + g'(p)$, d.h. $x(p) = -g'(p)$ und aus $F(x(p), y(p), p) = 0$ folgt $y(p) = p \cdot x(p) + g(p)$. Und das System ist mit

$$\begin{aligned} x(p) &= -g'(p) \\ y(p) &= p \cdot x(p) + g(p) \end{aligned}$$

somit gelöst, wobei wir nur noch $p := (-g')^{-1}x$ substituieren müssen: Wegen $\frac{dy}{dx} = p$ ist $(\frac{d}{dx})^2 y = \frac{d}{dx} p = 1/\frac{dx}{dp} x = -1/g''(p) \neq 0$, d.h. die Lösungskurve ist regulär und hat Krümmung ungleich 0. Beachte, daß natürlich die Geraden $y(x) = p \cdot x + g(p)$ selbst ebenfalls Lösungen des Systems sind.

Wir können auch zeigen, daß die Kurve immer auf der selben Seite der Tangente bleibt, denn

$$\begin{aligned} x(p) &= -g'(p) & x' &= -g'' & x'' &= -g''' \\ y(p) &= p \cdot x(p) + g(p) & y' &= p \cdot x' = -p \cdot g'' & y'' &= -g'' + p \cdot g''' \\ \Rightarrow \langle c''(p) | \nu(p) \rangle &= x'' \cdot (-p) + y'' \cdot 1 = p \cdot g''' - g'' - p \cdot g''' = -g'' \neq 0 \end{aligned}$$

Insbesondere ist jede Kurve mit nicht verschwindender Krümmung die Enveloppe ihrer Tangenten.

Weiters ist die Evolute die Enveloppe der Normalen. In der Tat ist die Evolute e einer Kurve c durch

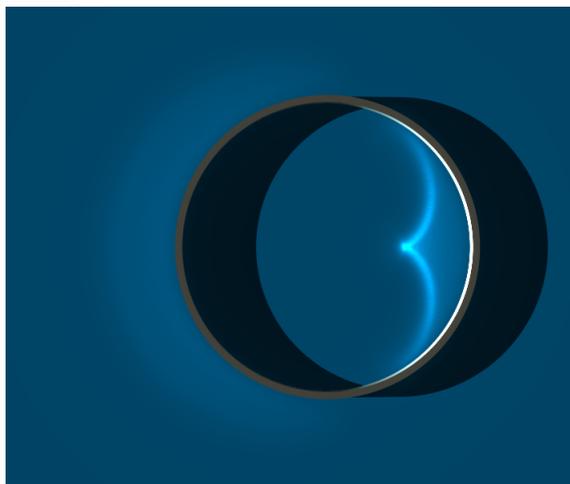
$$e(t) := c(t) + \frac{1}{K(t)}\nu(t)$$

gegeben, wobei wir annehmen dürfen, daß c nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Die Ableitung von e ist dann

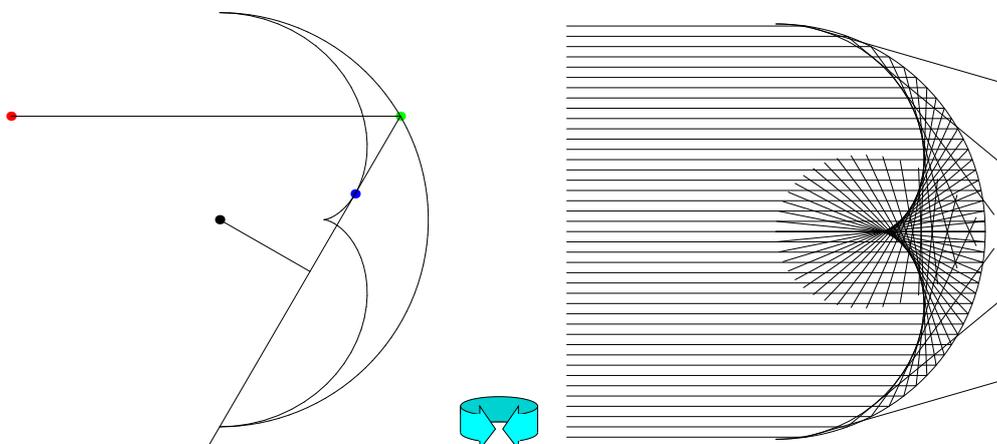
$$\begin{aligned} e'(t) &= c'(t) + \frac{1}{K(t)}\nu'(t) - \frac{K'(t)}{K(t)^2}\nu(t) \\ &= \tau(t) + \frac{1}{K(t)}(-K(t)\tau(t)) - \frac{K'(t)}{K(t)^2}\nu(t) = -\frac{K'(t)}{K(t)^2}\nu(t) \end{aligned}$$

und somit ist e regulär solange c keinen Scheitel ($K'(t) = 0$) besitzt.

Beispiel. Kaustiken.



Wir wollen als Anwendung die Kaustik eines Halbkreises bestimmen, d.h. die Begrenzungslinie jener Punkte im Inneren des Halbkreises, die von den Reflexionen parallel einfallender Lichtstrahlen getroffen werden.



In es sei e^{it} einer der Reflexionspunkte. Ein Tangentialvektor des reflektierten Strahls ist dann e^{i2t} , d.h. $\vartheta(t) = 2t$ und der Abstand zum Nullpunkt $h(t) :=$

$\langle e^{it} | ie^{i2t} \rangle = -\sin(t)$. Somit ist diese Kaustik

$$c(t) := -\frac{h'(t)}{\vartheta'(t)} e^{i\vartheta(t)} + h(t) i e^{i\vartheta(t)} = \left(\frac{3 \cos(t) - \cos(3t)}{4}, \sin(t)^3 \right),$$

eine Hypozykloide mit Radien im Verhältnis 1:2, eine sogenannte NEPHROIDE (oder NIERENKURVE).

7. Kurven im höher Dimensionalen

In diesem Abschnitt übertragen wir die grundlegenden Begriffe wie Einheitstangentenvektor, Einheitsnormalvektor und Krümmung auf Kurven in mehrdimensionalen \mathbb{R}^n 's.

Eine Kurve $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann man nach der Bogenlänge parametrisieren, das heißt $|c'(t)| = 1$. Daraus folgt durch Differentiation, daß $\langle c' | c'' \rangle = 0$. Wir können c'' als die Kraft (Beschleunigung), die gebraucht wird, damit der Punkt (mit Einheitsmasse) auf der Kurve bleibt, interpretieren.

7.1 Definition (Krümmung und Begleitbein)

Die KRÜMMUNG einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve c im Punkt t ist als $K(t) := |c''(t)| \geq 0$ definiert. Falls $K(t) \neq 0$, dann heißt $\nu_t := \frac{1}{|c''(t)|} c''(t)$ der HAUPTNORMALENVEKTOR von c in t .

Im \mathbb{R}^3 können wir die beiden Vektoren τ (siehe [2.6](#)) und ν zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis $\{\tau, \nu, \beta\}$ ergänzen, indem wir den BINORMALENVEKTOR β als $\beta := \tau \times \nu$ definieren. Diese Basis heißt das BEGLEITBEIN der Kurve.

Im \mathbb{R}^{n+1} gehen wir wie folgt vor: Seien $c'(t), c''(t), \dots, c^{(n)}(t)$ linear unabhängig. Mittels des GRAM-SCHMIDT'SCHEN ORTHOGONALISIERUNGSVERFAHRENS läßt sich daraus eine orthonormale Familie $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ konstruieren. (Dabei geht man induktiv vor, um zu zeigen, daß für k linear unabhängige Vektoren a_1, a_2, \dots, a_k ein eindeutig bestimmter Vektor v existiert, welcher normal auf die a_1, a_2, \dots, a_{k-1} steht, mit a_k einen Winkel α (mit $|\alpha| < \pi/2$) einschließt und im Erzeugnis der a_1, a_2, \dots, a_k liegt.) Wir ergänzen nun $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}$ zu einer positiv orientierten Orthonormalbasis $\nu_0, \nu_1, \dots, \nu_{n-1}, \nu_n$ des \mathbb{R}^{n+1} .

Diese Orthonormalbasis heißt BEGLEITBEIN der Kurve.

7.2 Definition (Krümmungen)

Wir wollen nun das Analogon der Frenet'schen Ableitungsgleichungen herleiten. Dazu benötigen wir die Komponenten $\langle \nu'_i | \nu_j \rangle$ von ν'_i bzgl. der Basisvektoren ν_j . Für jeden Vektor ν'_i gilt: $\nu'_i = \sum_{j=0}^n \langle \nu'_i | \nu_j \rangle \nu_j$. Wir differenzieren die Gleichung $\langle \nu_i(s) | \nu_j(s) \rangle = \delta_{ij}$ nach s und erhalten:

$$\langle \nu'_i | \nu_j \rangle + \langle \nu_i | \nu'_j \rangle = 0 \Rightarrow \langle \nu'_i | \nu_j \rangle = -\langle \nu_i | \nu'_j \rangle.$$

Also ist die Matrix $(\langle \nu'_i | \nu_j \rangle)_{i,j}$ schiefsymmetrisch. Da $\nu_i \in \langle \{c', \dots, c^{(i+1)}\} \rangle$ ist, kann man ν_i auch auf folgende Weise darstellen:

$$\begin{aligned} \nu_i &= \sum_{j=1}^{i+1} a_j \cdot c^{(j)} \\ \Rightarrow \nu'_i &= \sum_{j=1}^{i+1} (a'_j \cdot c^{(j)} + a_j \cdot c^{(j+1)}) \in \langle \{c', c'', \dots, c^{(i+2)}\} \rangle \end{aligned}$$

Da ν_j normal steht auf $c', c'', \dots, c^{(j)}$ ist somit $\langle \nu'_i | \nu_j \rangle = 0$ für $j > i+1$. Außerdem ist offensichtlich $\langle \nu'_i | \nu_i \rangle = 0$ für alle i und folglich stehen in der Diagonalen der Matrix von $(\langle \nu'_i | \nu_j \rangle)_{i,j}$ 0-en, und nur oberhalb und unterhalb der Diagonalen stehen auf schiefsymmetrische Weise Eintragungen.

Für eine Kurve c heißt $\langle \nu'_i | \nu_{i+1} \rangle =: K_{i+1}$ die $(i+1)$ -TE KRÜMMUNG.

$$\langle \nu'_i | \nu_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 & K_1 & 0 & \dots & 0 \\ -K_1 & 0 & K_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & -K_2 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & K_n \\ 0 & \dots & 0 & -K_n & 0 \end{pmatrix}$$

Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c in \mathbb{R}^2 ergibt sich:

$$K_1 = \langle \nu'_0 | \nu_1 \rangle = \left\langle (c')' \mid \frac{c''}{|c''|} \right\rangle = |c''| = K.$$

Wir haben folgendes gezeigt:

7.3 Frenet'sche Ableitungsgleichungen.

Für das Begleitbein $(\nu_i)_{i=0}^n$ einer Kurve c im \mathbb{R}^{n+1} gilt:

$$\nu'_i = -K_i \cdot \nu_{i-1} + K_{i+1} \cdot \nu_{i+1},$$

wobei $K_0 := 0$, $K_{n+1} := 0$, $\nu_{-1} := 0$ und $\nu_{n+1} := 0$.

Beweis.

$$\nu'_i = \sum_{j=0}^n \underbrace{\langle \nu'_i | \nu_j \rangle}_{=0 \text{ für } |i-j| \neq 1} \cdot \nu_j = \underbrace{\langle \nu'_i | \nu_{i+1} \rangle}_{=K_{i+1}} \cdot \nu_{i+1} + \underbrace{\langle \nu'_i | \nu_{i-1} \rangle}_{\langle \nu'_{i-1} | \nu_i \rangle = K_i} \cdot \nu_{i-1} \quad \square$$

7.4 Lemma.

Das Begleitbein und die Krümmungen sind geometrische Objekte.

Beweis. Bleibt dem Leser überlassen! □

7.5 Bemerkung

Umgekehrt lassen sich die Ableitungen einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve wie folgt als Linearkombinationen des Begleitdreiecks schreiben:

$$\begin{aligned}c' &= \nu_0 \\c'' &= \nu_0' = K_1 \nu_1 - 0 \\c''' &= (K_1 \nu_1)' = K_1' \nu_1 + K_1 \nu_1' = K_1' \nu_1 + K_1 (K_2 \nu_2 - K_1 \nu_0) \\&= K_1 K_2 \nu_2 + K_1' \nu_1 - K_1^2 \nu_0.\end{aligned}$$

Nach dem Taylorschen Lehrsatz läßt sich eine Kurve c nun wie folgt schreiben:

$$\begin{aligned}c(t) &= c(0) + \frac{c'(0)}{1!}t + \frac{c''(0)}{2!}t^2 + \frac{c'''(0)}{3!}t^3 + O(t^4) \\&= c(0) + \nu_0(0)t + \frac{K_1(0)\nu_1(0)}{2}t^2 \\&\quad + \frac{K_1(0)K_2(0)\nu_2(0) + K_1'(0)\nu_1(0) - (K_1(0))^2\nu_0(0)}{6}t^3 + O(t^4) \\&= c(0) + \left(t - \frac{(K_1(0))^2}{6}t^3\right)\nu_0(0) \\&\quad + \left(\frac{K_1(0)}{2}t^2 + \frac{K_1'(0)}{6}t^3\right)\nu_1(0) + \left(\frac{K_1(0)K_2(0)}{6}t^3\right)\nu_2(0) + O(t^4)\end{aligned}$$

7.6 Definition (Torsion)

Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve mit $\tau := \nu_0, \nu := \nu_1, \beta := \tau \times \nu = \nu_2$, dann nennt man $K := K_1$ die KRÜMMUNG und $T := K_2$ die TORSION der Kurve. Die Ableitungsgleichungen lauten dann:

$$\begin{aligned}\tau' &= & +K\nu \\ \nu' &= -K\tau & +T\beta \\ \beta' &= & -T\nu\end{aligned}$$

Die von ν und β aufgespannte Ebene durch $c(0)$ heißt NORMALEBENE, die von τ und ν aufgespannte heißt SCHMIEGEBENE und die von τ und β aufgespannte heißt REKTIFIZIERENDE EBENE.

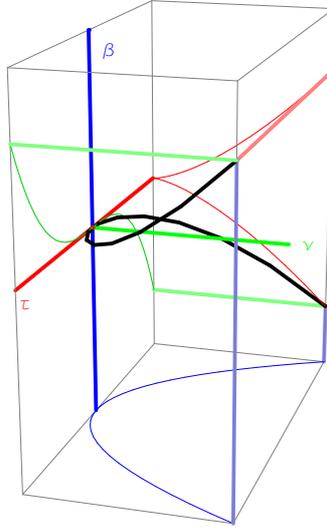
Sind x, y, z die Koordinaten von c bezüglich τ, ν, β im Punkt $c(0)$. Laut [7.5](#) gilt

$$\begin{aligned}x(t) &= t & - \frac{K^2(0)}{6}t^3 + O(t^4) \\ y(t) &= \frac{K(0)}{2}t^2 + \frac{K'(0)}{6}t^3 + O(t^4) \\ z(t) &= \frac{K(0)T(0)}{6}t^3 + O(t^4)\end{aligned}$$

Wir betrachten die Projektion der Kurve in die Ebenen des begleitenden Dreiecks: Zuerst die Projektion auf die Schmiegeebene: Wir erhalten $y = \frac{K}{2}t^2 + O(t^3)$, $x = t + O(t^3)$ und nach Vernachlässigen der Glieder höherer Ordnung $y \approx x^2 \frac{K}{2}$.

Für die Projektion auf die rektifizierende Ebene erhalten wir $x = t + O(t^3)$, $z = \frac{KT}{6}t^3 + O(t^4)$ und somit $z \approx x^3 \frac{KT}{6}$.

Für die Projektion auf die Normalebene erhalten wir $y = \frac{K}{2}t^2 + O(t^3)$, $z = \frac{KT}{6}t^3 + O(t^4)$ und somit $y^3 \approx \left(\frac{K}{2}\right)^3 t^6 = \frac{9K}{2T^2} \frac{(KT)^2}{6^2} t^6 \approx z^2 \frac{9K}{2T^2}$. Diese Projektionen ergeben als 3-dimensionales Bild:



7.7 Lemma.

Die Krümmungen K_i ($i = 1, \dots, n$) und das Begleitbein (ν_0, \dots, ν_n) einer nach der Bogenlänge parametrisierten Kurve sind durch folgende Bedingungen eindeutig festgelegt:

$$c^{(j+1)} = \nu_0^{(j)} \equiv K_1 \cdot \dots \cdot K_j \cdot \nu_j \pmod{\langle \{\nu_0, \dots, \nu_{j-1}\} \rangle},$$

$$K_i > 0 \text{ für } i < n$$

und (ν_1, \dots, ν_n) ist eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

Beweis. Wir wissen bereits (wegen 7.5), daß diese Gleichung für $j = 1, \dots, 3$ erfüllt ist. Nehmen wir an, sie ist für j erfüllt, d.h.

$$\nu_0^{(j)} = K_1 \cdot \dots \cdot K_j \cdot \nu_j + \sum_{i=0}^{j-1} a_i \nu_i \quad (*),$$

so müssen wir die Behauptung nur mehr für $j+1$ zeigen: Dazu differenzieren wir (*) und erhalten

$$\begin{aligned} \nu_0^{(j+1)} &= (K_1 \dots K_j) \cdot \nu_j' + (K_1 \dots K_j)' \cdot \nu_j + \sum_{i=0}^{j-1} (a_i' \cdot \nu_i + a_i \cdot \nu_i') \\ &\equiv (K_1 \dots K_j)(K_{j+1} \cdot \nu_{j+1} - K_j \cdot \nu_{j-1}) \pmod{\langle \{\nu_0, \dots, \nu_j\} \rangle} \\ &\equiv K_1 \dots K_j K_{j+1} \cdot \nu_{j+1} \pmod{\langle \{\nu_0, \dots, \nu_j\} \rangle}, \end{aligned}$$

da ν_i' für $i < j$ und $K_j \nu_{j-1}$ im Erzeugnis der ν_0, \dots, ν_j liegen.

Nach Konstruktion ist für $j < n$ der Winkel zwischen ν_j und $c^{(j+1)}$ kleiner als $\pi/2$. Also gilt:

$$0 < \langle \nu_j | c^{(j+1)} \rangle = \left\langle \nu_j \left| K_1 \cdot \dots \cdot K_j \nu_j + \sum_{i < j} a_i \nu_i \right. \right\rangle = K_1 \cdot \dots \cdot K_j \underbrace{\langle \nu_j | \nu_j \rangle}_1.$$

Hiermit sind alle $K_j > 0$ für $j < n$.

Nach Konstruktion bilden die ν_j eine positiv orientierte Orthonormalbasis.

Umgekehrt folgt aus

$$c^{(j+1)} \equiv K_1 \cdots K_j \nu_j \pmod{\langle \{\nu_0, \dots, \nu_{j-1}\} \rangle}$$

und $K_j > 0$ für $j < n$, daß $\langle \{\nu_0, \dots, \nu_{j-1}\} \rangle = \langle \{c', \dots, c^{(j)}\} \rangle$ für $1 \leq j < n$ sowie $0 < \langle \nu_j | c^{(j+1)} \rangle$. Wegen der Orthogonalität ist also ν_j das Begleitbein. Weiters ist $K_1 \cdots K_j$ der eindeutig bestimmte Koeffizient von ν_j , in der Entwicklung von $\nu_0^{(j)}$ bzgl. der Basis (ν_0, \dots, ν_n) und damit K_i die entsprechende Krümmung. \square

7.8 Folgerung.

Es ist $K_1^n K_2^{n-1} \cdots K_{n-1}^2 K_n = \det(c', \dots, c^{(n+1)})$ und insbesondere hat K_n das gleiche Vorzeichen wie $\det(c', \dots, c^{(n+1)})$. Für Raumkurven $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ ist die Torsion somit durch $T = \det(c', c'', c''')/K^2$ gegeben.

Beweis. Nach den Regeln für das Rechnen mit Determinanten erhalten wir

$$\begin{aligned} \det(c', \dots, c^{(n+1)}) &= \det\left(\nu_0, K_1 \nu_1, \dots, K_1 \cdots K_n \nu_n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \nu_i\right) \\ &= \underbrace{K_1^n K_2^{n-1} \cdots K_{n-1}^2 K_n^1}_{>0} \underbrace{\det(\nu_0, \dots, \nu_n)}_{=1 \text{ da pos. orientiert}} \quad \square \end{aligned}$$

7.9 Satz (Die Krümmungen charakterisieren die Kurve).

Seien $K_i : I \rightarrow \mathbb{R}$ glatte Funktionen für $1 \leq i \leq n$ mit $K_i(t) > 0$ für $i < n$. Dann gibt es eine bis auf Bewegungen eindeutig bestimmte Kurve im \mathbb{R}^{n+1} , welche nach der Bogenlänge parametrisiert genau die K_i als Krümmungen besitzt.

Die Devise ist also: "Sag mir, wie Du Dich krümmst und windest, und ich sag Dir wer Du bist"!

Beweis. O.B.d.A. sei $0 \in I$. Wir behaupten: Es existiert genau eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit gegebenen Krümmungen und den Anfangsbedingungen: $c(0) = 0$ und mit der Standardbasis e_0, \dots, e_n als Begleitbein bei 0.

Nach den Frenet'schen Ableitungsgleichungen muß $\nu'_j = K_{j+1} \cdot \nu_{j+1} - K_j \cdot \nu_{j-1}$ für $j = 0, \dots, n$ und $\nu_j(0) = e_j$ sein. Dies ist ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit $(n+1)^2$ eindimensionalen Gleichungen und entsprechenden Anfangsbedingungen. Für ein solches System existiert eine eindeutige Lösung (ν_0, \dots, ν_n) , für die wir zeigen werden, daß dieses das Begleitbein einer Kurve ist. Wir behaupten, daß die ν_i für jeden Zeitpunkt orthonormiert sind: Wir definieren $g_{ij} := \langle \nu_i | \nu_j \rangle : I \rightarrow \mathbb{R}$. Dann ist $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Mit

$$g'_{ij} = \langle \nu'_i | \nu_j \rangle + \langle \nu_i | \nu'_j \rangle = K_{i+1} g_{i+1,j} - K_i g_{i-1,j} + K_{j+1} g_{i,j+1} - K_j g_{i,j-1}$$

erhalten wir abermals ein lineares, homogenes Differentialgleichungssystem mit $(n+1)^2$ eindimensionalen Gleichungen und entsprechenden Anfangsbedingungen $g_{ij}(0) = \delta_{ij}$. Auch hier muß es eine eindeutige Lösung g_{ij} geben. Wir sehen andererseits, daß δ_{ij} eine Lösung ist:

$$\begin{aligned} K_{i+1} \delta_{i+1,j} - K_i \delta_{i-1,j} + K_{j+1} \delta_{i,j+1} - K_j \delta_{i,j-1} &= \\ &= \begin{cases} 0 & \text{für } |i-j| \neq 1 \\ -K_i + K_{j+1} = 0 & \text{für } i = j+1 \\ K_{i+1} - K_j = 0 & \text{für } j = i+1 \end{cases} = \delta'_{i,j} \end{aligned}$$

Also ist $g_{ij} = \delta_{ij}$, d.h. die ν_i sind orthonormiert. Sie sind auch positiv orientiert, denn $\det(\nu_0, \dots, \nu_n)(0) = 1$ und $\det(\nu_0, \dots, \nu_n)(t) = \pm 1$ für alle t . Wegen des Zwischenwertsatzes folgt, $\det(\nu_0, \dots, \nu_n)(t) = 1$ für alle t . Es gibt höchstens eine Kurve c , welche die ν_i als Begleitbein hat und $c(0) = 0$ erfüllt, nämlich: $c(t) := \int_0^t \nu_0$, denn c' muß gleich ν_0 sein. Es ist $|c'| = |\nu_0| = 1$, also ist c nach der Bogenlänge parametrisiert. Durch Differenzieren erhalten wir $c^{(j+1)}(t) = \nu_0^{(j)}$ und wegen der Differentialgleichung für die ν_j gilt

$$\nu_0^{(j)} \equiv K_1 \cdot \dots \cdot K_j \nu_j \pmod{\langle \{\nu_0, \dots, \nu_{j-1}\} \rangle}$$

für $j < n$ wie im Beweis von [7.7](#) gezeigt wurde. Also ist auch

$$c^{(j+1)}(t) \equiv K_1 \cdot \dots \cdot K_j \nu_j \pmod{\langle \{\nu_0, \dots, \nu_{j-1}\} \rangle}$$

und damit sind die K_j die Krümmungen von c und die ν_i das Begleitbein nach Lemma [7.7](#).

Jede andere Kurve mit diesen Krümmungen läßt sich durch eine eindeutig bestimmte Bewegung in eine Kurve mit (denselben Krümmungen und) obigen Anfangsbedingungen transformieren. Diese ist nach dem bisher Gesagten eindeutig bestimmt, also auch jene. \square

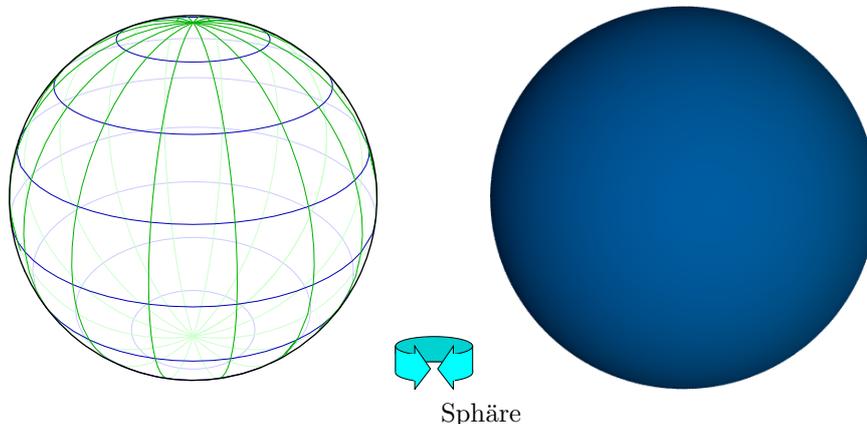
II. Mannigfaltigkeiten

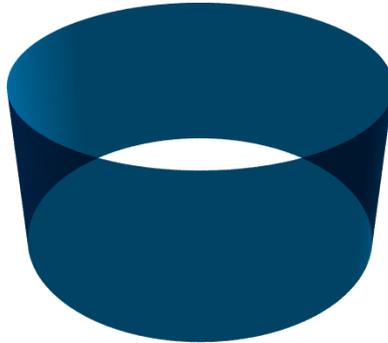
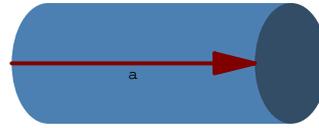
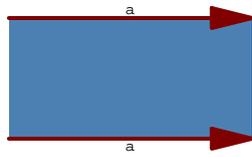
In diesem Kapitel führen wir den Begriff der Mannigfaltigkeit ein. Wir beginnen dabei spielerisch mit zweidimensionalen Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^3 , sogenannten Flächen, verallgemeinern diese dann im zweiten Abschnitt zu Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n , und präzisieren im dritten Abschnitt die spielerischen Beispiele vom Anfang. Nach einem Einschub über die Homotopietheorie von höher dimensionalen Sphären behandeln wir noch die klassischen Beispiele von Mannigfaltigkeiten, die eine glatte Gruppenstruktur tragen, also von sogenannten Lie-Gruppen. Nach Einführung des Begriffs der glatten Abbildung haben wir genügend Einsicht, um uns abstrakten Mannigfaltigkeiten zuzuwenden, damit meine ich solche Mannigfaltigkeiten die nicht (von vornherein) in einem umgebenden Euklidischen Raum sitzen. Nach Produkten und disjunkten Vereinigungen von Mannigfaltigkeiten gehen wir dann noch auf die Reichhaltigkeit der glatten Funktionen auf ihnen ein, insbesondere betrifft das Trennungsaxiome wie etwa jenes von Hausdorff, Lokalkompaktheit und vor allem Parakompaktheit und die damit äquivalente Existenz von Partitionen der Eins, die das zentrale Hilfsmittel darstellen um von lokalen Konstruktionen (also z.B. solchen aus der Analysis) zu globalen übergehen zu können.

9. Beispiele zweidimensionaler Flächen

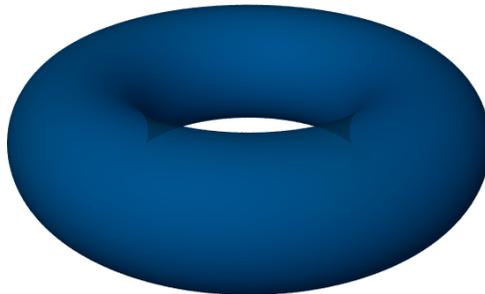
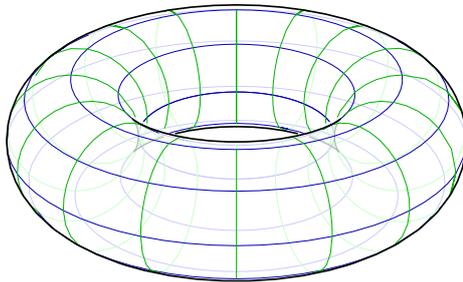
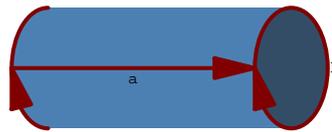
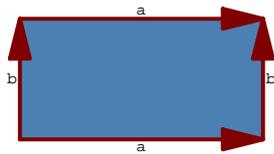
Wir wollen uns in diesem Abschnitt vorerst spielerisch mit zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten vertraut machen. Das sind Objekte, die lokal, bis auf Verbiegungen und Dehnungen, wie eine Scheibe im \mathbb{R}^2 aussehen.

9.1 Beispiele orientierbarer Flächen

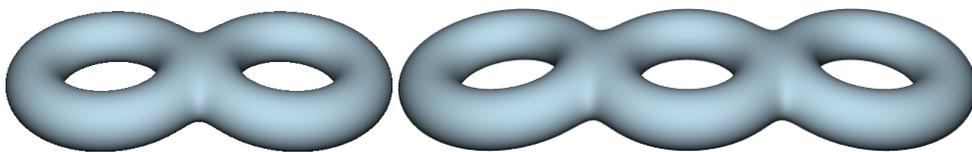




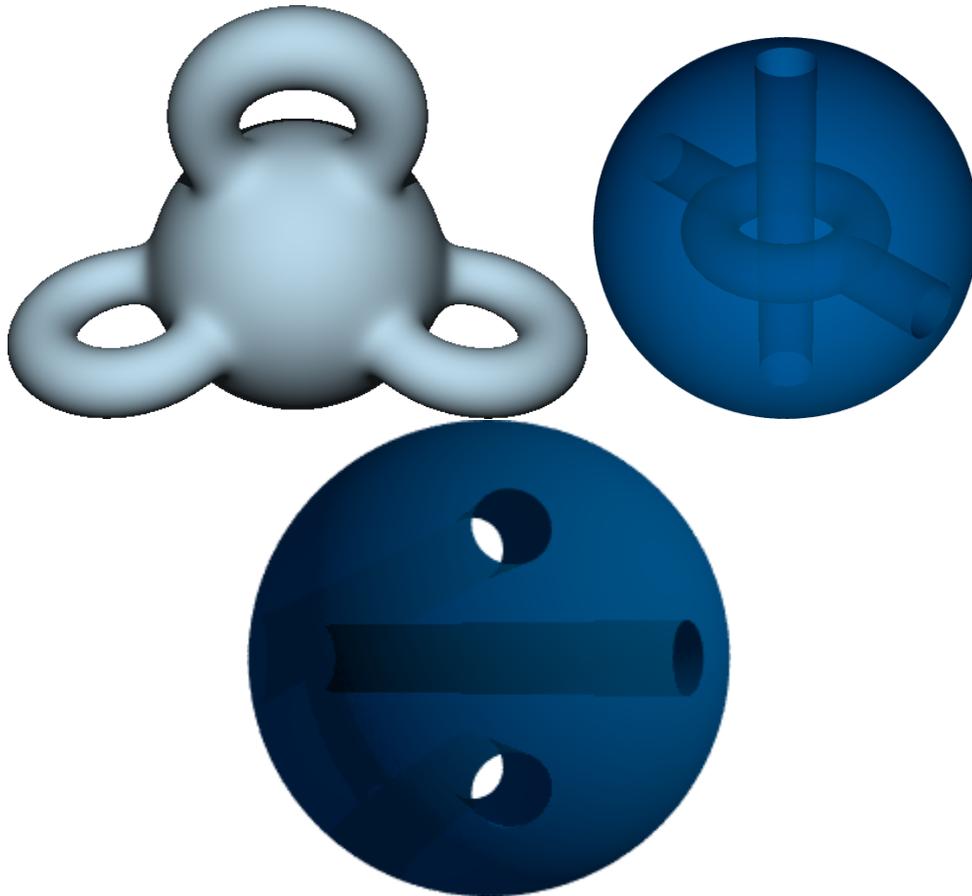
Zylinder



Torus



Orientierbare kompakte Flächen vom Geschlecht 2 und 3



Orientierbare kompakte Fläche vom Geschlecht 3

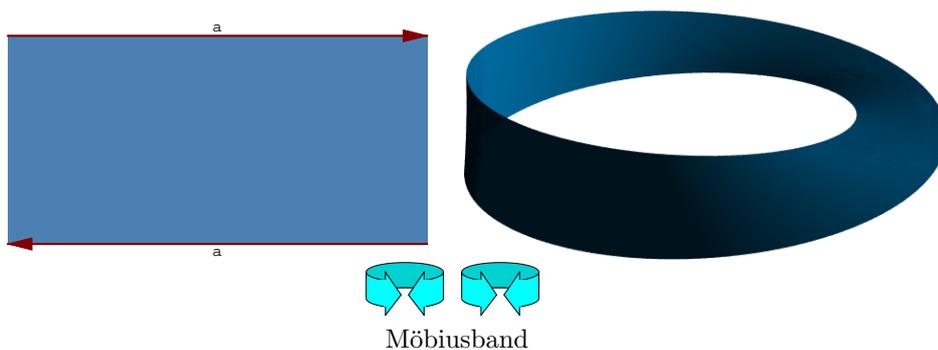
9.2 Klassifikationssatz für orientierbare Flächen.

Jede zweidimensionale, kompakte, zusammenhängende Fläche im \mathbb{R}^3 ist homöomorph zu einer Fläche von Geschlecht g , d.h. entsteht aus der Sphäre durch Ankleben von g Zylinder.

Ohne Beweis, siehe z.B. [42, 9.3.5]. Einen Indizienbeweis geben wir in [9.4].

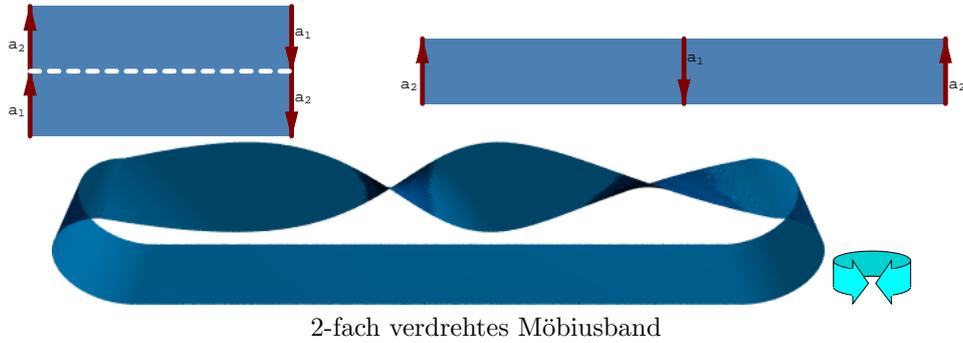
9.3 Beispiele nicht-orientierbarer Flächen

Beispiele von zweidimensionalen, zusammenhängenden, nicht orientierbaren Flächen:

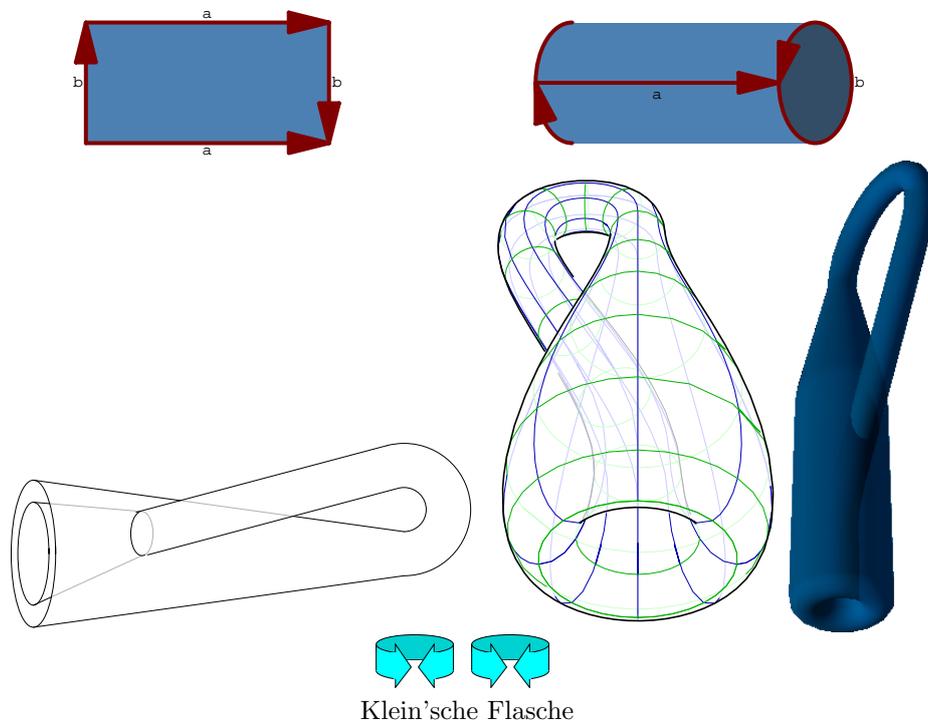


Möbiusband

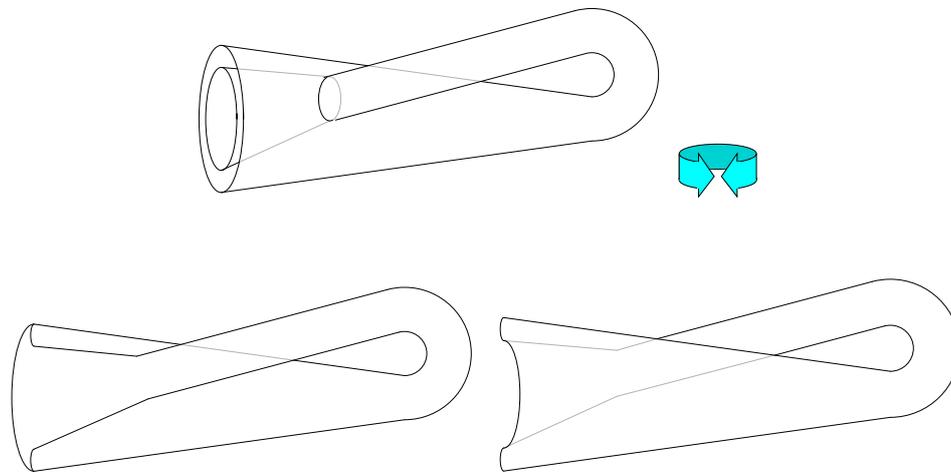
Schneidet man das Möbiusband der Länge nach auf, so erhält man ein zweifach verdrehtes Band, das man im \mathbb{R}^4 aufdrehen kann (siehe [11.10](#)).



Beispiele von zweidimensionalen, zusammenhängenden, kompakten, nicht orientierbaren Flächen:

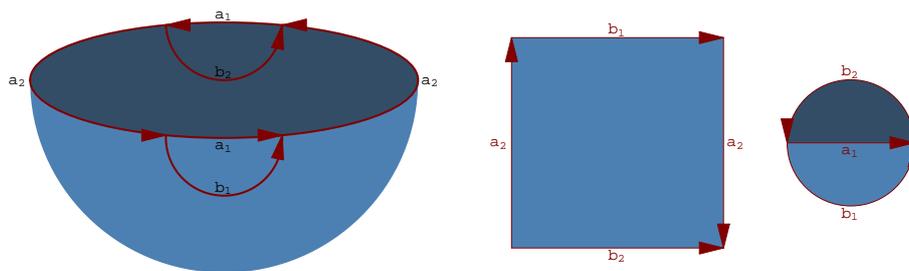


Das nennt man die KLEIN'SCHE FLASCHE, die man im \mathbb{R}^4 ohne Doppelpunkte realisieren kann und die auch durch Verkleben zweier Möbiusbänder entsteht.



Klein'sche Flasche zerschnitten

Ein anderes Beispiel ist die PROJEKTIVE EBENE \mathbb{P}^2 , dies ist die Menge aller Geraden durch den Nullpunkt im \mathbb{R}^3 . Man kann die projektive Ebene aus der Sphäre auf folgende Weise erhalten: Die antipodalen Punkte auf der Sphäre erzeugen die gleiche Gerade und müssen miteinander identifiziert werden. Dazu kleben wir die nördliche Hemisphäre antipodal auf die südliche. Wir müssen noch die gegenüberliegenden Punkte am Äquator miteinander identifizieren. Hierzu verformen wir die Halbkugel zu einer Scheibe, von der wir auf beiden Seiten einen Halbkreis ausschneiden und erhalten nach Verkleben der antipodalen Punkte am Äquator ein Möbiusband und eine Scheibe. Nun muß man nur mehr den Rand der Scheibe mit dem des Möbiusbandes verkleben.

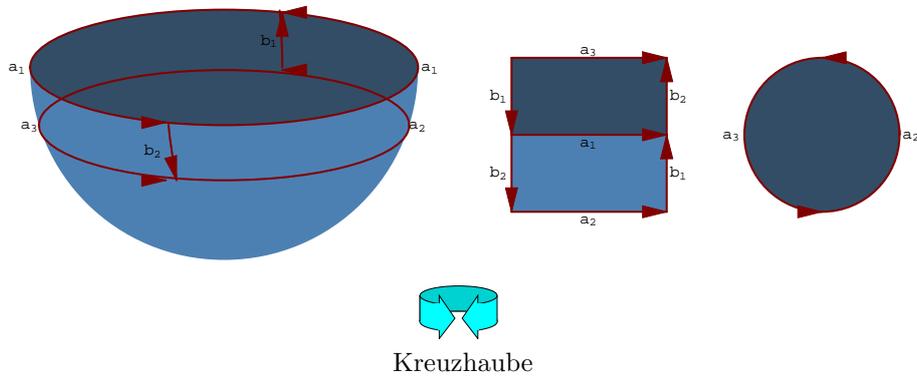


Projektive Ebene

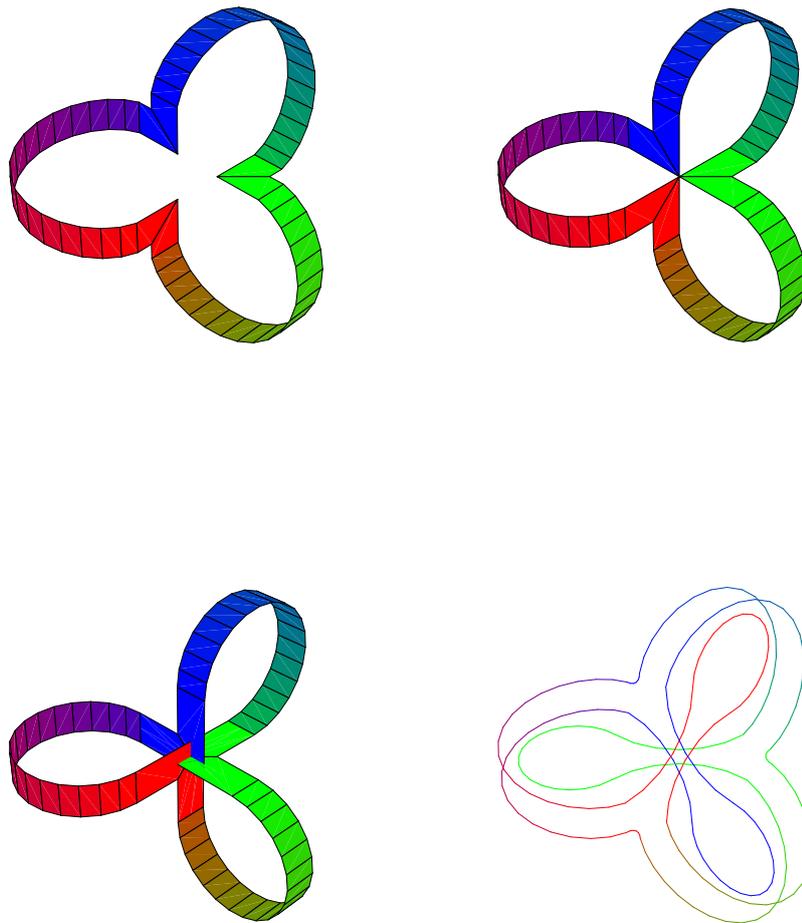
Man kann sich das auf drei Arten vorstellen:

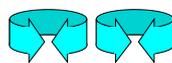
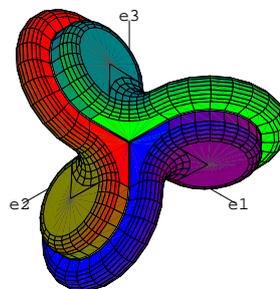
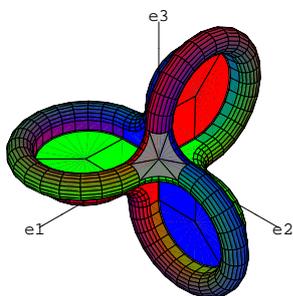
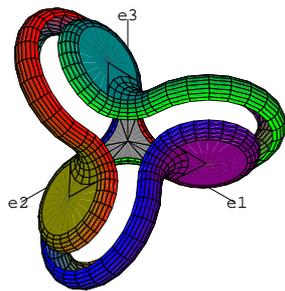
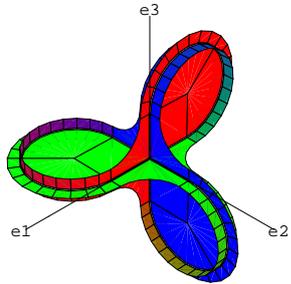
1) Man zeichnet das Möbiusband und klebt die Scheibe (mit Selbstdurchdringung) an.

2) Man zeichnet die Scheibe und klebt das Möbiusband (mit Selbstdurchdringung) an. Das nennt man auch die KREUZHAUBE.



3) Auch hier kleben wir an ein Möbiusband (dreifach verdreht und selbstdurchdrungen) eine Scheibe. Das nennt man auch BOY'S SURFACE.



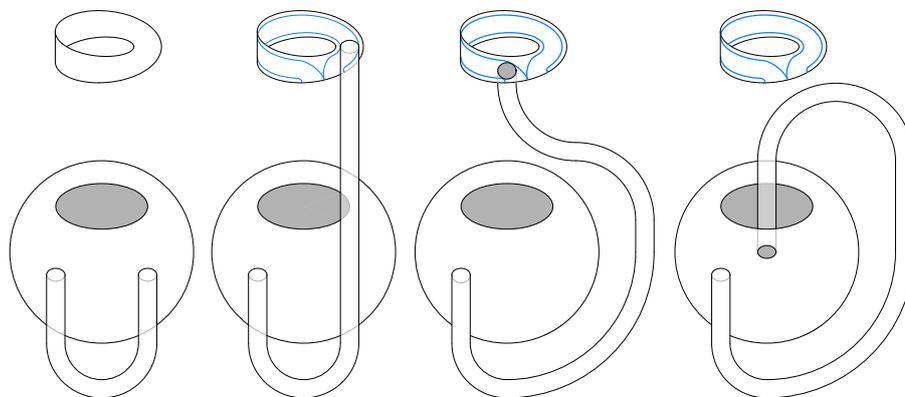


Konstruktion von Boys Fläche

9.4 Klassifikationssatz nicht-orientierbarer Flächen.

Jede nicht orientierbare, zweidimensionale, zusammenhängende, kompakte Fläche entsteht aus einer Sphäre durch Ankleben von endlich vielen (≥ 1) Kreuzhauben. Die Anzahl der angeklebten Kreuzhauben heißt Geschlecht der Fläche.

Ohne Beweis, siehe z.B. [42, 9.3.10]. Ein Indizienbeweis dafür und für [9.2] geht mittels Chirurgie wie folgt: Man sucht eine einfach geschlossene Kurve auf der Fläche M , welche M nicht in zwei Teile zerschneidet, und verbreitert diese Kurve zu einem Band, also einem am Ende verklebten Rechteck. Je nachdem ob dieses verdreht verklebt ist oder nicht, ist es ein Möbiusband oder ein Zylinder. Wir entfernen dieses Band und kleben an den/die beiden Schnittkreise eine/zwei Kreisscheiben und erhalten eine neue Fläche M' . Umgekehrt entsteht also M aus M' durch Ankleben eines Kreuzhaube oder eines Henkels. Wir fahren mit diesem Prozeß fort, bis die entstandene Fläche längs jeder einfach geschlossenen Kurve in zwei Teil zerfällt. Man überzeugt sich, daß diese dann homöomorph zur Sphäre ist, denn jede solche Schnittlinie läßt sich zu einem Zylinder erweitern und klebt man an die beiden Restteile Scheiben, so haben die kleineren entstandenen Flächen die selbe Eigenschaft. Also entsteht M aus der Sphäre durch Ankleben von Henkeln und Kreuzhauben. Allerdings ist auch nicht offensichtlich, daß obiger Prozeß wirklich nach endlich vielen Schritten abbricht. Weiters bleibt noch zu zeigen, daß es genügt nur ausschließlich Henkel oder ausschließlich Kreuzhauben anzukleben. Dazu genügt es zu zeigen, daß wenn man in einen Torus ein Loch schneidet und daran ein Möbiusband klebt, so ist das das Gleiche, wie wenn man in eine Klein'sche Flasche ein Loch schneidet und daran ein Möbiusband klebt. Dies zeigt folgende Zeichnung:



Umwandlung von Torus in Klein'sche Flasche

10. Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n

In diesem Abschnitt wollen wir Mannigfaltigkeiten als hinreichend "reguläre" Teilmengen des \mathbb{R}^n definieren. Wir werden sehen, daß diese auf verschiedenste Weise beschrieben werden können.

10.1 Definition (reguläre Abbildungen)

Zuerst verallgemeinern wir den Begriff der Regularität von Kurven aus [1.2]. Eine glatte Abbildung $f : U \rightarrow V$, wobei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen sind, heißt REGULÄR, falls der Rang der Ableitung in jedem Punkt $x \in U$ so groß wie möglich, also gleich $\min\{n, m\}$ ist.

Beachte, daß eine in einem Punkt reguläre Abbildung lokal um diesen Punkt regulär ist, denn der Rang kann lokal nicht fallen.

Aus der linearen Algebra kennen wir folgende Beziehungen für den Rang $\text{rang}(A)$ einer linearen Abbildung $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$\text{rang}(A) = \dim(\text{Bild}(A)) = \dim(\mathbb{R}^n) - \dim(\text{Ker}(A))$$

Falls also $m \leq n$ ist, so bedeutet die Regularität, daß die Ableitung in jedem Punkt surjektiv ist. Anderenfalls bedeutet sie, daß die Ableitung in jedem Punkt injektiv ist.

Für die Äquivalenz der in [10.4](#) zu gebende Beschreibung “schöner” Teilmengen des \mathbb{R}^n benötigen wir die folgenden zwei zentralen Sätze aus der mehrdimensionalen Analysis:

10.2 Inverser Funktionensatz.

Sei U offen im \mathbb{R}^n und sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt, mit $f(0) = 0$, und invertierbarer Ableitung an der Stelle 0. Dann ist f ein lokaler Diffeomorphismus, d.h. es gibt offene Umgebungen V, V' von 0, sodaß $f : V \rightarrow V'$ bijektiv und f^{-1} glatt ist.

Ohne Beweis, siehe reelle Analysis, z.B. [\[56, 6.2.1\]](#) und [\[56, 6.3.15\]](#).

10.3 Impliziter Funktionensatz.

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt mit $f(0, 0) = 0$ und $\partial_2 f(0, 0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ invertierbar. Dann gibt es lokal eine eindeutige Lösung $y(x)$ von $f(x, y(x)) = 0$ und $x \mapsto y(x)$ ist C^∞ .

Beweis. Siehe auch [\[56, 6.2.3\]](#) und [\[56, 6.3.15\]](#). Wir definieren $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ mit $F(x, y) := (x, f(x, y))$. Diese Funktion ist glatt, und $F(0, 0) = 0$. Abgeleitet ergibt das eine $(n + m) \times (n + m)$ -Matrix:

$$F'(0, 0) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ * & \partial_2 f(0, 0) \end{pmatrix}$$

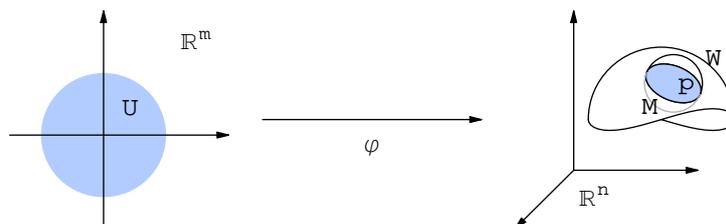
Diese ist invertierbar, also folgt aus dem inversen Funktionensatz, daß F^{-1} lokal existiert und glatt ist. Da F in der ersten Variable die Identität ist, gilt gleiches auch für F^{-1} , also sei $(u, g(u, v)) := F^{-1}(u, v)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(x, y) = 0 &\Leftrightarrow F(x, y) = (x, 0) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (x, y) = F^{-1}(x, 0) = (x, g(x, 0)) \Leftrightarrow y = g(x, 0) \quad \square \end{aligned}$$

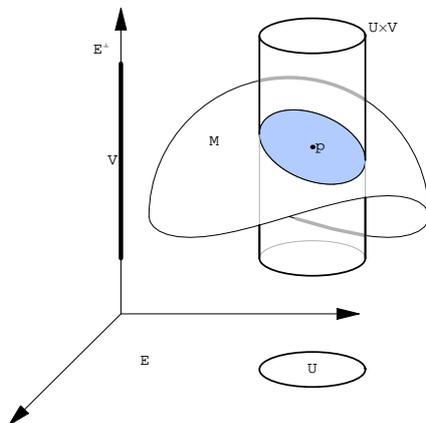
10.4 Satz (Charakterisierung von Teilmannigfaltigkeiten).

Für eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $p \in M$ und $m \leq n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

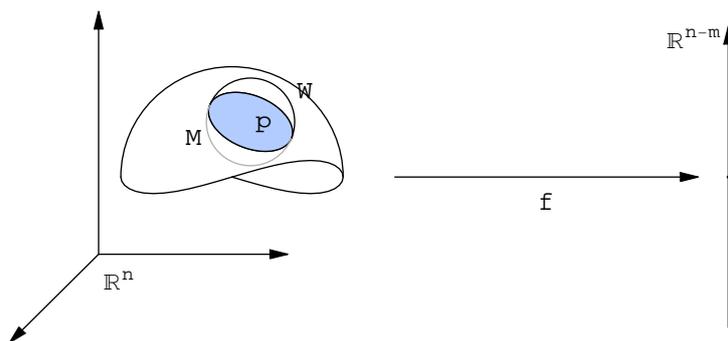
1. (LOKALE PARAMETRISIERUNG) Es gibt eine glatte, bei 0 reguläre Abbildung $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, wobei $0 \in U$ offen im \mathbb{R}^m und $\varphi(0) = p$, so daß für alle offenen Umgebungen U_1 von $0 \in U$ eine offene Umgebung W von p in \mathbb{R}^n existiert mit $\varphi(U_1) = W \cap M$.



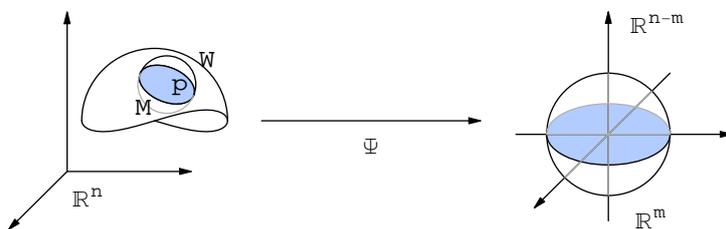
2. (LOKALER GRAPH) Es gibt eine glatte Abbildung $g : U \rightarrow V$, wobei U offen in einem m -dimensionalen Teilraum E des \mathbb{R}^n und V offen in E^\perp ist. Dabei soll gelten: $p \in M \cap (U \times V) = \text{Graph}(g) := \{(x, g(x)) : x \in U\} \subseteq E \times E^\perp \cong \mathbb{R}^n$.



3. (LOKALE GLEICHUNG) Es gibt eine glatte, bei p reguläre Abbildung $f : W \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$, wobei $p \in W$ offen im \mathbb{R}^n und $f^{-1}(0) = M \cap W$ ist.



4. (LOKALE TRIVIALISIERUNG) Es gibt einen Diffeomorphismus $\Psi : W \rightarrow W'$, wo $0 \in W'$ offen in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ und $p \in W$ offen im \mathbb{R}^n ist, und es gilt: $\Psi(M \cap W) = (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W'$.



Beweis. O.B.d.A. sei $p = 0 \in \mathbb{R}^n$.

(1 \Rightarrow 4) Analog zu [2.3](#) wollen wir die Parametrisierung φ zu einem lokalen Diffeomorphismus Φ erweitern. Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ das Bild von $\varphi'(0)$. Dann ist $\dim(E) = m$ und bezüglich $E \oplus E^\perp \cong \mathbb{R}^n$ ist $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ und $\varphi'(0) = (\varphi'_1(0), \varphi'_2(0))$. Folglich ist $\varphi'_2(0) = 0$ und $\varphi'_1(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow E$ ist injektiv (also bijektiv).

Sei $\Phi : \mathbb{R}^m \oplus E^\perp \supseteq U \oplus E^\perp \rightarrow E \oplus E^\perp$ definiert durch

$$\Phi(u, v) := \varphi(u) + v = (\varphi_1(u), \varphi_2(u) + v).$$

Die Jacobimatrix von Φ bei $(0, 0)$ ist:

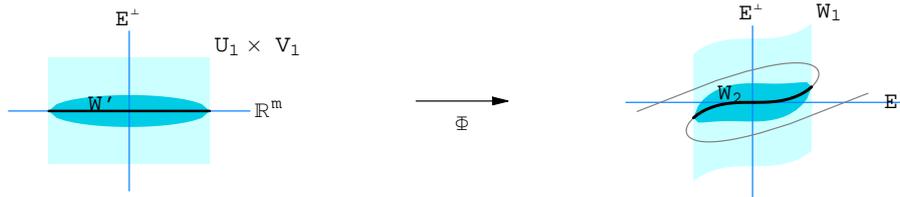
$$\Phi'(0, 0) = \begin{pmatrix} \varphi'_1(0) & 0 \\ \varphi'_2(0) & \text{id} \end{pmatrix}.$$

Sie ist invertierbar, da $\varphi'_1(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow E$ bijektiv ist. Aus dem Inversen-Funktionensatz 10.2 folgt, daß Φ ein lokaler Diffeomorphismus ist, d.h. $\exists U_1 \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\exists V_1 \subseteq E^\perp$ offen und $\exists W_1 \subseteq W$ offen, sodaß $\Phi : U_1 \times V_1 \rightarrow W_1$ ein Diffeomorphismus ist. Also ist

$$\varphi(U_1) = \Phi(U_1 \times \{0\}) \subseteq W_1 \subseteq W.$$

Wegen der Eigenschaft (1) von φ existiert ein offenes $W_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, und o.B.d.A. ist $W_2 \subseteq W_1$, sodaß $\varphi(U_1) = W_2 \cap M$. Wir definieren $W' := \Phi^{-1}(W_2)$. Dann ist $U_1 \times \{0\} \subseteq W'$, denn $\Phi(U_1 \times \{0\}) = \varphi(U_1) = W_2 \cap M$, und weiters ist $\Phi : W' \rightarrow W_2$ ein Diffeomorphismus mit inverser Abbildung $\Psi := \Phi^{-1} : W_2 \rightarrow W'$. Für $z \in W_2$ gilt:

$$\begin{aligned} z \in M &\Leftrightarrow \exists u \in U_1 : \Phi(u, 0) = \varphi(u) = z \\ &\Leftrightarrow \Psi(z) = (u, 0) \text{ für ein } u \in U_1 \\ &\Leftrightarrow \Psi(z) \in (\mathbb{R}^m \times \{0\}) \cap W'. \end{aligned}$$

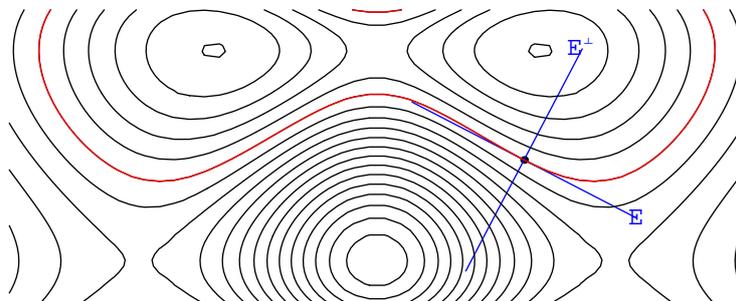


Insbesondere ist φ auf U_1 die Einschränkung eines Homöomorphismuses, also $\varphi : U_1 \rightarrow M$ eine topologische Einbettung auf eine offene Teilmenge von M .

(4 \Rightarrow 3) Sei $f := \text{pr}_2 \circ \psi$, wobei $\text{pr}_2 : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ die zweite Projektion ist. Da $f'(z) = \underbrace{\text{pr}_2}_{\text{surj.}} \circ \underbrace{\psi'(z)}_{\text{bij.}}$ surjektiv ist, ist f regulär. Sei $z \in W$ dann gilt:

$$z \in M \Leftrightarrow \psi(z) \in \mathbb{R}^m \times \{0\} \Leftrightarrow (\text{pr}_2 \circ \psi)(z) = f(z) = 0$$

(3 \Rightarrow 2) Sei f eine lokale Gleichung wie in (3).



Wir definieren $E := \text{Ker } f'(0)$ und verwenden $\mathbb{R}^n \cong E \times E^\perp$. Wegen

$$\underbrace{\dim \text{Ker } f'(0)}_E + \underbrace{\dim \text{Bild } f'(0)}_{n-m} = \underbrace{\dim \mathbb{R}^n}_n,$$

ist $\dim E = m$ und $\dim E^\perp = n - m$. Gesucht ist eine Funktion $g : E \rightarrow E^\perp$, welche implizit gegeben ist durch $f(x, y) = 0$ (d.h. $(x, y) \in M$), und $y = g(x)$. Um den

impliziten Funktionensatz anwenden, betrachten wir die zweite partielle Ableitung von f :

$$\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{(0,0)} = \partial_2 f(0,0) : E^\perp \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}.$$

Diese ist surjektiv, da wegen $f'(0)(v_1, v_2) = \partial_1 f(0)(v_1) + \partial_2 f(0)(v_2)$ für $(v_1, 0) \in E \times \{0\} \cong E = \text{Ker } f'(0)$ folgendes gilt: $\partial_1 f(0)(v_1) = f'(0)(v_1, 0) = 0$. Da $f'(0) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ surjektiv ist, ist also auch $\partial_2 f(0) : E^\perp \rightarrow \mathbb{R}^{n-m}$ surjektiv und wegen $\dim(E^\perp) = n - m$ somit bijektiv. Aus dem impliziten Funktionensatz [10.3](#) folgt nun: $\exists U \subseteq E$ offen, $\exists V \subseteq E^\perp$ offen und $g : U \rightarrow V$ glatt, mit $g(x) = y \Leftrightarrow f(x, y) = 0$

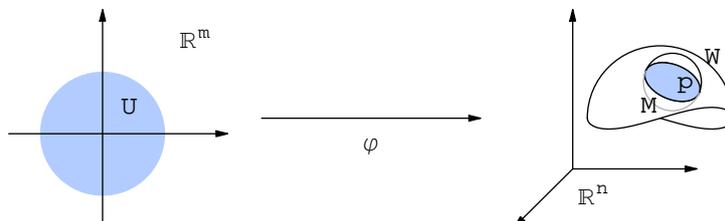
(2 \Rightarrow 1) Sei M lokal als Graph von $g : U \rightarrow V$ beschrieben. Wir definieren die glatte Abbildung $\varphi : U \rightarrow E \times E^\perp = \mathbb{R}^n$ durch $x \mapsto (x, g(x))$. Die Frage ist, ob φ die Menge M lokal beschreibt. Dazu schließen wir für $(x, y) \in U \times V =: W$ wie folgt:

$$(x, y) \in M \Leftrightarrow (x, y) \in \text{Graph}(g) \Leftrightarrow y = g(x) \Leftrightarrow (x, y) = (x, g(x)) = \varphi(x).$$

Die Abbildung φ ist topologisch eine Einbettung, denn $(x, y) \mapsto y$ beschreibt eine Linksinverse. \square

Definition (Konkrete Mannigfaltigkeit)

Eine Teilmenge M des \mathbb{R}^n mit einer der obigen äquivalenten Eigenschaften für all ihre Punkte $p \in M$ heißt C^∞ -(TEIL-)MANNIGFALTIGKEIT (DES \mathbb{R}^n) der Dimension m . Im Gegensatz zu Kurven dürfen diese Mannigfaltigkeiten selbst für $m = 1$ keine Doppelpunkte besitzen.



Eine glatte reguläre Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ mit offenen $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\varphi(0) = p$, die eine Einbettung auf eine offene Teilmenge von M ist, heißt lokale (bei p zentrierte) Parametrisierung von M . In (1 \Rightarrow 4) haben wir gezeigt, daß ein φ , welches (1) erfüllt, lokal eine Parametrisierung ist. Die Komponenten u^1, \dots, u^m der Umkehrabbildung $(u^1, \dots, u^m) = u = \varphi^{-1}$ zu einer lokalen Parametrisierung φ heißen **LOKALE KOORDINATEN** von M . Punkte $p \in M$ können also lokal nach Vorgabe einer Parametrisierung φ durch Zahlen $u^1(p), \dots, u^m(p)$ beschrieben werden.

11. Beispiele von Teilmannigfaltigkeiten

In diesen Abschnitt geben wir nun eine Reihe von Beispielen und machen damit auch die Flächen aus [9](#) präzise.

11.1 Kreis

1. Gleichung: $x^2 + y^2 = R^2$.

Sei also $W := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, dann ist $f : W \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := x^2 + y^2 - R^2$ eine Gleichung für M , die auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ regulär ist.

2. Parametrisierung: $\varphi \mapsto (x, y) := (R \cdot \cos \varphi, R \cdot \sin \varphi)$.
Für alle $(x_0, y_0) \in M$ existiert ein $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ (gegeben durch $e^{i\varphi_0} = (x_0, y_0)$),
sodaß $\varphi \mapsto (x, y)$ eine lokale Parametrisierung von $U :=]\varphi_0 - \pi, \varphi_0 + \pi[$ auf
 $W \cap M$ mit $W := \mathbb{R}^2 \setminus \{(-x_0, -y_0)\}$ ist.
3. Graph: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ oder $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$
Sei $E := \mathbb{R} \times \{0\}$, $U :=]-R, +R[\subset E$ und $V :=]0, +R[\subset E^\perp$. Dann ist
 $M \cap (U \times V) = \{(x, \sqrt{R^2 - x^2}) : x \in U\}$ eine lokale Darstellung von M als
Graph von $g : U \rightarrow V$.
4. Trivialisierung: $(R, \varphi) \mapsto (R \cdot \cos \varphi, R \cdot \sin \varphi)$ also $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $\psi(M) =$
 $\{R\} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$. Dies sind gerade Polarkoordinaten.

11.2 Zylinder

1. Gleichung: $x^2 + y^2 + 0 \cdot z = R^2$.
Beachte, daß dies die gleiche Gleichung wie jene vom Kreis ist, allerdings
nun aufgefaßt als Gleichung am \mathbb{R}^3 .
2. Parametrisierung: $(\varphi, z) \mapsto (R \cdot \cos \varphi, R \cdot \sin \varphi, z)$. Wir erhalten diese Para-
metrisierung indem wir einen Erzeuger des Zylinders vermöge $z \mapsto (R, 0, z)$
nach Bogenlänge parametrisieren und diese mittels Winkel φ vermöge

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

um die z -Achse drehen also

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

betrachten.

3. Graph: $y = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$ oder $x = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$.
4. Trivialisierung: $(\varphi, r, z) \leftrightarrow (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi, z)$, das sind die Zylinderkoordinaten.

Eine Parametrisierung $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist (per Definition) genau dann
längenbewahrend, wenn die Länge jeder Kurve $c : [a, b] \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ gleich jener der
Bildkurve $f \circ c : [a, b] \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist, also

$$\int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b |(f \circ c)'(t)| dt = \int_a^b |f'(c(t))(c'(t))| dt$$

gilt. Die ist genau dann erfüllt, wenn $f'(p)$ für alle $p \in U$ eine Isometrie ist, also

$$|f'(p)(v)| = |v| \text{ für alle } v \in \mathbb{R}^m$$

erfüllt, denn sei $v \in \mathbb{R}^n$ und $c_s : t \mapsto p + tsv$. Dann ist $c_s : [0, 1] \rightarrow U$ für alle $s > 0$
nahe 0 und somit

$$s|v| = \int_0^1 |c'_s(t)| dt = \int_0^1 |f'(c_s(t))(sv)| dt = s \int_0^1 |f'(c_s(t))(v)| dt$$

und da $c_s \rightarrow c_0$ für $s \rightarrow 0$ gleichmäßig auf $[0, 1]$ konvergiert ist auch

$$|v| = \int_0^1 |f'(c_0(t))(v)| dt = \int_0^1 |f'(p)(v)| dt = |f'(p)(v)|.$$

Die Umkehrung ist offensichtlich.

Obige Parametrisierung $f : (\varphi, z) \mapsto (R \cos \varphi, R \sin \varphi, z)$ ist nicht längenbewahrend, denn

$$|f'(\varphi, z)(1, 0)| = \left| \frac{\partial}{\partial \varphi} f(\varphi, z) \right| = |R(-\sin \varphi, \cos \varphi, 0)| = R \neq |(1, 0)|,$$

für $R \neq 1$. Dies kann aber leicht korrigiert werden, wenn wir die neue Parametrisierung $f : (\varphi, z) \mapsto (R e^{i\varphi/R}, z)$ betrachten. Deren Ableitung ist

$$f'(\varphi, z) = \begin{pmatrix} -\sin(\frac{\varphi}{R}) & 0 \\ \cos(\frac{\varphi}{R}) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Spalten bilden nun ein Orthonormalsystem, also ist $f'(\varphi, z)$ eine Isometrie und somit f Längenbewahrend. 

11.3 Kegel

Drehung einer Geraden durch Null mit Anstieg α um die z -Achse.

1. Gleichung: $\tan \alpha = z/\sqrt{x^2 + y^2}$ oder $(x^2 + y^2) \tan^2 \alpha = z^2$. Ersters beschreibt den Kegel, letzteres den Doppelkegel. Die Gleichung ist nicht regulär bei $(0, 0, 0)$, also müssen wir die Spitze entfernen, denn dort ist der (Doppel-)Kegel keine Mannigfaltigkeit.
2. Parametrisierung: $(\varphi, s) \mapsto (s \cos \alpha \cos \varphi, s \cos \alpha \sin \varphi, s \sin \alpha)$.
Diese Parametrisierung erhalten wir, indem wir eine Erzeuger der Kegels nach Bogenlänge als $s \mapsto (s \cos \alpha, 0, s \sin \alpha)$ parametrisieren und diese mittels Winkel φ vermöge

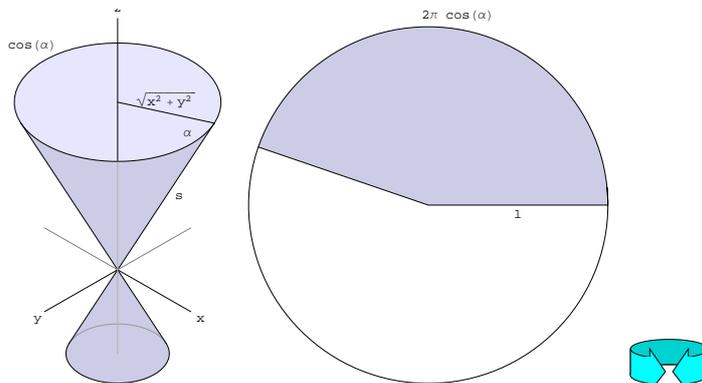
$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

um die z -Achse drehen also

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s \cos \alpha \\ 0 \\ s \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \cos \alpha \cos \varphi \\ s \cos \alpha \sin \varphi \\ s \sin \alpha \end{pmatrix}$$

betrachten.

3. Graph: $z = \pm \tan \alpha \sqrt{x^2 + y^2}$
4. Trivialisierung: $(\varphi, \alpha, s) \leftrightarrow (s \cos \alpha \cos \varphi, s \cos \alpha \sin \varphi, s \sin \alpha)$, das sind die Kugelkoordinaten.



Eine bessere Parametrisierung erhält man durch Aufrollen des Kegels in eine Ebene:

$$(x, y) \mapsto (r, \psi) \mapsto \left(s := r, \varphi := \frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \alpha \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ r \cos \alpha \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ r \sin \alpha \end{pmatrix},$$

wobei (x, y) kartesische und (ψ, r) Polarkoordinaten in der Ebene sind.

Die Ableitung dieser Parametrisierung ist die Zusammensetzung von

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha \cdot \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) & -r \cos \alpha \cdot \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ \cos \alpha \cdot \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) & r \cos \alpha \cdot \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ \sin \alpha & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\cos \alpha} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \psi & -r \sin \psi \\ \sin \psi & r \cos \psi \end{pmatrix}^{-1} = \\ = \begin{pmatrix} \cos \alpha \cos \psi \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) - \sin \psi \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) & \cos \alpha \sin \psi \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) - \cos \psi \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ \cos \alpha \cos \psi \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) + \sin \psi \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) & \cos \alpha \sin \psi \sin \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) + \cos \psi \cos \left(\frac{\psi}{\cos \alpha} \right) \\ \cos \alpha \cos \psi & \sin \alpha \sin \psi \end{pmatrix}$$

von der man mit längerer direkter Rechnung zeigen kann, daß sie isometrisch ist.

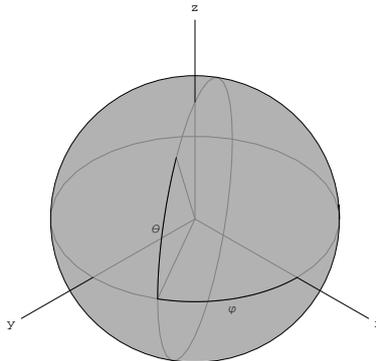
11.4 Sphäre

1. Gleichung: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$
2. Parametrisierung: $(\varphi, \theta) \mapsto (R \cos \theta \cos \varphi, R \cos \theta \sin \varphi, R \sin \theta)$ mit Längengrade φ und Breitengrade θ . Wieder erhalten wir diese Fläche indem wir die Schnittkurve mit der x - z -Ebene betrachten, dem vermöge $\theta \mapsto R(\cos \vartheta, 0, \sin \vartheta)$ parametrisierten (Halb-)Kreis und diesen mittels Winkel φ um die z -Achse drehen um

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \\ 0 \\ R \sin \vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi \\ R \sin \theta \end{pmatrix}$$

zu erhalten.

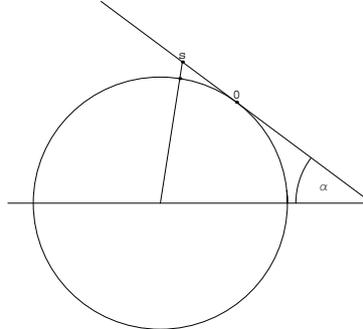
3. Graph: $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$
4. Trivialisierung: Kugelkoordinaten.



Man kann eine Sphäre auch parametrisieren, indem man auf den berührenden Kegel mit Anstieg α projiziert:

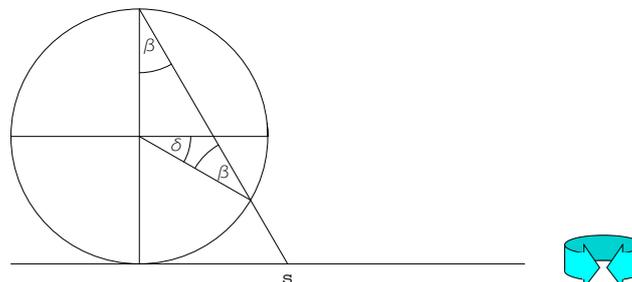
$$(x, y) \mapsto (\varphi, s) \mapsto (\varphi, \theta(s)) \mapsto \begin{pmatrix} R \cos \theta \cos \varphi \\ R \cos \theta \sin \varphi \\ R \sin \theta \end{pmatrix},$$

dabei sind (φ, s) die Parameter der obigen Parametrisierung des Kegels und (φ, θ) die Parameter der Sphäre sind.



Spezielle Wahlen der Funktion θ liefern die Radialprojektion, bzw. die Normalprojektion auf die Erzeugenden des Kegels, siehe Aufgabe [72.42](#). Insbesondere ist man an Flächen- bzw. an Winkel-erhaltenden Abbildungen interessiert, denn wie wir noch sehen werden ist eine Längenerhaltende Abbildung nicht möglich – man kann die Sphäre nicht durch Aufwickeln eines Blatt Papiers erzeugen.

Besonders wichtig ist die stereographische Projektion: Man projiziert von einem Punkt der Sphäre (o.B.d.A. dem Nordpol) auf die Tangentialebene im antipodalen Punkt.



Es ist $2\beta + (\frac{\pi}{2} - \theta) = \pi \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}$ und somit ist

$$\frac{s}{2} = \tan \beta = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1 + \tan(\theta/2)}{1 - \tan(\theta/2)}.$$

Diese Projektion ist winkelerhaltend und Kreise werden auf Kreise oder Geraden abgebildet, siehe Aufgabe [72.41](#).

Für die Seefahrt ist diese Darstellung der Sphäre allerdings nicht optimal: Dort ist man besonders an den Loxodromen interessiert, daß sind jene Kurven auf der Sphäre, welche die Längengrade unter einen fixen Winkel schneiden, denn das sind gerade die Bahnen die man zurücklegt wenn man bezüglich Norden (Polarstern oder Kompass) konstanten Kurs hält. In der stereographischen Projektion sind die Bilder der Längengrade Geraden durch 0, also die Loxodrome komplizierte Spiralen. Projiziert man hingegen auf den längs des Äquators berührenden Zylinder, dann werden die Längengrade parallele Geraden und wenn man die Projektion Winkel-erhaltend wählt (die sogenannte Merkator-Projektion) dann sind auch die Loxodrome Geraden, also der Kurs sehr leicht durch Einzeichnen der Verbindungsgerade zwischen Start- und Zielort zu bestimmen.

11.5 n -Sphäre

$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Die Funktion $f : x \mapsto |x|^2 - 1$ ist eine reguläre Gleichung für S^n , denn $f'(x)(x) = 2|x|^2 = 2$ für $x \in S^n$. Als lokale Koordinaten verwenden wir die stereographische Projektion (aber diesmal auf die Äquatorialebene, was einen Faktor $1/2$ bzgl. der gerade Besprochenen ergibt), d.h. wir suchen zu $x \in S^n$ ein $y \in \mathbb{R}^n = p^\perp \subset \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $p \in S^n$ der gewählte Pol ist, mit

$$\begin{aligned} 0 &= \langle p, p + \lambda(x - p) \rangle = |p|^2 - \lambda \langle p, p - x \rangle \\ \Rightarrow \lambda &= \frac{1}{\langle p, p - x \rangle} = \frac{1}{1 - \langle p, x \rangle} \Rightarrow \\ \Rightarrow y &= (1 - \lambda)p + \lambda x = \frac{1}{1 - \langle p, x \rangle} (x - \langle p, x \rangle p). \end{aligned}$$

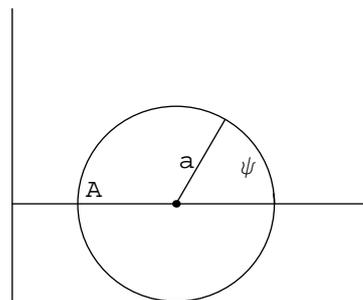
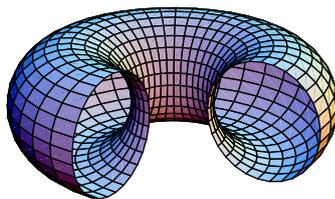
Umgekehrt

$$\begin{aligned} x &= p + \mu(y - p) \text{ mit } |x| = 1 \\ \Rightarrow 1 &= \langle x, x \rangle = \langle p + \mu(y - p), p + \mu(y - p) \rangle \\ &= 1 + 2\langle p, \mu(y - p) \rangle + \mu^2 \langle y - p, y - p \rangle \\ \Rightarrow 0 &= \mu^2 |y - p|^2 + 2\mu \langle p, y - p \rangle = \mu(\mu |y - p|^2 - 2\langle p, y - p \rangle). \end{aligned}$$

Aus $\mu = 0$ erhalten wir die uninteressante Lösung $x = p$. Andernfalls ist

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{2(1 - \langle p, y \rangle)}{|y|^2 - 2 \underbrace{\langle y, p \rangle}_0 + 1} = \frac{2}{|y|^2 + 1} \text{ und damit} \\ x &= \frac{1}{|y|^2 + 1} (2y + (|y|^2 - 1)p) \end{aligned}$$

11.6 Torus



1. Gleichung: $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - A)^2 = a^2$
2. Parametrisierung:

$$(\varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} (A + a \cos \psi) \cos \varphi \\ (A + a \cos \psi) \sin \varphi \\ a \sin \psi \end{pmatrix},$$

mit Längengrade φ und Breitengrade ψ .

Für den speziellen Torus $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - A)^2 = A^2 - 1 = a^2$ mit $A > 1$ berechnen wir das Urbild unter der stereographischen Projektion $\mathbb{R}^4 \supset S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ bezüglich des

Punktes $(0, 0, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$ wie folgt:

$$(x_1, y_1, x_2, y_2) \mapsto \frac{1}{1-y_2}(x_1, y_1, x_2, 0) \text{ da } z \mapsto \frac{z - \langle z, p \rangle p}{1 - \langle z, p \rangle} \text{ ist.}$$

Diesem Torus entspricht folgende Teilmenge des \mathbb{R}^4 :

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1 \\ \left(\frac{x_2}{1-y_2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{1-y_2} - A\right)^2 = A^2 - 1 = a^2 \end{cases}$$

Unter Verwendung der ersten Gleichung formen wir die zweite wie folgt um:

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{x_2}{1-y_2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{1-y_2} - A\right)^2 - A^2 + 1 \\ &= \frac{x_2^2}{(1-y_2)^2} + \frac{x_1^2 + y_1^2}{(1-y_2)^2} - 2A \frac{\sqrt{x_1^2 + y_1^2}}{1-y_2} + 1 \\ &= \frac{1-y_2^2}{(1-y_2)^2} - 2A \frac{\sqrt{1-(x_2^2 + y_2^2)}}{1-y_2} + 1 \\ &\Leftrightarrow 2 = 1 + y_2 + (1-y_2) = 2A\sqrt{1-(x_2^2 + y_2^2)} \end{aligned}$$

Also wird der Torus durch folgendes Gleichungssystem beschrieben:

$$\begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + x_2^2 + y_2^2 = 1 \\ 1 - (x_2^2 + y_2^2) = \frac{1}{A^2} \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 = \frac{1}{A^2} \dots \text{Kreis im } \mathbb{R}^2 \times \{(0, 0)\} \\ x_2^2 + y_2^2 = \frac{A^2 - 1}{A^2} = \frac{a^2}{A^2} \dots \text{Kreis im } \{(0, 0)\} \times \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

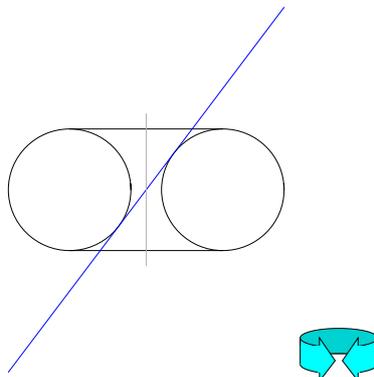
Der Torus ist also das kartesische Produkt $S^1 \times S^1$ von zwei aufeinander normalstehenden Kreisen.

Die Parametrisierung

$$(\varphi, \psi) \mapsto \left(\frac{1}{A} \cos(A\varphi), \frac{1}{A} \sin(A\varphi), \frac{a}{A} \cos\left(\frac{A\varphi}{a}\right), \frac{a}{A} \sin\left(\frac{A\varphi}{a}\right)\right)$$

ist dann Längenbewahrend, also läßt sich ein Torus im \mathbb{R}^4 durch Einrollen einer Ebene erzeugen.

Bemerkung: Folgender spezielle Schnitt durch den Torus im \mathbb{R}^3 ergibt zwei einander schneidende Kreise:



Wir verwenden auf der Schnittebene $z = \frac{a}{\sqrt{A^2 - a^2}}x$ die Basis mit den orthonormalen Vektoren $(\frac{\sqrt{A^2 - a^2}}{A}, 0, \frac{a}{A})$ sowie $(0, 1, 0)$ und bezeichnen mit (s, y) die entsprechenden Koordinaten. Dann ist $x = \frac{\sqrt{A^2 - a^2}}{A} \cdot s$ und $z = \frac{a}{A} \cdot s$. Setzen wir dies in die Torusgleichung $z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - A)^2 = a^2$ ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{A}s\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{A^2 - a^2}{A^2}s^2 + y^2} - A\right)^2 &= a^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow a^2(A^2 - s^2) &= \left(\sqrt{(A^2 - a^2)s^2 + A^2y^2} - A\right)^2 \\ &= (A^2 - a^2)s^2 + A^2y^2 + A^4 - 2A^2\sqrt{(A^2 - a^2)s^2 + A^2y^2} \\ \Leftrightarrow s^2 + y^2 + (A^2 - a^2) &= 2\sqrt{(A^2 - a^2)s^2 + A^2y^2} \\ \Leftrightarrow (s^2 + y^2 + (A^2 - a^2))^2 &= 4(A^2 - a^2)s^2 + 4A^2y^2 \\ \Leftrightarrow (A^2 - (s^2 + (y + a)^2)) \cdot (A^2 - (s^2 + (y - a)^2)) &= 0, \end{aligned}$$

und das ist die Gleichung zweier Kreise mit Mittelpunkte $(0, \pm a)$ in den (s, y) -Koordinaten und Radius A .

11.7 Hopffaserung $S^3 \rightarrow S^2$

Sie ist definiert durch folgendes kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^3 & \xrightarrow{\text{Hopffaserung}} & S^2 \\ \downarrow & & \downarrow \text{stereogr. Proj.} \\ \mathbb{C}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & & (z_1, z_2) \longrightarrow \frac{z_2}{z_1} \end{array}$$

Da die Inverse zur stereographischen Projektion um $p = (0, 0, 1)$ die Abbildung $y \mapsto \frac{2y + (|y|^2 - 1)p}{|y|^2 + 1} = \frac{1}{|y|^2 + 1}(2y, |y|^2 - 1)$ ist, bekommen wir folgende Formel für die Hopffaserung:

$$\begin{aligned} (z_1, z_2) &\mapsto \frac{1}{|z_2/z_1|^2 + 1} \left(2 \frac{z_2}{z_1}, \left| \frac{z_2}{z_1} \right|^2 - 1 \right) = \\ &= \frac{z_1 \bar{z}_1}{|z_1|^2 + |z_2|^2} \left(2 \frac{z_2}{z_1}, \frac{|z_2|^2 - |z_1|^2}{z_1 \bar{z}_1} \right) \\ &= \frac{1}{\underbrace{|z_1|^2 + |z_2|^2}} \left(2z_2 \bar{z}_1, |z_2|^2 - |z_1|^2 \right). \\ &\quad \text{1 weil } (z_1, z_2) \in S^3 \end{aligned}$$

Wir betrachten die Urbilder in der S^3 eines Breitenkreises auf der S^2 , dabei sind θ die Breitengrade.

$$\begin{aligned} (z_1, z_2) \in S^3, \left| \frac{z_2}{z_1} \right| = r \left(= \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) \right) &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2| = r|z_1| \\ (z_1, z_2) \in S^3 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2|^2 = r^2|z_1|^2 \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2| = r|z_1| \\ |z_1|^2(1+r^2) = 1 \end{array} \right\} &\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2|^2 = r^2 \frac{1}{1+r^2} \\ |z_1|^2 = \frac{1}{1+r^2} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Das entspricht nach [11.6](#) unter der stereographischen Projektion $S^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ einem Torus im \mathbb{R}^3 , wo $A = \sqrt{r^2 + 1}$ und $a = r$ ist.

Wir betrachten das Urbild in S^3 des Südpols auf der S^2 :

$$(0, 0, -1) \in S^2 \stackrel{\wedge}{=} (r = 0) \in \mathbb{R}^2 \stackrel{\wedge}{=} (|z_1| = 1, z_2 = 0) \subset S^3,$$

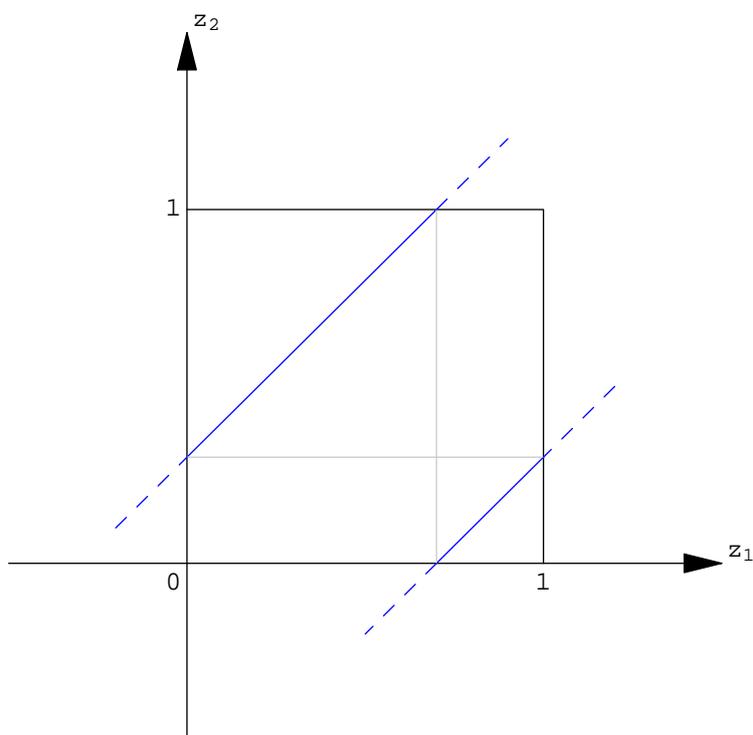
bzw. des Nordpols auf der S^2 :

$$(0, 0, +1) \in S^2 \stackrel{\wedge}{=} (r = \infty) \in \mathbb{R}^2 \stackrel{\wedge}{=} (z_1 = 0, |z_2| = 1) \subset S^3.$$

Wir behaupten allgemein: das Urbild jedes Punktes auf der S^2 (welcher bzgl. der stereographischen Projektion $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ durch $z_0 \in \mathbb{C}$) gegeben ist, ist ein Kreis in der $S^3 \subset \mathbb{R}^4$, den man als Schnitt der Sphäre $S^3 \subset \mathbb{R}^4$ mit der Ebene $z_2 = z_1 z_0$ erhält:

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_1, z_2) \in S^3 \\ \frac{z_2}{z_1} = z_0 \in \mathbb{C} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_2|^2 + |z_1|^2 = 1 \\ z_2 = z_1 z_0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} |z_1|^2 = \frac{1}{1+r^2} \\ |z_2|^2 = r^2 \frac{1}{1+r^2} \\ z_2 = z_1 z_0 \end{array} \right\}$$

d.h. z_1 durchläuft einen Kreis, gleichzeitig durchläuft z_2 ebenso einen Kreis.



In stereographischen Koordinaten entspricht den ersten beiden Gleichungen im \mathbb{R}^3 der Torus $T : z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{r^2 + 1})^2 = r^2$. O.B.d.A. sei $r = z_0 \in \mathbb{R}$, ansonsten drehen wir um $e^{-i\theta}$, was einer Drehung in der (x, y) -Ebene entspricht.

$$\text{Auf der } S^3 : \left\{ \begin{array}{l} z_2 = rz_1 \\ |z_2|^2 = r^2 \frac{1}{1+r^2} \\ |z_1|^2 = \frac{1}{1+r^2} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} x_2 = rx_1, y_2 = ry_1 \\ |z_2|^2 = r^2 \frac{1}{1+r^2} \\ |z_1|^2 = \frac{1}{1+r^2} \end{array} \right\}$$

$$\text{Entspricht im } \mathbb{R}^3 : \left\{ \begin{array}{l} z = rx \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 2ry \\ z^2 + (\sqrt{x^2 + y^2} - \sqrt{r^2 + 1})^2 = r^2 \end{array} \right\}$$

Wobei wir $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ gesetzt haben und die Formeln für die stereographische Projektion verwendeten:

$$x_1 = \frac{2x}{1 + |(x, y, z)|^2} \quad y_1 = \frac{2y}{1 + |(x, y, z)|^2}$$

$$x_2 = \frac{2z}{1 + |(x, y, z)|^2} \quad y_2 = \frac{|(x, y, z)|^2 - 1}{1 + |(x, y, z)|^2}$$

Also ist das Urbild eines Punktes in den beiden Schnittkreisen des Torus mit der Ebene $z = rx$ erhalten. Eine genauere Analyse liefert, daß es genau der vorne bzgl. y liegende der beiden ist.

Das Äußere des Volltorus in der S^3 ist wieder ein Torus, wobei das Innere das Urbild der Südhalbkugel und das Äußere das Urbild der Nordhalbkugel ist.



11.8 Mannigfaltigkeit der linearen Abbildungen fixen Ranges.

Der Raum $L_r(n, m)$ aller $T \in L(n, m)$ von fixem Rang r ist eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension $r(n + m - r)$.

Für maximales $r = \min\{n, m\}$ ist diese Dimension $n \cdot m = \dim(L(n, m))$, also ist in diesem Fall $L_r(n, m)$ offen in $L(n, m)$.

Beweis. Wir beschreiben $L_r(n, m)$ lokal als Graph. Sei dazu $T_0 \in L_r(n, m)$, d.h. $\text{rang}(T_0) = \dim \text{Bild } T_0 = r$. Es sei $F := \text{Bild } T_0$ und $E := \text{Ker } T_0^\perp$. Dann ist $T_0|_E : E \rightarrow F$ injektiv, und wegen $\dim E = n - \dim \text{Ker } T_0 = \dim \text{Bild } T_0 = \dim F$ sogar bijektiv. Bezüglich der orthogonal-Zerlegungen $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$ und $\mathbb{R}^m = F \oplus F^\perp$ hat also T_0 folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix} \text{ mit } B_0 = 0, C_0 = 0, D_0 = 0 \text{ und } A_0 \text{ invertierbar.}$$

Sei nun U die (wegen $GL(E) \subseteq L(E, E)$ offen) offene Umgebung aller Matrizen $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ mit A invertierbar. Dann liegt T in $L_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ genau dann wenn, $\dim \text{Bild } T = r$. Es ist

$$T \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av + Bw \\ Cv + Dw \end{pmatrix}.$$

Somit ist $T \begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} = 0$ genau dann, wenn $v = -A^{-1}Bw$ und $Cv + Dw = 0$, oder äquivalent $v = -A^{-1}Bw$ mit $CA^{-1}Bw = Dw$. Es ist also $r = \text{rang } T = \dim \text{Bild } T = \dim \text{Dom } T - \dim \text{Ker } T = n - \dim \text{Ker } T$ genau dann, wenn alle $w \in E^\perp$ die Gleichung $CA^{-1}Bw = Dw$ erfüllen, d.h. $D = CA^{-1}B$ ist.

Die Abbildung

$$g : \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \in L(n, m) : A \in GL(E, F) \right\} \rightarrow L(E^\perp, F^\perp), \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \mapsto CA^{-1}B$$

ist auf der offenen Teilmenge U des linearen Teilraums

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(n, m) : D = 0 \right\}$$

definiert und glatt und ihr Graph beschreibt $L_r(n, m)$ in der offenen Menge

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(n, m) : A \in GL(E, F) \right\}$$

Die Dimension von $L_r(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ ist somit $nm - (n-r)(m-r) = r(n+m-r)$. \square

11.9 Graßmannmannigfaltigkeiten $G(r, n)$.

Die Graßmannmannigfaltigkeit $G(r, n)$ der r -Ebenen durch 0 im \mathbb{R}^n ist eine Teilmannigfaltigkeit von $L(n, n)$ der Dimension $r(n-r)$.

Wenn wir $r = 1$ wählen, dann erhalten wir als Spezialfall die projektiven Räume $\mathbb{P}^{n-1} = G(1, n)$ der Geraden durch 0 in \mathbb{R}^n .

Beweis. Wir identifizieren die linearen Teilräume des \mathbb{R}^n mit den orthogonal-Projektionen auf sie. Damit ist $G(r, n)$ eine Teilmenge der Mannigfaltigkeit $L_r(n, n)$. Sei E_0 ein Teilraum von \mathbb{R}^n der Dimension r und P_0 die ortho-Projektion auf E_0 . Bezüglich der Zerlegung $\mathbb{R}^n = E_0 \oplus E_0^\perp$ ist P_0 dann durch $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Eine Umgebung von P_0 in $L_r(n, n)$ ist dann durch die Matrizen $\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$ mit

invertierbaren A gegeben. Eine lineare Abbildung P ist genau dann eine ortho-Projektion, wenn sie idempotent ($P^2 = P$) und selbstadjungiert $P = P^t$ ist, oder äquivalent mit einer Gleichung, wenn $P^t P = P$ ist. In der Tat: Daß P eine Projektion ist, bedeutet $P|_{\text{Bild } P} = \text{id}$, d.h. $P^2 = P$, und eine Orthogonalprojektion zu sein bedeutet $\text{Ker}(P) = \text{Bild}(P)^\perp$. Aus $P^2 = P$ folgt aber $\text{Ker}(P) = \text{Bild}(1 - P)$, denn $P(1 - P) = 0$ und $Px = 0 \Rightarrow x = x - Px = (1 - P)x$. Somit ist $\text{Ker}(P) \perp \text{Bild}(P)$ genau dann, wenn $0 = \langle (1 - P)x, Py \rangle = \langle x, (1 - P^t)Py \rangle$ für alle x, y , d.h. $P = P^t P$. Umgekehrt folgt $P^t = (P^t P)^t = P^t P = P$ und somit $P = P^t P = P^2$.

Für die Matrix $\begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$ ist das genau dann der Fall, wenn $A = A^t$ und $B^t = C$ (dann ist auch $(CA^{-1}B)^t = B^t(A^t)^{-1}C^t = CA^{-1}B$) und

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} A^t A + C^t C & A^t B + C^t CA^{-1}B \\ B^t A + B^t(A^t)^{-1}C^t C & B^t B + B^t(A^t)^{-1}C^t CA^{-1}B \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} A^t & C^t \\ B^t & B^t(A^t)^{-1}C^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix} \end{aligned}$$

oder äquivalent $A^t A + C^t C = A$ und damit

$$\begin{aligned} A^t B + C^t CA^{-1}B &= A^t B + (A - A^t A)A^{-1}B = B, \\ B^t A + B^t(A^t)^{-1}C^t C &= B^t A + B^t(A^t)^{-1}(A - A^t A) = B^t(A^t)^{-1}A = C, \\ B^t B + B^t(A^t)^{-1}C^t CA^{-1}B &= B^t B + B^t(A^t)^{-1}(A - A^t A)A^{-1}B \\ &= B^t(A^t)^{-1}B = CA^{-1}B \end{aligned}$$

Zusammen sind die Gleichungen also $A^t A + C^t C = A$ ($\Rightarrow A^t = A$), $B = C^t$ und $D = CA^{-1}B$. Dies sind $r^2 + r(n - r) + (n - r)^2$ unabhängige Gleichungen, und folglich sollte die Dimension von $G(r, n)$ gerade $n^2 - (r^2 + n^2 - 2nr + r^2 + nr - r^2) = nr - r^2 = r(n - r)$ sein. Diese Gleichungen beschreiben $G(r, n)$ lokal als Graph von $(A, C) \mapsto (B, D) = (C^t, CA^{-1}C^t)$ über der Teilmenge $\{(A, C) \in L(E_0, \mathbb{R}^n) : A \in GL(E_0), A^t A + C^t C = A\}$

Es bleibt also zu zeigen, daß die Gleichungen regulär sind und dafür ist es genug die Regularität der ersten Gleichung $A^t A + C^t C - A = 0$ zu zeigen. Ihr Differential in Richtung (X, Y) ist $(X, Y) \mapsto X^t A + A^t X - X + Y^t C + C^t Y$. Wir müssen also die Gleichung $X^t A + A^t X - X + Y^t C + C^t Y = Z$ für $(A, C) = (1, 0)$ also $X^t = Z$ nach (X, Y) lösen. Offensichtlich ist $(Z^t, 0)$ eine Lösung. \square

11.11 Bemerkung. Verschiedene Beschreibungen von $G(k, n)$.

Es beschreibt

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

mit $A \in GL(k)$ genau dann eine Orthoprojektion vom Rang k , wenn $A^t A + C^t C = A$, $B = C^t$ und $D = CA^{-1}B$ gilt. Eine **lokale Gleichung** für $G(k, n)$ wird somit beschrieben durch

$$\begin{aligned} f : \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(n, n) : A \in GL(k) \right\} &\rightarrow L(k, k) \times L(n - k, k) \times L(n - k, n - k) \\ &\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto (A^t A + C^t C - A, B - C^t, D - CA^{-1}B). \end{aligned}$$

Die erste Gleichung können wir durch Multiplikation mit $(A^{-1})^t$ von links und A^{-1} von rechts in $\text{id} + (CA^{-1})^t(CA^{-1}) = (A^{-1})^t$ umwandeln also wegen $A^t = (A^t A + C^t C)^t = A^t A + C^t C = A$ in $A = (1 + Z^t Z)^{-1}$ für $Z := CA^{-1}$. Beachte

dabei, daß $1 + Z^t Z \in GL(k)$, da $x + Z^t Z x = 0 \Rightarrow 0 = \langle x + Z^t Z x | x \rangle = \|x\|^2 + \|Zx\|^2 \Rightarrow x = 0$. Also wird $G(k, n)$ **lokal parametrisiert** durch

$$\varphi : L(k, n - k) \ni Z \mapsto \begin{pmatrix} A := (1 + Z^t Z)^{-1} & B := C^t \\ C := ZA & D := CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

denn eine **Retraktion** ψ (d.h. ein Linksinverses) dazu ist gegeben durch

$$\psi : \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in L(n, n) : A \in GL(k) \right\} \rightarrow L(k, n - k) \mapsto Z := CA^{-1}$$

Wegen $\varphi(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\varphi'(0)(Z) = \begin{pmatrix} 0 & Z^t \\ Z & 0 \end{pmatrix}$ ist

$$T_{\varphi(0)}G(k, n) = \text{Bild}(\varphi'(0)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Z^t \\ Z & 0 \end{pmatrix} : Z \in L(k, n - k) \right\}$$

und

$$\left(T_{\varphi(0)}G(k, n) \right)^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & D \end{pmatrix} \in L(n, n) \right\}$$

Ein **lokale Trivialisierung** $\Phi : L(n, n) \rightarrow L(n, n)$ ist somit durch

$$\begin{aligned} \Phi : L(n, n) &\cong L(k, n - k) \times (L(k, k) \times L(k, n - k) \times L(n - k, n - k)) \rightarrow L(n, n), \\ \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} &\mapsto \varphi(Z) + \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^t & W \end{pmatrix} \end{aligned}$$

gegeben. Daß dies ein lokaler Diffeomorphismus nahe 0 ist, sieht man auch expliziter:

Denn sei $\begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} \in L(n, n)$, dann bedeutet

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} &= \Phi \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} Q & R \\ S & T \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A := (1 + Z^t Z)^{-1} & B := C^t \\ C := ZA & D := CA^{-1}B \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X & Y \\ -Y^t & W \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A := (1 + Z^t Z)^{-1} & X + A = Q & Y + C^t = R \\ C := ZA & -Y^t + C = S & W + CA^{-1}C^t = T \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} A := (1 + Z^t Z)^{-1} & X + A = Q & Y = \frac{1}{2}(R - S^t) \\ C = ZA & C := \frac{1}{2}(S + R^t) & W + CA^{-1}C^t = T \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} C := \frac{1}{2}(S + R^t) & C = Z(1 + Z^t Z)^{-1} & A := (1 + Z^t Z)^{-1} \\ X = Q - A & Y = \frac{1}{2}(R - S^t) & W = T - CA^{-1}C^t \end{cases} \end{aligned}$$

Die zweite Gleichung $C = Z(1 + Z^t Z)^{-1}$ beschreibt einen lokalen Diffeomorphismus bei 0, denn die Ableitung von $Z \mapsto C$ bei 0 in Richtung Z ist $0 \cdot (*) + Z \cdot 1^{-1} = Z$. Dies ist kein globaler Diffeomorphismus, denn für $k = 1 = n - k$ hat $z \mapsto \frac{z}{1+z^2}$ Werte in $\{c : |z| \leq \frac{1}{2}\}$ und ist nur für $|z| < 1$ injektiv. Im allgemeinen existiert wegen dem Banach'schen Fixpunktsatz für $\|C\| < \frac{1}{2}$ ein eindeutiges Z mit $\|Z\| \leq 1$ mit $Z = f(Z) := C(1 + Z^t Z)$, denn

$$\begin{aligned} \|f(Z)\| &= \|C\| \|1 + Z^t Z\| \leq \|C\| (1 + \|Z^t Z\|) = \|C\| (1 + \|Z\|^2) < \frac{1}{2}(1 + 1) = 1 \\ f'(Z)(W) &= C(W^t Z + Z^t W) \Rightarrow \\ \|f'(Z)(W)\| &\leq \|C\| (\|W^t\| \|Z\| + \|Z^t\| \|W\|) = 2 \|C\| \|Z\| \|W\| \Rightarrow \\ \|f'(Z)\| &\leq 2 \|C\| \|Z\| \leq 2 \|C\| < 1. \end{aligned}$$

Wegen $\|f(Z)\| < \|Z\|$ ist $\|Z\| < 1$ für den Fixpunkt Z . Es ist die Bijektion $Z \mapsto C$ ein Diffeomorphismus von $\{Z : \|Z\| < 1\} \rightarrow \{C : \|C\| < 12\}$, denn ihre Ableitung an einer Stelle Z mit $\|Z\| < 1$ ist

$$\begin{aligned} W &\mapsto W \cdot (1 + Z^t Z)^{-1} - Z \cdot (1 + Z^t Z)^{-1} (W^t Z + Z^t W) (1 + Z^t Z)^{-1} = \\ &= \left(W - (1 + Z Z^t)^{-1} Z (W^t Z + Z^t W) \right) (1 + Z^t Z)^{-1} \\ &= (1 + Z Z^t)^{-1} \left((1 + Z Z^t) W - Z W^t Z - Z Z^t W \right) (1 + Z^t Z)^{-1} \\ &= (1 + Z Z^t)^{-1} (W - Z W^t Z) (1 + Z^t Z)^{-1} \end{aligned}$$

und verschwindet somit auf $W \neq 0$ genau dann, wenn $W = Z W^t Z$, also $\|W\| = \|Z W^t Z\| \leq \|Z\|^2 \|W\| < \|W\|$, ein Widerspruch.

Beachte weiters, daß für $P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ durch

$$P_1 := \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}, \quad P_2 := \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

zwei lineare Abbildungen $P_1 \in L(n, k)$ und $P_2 \in L(k, n)$ geben sind mit maximalen Rang (wegen $A \in GL(k)$), welche $\text{Ker}(P_1) = \text{Ker}(P)$ und $\text{Bild}(P_2) = \text{Bild}(P)$ erfüllen, denn $\text{Bild}(P_2) = \text{Bild}(P|_{\mathbb{R}^k}) \subseteq \text{Bild}(P)$ mit $\dim(\text{Bild}(P_2)) = k = \dim(\text{Bild}(P))$ und $\text{Ker}(P_1) = \text{Ker}(\text{pr}_1 \circ P) \supseteq \text{Ker}(P)$ mit $\dim(\text{Ker}(P_1)) = n - \dim(\text{Bild}(P_1)) = n - k = \dim(\text{Ker}(P))$. Schließlich ist der durch P beschriebene Teilraum $\text{Bild}(P)$ der Graph von $Z := CA^{-1}$, denn $\text{Bild}(P) = \text{Bild}(P_2) = \{(Ax, Cx) : x \in \mathbb{R}^k\} = \{(y, CA^{-1}y) : y \in \mathbb{R}^k\} = \text{Graph}(Z)$ oder auch $\text{Bild}(P) = \text{Ker}(P)^\perp = \text{Ker}(P_1)^\perp = \{(x, z) : Ax + Bz = 0\}^\perp = \{(-A^{-1}Bz, z) : z\}^\perp = \{(u, v) : \langle B^t(A^t)^{-1}u | z \rangle = \langle u | A^{-1}Bz \rangle = \langle v | z \rangle \forall z\} = \{(u, B^t A^{-1}u) : u\}$.

Um schlußendlich $G(k, n)$ noch lokal als **Graph** einer Abbildung

$$g : \left\{ \overbrace{\left\{ \begin{pmatrix} 0 & Z^t \\ Z & 0 \end{pmatrix} : Z \in L(k, n-k) \right\}}^{T_{\varphi(0)}G(k, n)} \rightarrow \left\{ \overbrace{\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & D \end{pmatrix} \in L(n, n) \right\}}^{(T_{\varphi(0)}G(k, n))^\perp} \right\}$$

$$Z \mapsto \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & D \end{pmatrix}$$

zu beschreiben, muß

$$\begin{pmatrix} 0 & Z^t \\ Z & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A & B \\ -B^t & D \end{pmatrix} \in G(k, n)$$

liegen, also $A \in GL(k)$, $Z^t - B = (Z - B^t)^t = Z^t + B$ (d.h. $B = 0$), $D = ZAZ^t$ und $A^t A + Z^t Z = A$ gelten. Die letzte Gleichung ist wegen dem impliziten Funktionensatz für $\|Z\|$ nahe 0 in A nahe id eindeutig glatt lösbar, denn die zweite partielle Ableitung von $(Z, A) \mapsto A^t A + Z^t Z - A$ an der Stelle $(0, \text{id})$ ist $A \mapsto A^t + A - A = A^t$ ist ein Isomorphismus. Expliziter erhalten wir dies aus dem Banach'schen Fixpunktsatz für $\|Z\| < \frac{1}{2}$ mit $\|A\| \leq \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \|Z\|^2} =: \frac{c}{2} < \frac{1}{2}$, denn dann hat die Ableitung von $A \mapsto A^t A + Z^t Z$ Operatornorm $\leq \|A^t\| + \|A\| = 2\|A\| \leq c < 1$ und $\|A^t A + Z^t Z\| \leq \|A^t A\| + \|Z^t Z\| = \|A\|^2 + \|Z\|^2 \leq \frac{c^2}{4} + \|Z\|^2 = \frac{c}{2}$. Da A genau dann eine Lösung ist, wenn $1 - A$ eine ist, erhalten wir auch eine eindeutige Lösung A mit $\|1 - A\| \leq \frac{c}{2}$. Die glatte Abhängigkeit von Z folgt, da die Ableitung von $A \mapsto A^t A + Z^t Z - A$ für solche A invertierbar ist, denn diese ist durch $S \mapsto A^t S + S^t A - S$ gegeben, wäre also $A^t S + S^t A - S = 0$, dann wäre für

$S \neq 0$

$$\begin{aligned} \|S\| &= \|S^t\| = \|(S - A^t S)A^{-1}\| \\ &\leq \|1 - A^t\| \|S\| \|A^{-1}\| = \|1 - A\| \|S\| \|(1 - (1 - A))^{-1}\| \\ &\leq \frac{c}{2} \|S\| \sum_{k=0}^{\infty} \|1 - A\|^k \leq \|S\| \frac{c}{2} \frac{1}{1 - \frac{c}{2}} < \|S\|, \end{aligned}$$

ein Widerspruch.

Wir wollen nun das Bild der Parametrisierung $\varphi : L(k, n-k) \rightarrow G(k, n)$ geometrisch beschreiben. Es ist $\varphi(0)$ (die Orthoprojektion auf) die Ebene $\mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x, 0)$. Es ist $P := \varphi(Z)$ die Orthoprojektion auf $\text{Bild}(P) = \text{Graph}(Z) =: \varepsilon$ und offensichtlich ist $\varepsilon \cap (\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) = \{(0, y) \in \text{Graph}(Z)\} = \{0\}$. Umgekehrt sei ε eine beliebige k -Ebene die $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ trivial schneidet, dann ist $\text{pr}_1|_{\varepsilon} : \varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^k$ injektiv, denn $\text{Ker}(\text{pr}_1) = \{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ und aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus, also $\varepsilon = \{z = (\text{pr}_1(z), \text{pr}_2(z)) : z \in \varepsilon\} = \{(x, (\text{pr}_2 \circ (\text{pr}_1|_{\varepsilon})^{-1})(x)) : x \in \mathbb{R}^k\} = \text{Graph}(Z)$, wobei $Z := \text{pr}_2 \circ (\text{pr}_1|_{\varepsilon})^{-1} : \mathbb{R}^k \rightarrow \varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^{n-k} \in L(k, n-k)$. Es ist

$$\varepsilon^{\perp} = \{(x, y) : \forall v \in \mathbb{R}^k : \underbrace{\langle x|v \rangle + \langle y|Z(v) \rangle}_{=\langle x+Z^t y|v \rangle} = 0\} = \{(-Z^t y, y) : y \in \mathbb{R}^{n-k}\}.$$

Somit erhalten wir einen Isomorphismus

$$\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \cong \varepsilon \times \varepsilon^{\perp} \cong \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$$

gegeben durch $(a, b) \mapsto (a, Za) + (-Z^t b, b) = (a - Z^t b, Za + b) =: (x, y)$. Dessen Inverses erhalten wir durch Lösen des Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = a - Z^t b \\ y = Za + b \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + Z^t y = (a - Z^t b) + Z^t(Za + b) = (1 + Z^t Z)a \\ y - Zx = (Za + b) - Z(a - Z^t b) = (1 + ZZ^t)b \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} a = (1 + Z^t Z)^{-1}(x + Z^t y) \\ b = (1 + ZZ^t)^{-1}(y - Zx) \end{cases}, \end{aligned}$$

wobei $1 + Z^t Z$ und $1 + ZZ^t$ invertierbar sind, da $0 = \langle 1 + Z^t Z x | x \rangle = |x|^2 + |Zx|^2 \Rightarrow x = 0$ und ebenso $0 = \langle 1 + ZZ^t y | y \rangle = |y|^2 + |Z^t y|^2 \Rightarrow y = 0$. Die ortho-Projektion P auf ε ist somit durch

$$P : (x, y) \mapsto a := (1 + Z^t Z)^{-1}(x + Z^t y) \mapsto (a, Za)$$

gegeben. Dies zeigt auch eine direkte Rechnung, denn das Bild von P liegt offensichtlich in $\varepsilon = \text{Graph}(Z)$, der Kern von P ist $\{(x, y) : (1 + Z^t Z)^{-1}(x + Z^t y) = 0\} = \{(x, y) : x = -Z^t y\} = \varepsilon^{\perp}$ und $P|_{\varepsilon}$ ist offensichtlich id. Also ist

$$P = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + Z^t Z)^{-1} & (1 + Z^t Z)^{-1} Z^t \\ Z(1 + Z^t Z)^{-1} & Z(1 + Z^t Z)^{-1} Z^t \end{pmatrix} = \varphi(Z).$$

Da jede Ebene ε das Bild $g(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ eines Isomorphismuses $g \in GL(n)$ ist, erhalten wir somit Karten $L(k, n-k) \rightarrow G(k, n)$ zentriert bei ε .

11.12 Folgerung.

Es ist $M := \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in G(k, n) \times G(n-k, n) : \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2 = \{0\}\}$ eine offene Teilmenge der Produktmannigfaltigkeit $G(k, n) \times G(n-k, n)$ und bzgl. $\text{pr}_1|_M : M \rightarrow G(k, n)$ ein Vektorbündel (siehe [25.5](#)) über $G(k, n)$ mit typischer Faser $L(n-k, n)$.

Beweis. Wir betrachten vorerst den ausgezeichneten Teilraum $\varepsilon_0 = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$ und die Parametrisierung $\varphi : L(k, n-k) \rightarrow G(k, n)$ aus [11.11](#) auf die offenen

Umgebung $U_0 := \{\varepsilon_1 \in G(k, n) : \varepsilon_1 \cap \varepsilon_0^\perp = \{0\}\}$ von ε_0 in $G(k, n)$. Diese induziert eine glatte Abbildung

$$\begin{aligned} \gamma : U_0 &\rightarrow GL(n), \quad \varepsilon_1 \mapsto Z := \varphi^{-1}(\varepsilon_1) \mapsto g := \begin{pmatrix} 1 & -Z^t \\ Z & 1 \end{pmatrix} \\ \text{mit } g^{-1} &= \begin{pmatrix} A := (1 + Z^t Z)^{-1} & Z^t D \\ -ZA & D := (1 + ZZ^t)^{-1} \end{pmatrix}, \\ \text{denn } AZ &= (1 + Z^t Z)^{-1} Z = Z(1 + ZZ^t)^{-1} = ZD. \end{aligned}$$

Es ist $g(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \text{Graph}(Z) = \text{Bild}(P) = \varepsilon_1$ nach [11.11](#) und $g(\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}) = \{(-Z^t y, y) : y \in \mathbb{R}^{n-k}\} = \{(x, Zx) : x \in \mathbb{R}^k\}^\perp = \text{Graph}(Z)^\perp = \varepsilon_1^\perp$. Es gilt für $\varepsilon_2 \in G(n-k, n)$ genau dann $(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in M$, wenn $\{0\} = \varepsilon_1 \cap \varepsilon_2$, also wenn $\{0\} = \gamma(\varepsilon_1)^{-1}(\varepsilon_1) \cap \gamma(\varepsilon_1)^{-1}(\varepsilon_2) = (\mathbb{R}^k \times \{0\}) \cap \gamma(\varepsilon_1)^{-1}(\varepsilon_2)$, d.h. $\gamma(\varepsilon_1)^{-1}(\varepsilon_2) \in U_1 := \{\varepsilon \in G(n-k, n) : \varepsilon_0 \cap \varepsilon = \{0\}\}$ und diese offene Menge ist das Bild der bei ε_1^\perp zentrierten Parametrisierung $\varphi_1 : L(n-k, n) \rightarrow U_1 \subseteq G(n-k, n)$ aus [11.11](#). Somit erhalten wir eine Bijektion

$$\begin{aligned} \Phi : U_0 \times L(n-k, n) &\rightarrow U_0 \times U_1 \rightarrow \{(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \in M : \varepsilon_1 \in U_0\} \\ (\varepsilon_1, Z_1) &\mapsto (\varepsilon_1, \varphi_1(Z_1)) \mapsto (\varepsilon_1, \gamma(\varepsilon_1)(\varphi_1(Z_1))). \end{aligned}$$

Diese Bijektion ist glatt, da γ und φ_1 glatt sind und $GL(n) \times G(n-k, n) \rightarrow G(n-k, n)$, $(g, \varepsilon_2) \mapsto g(\varepsilon_2) = g(\text{Bild}(P_2)) = \text{Bild}(g \circ P_2)$ es ist. Die Inverse ist durch

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \mapsto (\varepsilon_1, \varphi_1^{-1}(\gamma(\varepsilon_1)^{-1}(\varepsilon_2)))$$

gegeben und somit ebenfalls glatt. Wenn nun ein anderes fixes Element in $G(k, n)$ gegeben ist, dann existiert eine Drehung $g_0 \in O(n)$ so, daß $g_0(\varepsilon_0) = g_0(\mathbb{R}^k \times \{0\})$ diese fixe Element ist. Und

$$\begin{aligned} \Phi_{g_0} : (g_0)_*(U_0) \times L(n-k, n) &\xrightarrow{g_0^{-1} \times \text{id}} U_0 \times L(n-k, n) \xrightarrow{\Phi} M \xrightarrow{g_0 \times g_0} M, \\ (\varepsilon_1, Z_1) &\mapsto (g_0 \times g_0)(\Phi(g_0^{-1}(\varepsilon_1), Z_1)) = (\varepsilon_1, g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1}(\varepsilon_1)) \cdot \varphi_1(Z_1)) \end{aligned}$$

ist dann eine entsprechende lokale Trivialisierung bei $g_0(\varepsilon_0)$ mit Inverser

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \xrightarrow{\Phi_{g_0}^{-1}} (g_0 \times \text{id}) \left(\Phi^{-1}(g_0^{-1}(\varepsilon_1), g_0^{-1}(\varepsilon_2)) \right) = (\varepsilon_1, \varphi_1^{-1}(\gamma(g_0^{-1})^{-1} \cdot g_0^{-1} \cdot \varepsilon_2)).$$

Die Transitionsfunktionen dieses Faserbündel-Atlasen berechnen sich nun wie folgt: Seien dazu $g_0, g_1 \in O(n)$ beliebig, dann ist für $\varepsilon_1 \in g_0(U_0) \cap g_1(U_0)$ und $Z_1 \in L(n-k, n)$:

$$\begin{aligned} (\Phi_{g_1}^{-1} \circ \Phi_{g_0})(\varepsilon_1, Z_1) &= \left((g_1 \times 1) \circ \Phi^{-1} \circ (g_1 \times g_1)^{-1} \circ (g_0 \times g_0) \circ \Phi \circ (g_0^{-1} \times 1) \right) (\varepsilon_1, Z_1) \\ &= \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{(\varepsilon_1, g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)) \cdot \varphi_1(Z_1)}_{(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1, \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)) \cdot \varphi_1(Z_1)}}_{(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1, g_1^{-1} \cdot g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)) \cdot \varphi_1(Z_1)}}_{(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1, \varphi_1^{-1}(\gamma(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1))^{-1} \cdot g_1^{-1} \cdot g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)) \cdot \varphi_1(Z_1))}}_{(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1, \varphi_1^{-1}(\gamma(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1))^{-1} \cdot g_1^{-1} \cdot g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)) \cdot \varphi_1(Z_1))}} \\ &= \left(\varepsilon_1, \varphi_1^{-1} \left(\underbrace{\gamma(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1)^{-1} \cdot g_1^{-1} \cdot g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)}_{=: g} \cdot \varphi_1(Z_1) \right) \right) \end{aligned}$$

Es bildet $g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)$ den Teilraum $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ auf $g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1$ und weiter auf ε_1 ab und den Teilraum $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ auf $(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)^\perp = g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1^\perp$ und weiter auf ε_1^\perp . Somit

läßt $g := \gamma(g_1^{-1} \cdot \varepsilon_1)^{-1} \cdot g_1^{-1} \cdot g_0 \cdot \gamma(g_0^{-1} \cdot \varepsilon_1)$ die Teilräume $\mathbb{R}^k \times \{0\}$ und $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-k}$ invariant, ist also von der Form $g = h_1 \times h_2$ und somit ist

$$\begin{aligned} \varphi_1^{-1}(g \cdot \varphi_1(Z_1)) &= \varphi_1^{-1}\left((h_1 \times h_2) \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\right) = \varphi_1^{-1}\begin{pmatrix} h_1 \cdot A & h_1 \cdot B \\ h_2 \cdot C & h_2 \cdot D \end{pmatrix} \\ &= (h_2 \cdot C) \cdot (h_1 \cdot A)^{-1} = h_2 \cdot Z_1 \cdot h_1^{-1}. \end{aligned}$$

Folglich ist die Transitionsfunktion faserweise $Z_1 \mapsto h_2 \cdot Z_1 \cdot h_1^{-1}$, also linear und $M \rightarrow G(k, n)$ ein Vektorbündel. \square

11.10 Aufdrehen eines 2-fach verdrehten Bandes

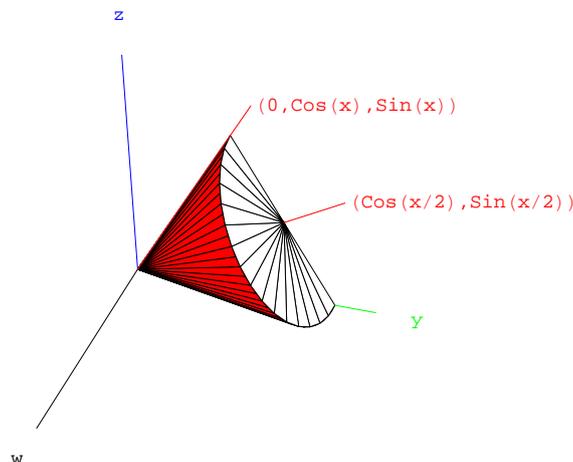
Ein unverdrehtes Stück eines Bandes ist parametrisiert durch

$$\varphi_0 : [0, 2\pi] \times [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4, \quad (\theta, r) \mapsto (\theta, r, 0, 0).$$

Ein zweifach verdrehtes Band ist parametrisiert durch

$$\varphi_\pi : [0, 2\pi] \times [-1, +1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \subset \mathbb{R}^4, \quad (\theta, r) \mapsto (\theta, r \cos \theta, r \sin \theta, 0).$$

Wir wollen nun eine Diffeotopie $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ des \mathbb{R}^4 finden (d.h. eine glatt parametrisierte Familie $t \mapsto F(t; \cdot)$ von Diffeomorphismen des \mathbb{R}^m mit $F(0, \cdot) = \text{id}$ und $F(\pi, \cdot)$ der gesuchte Diffeomorphismus), welche das nicht verdrehte Band in das 2-fach verdrehte Band überführt. Dazu bezeichnen wir die Koordinaten im \mathbb{R}^4 mit (x, y, z, w) . Diese Diffeotopie $F(t; \cdot)$ soll die Hyperebenen normal auf die x -Achse invariant lassen, und dort als Drehung wirken. Wir bezeichnen diese Drehung in der Hyperebenen $x + \{0\} \times \mathbb{R}^3$ zum Zeitpunkt t mit $R(t, x) \in SO(\mathbb{R}^3)$. Und zwar soll dies gerade eine Drehung um den Winkel $-t$ um die Achse $\ell = (\cos \frac{x}{2}, \sin \frac{x}{2}, 0)$ sein. Wir erhalten $R(t, x)$ indem wir zuerst um die w -Achse die Achse ℓ in die y -Achse drehen, sodann um die y -Achse um den Winkel t drehen, und danach die y -Achse zurück auf die ℓ -Achse um die w -Achse drehen.



Die Matrizen-Darstellung von $R(t, x)$ bezüglich der Koordinaten (y, z, w) sieht also wie folgt aus:

$$\begin{aligned} [R(t, x)] &= \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & -\sin \frac{x}{2} & 0 \\ \sin \frac{x}{2} & \cos \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & \sin \frac{x}{2} & 0 \\ -\sin \frac{x}{2} & \cos \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & -\sin \frac{x}{2} & 0 \\ \sin \frac{x}{2} & \cos \frac{x}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \frac{x}{2} & \sin \frac{x}{2} & 0 \\ -\cos t \sin \frac{x}{2} & \cos t \cos \frac{x}{2} & \sin t \\ \sin t \sin \frac{x}{2} & -\sin t \cos \frac{x}{2} & \cos t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{x}{2} + \cos t \sin^2 \frac{x}{2} & (1 - \cos t) \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} & -\sin t \sin \frac{x}{2} \\ (1 - \cos t) \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} & \sin^2 \frac{x}{2} + \cos t \cos^2 \frac{x}{2} & \sin t \cos \frac{x}{2} \\ \sin t \sin \frac{x}{2} & -\sin t \cos \frac{x}{2} & \cos t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

In den Randpunkten $x = 0$ und $x = 2\pi$ ist

$$[R(t, 0)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

und

$$[R(t, 2\pi)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & -\sin t \\ 0 & \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

hält also die y -Achse fix.

Unsere gesuchte Diffeotopie ist somit

$$F(t; x, y, z, w) := (x, R(t, x)(y, z, w))$$

und die entsprechende Isotopie

$$\begin{aligned} \varphi_t(\theta, r) &:= F(t; \varphi_0(\theta, r)) = (\theta, R(t, \theta)(r, 0, 0)) \\ &= \left(\theta, \frac{r}{2}(1 + \cos \theta + \cos t(1 - \cos \theta)), \frac{r}{2}(1 - \cos t) \sin \theta, r \sin t \sin \frac{\theta}{2} \right) \end{aligned}$$

Klarerweise ist $\varphi_t(\theta, r) = (\theta, r, 0, 0)$ für $\theta = 0$ und für $\theta = 2\pi$. Weiters sind φ_0 und φ_π die gewünschten Randwerte. Und nach Konstruktion sind alle φ_t Einbettungen von $[0, 2\pi] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^4$.



14. Beispiele von Lie-Gruppen

Etliche der klassischen Beispiele von Mannigfaltigkeiten sind sogar Lie-Gruppen, tragen also zusätzlich eine glatte Gruppenstruktur. Wir führen in diesen Abschnitt diese klassischen Lie-Gruppen ein, die wir zum Teil auch schon in [1](#) kennengelernt haben.

14.1 Allgemeine lineare Gruppe

Der Vektorraum $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) = L(n, m) := \{T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m \text{ linear}\}$ ist nm -dimensional.

Die ALLGEMEINE LINEARE GRUPPE (engl. GENERAL LINEAR GROUP) (siehe auch [1.2](#))

$$GL(\mathbb{R}^n) = GL(n) := \{T \in L(n, n) : \det T \neq 0\} \subset L(n, n)$$

ist eine offene (und somit n^2 -dimensionale) Teilmannigfaltigkeit in $L(n, n)$, denn sie ist durch eine stetige strikte Ungleichung gegeben. Bezüglich der Komposition ist $GL(n)$ eine Gruppe.

14.2 $Ax + b$ -Gruppen

Sei $E = F \oplus F'$ und $G := \{T \in GL(E) : T(F) \subseteq F\}$. Es seien p und p' die Projektionen auf F und F' mit Kern F' und F . Jedes T hat bezüglich der Zerlegung $E = F \oplus F'$ folgende Darstellung

$$T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

wobei $A = p \circ T|_F \in GL(F)$, $D = p' \circ T|_{F'} \in GL(F')$, $B = p \circ T|_{F'} \in L(F', F)$ und $C = p' \circ T|_F \in L(F, F')$. Also läßt T den Teilraum F invariant genau dann, wenn $C = 0$ ist, d.h.

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in GL(F), D \in GL(F'), B \in L(F', F) \right\}.$$

Wir haben folgende Untergruppen:

$$G_b = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : B \in L(F', F) \right\} \cong (L(F', F), +)$$

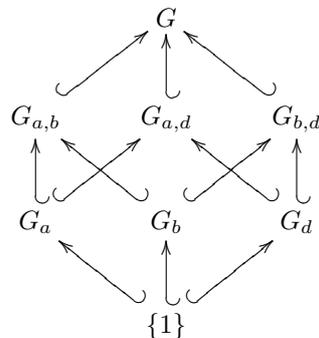
$$G_d = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : D \in GL(F') \right\} \cong GL(F')$$

$$G_a = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in GL(F) \right\} \cong GL(F)$$

$$G_{a,d} = \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : A \in GL(F), D \in GL(F') \right\} \cong GL(F) \times GL(F')$$

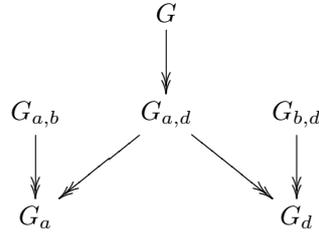
$$G_{b,d} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & B \\ 0 & D \end{pmatrix} : D \in GL(F'), B \in L(F', F) \right\}$$

$$G_{a,b} = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : A \in GL(F), B \in L(F', F) \right\}$$



Dual haben wir die folgenden Gruppen-Epimorphismen, die jeweils durch Ersetzen der entsprechenden Eintragungen durch die neutralen Elemente 1 bzw. 0 gegeben

sind



Dies liefert folgende kurze exakte Sequenzen von Gruppen

$$1 \longrightarrow G_b \hookrightarrow G \longrightarrow G_{a,d} \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_{b,d} \hookrightarrow G \longrightarrow G_a \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_{a,b} \hookrightarrow G \longrightarrow G_d \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_b \hookrightarrow G_{b,d} \longrightarrow G_d \longrightarrow 1$$

$$1 \longrightarrow G_b \hookrightarrow G_{a,b} \longrightarrow G_a \longrightarrow 1,$$

Die natürlichen Inklusionen der rechtsstehenden Gruppen liefern Schnitte zu den Projektionen. Und somit erhalten wir semidirekte Produkte

$$\begin{aligned}
 G &\cong L(F', F) \ltimes (GL(F) \times GL(F')) \\
 G &\cong G_{b,d} \ltimes GL(F) \\
 G &\cong G_{a,b} \ltimes GL(F') \\
 G_{b,d} &\cong L(F', F) \ltimes GL(F') \\
 G_{a,b} &\cong L(F', F) \ltimes GL(F),
 \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A' & B' \\ 0 & D' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} &= \\
 &= \begin{pmatrix} A^{-1}A'A & A^{-1}(A'B + (B' - BD^{-1}D')D) \\ 0 & D^{-1}D'D \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

lassen sich die entsprechenden Wirkungen leicht angeben.

Wenn wir als $E = F \times \mathbb{R}$ wählen, dann heißt die Gruppe $G_{a,b}$ jener $T \in GL_{\mathcal{F}}(E)$ die auf \mathbb{R} als Identität wirken auch die $Ax + b$ -Gruppe, denn sie ist gerade die Gruppe der affinen Abbildungen. Der affinen Abbildung $x \mapsto Ax + b$ wird dabei die Matrix

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zugeordnet. Man beachte, daß dies als Mannigfaltigkeit $GL(E) \times E$ ist, aber die Multiplikation komplizierter, nämlich die des semidirekten Produkts $E \ltimes GL(E)$ ist.

14.3 Flaggen

Es sei $\mathcal{F} : \{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k = E$ eine aufsteigende Folge von Teilräumen (eine sogenannte Flagge). Dann ist $GL_{\mathcal{F}}(E) := \{T \in GL(E) : T(F_j) \subseteq F_j\}$ eine

Lie-Gruppe, denn sei $F'_j := F_j^\perp \cap F_{j+1} \cong F_{j+1}/F_j$, dann ist $T \in GL_{\mathcal{F}}(E)$ genau dann, wenn es bezüglich der Zerlegung

$$E = F'_0 \oplus F'_1 \oplus \cdots \oplus F'_{k-1}$$

die Form

$$\begin{pmatrix} T_{1,1} & \cdots & T_{1,n} \\ 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & T_{n,n} \end{pmatrix}$$

hat mit $T_{j,j} \in GL(F'_j)$ und $T_{j,l} \in L(F'_l, F'_j)$ für $j < l$. Dies ist das prototypische Beispiel einer auflösbaren Lie-Gruppe falls $\dim F_k = k$ für alle k .

14.4 Nilpotente Gruppen

Wir können noch die Untergruppe jener Abbildungen betrachten, die auf $F'_j = F_{j+1}/F_j$ als Identität wirken, d.h. in der Diagonale lauter Identitäten haben. Das ist ein prototypisches Beispiel einer nilpotenten Gruppe, wenn $\dim F_k = k$ für alle k .

Ein Spezialfall ist die Heisenberggruppe, die wir zuerst in anderer Form beschreiben als

$$H := E \oplus \mathbb{R}, \text{ mit } (x, t) \cdot (y, s) := (x + y, t + s + b(x, y)),$$

wobei b eine symplektische Form (d.h. $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ is bilinear, schief-symmetrisch und nicht degeneriert, siehe [14.9](#)) ist. Es ist $(x, t)^{-1} = (-x, -t)$. Wieder ist H als Menge das Produkt der beiden (abelschen) Gruppen E und \mathbb{R} . Diesmal ist es nichteinmal ein semidirektes Produkt, sondern eine zentrale Erweiterung $1 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H \rightarrow E \rightarrow 1$, die durch den Zykel b gegeben ist. Man kann H aber auch als Matrizen­gruppe beschreiben, wenn wir o.B.d.A. $E := F \oplus F$ setzen und $b(x_1, y_1; x_2, y_2) := \langle x_1, y_2 \rangle - \langle x_2, y_1 \rangle$ wählen (wir werden in [14.9](#) zeigen, daß jede symplektische Form von dieser Gestalt ist) und $F \cong F^*$ via $x \mapsto \langle x, - \rangle$ verwenden.

$$\begin{aligned} H &\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x^* & t \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : x^* \in F^*, y \in F, t \in \mathbb{R} \right\} \subseteq GL(\mathbb{R} \times F \times \mathbb{R}) \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x^* & y^* & t \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : \begin{array}{l} x \in F, x^* := \langle x, - \rangle \\ y \in F, y^* := \langle y, - \rangle \\ t \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \subseteq Sp(\mathbb{R} \times F \times F \times \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Der zweite Isomorphismus ist durch

$$(x, y, t) \mapsto T(x, y, t) := \begin{pmatrix} 1 & x^* & y^* & t \\ 0 & 1 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \begin{cases} x^* := \langle x, - \rangle \\ y^* := \langle y, - \rangle \end{cases}$$

gegeben. Er hat Werte in $Sp(\mathbb{R} \times F \times F \times \mathbb{R})$ bezüglich der symplektischen Form $b(t_1, x_1, y_1, s_1; t_2, x_2, y_2, s_2) = t_1 s_2 - t_2 s_1 + x_1 y_2 - x_2 y_1$, denn diese ist durch die Matrix

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

gegeben und es gilt $T^t J T = J$ wie man leicht nachrechnet.

Der erste Isomorphismus ist durch

$$(x^*, y, t) \mapsto T(x^*, y, t) := \begin{pmatrix} 1 & x^* & (t + x^*(y))/2 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben (Rechnung!).

Nachdem wir nun einige "auflösbare" Gruppen kennengelernt haben, wollen wir uns den "halbeinfachen" zuwenden.

14.5 Spezielle lineare Gruppe

Sie ist definiert als:

$$SL(n) := \{T \in L(n, n) : \det(T) = 1\} \subseteq GL(n).$$

Also ist sie durch die Gleichung $\det(T) = 1$, bzw. $f(T) = 0$ gegeben, wobei $f : L(n, n) \rightarrow \mathbb{R}$ die Funktion $f(T) := \det(T) - 1$ ist. Wir behaupten, daß diese Gleichung regulär ist, d.h. die Ableitung der Determinantenfunktion ist surjektiv. Da die Determinante polynomial in den Koeffizienten ist, folgt die Glattheit und daraus folgt wiederum – zusammen mit der gleich zu beweisenden Surjektivität – die Regularität. Die Richtungsableitung an der Stelle A in Richtung B ist:

$$\begin{aligned} \det'(A)(B) &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \det(A + tB) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \det(A \cdot (1 + tA^{-1}B)) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \det(tA) \cdot \det\left(\frac{1}{t} + A^{-1}B\right) \\ &= \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} t^n \det(A) \cdot \left(\frac{1}{t^n} + \frac{1}{t^{n-1}} \operatorname{spur}(A^{-1}B) + \dots + \det(A^{-1}B)\right) \\ &= \det(A) \operatorname{spur}(A^{-1}B). \end{aligned}$$

Ohne die gesamte Ableitung $\det'(A) : L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$ zu berechnen, kann man kürzer auch so vorgehen:

$$\det'(A)(A) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \underbrace{\det((1+t)A)}_{(1+t)^n \det A} = n(1+t)^{n-1}\bigg|_{t=0} \det A = n \det A.$$

Folglich ist $\det'(A)$ surjektiv und $SL(\mathbb{R}^n)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n^2 - 1$.

14.6 Orthogonale Gruppe

Sie ist definiert durch (siehe auch [1.2](#)):

$$O(n) := \{T \in GL(n, n) : T^t \circ T = \operatorname{id}\} = \{T \in GL(n, n) : \langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle \forall x, y\}.$$

So wie in Beispiel [14.5](#) wollen wir nun zeigen, daß die Ableitung für die quadratische – daher auch glatte – Funktion $f : GL(n) \rightarrow L_{\operatorname{sym}}(n, n)$ mit $f(T) := T^t \circ T = \operatorname{komp}(T^t, T)$ surjektiv ist. Zu diesem Zweck, berechnen wir uns zuerst die Ableitung:

$$f'(T) \cdot S = \operatorname{komp}(S^t, T) + \operatorname{komp}(T^t, S) = S^t \circ T + T^t \circ S.$$

Die Dimension von $L_{\operatorname{sym}}(n, n)$ ist offensichtlich $\frac{(n+1)n}{2}$. Für ein $R \in L_{\operatorname{sym}}(n, n)$ existiert ein $S \in L(n, n)$ mit $S^t \circ T + T^t \circ S = R$, denn $(S^t \circ T) + (S^t \circ T)^t = R$ für $S^t \circ T = \frac{1}{2}R$, d.h. $S = (S^t)^t = (\frac{1}{2}R \circ T^{-1})^t = (T^t)^{-1} \frac{1}{2}R$. Folglich ist f' surjektiv, und somit $O(n)$ eine Teilmannigfaltigkeit von $L(n, n)$ der Dimension $\dim(O(n)) = n^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.

Allgemeiner können wir die STIEFELMANNIGFALTIGKEIT

$$V(k, n) := \{T \in L(k, n) : T^t T = \text{id}\}$$

betrachten (siehe auch [70.6](#)). Die Elemente von $V(k, n)$ sind somit isometrische Abbildung von $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$, und diese können äquivalent durch ihre Werte auf der standard-Basis des \mathbb{R}^k also durch k -Tupel orthonormaler Vektoren im \mathbb{R}^n , sogenannte orthonormale k -Beine im \mathbb{R}^n , beschrieben werden.

Die Funktion $f : L(k, n) \rightarrow L_{\text{sym}}(k, k)$, $T \mapsto T^t T - \text{id}$, ist glatt und erfüllt $f'(T)(S) = T^t S + S^t T$. Also ist sie regulär, denn für symmetrisches R können wir $f'(T)(S) = R$ wie zuvor durch $S := \frac{1}{2} T R$ lösen, was direktes Einsetzen beweist.

14.7 Gruppen invarianter Automorphismen, O_b

Wir wollen nun die orthogonale Gruppe verallgemeinern, indem wir eine beliebige Bilinearform $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ auf einem euklidischen Raum E betrachten. Mit

$$O_b(E) := \{T \in GL(E) : b(Tx, Ty) = b(x, y) \forall x, y \in E\}$$

bezeichnen wir die Gruppe aller invertierbaren linearen Abbildungen, die die Bilinearform b invariant lassen. Bekanntlich stehen die Bilinearformen $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ in bijektiver Beziehung zu den linearen Abbildungen $B : E \rightarrow E$, vermöge

$$b(x, y) = \langle Bx, y \rangle = \langle x, B^t y \rangle.$$

Denn $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ können wir genauso gut als Abbildung $\check{b} : E \rightarrow L(E, \mathbb{R}) = E^*$ auffassen, welche durch $x \mapsto (y \mapsto b(x, y))$ gegeben ist. Das skalare Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht dabei einer Abbildung $\iota : E \rightarrow E^*$, welche ein Isomorphismus ist, denn $\text{Ker}(\iota) = \{x : \langle x, y \rangle = 0 \forall y\} = \{0\}$, und da $\dim(E) = \dim(E^*)$, ist ι bijektiv. Die Zusammensetzung $B := \iota^{-1} \circ \check{b} : E \rightarrow E^* \rightarrow E$ ist dann die gesuchte lineare Abbildung, denn

$$b(x, y) = \check{b}(x)(y) = (\iota \circ B)(x)(y) = \langle Bx, y \rangle.$$

Die Gleichung $b(Tx, Ty) = b(x, y)$ ist somit mit $\langle T^t B T x, y \rangle = \langle B T x, T y \rangle = \langle Bx, y \rangle$ äquivalent, und damit ist

$$O_b(E) = \{T \in GL(E) : T^t B T = B\}.$$

Wir sollten also zeigen, daß dies eine reguläre Gleichung ist. Für die Ableitung der Funktion $f : GL(E) \rightarrow L(E)$, welche durch $f(T) = T^t B T - B$ definiert ist, erhalten wir $f'(T)(S) = S^t B T + T^t B S$. Wie bei $O(E)$ können wir nicht erwarten, daß sie surjektiv nach $L(E, E)$ ist, sondern wir brauchen einen linearen Teilraum $F \subseteq L(E, E)$ in welchem f Werte hat und auf welchen $f'(T)$ surjektiv ist.

Wenn B (schief)symmetrisch ist, dann gilt das gleiche auch für $f(T)$ und wir sollten also für F den Teilraum $L_{\pm}(E, E)$ der (schief)symmetrischen linearen Abbildungen verwenden. Dieser hat als Dimension $n(n+1)/2$ (bzw. $n(n-1)/2$), wenn n die Dimension von E ist. Wenn $U \in F$ ist und T die Identität ist, dann ist $U = f'(T)(S) = S^t B + B S$ nach S auflösbar, wenn wir $B S = \frac{1}{2} U$ nach S lösen können, denn dann ist $S^t B = \pm (B S)^t = \pm \frac{1}{2} U^t = \frac{1}{2} U$. Falls B invertierbar ist, geht das und $S = \frac{1}{2} B^{-1} U$. Falls $T \in GL(E)$ beliebig ist, dann hat die Gleichung $U = f'(T)(S) = S^t B T + T^t B S$ die Lösung $S = \frac{1}{2} B^{-1} (T^{-1})^t U$, denn dann gilt $T^t B S = \frac{1}{2} U$ und $S^t B T = \frac{1}{2} U^t T^{-1} (B^{-1})^t B T = \pm \frac{1}{2} U^t = \frac{1}{2} U$. Falls also B injektiv ist, d.h. b nicht degeneriert ist, oder äquivalent $b(x, y) = 0 \forall y \Rightarrow x = 0$, dann ist $O_b(E)$ eine Teilmannigfaltigkeit der Dimension

$$\dim O_b(E) := \begin{cases} n^2 - n(n+1)/2 = n(n-1)/2 & \text{falls } b \text{ symmetrisch ist} \\ n^2 - n(n-1)/2 = n(n+1)/2 & \text{falls } b \text{ schief-symmetrisch ist.} \end{cases}$$

Man beachte, daß für invertierbares B und $T \in O_b(E)$ automatisch $\det(T) = \pm 1$ gilt, denn $0 \neq \det(B) = \det(T^t B T) = \det(T)^2 \det(B)$.

14.8 Der symmetrische Fall, $O(n, k)$

Im symmetrischen Fall können wir nach dem Spektralsatz (Hauptachsentransformation) eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren e_j mit zugehörigen Eigenwerten $\lambda_j \in \mathbb{R}$ finden. Es ist dann

$$B(x) = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j \rangle e_j$$

und somit

$$b(x, y) = \langle Bx, y \rangle = \sum_j \lambda_j \langle x, e_j \rangle \langle y, e_j \rangle$$

Da $\text{Ker}(B) = \{0\}$ vorausgesetzt ist, müssen alle Eigenwerte $\lambda_j \neq 0$ sein, und somit sieht b in der Orthogonalbasis $f_j := \sqrt{|\lambda_j|} e_j$ wie folgt aus

$$b(x, y) = \sum_{\lambda_j > 0} x^j y^j - \sum_{\lambda_j < 0} x^j y^j,$$

wobei $x^j := \langle x, f_j \rangle$ die Koordinaten von x bezüglich der Basis (f_j) bezeichnet. Man nennt b auch PSEUDO-EUKLIDISCHES PRODUKT. Solche sind für die Relativitätstheorie von Bedeutung. Man beachte, daß es Vektoren $x \neq 0$ gibt, welche Norm $b(x, x) = 0$ haben und auch solche mit negativer Norm. Man nennt die mit verschwindender Norm LICHTARTIG, d.h. $\sum_{j > k} (x^j)^2 = \sum_{j \leq k} (x^j)^2$ (dies beschreibt einen "Kegel"), und die mit positiver Norm RAUMARTIG und die mit negativer Norm ZEITARTIG. Man betrachte z.B. die Form

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Dann sind die Vektoren im Inneren des Doppelkegels mit der x_3 -Achse die zeitartigen, die im Äußeren die raumartigen und die am Doppelkegel die lichtartigen. Bestimme das orthogonale Komplement jedes Vektors, zeige insbesondere, daß v^\perp für lichtartige Vektoren, gerade die Tangentialebene an den Kegel in v ist.

Die Gruppe $O_b(E)$ hängt also bis auf Isomorphie nur von der Signatur, d.h. der Anzahl k der negativen Eigenwerte von b , ab und wird daher auch mit $O(n, k)$ bezeichnet, wobei $n = \dim(E)$ ist. Man beachte, daß $O(n, k) = O(n, n-k)$ ist (ersetze dazu b durch $-b$). Die offene Teilgruppe $SL(n) \cap O(n, k)$ wird mit $SO(n, k)$ bezeichnet. Die $O(4, 1)$ wird (in der Physik) auch als die LORENZGRUPPE bezeichnet.

14.9 Der schiefsymmetrische Fall, $Sp(2n)$

Im schiefsymmetrischen Fall können wir eine Normalform wie folgt finden. Sei also b eine nichtdegenerierte schiefsymmetrische Bilinearform, eine sogenannte SYMPLEKTISCHE FORM. Diese sind für die klassischen Mechanik von Bedeutung (siehe Abschnitt [45](#)). Für eine Teilmenge $A \subseteq E$ bezeichnen wir mit $A^\perp := \{x \in E : x \perp y \forall y \in A\}$ das ORTHOGONALE KOMPLEMENT. Wobei $x \perp y$ heißt, daß $b(x, y) = 0$ ist. Da b schiefsymmetrisch ist, ist $x \perp x$ für alle x . Eine Teilmenge $A \subseteq E$ heißt ISOTROP, falls $A \subseteq A^\perp$, d.h. $b|_{A \times A} = 0$. Es sei F so eine maximale isotrope Teilmenge. Wegen der Bilinearität von b muß F ein Teilraum sein (solche Teilräume heißen LAGRANGE TEILRÄUME). Für Lagrange Teilräume F gilt $F = F^\perp$, denn andernfalls können wir ein $y \in F^\perp \setminus F$ zu F hinzufügen und erhalten eine größere isotrope Teilmenge $F \cup \{y\}$.

Für jeden Teilraum F gilt $\dim E = \dim F + \dim F^\perp$ (in der Tat $i^* \circ \check{b} : E \rightarrow E^* \rightarrow F^*$ ist surjektiv, wobei $i : F \rightarrow E$ die Inklusion bezeichnet, denn $\check{b} : E \rightarrow E^*$ ist nach Voraussetzung bijektiv, und $i^* : E^* \rightarrow F^*$ ist klarerweise surjektiv (wähle ein linksinverses p zu i , dann gilt $i^* \circ p^* = \text{id}$) und somit ist $\dim E = \dim(\text{Ker}) + \dim(\text{Bild}) = \dim(F^\perp) + \dim(F)$). Insbesondere gilt also $\dim E = \dim F + \dim F^\perp = 2 \dim F$ für Lagrange Teilräume F und somit folgt aus der Existenz von Lagrange Teilräumen, daß E geradedimensional sein muß.

Wir wählen nun einen zu einem Lagrange Teilraum F einen komplementären Lagrange Teilraum F' . Das ist möglich, denn wenn für einen isotropen Teilraum G sowohl $G \cap F = \{0\}$ als auch $G + F \subset E$ gilt, dann ist $G^\perp + F = G^\perp + F^\perp = (G \cap F)^\perp = \{0\}^\perp = E \supset G + F$ und somit können wir ein $y \in G^\perp$ finden, für welches $(\mathbb{R}y + G) \cap F = \{0\}$ ist, denn andernfalls wäre $y \in G + F$. Wir haben hier für Teilräume A und B die Gleichungen $A^{\perp\perp} = A$ ($\Leftarrow A \subseteq A^{\perp\perp}$ und Dimensionsgründen) und $(A+B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$ (trivial) und somit $A^\perp + B^\perp = (A^\perp + B^\perp)^{\perp\perp} = (A^{\perp\perp} \cap B^{\perp\perp})^\perp = (A \cap B)^\perp$ verwendet. Der Raum $G_1 := \mathbb{R}y + G$ ist nun ein größerer isotroper Teilraum.

Es sei $\iota' : F' \rightarrow E$ die Inklusion. Dann ist $\iota^* \circ \check{b} \circ \iota' : F' \rightarrow E \rightarrow E^* \rightarrow F^*$ injektiv, denn der Kern von $\iota^* \circ \check{b}$ ist $F^\perp = F$ und $F \cap F' = \{0\}$, und somit aus Dimensionsgründen ein Isomorphismus. Wir behaupten, daß der induzierte Isomorphismus $E = F' \times F \cong F^* \times F$ die symplektische Form b in die Form $(y_1^*, y_1; y_2^*, y_2) \mapsto y_1^*(y_2) - y_2^*(y_1)$ übersetzt. Sei also $x_j = y_j' + y_j$ mit $y_j \in F$ und $y_j' \in F'$. Dann ist $b(x_1, x_2) = b(y_1', y_2) + b(y_1, y_2') = b(y_1', y_2) - b(y_2', y_1)$, da F und F' isotrop sind. Also sei $y_i^* := (\iota^* \circ \check{b} \circ \iota')(y_i')$. Dann ist $b(y_1', y_2) = b(\iota' y_1', \iota y_2) = \check{b}(\iota' y_1')(\iota y_2) = (\iota^* \circ \check{b} \circ \iota')(y_1')(y_2) = y_1^*(y_2)$ und somit ist $b(x_1, x_2) = y_1^*(y_2) - y_2^*(y_1)$. Wählen wir nun in F eine Basis $(e_j)_{k < j \leq 2k}$ (mit $2k = \dim E$) und in F^* die duale Basis $(e^j)_{j > k}$. Mit $(e_j := e'_{k+j})_{j \leq k}$ bezeichnen wir die entsprechende Basis in F' . Dann ist $(e_j)_{j \leq 2k=n}$ eine Basis von E , die jener von $F^* \times F$ entspricht, und weiters ist $y^*(y) = \sum_j y_j y^j$, wobei y_j die Koordinaten von y^* bzgl. e^j und y^j jene von y bzgl. e_j bezeichnet. Also ist

$$b(x, y) = \sum_{j \leq k} x^j y^{j+k} - x^{j+k} y^j,$$

die STANDARD SYMPLEKTISCHE FORM AM \mathbb{R}^{2k} . Die entsprechende Gruppe wird mit $Sp(2k)$ bezeichnet, und heißt REELLE SYMPLEKTISCHE GRUPPE.

14.10 Spiegelungen

Wir wollen nun spezielle Abbildungen $T \in O_b(E)$ beschreiben. Und zwar solche, die eine Hyperebene als Fixpunktmenge $\{x \in E : Tx = x\}$ besitzen. Sei F diese Hyperebene und $0 \neq y \in F^\perp$, d.h. $F = \{y\}^\perp$. Sei $0 \neq y' \notin F$ mit $b(y', y) = 1$ (möglich, da $b(y', y) = 0 \Rightarrow y' \in \{y\}^\perp = F$), dann läßt sich jedes $x \in E$ als $x = b(x, y)y' + (x - b(x, y)y')$ schreiben, und $b(x - b(x, y)y', y) = 0$, d.h. $x - b(x, y)y' \in F$. Folglich ist T von der Form

$$T(x) = b(x, y)T(y') + (x - b(x, y)y') = x + b(x, y)(T(y') - y') =: x + b(x, y)y''.$$

Damit T die Form b erhält, muß

$$\begin{aligned} b(x_1, x_2) &= b(T(x_1), T(x_2)) = b(x_1 + b(x_1, y)y'', x_2 + b(x_2, y)y'') = \\ &= b(x_1, x_2) + b(x_1, y)b(y'', x_2) + b(x_2, y)b(x_1, y'') + b(x_1, y)b(x_2, y)b(y'', y'') \end{aligned}$$

gelten, d.h. $b(x_1, y)b(y'', x_2) + b(x_2, y)b(x_1, y'') + b(x_1, y)b(x_2, y)b(y'', y'') = 0$. Wenn wir $x_2 = y'$ setzen und $x_1 \perp y$ wählen, dann folgt $b(x_1, y'') = 0$, also ist $y'' \in$

$\{y\}^{\perp\perp} = \mathbb{R}y$. Sei also $y'' = \lambda y$ (mit $\lambda \neq 0$, da T nicht die Identität ist). Dann ist

$$\lambda b(x_1, y)b(y, x_2) + \lambda b(x_2, y)b(x_1, y) + b(x_1, y)b(x_2, y)\lambda^2 b(y, y) = 0$$

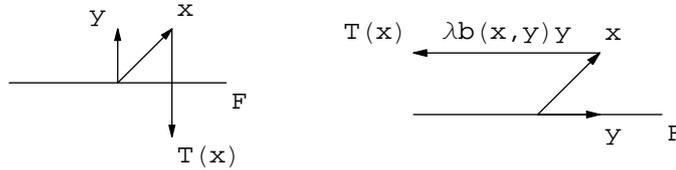
genau dann wenn $b(x_2, y)(\pm 1 + 1 + \lambda b(y, y)) = 0$ ist für alle x_2 , bzw. $1 + \lambda b(y, y) = \mp 1$ ($x_2 := y'$)

Im symmetrischen Fall ist das damit äquivalent, daß $\lambda b(y, y) = -2$ ist und im schiefsymmetrischen ist es immer erfüllt.

Die $T \in O_b(E)$ mit einer Hyperebene $F = \{y\}^\perp$ als Fixpunktmenge sind also genau

$$T(x) := \begin{cases} x - 2\frac{b(x,y)}{b(y,y)}y & \text{mit } b(y,y) \neq 0 \text{ im symmetrischen Fall} \\ x + \lambda b(x,y)y & \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \text{ im schiefsymmetrischen Fall} \end{cases}$$

Diese heißen auch Spiegelungen, in Analogie zum Fall, wo b eine euklidische Metrik ist.



Im symplektischen Fall ist jede Spiegelung orientierungserhaltend, denn $T(y') = y' + \lambda y$ liegt auf der gleichen Seite von F wie y' und somit ist $\begin{pmatrix} \text{id} & \lambda y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Komponentendarstellung von T bzgl. der Zerlegung $E = F \times \mathbb{K}y'$, und im symmetrischen Fall orientierungsvertauschend, denn $T(y) = y - 2y = -y$ und somit ist $\begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ die Komponentendarstellung von T bzgl. der Zerlegung $E = F \times \mathbb{K}y$.

Es läßt sich für $x \neq x'$ mit $b(x, x) = b(x', x')$ genau eine Spiegelung T finden mit $Tx = x'$, wenn $b(x, x') \neq b(x, x)$ ist, denn $x' = x + \lambda b(x, y)y$ gilt genau dann, wenn $y = \mu(x' - x)$ mit $1 = \lambda\mu^2 b(x, x' - x) = \lambda\mu^2 (b(x, x') - b(x, x))$ gilt. Im symmetrischen Fall ist dann $\lambda b(y, y) = \lambda\mu^2 b(x' - x, x' - x) = -2$. Diese Abbildung T läßt $(x' - x)^\perp$ fix.

Proposition.

Für jede (schief-)symmetrische nicht-degenerierte Bilinearform $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ wird $O_b(E)$ von den Spiegelungen erzeugt.

Man kann zeigen, daß im symmetrischen Fall $n = \dim E$ viele Spiegelungen genügen und im symplektischen sind mindestens $n + 1$ notwendig (siehe [19, Sur les Groups Classique, Hermann, Paris 1967]).

Beweis. Im symmetrischen Fall wählen wir eine Orthonormalbasis von E (d.h. $b(e_i, e_j) = 0$ und $b(e_i, e_i) = \pm 1$) Die Bilder $e'_i := T(e_i)$ sind dann ebenfalls eine Orthonormalbasis. Wir zeigen nun mit Induktion, daß T bis auf Zusammensetzung mit Spiegelungen $\{e_1, \dots, e_k\}$ fix läßt:

In der Tat, wenn T nach Induktionsannahme die Menge $\{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ fix läßt, und $b(e_k, e'_k) \neq b(e_k, e_k)$ ist, dann bildet die Spiegelung S am orthogonalen Komplement zu $e'_k - e_k$ den Vektor e_k auf e'_k ab und läßt $(e'_k - e_k)^\perp \supseteq (e'_k)^\perp \cap (e_k)^\perp \supseteq \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ fix, also läßt $S^{-1}T$ sogar $\{e_1, \dots, e_k\}$ fix. Ist andererseits $b(e_k, e'_k) = b(e_k, e_k)$, dann spiegeln wir zuerst am orthogonalen Komplement zu e_k (mit $b(e_k, e_k) = \pm 1 \neq 0$) und danach an jenen zu $e'_k + e_k$ (mit $b(e_k + e'_k, e_k + e'_k) = 2(b(e_k, e_k) + b(e_k, e'_k)) = 4b(e_k, e_k) \neq 0$). Diese Spiegelungen lassen $(e_k)^\perp \cap (e_k + e'_k)^\perp \supseteq \{e_1, \dots, e_{k-1}\}$ invariant und ihre Zusammensetzung

bildet e_k auf $-e_k$ und weiter auf e'_k ab, also läßt T bis auf diese Spiegelungen $\{e_1, \dots, e_k\}$ invariant.

Im symplektischen Fall beweisen wir die Aussage mittels Induktion nach $j := n - \dim F$, wo $F := \{x : Tx = x\}$. Für $j = 0$ ist $T = \text{id}$. Sei also $j > 0$. Für jedes $y \in E$ ist $b(y, x) = b(Ty, Tx) = b(Ty, x)$ für alle $x \in F$, d.h. $Ty - y \in F^\perp$. Falls $b(Ty, y) \neq 0$ ist ($\Rightarrow y \notin F$), dann existiert eine Spiegelung, welche y auf Ty abbildet und die $(Ty - y)^\perp \supseteq F$ fix läßt. Bis auf diese Spiegelung läßt also T auch $F \oplus \mathbb{R}y$ fix.

Andernfalls ist $b(Ty, y) = 0$ für alle y . Sei vorerst $F \cap F^\perp \neq \{0\}$. Dann wählen wir ein $0 \neq x \in F \cap F^\perp$ und ein $y \in E$ mit $b(y, x) = 1$ (geht wie in der Beschreibung von Spiegelungen). Es gilt dann $y \notin F$, da $x \in F^\perp$. Weiters ist $b(x, Ty) = b(x, y) \neq 0$ und somit existieren Spiegelungen die y auf $x + y$, bzw. Ty auf $x + y$ abbilden, und $(x + y - y)^\perp \cap (x + y - Ty)^\perp \supseteq F$ fix lassen. Also läßt T bis auf diese Spiegelungen $F \oplus \mathbb{R}y$ fix, und wir können die Induktionsannahme anwenden.

Ist $F = \{0\}$, dann existiert ein $x \in F^\perp = E$ mit $b(x, y) = 1 = b(x, Ty)$, denn ergänze $(e_1 := y, e_2 := Ty)$ zu einer Basis eines Lagrange Teilraums (beachte, daß der von $\{y, Ty\}$ erzeugte Teilraum isotrop ist) und setze $x := e^1 + e^2$ in Termen der dualen Basis $(e^i)_{i=1}^k$. Nun verfare wie gerade zuvor.

Ist schließlich $F \neq \{0\}$ und $F \cap F^\perp = \{0\}$, dann ist $E = F \oplus F^\perp$ und b induziert auf F^\perp eine symplektische Form, denn für $y' \in F^\perp$ mit $b(y', y) = 0 \forall y \in F^\perp$ gilt $y' \in (F^\perp)^\perp = F$ und somit $y' = 0$. Weiters läßt $T \in O_b(E)$ den Raum F^\perp invariant, denn $b(Ty', y) = b(Ty', Ty) = b(y', y) = 0$ für alle $y \in F$ und $y' \in F^\perp$. nach Induktionsvoraussetzung ist $T|_{F^\perp}$ eine Zusammensetzung von Spiegelungen längs Vektoren in F^\perp . Da solche Spiegelungen aber $F = F^{\perp\perp}$ fix lassen, ist T auf ganz E die Zusammensetzung dieser Spiegelungen. \square

Folgerung.

Es gilt $Sp(2k) \subseteq SL(2k)$.

14.11 Der degenerierte Fall

Falls b degeneriert ist, d.h. B einen nicht trivialen Kern K besitzt, dann können wir $\tilde{E} := E/K$ betrachten. Falls b (schief)symmetrisch ist, so induziert b eine nichtdegenerierte (schief)symmetrische Form $\tilde{b} : \tilde{E} \times \tilde{E} \rightarrow \mathbb{R}$, denn $\text{Ker } B^t = \text{Ker } B$. Jedes $T \in O_b(E)$ erhält diesen Kern, denn $BT = (T^{-1})^t B$ impliziert, daß $BT(K) = 0$ ist. Es ist also $T \in O_b(E)$, genau dann wenn $T(K) \subseteq K$ und $\tilde{T} \in O_{\tilde{b}}(\tilde{E})$, wobei \tilde{T} definiert ist durch das Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} K & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{p} & \tilde{E} \\ T|_K \downarrow & & T \downarrow & & \downarrow \tilde{T} \\ K & \hookrightarrow & E & \xrightarrow{p} & \tilde{E} \end{array}$$

Wir verwenden nun den Isomorphismus $E \cong K \oplus \tilde{E}$, welcher durch $(1 - sp, p)$ mit der Inversen $(k, \tilde{x}) \mapsto k + s(\tilde{x})$ gegeben ist (denn $p(1 - sp) = 0$), wobei $p : E \rightarrow \tilde{E}$ die kanonische Projektion ist und $s : \tilde{E} \rightarrow E$ ein Rechtsinverses. Dann können wir $T \in O_b(K \times \tilde{E})$ wie folgt darstellen:

$$\begin{pmatrix} T|_K & Ts - s\tilde{T} \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix}$$

mit $T|_K \in GL(K)$ und $\tilde{T} \in O_{\tilde{b}}(\tilde{E})$. Als Mannigfaltigkeiten ist also $O_b(E) \cong GL(K) \times O_{\tilde{b}}(\tilde{E}) \times L(\tilde{E}, K)$, wobei der Isomorphismus gegeben ist durch $T \mapsto$

$(T|_K, \tilde{T}, Ts - s\tilde{T})$. Aus [14.9](#) folgt, daß als Gruppe:

$$O_b(E) \cong (GL(K) \times O_{\tilde{b}}(\tilde{E})) \rtimes L(\tilde{E}, K)$$

14.12 Der unsymmetrische Fall

Falls schließlich b weder symmetrisch noch schiefsymmetrisch ist, so zerlegen wir b in den symmetrischen und den schiefsymmetrischen Teil $b = b_+ + b_-$, wobei $b_{\pm}(x, y) = (b(x, y) \pm b(y, x))/2$ ist. Dem entspricht übrigens gerade die Zerlegung von $B = B_+ + B_-$, wobei $B_{\pm} = (B \pm B^t)/2$ ist. Dann ist $O_b(E) = O_{b_+}(E) \cap O_{b_-}(E)$. Allerdings wissen wir nicht, ob dieser Durchschnitt von Mannigfaltigkeiten wieder eine ist. Für Lie-Gruppen kann man dies aber allgemein zeigen (abgeschlossene Untergruppen von Lie-Gruppen sind ebenso Lie-Gruppen, siehe [69.4](#)).

14.13 Die Gruppen $U(n, k)$

Betrachten wir den Spezialfall, wo $b_-(x, y) = b_+(Ix, y)$ vermöge einer Abbildung I , die eine b_+ -Isometrie ist. Wenn $(\cdot)^t$ transponieren bzgl. b_+ bezeichnet so gilt $I^t I = 1$ (da I eine b_+ -Isometrie ist) und $I^t = -I$ (da b_- schiefsymmetrisch und b_+ symmetrisch ist). Also ist $I^2 = -1$ und wir können folglich E zu einem komplexen Vektorraum machen, indem wir $(r + is)x := rx + sIx$. Man beachte, daß I auch eine b_- -Isometrie ist, denn $b_-(Ix, Iy) = b_+(I^2x, Iy) = b_+(Ix, y) = b_-(x, y)$. Wir fassen die beiden Gleichungen $b_{\pm}(Tx, Ty) = b_{\pm}(x, y)$ in \mathbb{R} zu einer Gleichung $b(Tx, Ty) = b(x, y)$ in $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ zusammen, d.h. $b(x, y) := b_+(x, y) + ib_-(x, y)$. Dann ist b reell-bilinear, konjugiert symmetrisch, denn $b(y, x) = b_+(y, x) + ib_-(y, x) = b_+(x, y) - ib_-(x, y) = \overline{b(x, y)}$, und sogar \mathbb{C} -linear im zweiten Faktor, denn

$$\begin{aligned} b(x, iy) &= b_+(x, iy) + ib_-(x, iy) = \\ &= b_+(iy, x) + ib_+(ix, iy) = ib_+(x, y) - b_-(x, y) = ib(x, y). \end{aligned}$$

Also ist b eine hermitesche Form, die klarerweise ebenfalls nicht degeneriert ist wenn dies für b_+ gilt.

Ist umgekehrt b eine beliebige hermitesche nicht degenerierte Form auf einem komplexen Vektorraum E , dann ist ihr Realteil b_+ eine symmetrische nicht degenerierte Form und ihr Imaginärteil eine symplektische Form b_- und es gilt $b_-(x, y) = b_+(ix, y)$. In der Tat ist

$$\begin{aligned} b_+(x, y) &= (b(x, y) + \overline{b(x, y)})/2 = (b(x, y) + b(y, x))/2 \in \mathbb{R} \\ b_-(x, y) &= (b(x, y) - \overline{b(x, y)})/(2i) = (b(x, y) - b(y, x))/(2i) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

und somit ist b_{\pm} (schief-)symmetrisch und es gilt $b_+(x, iy) + ib_-(x, iy) = b(x, iy) = ib(x, y) = ib_+(x, y) - b_-(x, y)$, d.h. $b_+(x, iy) = -b_-(x, y)$ oder äquivalent $b_-(x, y) = -b_-(y, x) = b_+(y, ix) = b_+(ix, y)$. Es ist i eine b_+ -Isometrie, denn $b_+(ix, iy) = (b(ix, iy) + \overline{b(ix, iy)})/2 = (-i^2b(x, y) + \overline{-i^2b(x, y)})/2 = (b(x, y) + \overline{b(x, y)})/2 = b_+(x, y)$. Somit ergibt sich auch aus der nicht-Degeneriertheit von b jene von b_{\pm} .

In dieser Situation ist

$$O_{b_+ + b_-}(E) = O_{b_+}(E) \cap O_{b_-}(E) = O_{b_+}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = O_{b_-}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = U_b(E) \subseteq L_{\mathbb{C}}(E),$$

wobei

$$\begin{aligned} U_b(E) &:= \{T \in GL(E) : b(Tx, Ty) = b(x, y) \forall x, y \in E\} \\ L_{\mathbb{C}}(E) &:= \{T \in L(E) : T \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear}\} = \{T \in L(E) : T \circ I = I \circ T\}. \end{aligned}$$

und wir die Bezeichnung U (für unitär) verwendet haben, da b nun \mathbb{C} -wertig ist.

Offensichtlich ist $O_{b_+} \cap O_{b_-} = U_b$. Es ist $U_b \subseteq L_{\mathbb{C}}(E)$, denn für $T \in O_{b_+} \cap O_{b_-}$

gilt $b_+(Tix, Ty) = b_+(ix, y) = b_-(x, y) = b_-(Tx, Ty) = b_+(iT x, Ty)$ und somit ist $T(ix) = iT(x)$ für alle x , d.h. $T \in L_{\mathbb{C}}(E)$. Umgekehrt ist $O_{b_{\pm}} \cap L_{\mathbb{C}}(E) \subseteq O_{b_{\mp}}$, denn $b_{\mp}(Tx, Ty) = \pm b_{\pm}(iT x, Ty) = \pm b_{\pm}(Tix, Ty) = \pm b_{\pm}(ix, y) = b_{\mp}(x, y)$.

Sei nun E ein komplexer Vektorraum mit komplexer Basis $(e_i)_{i \leq n}$, d.h. jedes $z \in E$ läßt sich eindeutig als $z = \sum_{j=1}^n z^j e_j$ mit Koeffizienten $z^j \in \mathbb{C}$ schreiben. Es sei $z^j =: x^j + ix^{n+j}$ die Zerlegung in Real- und Imaginärteil. Dann ist $z = \sum_{j=1}^{2n} x^j e_j$, wobei $e_{k+j} := ie_j$ für alle $1 \leq j \leq n$ ist. Also hat E als reeller Vektorraum die Basis $(e_j)_{j=1}^{2n}$. Man beachte, daß zuerst alle Realteile und erst danach die Imaginärteile kommen, d.h. die durch die Basen gegebenen Isomorphismen $E \cong \mathbb{C}^n$ und $E \cong \mathbb{R}^{2n}$ induzieren nicht den vielleicht erwarteten Isomorphismus $\mathbb{C}^n \cong (\mathbb{R}^2)^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, sondern ist noch mit dem Umordnungs-Isomorphismus $(\mathbb{R}^2)^n \cong (\mathbb{R}^n)^2$ zusammengesetzt. Die Multiplikation von \mathbb{R}^{2n} ist also durch die Matrix

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } 1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

gegeben, und wir bezeichnen mit $L_{\mathbb{C}}(n) := \{T \in L(2n) : T \circ I = I \circ T\}$.

Wenn $T \in L_{\mathbb{C}}(E)$ bezüglich der komplexen Basis $(e_j)_{j \leq n}$ die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} + ib_{1,1} & \dots & a_{1,n} + ib_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} + ib_{n,1} & \dots & a_{n,n} + ib_{n,n} \end{pmatrix} = A + iB$$

hat, dann hat T bezüglich der reellen Basis $(e_1, \dots, e_n; ie_1, \dots, ie_n)$ die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} & -b_{1,1} & \dots & -b_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & -b_{n,1} & \dots & -b_{n,n} \\ b_{1,1} & \dots & b_{1,n} & a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \dots & b_{n,n} & a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix},$$

wie eine einfache Koordinatenrechnung zeigt.

Sei nun b die STANDARD HERMITISCHE FORM am \mathbb{C}^n , d.h.

$$b(z, w) = \sum_{j=1}^n \bar{z}^j w^j.$$

Die Gruppe $U_b(E)$ wird dann auch als UNITÄRE GRUPPE $U(n)$ bezeichnet. Wenn wir wie zuvor $z^j = x^j + ix^{n+j}$ und $w^j = y^j + iy^{n+j}$ setzen, dann ergibt sich

$$b(z, w) = \sum_{j=1}^n (x^j y^j + x^{n+j} y^{n+j}) + i \sum_{j=1}^n (x^j y^{n+j} - x^{n+j} y^j),$$

also ist der Realteil von b gerade die positiv definite symmetrische Standardform und der Imaginärteil gerade die symplektische Standardform. Also ist

$$U(n) = O(2n) \cap Sp(2n) = O(2n) \cap L_{\mathbb{C}}(n) = Sp(2n) \cap L_{\mathbb{C}}(n).$$

Wenn b die STANDARD HERMITISCHE FORM MIT SIGNATUR $k > 0$ am \mathbb{C}^n bezeichnet, d.h.

$$b(z, w) = \sum_{j>k} \bar{z}^j w^j - \sum_{j\leq k} \bar{z}^j w^j,$$

dann wird die Gruppe $U_b(E)$ mit $U(n, k)$ bezeichnet, und eine analoge Rechnung zeigt, daß Realteil und Imaginärteil folgende Matrixbeschreibungen B_{\pm} haben

$$B_+ = \begin{pmatrix} 1_k & 0 \\ 0 & 1_k \end{pmatrix} \quad \text{mit } 1_k = \begin{pmatrix} 1 & \dots & k & k+1 & \dots & n \\ -1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & -1 & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_- = \begin{pmatrix} 0 & -1_k \\ 1_k & 0 \end{pmatrix}$$

also ist

$$U(n, k) = "O(2n, 2k)" \cap "Sp(2n)" = "O(2n, 2k)" \cap L_{\mathbb{C}}(n) = "Sp(2n)" \cap L_{\mathbb{C}}(n),$$

wobei die Gruppen unter Anführungszeichen nur bis auf Koordinatenvertauschungen durch die Standardformen beschrieben werden.

Wie für reelle Vektorräume, läßt sich natürlich auch für komplexe Vektorräume zeigen, daß die Gruppen

$$U(n, k) := \{T \in L_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) : b(Tx, Ty) = b(x, y)\} = O(2n, 2k) \cap Sp(2n)$$

Teilmannigfaltigkeiten von $L_{\mathbb{C}}(E)$ sind, wobei b eine nicht degenerierte hermitesche Form ist, die gerade k negative Eigenwerte hat. Man beachte, daß schiefhermitesche Formen nichts anderes als ib für eine hermitesche Form b sind, also nichts neues liefern.

14.14 Komplex lineare Abbildungen, $GL_{\mathbb{C}}$, $SL_{\mathbb{C}}$

Sei nun E ein komplexer n -dimensionaler Vektorraum. Wir können nun wie im reellen Fall auch folgende Untergruppen des komplexen Vektorraums $L_{\mathbb{C}}(E)$ betrachten.

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{C}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : T \text{ ist invertierbar}\} = GL(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) \\ SL_{\mathbb{C}}(E) &:= \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : \det_{\mathbb{C}}(T) = 1\} \\ SU_b(E) &:= \{T \in SL_{\mathbb{C}}(E) : b(Tx, Ty) = b(x, y) \forall x, y\} = U_b(E) \cap SL_{\mathbb{C}}(E) \\ SU(n) &:= U(n) \cap SL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \\ SU(n, k) &:= U(n, k) \cap SL_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) \end{aligned}$$

betrachten, wobei $\det_{\mathbb{C}}$ die komplexe Determinante und $b : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ eine hermitesche Form (mit Signatur) ist.

Es sei \mathbb{C}_* die Gruppe $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation. Die Abbildung $\mathbb{C}_* \times SL_{\mathbb{C}}(n) \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(n)$, $(t, T) \mapsto tT$ ist offensichtlich ein surjektiver Gruppenhomomorphismus, denn $\det_{\mathbb{C}}(tT) = t^n \det_{\mathbb{C}}(T)$, mit Kern $\{(\frac{1}{t}, t \cdot 1) : t^n = 1\} \cong \mathbb{Z}_n$. Man kann zeigen, daß daraus leicht folgt, daß dies eine Überlagerungsabbildung ist. Andererseits ist $GL_{\mathbb{C}}(n) = SL_{\mathbb{C}}(n) \rtimes \mathbb{C}_*$ ein semidirektes Produkt, da die kurze exakte Sequenz

$$1 \rightarrow SL_{\mathbb{C}}(n) \hookrightarrow GL_{\mathbb{C}}(n) \xrightarrow{\det} \mathbb{C}_* \rightarrow 1$$

via folgendem Gruppenhomomorphismus $\mathbb{C}_* \rightarrow GL_{\mathbb{C}}(n)$ splittet:

$$z \mapsto \begin{pmatrix} z & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Im reellen Fall ist $\mathbb{R}^+ \times SL(n) \rightarrow GL^+(n)$, $(t, T) \mapsto tT$ ein Gruppenisomorphismus. Also kann man $\mathbb{R}_* \times SL(n)$ mit $GL(n)$ als Mannigfaltigkeit identifiziert werden. Falls n ungerade ist, so liefert die gleiche Formel auch einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{R}_* \times SL(n) \rightarrow GL(n)$. Im geraden Fall ist $GL(n) = SL(n) \rtimes \mathbb{R}^*$ wie zuvor wieder ein semidirektes Produkt.

Wir wollen nun einen Zusammenhang zwischen reeller Determinante \det und komplexer Determinante $\det_{\mathbb{C}}$ herstellen. Dazu betrachten wir die Exponentialfunktion $\exp : L_{\mathbb{K}}(E) \rightarrow GL_{\mathbb{K}}(E)$, $T \mapsto \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k$. Offensichtlich ist $\exp'(\text{id})(T) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \exp(tT) = T \exp(0) = T$ für alle t (oder allgemeiner $\exp'(T)(S) = \exp(T)S$, falls $TS = ST$ ist) und somit ist \exp ein lokaler Diffeomorphismus bei 0.

Es gilt $\det_{\mathbb{K}}(\exp(T)) = e^{\text{spur}_{\mathbb{K}} T}$, denn dazu betrachten wir $f : \mathbb{R} \rightarrow L_{\mathbb{K}}(E) \rightarrow GL_{\mathbb{K}}(E) \rightarrow \mathbb{K} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{K}$ gegeben durch $f(t) = \ln(\det_{\mathbb{K}}(\exp(tT)))$ (dies macht Sinn, da wir längs der Kurve $t \mapsto \det_{\mathbb{K}}(\exp(tT))$ die komplexe Logarithmusfunktion wohldefiniert wählen können). Dann ist $f(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} f'(t) &= \frac{\det'_{\mathbb{K}}(\exp(tT)) \exp'(tT)(T)}{\det_{\mathbb{K}}(\exp(tT))} \\ &= \frac{\det_{\mathbb{K}}(\exp(tT)) \text{spur}(\exp(-tT) \exp(tT)T)}{\det_{\mathbb{K}}(\exp(tT))} = \text{spur}(T) \end{aligned}$$

also ist $f(t) = t \text{spur}(T)$, und $f(1) = \text{spur}(T)$ liefert das Gewünschte.

Wir wollen nun zeigen, daß $|\det_{\mathbb{C}}(T)|^2 = \det_{\mathbb{R}}(T)$ ist für \mathbb{C} -lineares T . Da beides Polynome (in den Eintragungen der Matrix) von T sind, genügt es das für T nahe der Identität zu zeigen, also für solche Abbildungen der Form $\exp(T)$. Für diese gilt:

$$\begin{aligned} |\det_{\mathbb{C}}(\exp(T))|^2 &= \det_{\mathbb{C}}(\exp(T)) \overline{\det_{\mathbb{C}}(\exp(T))} \\ &= e^{\text{spur}_{\mathbb{C}}(T)} e^{\overline{\text{spur}_{\mathbb{C}}(T)}} = e^{\text{spur}_{\mathbb{C}}(T) + \overline{\text{spur}_{\mathbb{C}}(T)}} \\ &= e^{\text{spur}_{\mathbb{R}}(T)} = \det_{\mathbb{R}}(\exp(T)), \end{aligned}$$

denn es ist $\text{spur}_{\mathbb{R}}(T) = \text{spur}_{\mathbb{C}}(T) + \overline{\text{spur}_{\mathbb{C}}(T)}$, denn sei $A + iB$ die komplexe Matrixdarstellung von T , dann ist $\text{spur}_{\mathbb{C}}(A \pm iB) = \text{spur}(A) \pm i \text{spur}(B)$ und

$$\begin{aligned} \text{spur}_{\mathbb{R}}(T) &= \text{spur} \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = 2 \text{spur}(A) = \\ &= \text{spur}_{\mathbb{C}}(A + iB) + \text{spur}_{\mathbb{C}}(A - iB) = \text{spur}_{\mathbb{C}}(T) + \overline{\text{spur}_{\mathbb{C}}(T)}. \end{aligned}$$

Eine andere algebraische Methode, die selbe Gleichung zu erhalten, geht wie folgt:

$$\begin{aligned} \det_{\mathbb{R}}(T) &= \det \begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ B + iA & A \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ B + iA - i(A - iB) & A - i(-B) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A - iB & -B \\ 0 & A + iB \end{pmatrix} \\ &= \det(A - iB) \cdot \det(A + iB) = \overline{\det_{\mathbb{C}}(T)} \cdot \det_{\mathbb{C}}(T) = |\det_{\mathbb{C}}(T)|^2. \end{aligned}$$

14.15 Komplexe Gruppen, $O_{\mathbb{C}}$, $Sp_{\mathbb{C}}$

Ist nun $b : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ eine \mathbb{C} -bilineare (schief-)symmetrische, nicht degenerierte Form, dann wollen wir $U_b(E)$ analog zum Fall einer hermiteschen Form als Durchschnitt reeller Gruppen beschreiben. Dazu zerlegen wir b in Real- und Imaginärteil, d.h. $b(x, y) = b_+(x, y) + ib_-(x, y)$, wobei

$$\begin{aligned} b_+(x, y) &= (b(x, y) + \overline{b(x, y)})/2 \in \mathbb{R} \\ b_-(x, y) &= (b(x, y) - \overline{b(x, y)})/(2i) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Dann sind der Realteil b_+ und der Imaginärteil b_- zwei reell bilineare (schief-)symmetrische reell-wertige Formen, und es gilt $-b_-(x, y) + ib_+(x, y) = ib(x, y) = b(x, iy) = b_+(x, iy) + ib_-(x, iy)$, d.h. $b_-(x, y) = -b_+(x, iy)$. Weiters gilt

$$b_+(ix, iy) = -b_-(ix, y) = \mp b_-(y, ix) = \pm b_+(y, i^2x) = -b_+(x, y).$$

Eine \mathbb{R} -lineare Bijektion, die sowohl b_+ als auch b_- erhält ist \mathbb{C} -linear, denn

$b_+(Tx, Tiy) = b_+(x, iy) = -b_-(x, y) = -b_-(Tx, Ty) = b_+(Tx, iTy) \Rightarrow Tiy = iTy$; und umgekehrt erhält jede Abbildung T , die b erhält auch den Real- und Imaginärteil, d.h.

$$O_{b_+}(E) \cap O_{b_-}(E) = O_{b_+}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = O_{b_-}(E) \cap L_{\mathbb{C}}(E) = U_b(E) \subseteq L_{\mathbb{C}}(E).$$

Ist insbesondere b die standard \mathbb{C} -bilineare symmetrische Form am \mathbb{C}^n , welche durch $b(z, w) := \sum_{i=1}^n z^i w^i$ gegeben ist, dann wird $U_b(E)$ auch als $O_{\mathbb{C}}(n)$ bezeichnet. Beachte, daß das Analogon zu $O(n, k)$ für $0 < k < n$ uninteressant, da isomorph zu $O_{\mathbb{C}}(n)$, ist. Real- und Imaginärteil haben wegen

$$b(z, w) = \sum_j (x^j y^j - x^{n+j} y^{n+j}) + i \sum_j (x^j y^{n+j} + x^{n+j} y^j)$$

folgende Darstellung

$$B_+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B_- = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sie haben beide Signatur n , denn

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot B_- \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = B_+$$

und somit ist

$$O_{\mathbb{C}}(n) = "O(2n, n)" \cap "O(2n, n)" = "O(2n, n)" \cap L_{\mathbb{C}}(n),$$

wobei die Gruppen auf der rechten Seite nur bis auf Koordinaten-Vertauschungen und Drehungen durch Standardformen beschrieben werden.

Ist schließlich b die standard \mathbb{C} -bilineare alternierende Form am \mathbb{C}^{2m} , welche durch

$$b(z, w) := \sum_{i=1}^m (z^i w^{m+i} - z^{m+i} w^i)$$

gegeben ist, dann wird $U_b(E)$ auch als $Sp_{\mathbb{C}}(2m)$ bezeichnet. Real- und Imaginärteil haben wegen

$$\begin{aligned} b(z, w) &= \sum_j (x^j y^{m+j} - x^{2m+j} y^{3m+j} - x^{m+j} y^j + x^{3m+j} y^{2m+j}) \\ &\quad + i \sum_j (x^j y^{3m+j} + x^{2m+j} y^{m+j} - x^{m+j} y^{2m+j} - x^{3m+j} y^j) \end{aligned}$$

folgende Darstellung

$$B_+ = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_- = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$Sp_{\mathbb{C}}(2m) = "Sp(4m)" \cap L_{\mathbb{C}}(2m),$$

wobei die Gruppe unter Anführungszeichen nur bis auf Koordinaten Vertauschungen – welche durch (0)(123) und (0)(132) geben sind – durch die Standardform beschrieben wird.

Beachte noch, daß

$$GL_{\mathbb{C}}(E) \subseteq GL^+(E) := \{T \in GL(E) : \det(T) > 0\}$$

$$O_{\mathbb{C}}(n) \subseteq SL(2n)$$

$$Sp_{\mathbb{C}}(2m) \subseteq SL_{\mathbb{C}}(2m),$$

denn $\det(T) = |\det_{\mathbb{C}}(T)|^2 \geq 0$ und $T \in O_{\mathbb{C}}(T) \Rightarrow T^t T = 1$, d.h. $\det_{\mathbb{C}}(T)^2 = 1$, also $\det(T) = |\pm 1|^2 = 1$. Da $Sp_{\mathbb{C}}(2n)$ von den Spiegelungen erzeugt wird, und diese positive komplexe Determinante haben, gilt auch die letzte Inklusion. Wieder hat $O_{\mathbb{C}}(n)$ zwei Zusammenhangskomponenten, wobei $SO_{\mathbb{C}}(n) := SL_{\mathbb{C}}(n) \cap O_{\mathbb{C}}(n)$, wohingegen $Sp_{\mathbb{C}}(2m)$ und $SL_{\mathbb{C}}(n)$ zusammenhängend sind.

14.16 Quaternionisch lineare Abbildungen

Man kann analoges auch für den Schiefkörper der Quaternionen machen. Als Vektorraum können wir ihn mit $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4 = \mathbb{C}^2$ identifizieren. Die Multiplikation läßt sich zum Beispiel für $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{H}$ so einführen:

$$(t, x) \cdot (s, y) := (ts - \langle x, y \rangle, ty + sx + x \times y).$$

Wir können eine Konjugation durch

$$\overline{(t, x)} := (t, -x)$$

definieren. Es gilt $\overline{p \cdot q} = \bar{q} \cdot \bar{p}$, weiters $\bar{q} \cdot q = |q|^2 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$ und somit ist $1/q = \bar{q}/|q|^2$. Es gelten dann alle Körper-Axiome bis auf das Kommutativgesetz der Multiplikation (siehe Aufgabe [72.65](#) auch für andere Beschreibungen). Wenn wir die Standardbasis von \mathbb{R}^3 mit i, j, k bezeichnen, dann ist $1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{H}$ eine Einheit und es gilt $i^2 = j^2 = k^2 = -1$; $ij = k = -ji$, $jk = i = -kj$, $ki = j = -ik$. Damit Matrizen mit quaternionischen Eintragungen aber quaternionisch linear auf Vektoren wirken, müssen wir quaternionische **rechts**-Vektorräume E betrachten. Mit $L_{\mathbb{H}}(E)$ bezeichnen wir den reellen Vektorraum aller $T : E \rightarrow E$, welche \mathbb{H} -linear sind. D.h. $L_{\mathbb{H}}(E) = \{T \in L(E) : T(xi) = (Tx)i, T(xj) = (Tx)j, T(xk) = (Tx)k\} = \{T \in L_{\mathbb{C}}(E) : T(xj) = (Tx)j\}$, wobei die komplexe Struktur auf E durch $\mathbb{C} \cong \mathbb{C} \times \{0\} \subseteq \mathbb{H}$ gegeben ist. Wir erhalten dann die Gruppen

$$GL_{\mathbb{H}}(E) := \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : T \text{ ist invertierbar}\} = GL(E) \cap L_{\mathbb{H}}(E)$$

$$SL_{\mathbb{H}}(E) := \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : \det_{\mathbb{R}}(T) = 1\} = SL(E) \cap L_{\mathbb{H}}(E)$$

Es sei also $(e_l)_{l=1}^n$ eine Basis des quaternionischen Rechtsvektorraums E , d.h. jedes $q \in E$ hat eine eindeutige Darstellung

$$q = \sum_{l=1}^n e_l q^l$$

und wenn wir $q^l =: z^l + jz^{n+l}$ mit $z^l, z^{n+l} \in \mathbb{C}$ darstellen, erhalten wir $q = \sum_{l=1}^n e_l z^l + (e_l j) z^{n+l} = \sum_{l=1}^{2n} e_l z^l$, wobei wir $e_{n+l} := e_l j$ gesetzt haben. D.h. die $(e_j)_{j=1}^{2n}$ sind eine komplexe Basis von E als komplexer Vektorraum. Man beachte, daß qj als quaternionische Koordinaten natürlich $q^l j$ hat, aber als komplexe Koordinaten

$$qj = \sum_{l=1}^n e_l (z^l + jz^{n+l})j = \sum_{l=1}^n e_l (j\bar{z}^l + j^2\bar{z}^{n+l}) = \sum_{l=1}^n e_l (-\bar{z}^{n+l}) + \sum_{l=1}^n (e_l j)\bar{z}^l,$$

d.h. die Koeffizienten von qj ergeben sich durch

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \bar{z}^1 \\ \vdots \\ \bar{z}^{2n} \end{pmatrix}.$$

Sei nun $A + Bj$ die Matrixdarstellung von T bezüglich dieser Basis mit komplexen Matrizen A und B , d.h. $T(e_l) = \sum_k e_k T_l^k = \sum_k e_k (A_l^k + B_l^k j)$ und somit

$$\begin{aligned} T(q) &= T\left(\sum_l e_l q^l\right) = \sum_l T(e_l)q^l = \sum_l \sum_k e_k T_l^k q^l \\ &= \sum_k e_k \left(\sum_l T_l^k q^l\right) \\ &= \sum_k e_k \left(\sum_l (A_l^k + B_l^k j) \cdot (z^l + jz^{n+l})\right) \\ &= \sum_k \left(e_k \sum_l (A_l^k z^l - B_l^k z^{n+l}) + e_k j \sum_l (\bar{B}_l^k z^l + \bar{A}_l^k z^{n+l})\right). \end{aligned}$$

Also hat T bezüglich der komplexen Basis $(e_1, \dots, e_n, e_1 j, \dots, e_n j)$ folgende Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix}.$$

Wenn wir nun die komplexe Basis zur reellen Basis

$$(e_1, \dots, e_n; e_1 j, \dots, e_n j; e_1 i, \dots, e_n i; e_1 j i, \dots, e_n j i)$$

ergänzen, dann hat T folgende Matrixdarstellung nach dem bereits oben gezeigten, wobei wir A und B in Real- und Imaginärteil zerlegen, d.h. $A = A_1 + iA_2$ und $B = B_1 + iB_2$:

$$\begin{pmatrix} A_1 & -B_1 & -A_2 & B_2 \\ B_1 & A_1 & B_2 & A_2 \\ A_2 & -B_2 & A_1 & -B_1 \\ -B_2 & -A_2 & B_1 & A_1 \end{pmatrix}$$

Wenn wir diese Basis noch auf die natürlichere Form

$$(e_1, \dots, e_n; e_1 i, \dots, e_n i; e_1 j, \dots, e_n j; e_1 k, \dots, e_n k)$$

bringen, dann hat T folgende Darstellung

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 & -B_1 & -B_2 \\ A_2 & A_1 & -B_2 & B_1 \\ B_1 & B_2 & A_1 & -A_2 \\ B_2 & -B_1 & A_2 & A_1 \end{pmatrix}, \text{ mittels Konjugation mit } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Wir wollen mit $L_{\mathbb{H}}(n)$ den Teilraum von $L_{\mathbb{C}}(2n)$ bzw. $L(4n)$ mit den so beschriebenen quaternionischen Strukturen auf \mathbb{C}^{2n} bzw. \mathbb{R}^{4n} bezeichnen.

Da \mathbb{H} ein schief-Körper ist, geht nun aber so manches schief. So gibt die übliche Formel für die Determinante nichts vernünftiges, da sie nicht \mathbb{H} -linear in den Spalten

ist. Wir behaupten als nächstes, daß die komplexe Determinante auf $L_{\mathbb{H}}(E)$ positiv ist, und somit $\det_{\mathbb{C}}(T) = +\sqrt{\det(T)}$ gilt. Dazu rechnen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \det_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} A & -B \\ \bar{B} & \bar{A} \end{pmatrix} &= \det_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} A_1 + iA_2 & -B_1 - iB_2 \\ B_1 - iB_2 & A_1 - iA_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix} + i^2 \det \begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ -B_2 & -A_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + i \det \begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix} - i \det \begin{pmatrix} A_1 & -B_2 \\ -B_1 & A_2 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} A_1 & -B_1 \\ B_1 & A_1 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A_2 & -B_2 \\ B_2 & A_2 \end{pmatrix} \\ &\quad + i \left(\det \begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix} - (-1)^2 \det \begin{pmatrix} A_2 & -B_1 \\ -B_2 & A_1 \end{pmatrix} \right) \\ &= \det_{\mathbb{R}}(A_1 + iB_1) + \det_{\mathbb{R}}(A_2 + iB_2) \geq 0. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} GL_{\mathbb{H}}(E) &\subseteq GL_{\mathbb{C}}^+(E) := \{T \in GL_{\mathbb{C}}(E) : \det_{\mathbb{C}}(T) > 0\} \\ GL_{\mathbb{H}}(E) &\cong \mathbb{R}^+ \times SL_{\mathbb{H}}(E) \\ SL_{\mathbb{H}}(E) &= \{T \in L_{\mathbb{H}}(E) : \det_{\mathbb{C}}(T) = 1\} \subseteq SL_{\mathbb{C}}(E), \end{aligned}$$

wobei der Isomorphismus wie im reellen Fall durch $T \mapsto (\det(T)^{1/n}, \det(T)^{-1/n} \cdot T)$ gegeben ist.

14.17 Quaternionische Formen, $Q(n, k)$, $Q_-(n)$

Sei schließlich $q : E \times E \rightarrow \mathbb{H}$ eine Form die quaternionisch linear in der zweiten Variable ist und konjugiert (schief)symmetrisch, nicht degeneriert. Dann bezeichnen wir mit

$$Q_q(E) := \{T \in GL_{\mathbb{H}}(E) : q(Tx, Ty) = q(x, y) \forall x, y \in E\}.$$

Wie zuvor zeigt man, daß dies eine Mannigfaltigkeit ist. Es ist also $q(x, y\lambda) = q(x, y)\lambda$, $\bar{q}(y, x) = \pm q(x, y)$ und damit $q(x\lambda, y) = \pm q(y, x\lambda) = \pm q(y, x)\lambda = \lambda q(x, y)$.

Wir setzen $s(x, y) := \Re q(x, y) = \frac{q(x, y) + \bar{q}(x, y)}{2} = \frac{q(x, y) \pm q(y, x)}{2}$. Dann ist s (schief)-symmetrisch (2. Darstellung), \mathbb{R} -wertig (1. Darstellung) und \mathbb{R} -linear. Und für alle $\lambda \in S^3 \subseteq \mathbb{H}$ gilt

$$s(x\lambda, y\lambda) = \frac{\bar{\lambda}q(x, y)\lambda \pm \bar{\lambda}q(y, x)\lambda}{2} = \bar{\lambda}s(x, y)\lambda = \bar{\lambda}\lambda s(x, y) = s(x, y),$$

da $s(x, y) \in \mathbb{R}$ mit allen Quaternionen vertauscht.

Es gilt $q(x, y) = s(x, y) + i s(xi, y) + j s(xj, y) + k s(xk, y)$, denn

$$\begin{aligned} s(x, y) + i s(xi, y) + j s(xj, y) + k s(xk, y) &= \\ &= \frac{1}{2} \left((q(x, y) + i q(xi, y) + j q(xj, y) + k q(xk, y)) \right. \\ &\quad \left. \pm (q(y, x) + i q(y, xi) + j q(y, xj) + k q(y, xk)) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(4q(x, y) \pm (q(y, x) + i q(y, x) i + j q(y, x) j + k q(y, x) k) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(4q(x, y) \mp 2\bar{q}(y, x) \right) \\ &= q(x, y), \end{aligned}$$

wobei wir für die vorletzte Zeile $q(x, y) = a + ib + jc + kd$ setzen, und dann alles ausmultiplizieren.

Man beachte auch, daß für $\lambda \in \{i, j, k\}$ die Form $(x, y) \mapsto s(x\lambda, y)$ \mathbb{R} -bilinear ist und $s(y\lambda, x) = \pm s(x, y\lambda) = \mp s(x\lambda^2, y\lambda) = \mp s(x\lambda, y)$ erfüllt, d.h. ebenfalls (schief)symmetrisch ist.

Umgekehrt sei $s : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ \mathbb{R} -bilinear und (schief-)symmetrisch und es existieren s -Isometrien I und J mit $I^2 = -1 = J^2$ und $IJ + JI = 0$. Dann können wir E zu einem quaternionischen Rechtsvektorraum machen durch $x \cdot (a + ib + jc + kd) = xa + I(x)b + J(x)c + JI(x)d$ und

$$q(x, y) := s(x, y) + i s(Ix, y) + j s(Jx, y) + k s(JIx, y)$$

definiert eine konjugiert (schief-)symmetrische nicht-degenerierte Form die \mathbb{H} -linear in der zweiten Variable ist. Offensichtlich ist jedes T , welches q und damit auch s , $s(I-, -)$, $s(J-, -)$, $s(JI-, -)$ invariant läßt, automatisch \mathbb{H} -linear, denn $s(ITx, Ty) = s(Ix, y) = s(TIx, Ty)$ und somit $ITx = TIx$ und analog für J . Es gilt also $Q_q(E) = O_s(E) \cap GL_{\mathbb{H}}(E)$.

Falls nun q eine Standardform ist, d.h. eine der folgenden Formen:

$$\begin{aligned} q(z, w) &= \sum_{l=1}^n \bar{z}^l w^l \\ q(z, w) &= \sum_{l>k} \bar{z}^l w^l - \sum_{l\leq k} \bar{z}^l w^l \\ q(z, w) &= \sum_{l=1}^n \bar{z}^l i w^l \end{aligned}$$

dann werden die entsprechenden QUATERNIONISCHEN GRUPPEN mit $Q(n) = U_{\mathbb{H}}(n)$, $Q(n, k) = U_{\mathbb{H}}(n, k)$ sowie $Q_-(m) = U_{\alpha}(m) = Sp_{\mathbb{H}}(m)$ bezeichnet. Wir erhalten für s bezüglich der reellen Basis $(e_1, \dots; e_1 i, \dots; e_1 j, \dots; e_1 k, \dots)$ und der entsprechenden reellen Koordinaten

$$\begin{aligned} (x^1, \dots; x^{n+1}, \dots, x^{2n+1}, \dots; x^{3n+1}, \dots) &\text{ für } z \text{ und} \\ (y^1, \dots; y^{n+1}, \dots, y^{2n+1}, \dots; y^{3n+1}, \dots) &\text{ für } w \end{aligned}$$

wobei $z^l = x^l + ix^{n+l} + jx^{2n+l} + kx^{3n+l}$ und $w^l = y^l + iy^{n+l} + jy^{2n+l} + ky^{3n+l}$:

$$\begin{aligned} s(x, y) &= \sum_l x^l y^l + x^{n+l} y^{n+l} + x^{2n+l} y^{2n+l} + x^{3n+l} y^{3n+l} \\ s(x, y) &= \sum_{l>k} x^l y^l + x^{n+l} y^{n+l} + x^{2n+l} y^{2n+l} + x^{3n+l} y^{3n+l} \\ &\quad - \sum_{l\leq k} x^l y^l + x^{n+l} y^{n+l} + x^{2n+l} y^{2n+l} + x^{3n+l} y^{3n+l} \\ s(x, y) &= \sum_l -x^l y^{n+l} + x^{n+l} y^l - x^{2n+l} y^{3n+l} + x^{3n+l} y^{2n+l} \end{aligned}$$

D.h. die Matrizendarstellungen sind

$$\begin{pmatrix} 1_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1_k \end{pmatrix} \text{ mit } 1_k \text{ wie zuvor;}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & J \end{pmatrix} \text{ mit } J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} Q(n) &= O(4n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n) \\ Q(n, k) &= "O(4n, 4k)" \cap L_{\mathbb{H}}(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n) \\ Q_-(n) &= "Sp(4n)" \cap L_{\mathbb{H}}(n) \subseteq SL_{\mathbb{H}}(n) \end{aligned}$$

Wir können aber auch je zwei Komponenten zusammenfassen. Wie wir bereits für $U(n)$ gezeigt haben, ist $h(x, y) := s(x, y) + i s(xi, y)$ eine (schief-)hermitesche Form und $j q(xj, y) + k q(xk, y) = j (q(xj, y) + i q(xji, y)) = j h(xj, y)$, wobei $(x, y) \mapsto h(xj, y)$ (symmetrisch) schiefsymmetrisch und komplex bilinear ist, denn $h(yj, x) = s(yj, x) + i s(yji, x) = \pm s(xj, y) \pm i s(xji, y) = \pm h(xj, y)$. Also hat q eine Zerlegung $q(x, y) = h(x, y) + j h(xj, y)$ in (schief-)hermiteschen und (symmetrischen) schiefsymmetrischen \mathbb{C} -bilinearen Teil. Führt man das wieder für die Standardformen durch, so erhalten wir

$$\begin{aligned} q(z, w) &= \sum_l (\bar{z}^l - \bar{z}^{n+l} j) (w^l + j w^{n+l}) \\ &= \sum_l (\bar{z}^l w^l + \bar{z}^{n+l} w^{n+l}) + j \sum_l (z^l w^{n+l} - z^{n+l} w^l) \\ q(z, w) &= \sum_{l>k} (\bar{z}^l - \bar{z}^{n+l} j) (w^l + j w^{n+l}) - \sum_{l \leq k} (\bar{z}^l - \bar{z}^{n+l} j) (w^l + j w^{n+l}) \\ &= \sum_{l>k} (\bar{z}^l w^l + \bar{z}^{n+l} w^{n+l}) - \sum_{l \leq k} (\bar{z}^l w^l + \bar{z}^{n+l} w^{n+l}) \\ &\quad + j \sum_{l>k} (z^l w^{n+l} - z^{n+l} w^l) - j \sum_{l \leq k} (z^l w^{n+l} - z^{n+l} w^l) \\ q(z, w) &= \sum_l (\bar{z}^l - \bar{z}^{n+l} j) i (w^l + j w^{n+l}) \\ &= \sum_l (\bar{z}^l i w^l + \bar{z}^{n+l} (-j) i w^l - \bar{z}^{n+l} (-j) i j w^{n+l} - \bar{z}^l i j w^{n+l}) \\ &= \sum_l i (\bar{z}^l w^l - \bar{z}^{n+l} w^{n+l}) - j i \sum_l (z^{n+l} w^l + z^l w^{n+l}) \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} Q(n) &= U(2n) \cap Sp_{\mathbb{C}}(2n) \\ &= U(2n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) = Sp_{\mathbb{C}}(2n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(n, k) &= "U(2n, 2k)" \cap "Sp_{\mathbb{C}}(2n)" \\ &= "U(2n, 2k)" \cap L_{\mathbb{H}}(n) = "Sp_{\mathbb{C}}(2n)" \cap L_{\mathbb{H}}(n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_-(n) &= U(2n, n) \cap "O_{\mathbb{C}}(2n)" \\ &= U(2n, n) \cap L_{\mathbb{H}}(n) = "O_{\mathbb{C}}(2n)" \cap L_{\mathbb{H}}(n) \end{aligned}$$

14.18 Übersicht

Gruppe	Dim	kompakt	komplex	Kurzbeschreibung
$GL(n)$	n^2	–	–	$\det_{\mathbb{R}} \neq 0$
$SL(n)$	$n^2 - 1$	–	–	$\det_{\mathbb{R}} = 1$
$SO(n)$	$n(n-1)/2$	+	–	sym, lin, pos-def
$SO(n, k)$	$n(n-1)/2$	–	–	sym, lin, def
$Sp(n)$ ¹⁾	$n(n+1)/2$	–	–	alt, lin, def
$U(n)$	n^2	+	–	konj-sym, pos-def
$U(n, k)$	n^2	–	–	konj-sym, def
$SU(n)$	$n^2 - 1$	+	–	konj-sym, pos-def, $\det_{\mathbb{C}} = 1$
$SU(n, k)$	$n^2 - 1$	–	–	konj-sym, def, $\det_{\mathbb{C}} = 1$
$GL_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2$	–	+	\mathbb{C} -lin, $\det_{\mathbb{C}} \neq 0$
$SL_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2 - 2$	–	+	\mathbb{C} -lin, $\det_{\mathbb{C}} = 1$
$O_{\mathbb{C}}(n)$	$n(n-1)$	–	+	sym, \mathbb{C} -lin, def
$Sp_{\mathbb{C}}(n)$ ¹⁾	$n(n+1)$	–	+	alt, \mathbb{C} -lin, def
$Q(n)$	$n(2n+1)$	+	–	konj-sym, \mathbb{H} -lin, pos-def
$Q(n, k)$	$n(2n+1)$	–	–	konj-sym, \mathbb{H} -lin, def
$Q_-(n)$	$n(2n-1)$	–	–	schief-konj-sym, \mathbb{H} -lin, def
$GL_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2$	–	–	\mathbb{H} -lin, $\det_{\mathbb{R}} \neq 0$
$SL_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2 - 1$	–	–	\mathbb{H} -lin, $\det_{\mathbb{R}} = 1$

¹⁾ In diesen Fällen ist $n = 2m$ gerade.

14.19 Niedere Dimensionen

Gruppe	dim	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$SL(n)$	$n^2 - 1$	{1}	$S^1 \times \mathbb{C}$	dim = 8
$SO(n)$	$n(n-1)/2$	{1}	S^1	$PSU(2)$
$SO(n, 1)$	$n(n-1)/2$	–	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$PSL(2)$
$Sp(n)$	$n(n+1)/2$	–	$S^1 \times \mathbb{C}$	–
$SU(n)$	$n^2 - 1$	{1}	S^3	dim = 8
$SU(n, 1)$	$n^2 - 1$	–	$S^1 \times \mathbb{C}$	dim = 8
$SL_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2 - 2$	{1}	dim = 6	dim = 16
$SO_{\mathbb{C}}(n)$	$n(n-1)$	{1}	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$	dim = 6
$Sp_{\mathbb{C}}(n)$	$n(n+1)$	–	dim = 6	–
$Q(n)$	$n(2n+1)$	S^3	dim = 10	dim = 21
$Q(n, 1)$	$n(2n+1)$	–	dim = 10	dim = 21
$Q_-(n)$	$n(2n-1)$	S^1	dim = 6	dim = 15
$SL_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2 - 1$	S^3	dim = 15	dim = 35

dim= 0:

Offensichtlich ist

$$\mathbf{SL}(\mathbf{1}) = \{t \in \mathbb{R} : t = 1\}, \mathbf{SO}(\mathbf{1}) = \{1\} \subseteq \mathbf{SL}(\mathbf{1}), \mathbf{SU}(\mathbf{1}) = \{z \in \mathbb{C} : z = 1\}, \\ \mathbf{SL}_{\mathbb{C}}(\mathbf{1}) = \{z \in \mathbb{C} : z = 1\}, \mathbf{SO}_{\mathbb{C}}(\mathbf{1}) = \{1\} \subseteq \mathbf{SL}_{\mathbb{C}}(\mathbf{1})$$

dim= 1:

$$\mathbf{U}(\mathbf{1}) = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z}z = 1\} = S^1 \subseteq \mathbb{C}.$$

$\mathbf{Q}_-(\mathbf{1}) = S^1$, denn $\bar{z}iw = \bar{\lambda}zi\lambda w = \bar{z}\bar{\lambda}i\lambda w$, genau dann, wenn $i = \bar{\lambda}i\lambda$, oder $|\lambda| = 1$ und $\lambda i = i\lambda$, i.e. $\lambda = a + ib$ mit $a^2 + b^2 = 1$.

Die definierende Gleichung der im folgenden gesuchten Untergruppen von $\mathbf{SL}_{\mathbb{C}}(2)$ ist neben $\det = 1$ durch $b(Tx, Ty) = b(x, y)$ gegeben. Dafür genügt es $(x, y) := (e_1, e_1)$, $(x, y) := (e_1, e_2)$ und $(x, y) := (e_2, e_2)$ einzusetzen, oder wenn $b(x, y) = \langle Bx, y \rangle$ ist, die Matrixgleichung $T^*BT = B$ zu lösen. Da $T \in \mathbf{SL}_{\mathbb{C}}(2)$ liegt, ist $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ invertierbar mit inverser Matrix $T^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$. Also läßt sich die Matrixgleichung auch als $BT = (T^*)^{-1}B$ schreiben, und liefert uns im Folgenden die nötigen Bedingungen an die Koeffizienten a, b, c und d .

Die Elemente der Abelsch'en unter den folgenden Gruppen G werden wir gemeinsam diagonalisieren. D.h. für jedes $T \in G$ werden wir die Eigenwerte λ_{\pm}^T und zugehörige (von T unabhängige) Eigenvektoren e_{\pm} bestimmen. Wenn Λ^T die Diagonalmatrix mit Eintragungen λ_+^T und λ_-^T ist, und U die Matrix mit Spalten e_+ und e_- ist, d.h. $U(e_1) = e_+$ und $U(e_2) = e_-$, dann ist $T \cdot U = U \cdot \Lambda^T$, d.h. $U^{-1} \cdot T \cdot U = \Lambda^T$. Die Konjugation mit U bildet also die Gruppe G isomorph auf eine Gruppe von Diagonalmatrizen in $\mathbf{SL}_{\mathbb{C}}(2)$ ab.

$$\mathbf{SO}(\mathbf{2}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix} : \lambda \in S^1 \right\} \cong S^1, \\ \text{denn} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbf{SO}(2) \Leftrightarrow \begin{cases} (1) & a^2 + c^2 = 1 & (b(e_1, e_1) = 1) \\ (2) & b^2 + d^2 = 1 & (b(e_2, e_2) = 1) \\ (3) & ab + cd = 0 & (b(e_1, e_2) = 0) \\ (4) & ad - bc = 1 & (\det = 1) \end{cases}$$

Dann folgt

$$d \cdot (3) - b \cdot (4) : \quad -b = c(d^2 + b^2) = c, \\ b \cdot (3) + d \cdot (4) : \quad d = a(b^2 + d^2) = a$$

und somit $a^2 + b^2 = 1$. Kürzer folgt das alles auch aus der Matrixgleichung $BT = (T^t)^{-1}B$, mit $B = \text{id}$.

Die Eigenwerte von T sind $\lambda_{\pm} = a \pm ib$ mit zugehörigen Eigenvektoren $e_{\pm} = (1, \pm i)$. Also bildet die Konjugation mit $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$ die Gruppe $\mathbf{SO}(2)$ isomorph auf die Diagonalmatrizen mit konjugiert komplexen Eintragungen vom Betrag 1 ab.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + ib & 0 \\ 0 & a - ib \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{SO}(\mathbf{2}, \mathbf{1}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 - b^2 = 1 \right\} \cong \\ \cong \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1/\lambda \end{pmatrix} : \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\} \cong \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

Analog wie bei der $SO(2)$ folgt die erste Gleichung aus der Matrizengleichung mit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Der erste Isomorphismus ist dann analog durch Konjugation mit der Matrix $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ der Eigenvektoren zu den Eigenwerten $\lambda_{\pm} := a \pm b$ gegeben. Konjugieren mit U liefert

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & 0 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

mit $(a+b)(a-b) = 1$.

dim= 2

$GL_{\mathbb{C}}(1) = \mathbb{C}_*$.

$$SO_{\mathbb{C}}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix} : a \in \mathbb{C}_* \right\} \cong \mathbb{C}_*,$$

denn wie für $SO(2)$ erhalten wir die Gleichheit aus der Matrizengleichung und den Isomorphismus durch Konjugation mit $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix}$. Dann ist

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$$

und $(a+ib)(a-ib) = 1$.

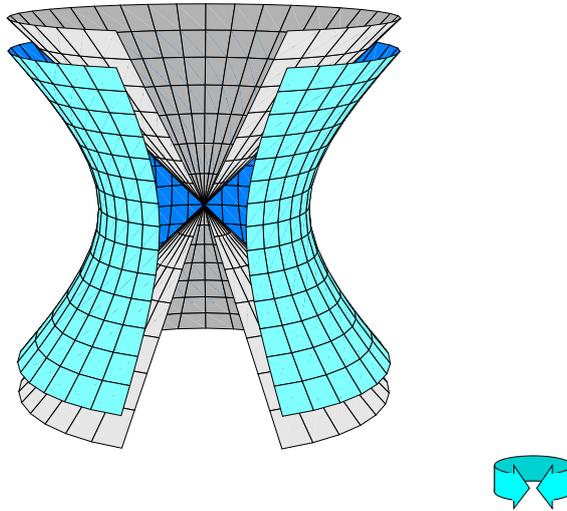
dim= 3

$$\begin{aligned} SL(2) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\} \\ &\cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\}, \end{aligned}$$

wobei der Isomorphismus durch Konjugation mit $U := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ gegeben ist, siehe [34.5](#) und [72.62](#), denn

$$\begin{aligned} U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \beta_1 + i\beta_2 \\ \beta_1 - i\beta_2 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} \cdot U &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ -\alpha_2 - \beta_2 & \alpha_1 - \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{a+d}{2} \\ \alpha_2 = \frac{b-c}{2} \\ \beta_1 = \frac{a-d}{2} \\ \beta_2 = -\frac{b+c}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Beachte daß die Quadrik $\{(a, b) \in \mathbb{C}^2 : |a|^2 - |b|^2 = 1\}$ vermöge $(a, b) \mapsto (\frac{a}{|a|}, b) = (\frac{a}{\sqrt{1+|b|^2}}, b)$ diffeomorph zum "Zylinder" $S^1 \times \mathbb{C}$ ist. Allerdings sieht die induzierte Gruppenstruktur auf $S^1 \times \mathbb{C}$ sehr kompliziert aus.



$$Sp(2) = SL(2),$$

$$\begin{aligned} \text{denn } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in Sp(2) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & cb - ad \\ ad - bc & 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow ad - bc = 1 \end{aligned}$$

$$SU(2,1) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ \bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 - |b|^2 = 1 \right\} \cong SL(2),$$

denn die Gleichheit folgt analog wie bei der $SO(2,1)$ mit $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ und dem hermiteschen Produkt. Der Isomorphismus ist durch Konjugation mit $U := \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & i \end{pmatrix}$ geben, siehe [34.5](#) und [72.62](#), denn

$$\begin{aligned} U^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 + i\alpha_2 & \beta_1 + i\beta_2 \\ \beta_1 - i\beta_2 & \alpha_1 - i\alpha_2 \end{pmatrix} \cdot U &= \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_2 - \beta_2 \\ -\alpha_2 - \beta_2 & \alpha_1 - \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{a+d}{2} \\ \alpha_2 = \frac{b-c}{2} \\ \beta_1 = \frac{a-d}{2} \\ \beta_2 = -\frac{b+c}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} \cong S^3$$

wobei die Gleichung wieder wie für die $SO(2)$ folgt und der Isomorphismus durch die Darstellung der Quaternionen \mathbb{H} als Matrizen in $GL_{\mathbb{C}}(2)$ gegeben ist.

$Q(\mathbf{1}) = S^3$, denn $T \in Q(\mathbf{1})$ genau dann, wenn $T \in GL_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}) = \mathbb{H}$ mit $\bar{T}T = 1$, und

$$\begin{aligned} \overline{(a + ib + jc + kd)} \cdot (a + ib + jc + kd) &= (a - ib - jc - kd) \cdot (a + ib + jc + kd) \\ &= (a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + i0 + j0 + k0. \end{aligned}$$

$SL_{\mathbb{H}}(\mathbf{1}) = S^3$, denn

$$\begin{aligned} (t + ix + jy + kz) \cdot (a + ib + jc + kd) &= (ta - xb - yc - zd) \\ &\quad + i(xa + tb + yd - zc) \\ &\quad + j(tc + ya + kb - xd) \\ &\quad + k(za + td + xc - yb) \end{aligned}$$

also wirkt eine Quaternion $(a + ib + jc + kd)$ als folgende Matrix auf einem Vektor (t, x, y, z) :

$$\begin{pmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & d & -c \\ c & -d & a & b \\ d & c & -b & a \end{pmatrix}$$

und hat reelle Determinante $(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2$.

$SO(\mathbf{3}) = PSU(2) = PS^3$, wobei $PG := G/Z(G)$ für jede Gruppe G und $Z(G) := \{g \in G : \forall h \in G : g \cdot h = h \cdot g\}$ das Zentrum von G bezeichnet. Jede Einheitsquaternion $q = a + ib + jc + kd$ wirkt orthogonal auf $\mathbb{R}^4 = \mathbb{H}$ durch Konjugation und läßt die Zerlegung $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ invariant, denn $q^{-1} \cdot 1 \cdot q = \frac{\bar{q}}{|q|^2} \cdot q = 1$ und

$$\begin{aligned} |q^{-1} \cdot p \cdot q|^2 &= \overline{(q^{-1} \cdot p \cdot q)} \cdot (q^{-1} \cdot p \cdot q) = \bar{q} \cdot \bar{p} \cdot \bar{\bar{q}} \cdot q^{-1} \cdot p \cdot q \\ &= q^{-1} \cdot |p|^2 \cdot q = |p|^2 \end{aligned}$$

also wirkt sie als Drehung am $\mathbb{R}^3 \cong \{0\} \times \mathbb{R}^3 \subseteq \mathbb{H}$. Der Kern dieses Gruppenhomomorphismus $\mathbb{H} \supseteq S^3 \rightarrow SO(\mathbf{3})$ ist offensichtlich $Z(S^3) = Z(\mathbb{H}) \cap S^3 = \{\pm 1\}$. Somit ist die Abbildung surjektiv, da $SO(\mathbf{3})$ zusammenhängend ist, also $SO(\mathbf{3}) \cong S^3/Z(S^3) = PS^3$.

Geometrisch haben wir das in [1.3](#) auch so gesehen: Eine Drehung ist durch Drehachse und Drehwinkel festgelegt, also durch einen Vektor $u \in D^3$ welcher der Drehung mit der Achse $u/|u| \in S^2$ und dem Drehwinkel $\pi|u| \in [-\pi, \pi]/ \sim = S^1$ entspricht. Also erhalten wir eine 2-blättrige Überlagerung $S^3 \rightarrow S^3/ \sim = \mathbb{D}^3/ \sim \cong SO(\mathbf{3})$ auch aus folgendem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} S^2 \times [-1, 1] & \xrightarrow{\text{id} \times e^{i\pi \cdot}} & S^2 \times S^1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{D}^3 & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{D}^3/ \sim \twoheadrightarrow SO(\mathbf{3}), \end{array}$$

wobei die linke vertikale Abbildung durch $(x, t) \mapsto tx$, die rechte durch $(v, \varphi) \mapsto$ "Drehung um v mit Winkel φ " gegeben sind und \sim die von $v \sim -v$ erzeugte Äquivalenzrelation ist, siehe dazu auch [24.40](#). Beachte, daß das Zentrum $Z(SU(2))$ von $SU(2)$ durch $\{\pm \text{id}\}$ gegeben ist und somit $PSU(2) := SU(2)/Z(SU(2)) = S^3/\mathbb{Z}_2$ ist.

$SO^+(\mathbf{3}, \mathbf{1}) = PSL(2)$ wird analog wie für $SO(\mathbf{3}) = PS^3$ gezeigt. Für Details dazu siehe ebenso [24.40](#). Beachte, daß das Zentrum $Z(SL(2))$ von $SL(2)$ durch $\{\pm \text{id}\}$ gegeben ist und somit $PSL(2) := SL(2)/Z(SL(2))$ ist.

15. Glatte Abbildungen

Um verschiedene Mannigfaltigkeiten miteinander in Beziehung zu setzen, benötigen wir natürlich auch den Begriff der glatten Abbildungen zwischen ihnen und den geben wir jetzt.

15.1 Definition (glatte Abbildung)

Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung zwischen zwei glatten Mannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^m$ und $N \subseteq \mathbb{R}^n$.

Die Abbildung f heißt GLATT (C^∞) : \Leftrightarrow lokal läßt sie sich zu einer glatten Abbildung $\tilde{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ erweitern, d.h.

$$\forall p \in M \exists U(p) \underset{\text{off.}}{\subseteq} \mathbb{R}^m \exists \tilde{f} : U(p) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ glatt mit } \tilde{f}|_{M \cap U(p)} = f|_{M \cap U(p)}.$$

Die konstante Abbildung, die Identität und die Zusammensetzung glatter Abbildungen sind glatt: Seien $f : M_1 \rightarrow M_2$ sowie $g : M_2 \rightarrow M_3$ glatt und $\tilde{f} : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n_2}$ bzw. $\tilde{g} : U_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_3}$ lokale, glatte Fortsetzungen, dann ist $(g \circ f) = \tilde{g} \circ \tilde{f} : \tilde{f}^{-1}(U_2) \rightarrow \mathbb{R}^{n_3}$ eine lokale, glatte Fortsetzung von $g \circ f$, also ist $g \circ f$ glatt.

15.2 Beispiele glatter Abbildungen.

1. Für die klassischen Liegruppen G aus Abschnitt [14](#) ist die Multiplikation $\text{mult} : G \times G \rightarrow G$ glatt, denn für die offene Teilmenge $GL(E)$ von $L(E, E)$ ist dies die Einschränkung der bilinearen Abbildung $(T, S) \mapsto TS$, und die anderen klassischen Liegruppen G sind Teilmannigfaltigkeiten in $GL(E)$. Gleiches gilt für die Inversion $\text{inv} : G \rightarrow G$, denn für $GL(E)$ ist sie die Lösung der impliziten Gleichung $\text{mult}(A, \text{inv}(A)) = \text{id}$, auf die der inverse Funktionensatz anwendbar ist. Die Ableitung ist dabei durch

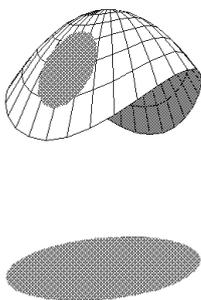
$$\text{inv}'(A)(B) = -A^{-1}BA^{-1}$$

gegeben.

2. Orthogonales-Komplement-nehmen $\perp : G(k, n) \rightarrow G(n - k, n)$ ist glatt als Einschränkung der affinen, durch $P \mapsto 1 - P$ gegebenen Abbildung $L(n, n) \rightarrow L(n, n)$ auf $G(k, n) \subseteq L(n, n)$.
3. Die Bild-Abbildung $\text{Bild} : V(k, n) \rightarrow G(k, n)$ ist glatt, denn als Abbildung von $V(k, n) := \{T \in L(k, n) : T^t T = \text{id}\} \rightarrow G(k, n) \subset L_k(n, n)$ ist sie durch $T \mapsto TT^t$ gegeben: Offensichtlich ist TT^t die ortho-Projektion $((TT^t)^t(TT^t) = T^{tt}T^tTT^t = T \text{id} T^t = TT^t)$ mit $\text{Bild} T \supseteq \text{Bild} TT^t \supseteq \text{Bild} TT^t T = \text{Bild} T$.

15.3 Lemma (Karten sind Diffeomorphismen).

Sei $\varphi : U \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung der Mannigfaltigkeit M . Dann ist φ lokal ein Diffeomorphismus.



Beweis. Nach Voraussetzung ist φ glatt. Im Beweis der Richtung $(1 \Rightarrow 4)$ von Satz 10.4 haben wir φ zu einem lokalen Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \rightarrow \mathbb{R}^n$ erweitert. Aus der Bijektivität von $\varphi : U \rightarrow M \cap V$ (ist Voraussetzung) folgt, daß

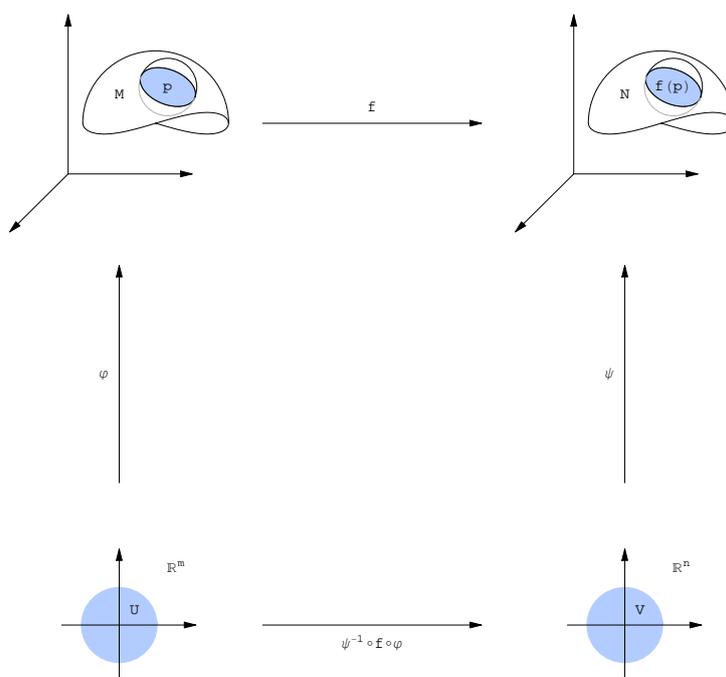
$$\varphi^{-1} : M \cap V \rightarrow U$$

als Abbildung existiert. Sie ist sogar glatt, denn lokal läßt sie sich zu der glatten Abbildung Φ^{-1} erweitern. \square

15.4 Lemma (Glatte Abbildungen).

Für eine stetige Abbildung $f : M \rightarrow N$ zwischen zwei Mannigfaltigkeiten M und N sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist glatt.
2. Für jede lokale Parametrisierung φ von M und jede lokale Parametrisierung ψ von N gilt: Die Abbildung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ ist glatt wo sie definiert ist.
3. Für jedes $p \in M$ existiert eine lokale Parametrisierung φ von M um p und existiert eine lokale Parametrisierung ψ um $f(p)$, sodaß die Kartendarstellung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ glatt ist.



Beweis. (1 \Rightarrow 2) Seien nun $\varphi : U_1 \rightarrow V_1 \cap M$ und $\psi : U_2 \rightarrow V_2 \cap N$ lokale Parametrisierungen. Die Abbildung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ ist genau für jene $x \in U_1$ definiert, welche $f(\varphi(x)) \in V_2$ erfüllen. Das ist aber die offene Menge $U_1 \cap (f \circ \varphi)^{-1}(V_2)$. Obige Abbildung ist glatt, da sie nur aus glatten Funktionen zusammengesetzt ist.

(2 \Rightarrow 3) Wenn die Aussage für alle lokalen Parametrisierungen gilt, dann erst recht für eine spezielle.

(3 \Rightarrow 1) Zu zeigen ist, daß f glatt ist. Dies ist eine lokale Eigenschaft, und lokal läßt sich f folgendermaßen als Komposition von glatten Abbildungen darstellen:

$$f = \psi \circ \underbrace{(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)}_{\text{glatt nach (3)}} \circ \varphi^{-1}. \quad \square$$

16. Abstrakte Mannigfaltigkeiten

Unsere vorläufige Definition einer Mannigfaltigkeit ist nicht zufriedenstellend: Bisher verwendeten wir ganz wesentlich die Eigenschaften des umgebenden Raumes, der mit dem Objekt, das wir beschreiben wollen, begrifflich nichts zu tun hat.

In diesen Abschnitt wollen wir nun den umgebenden Euklidischen Raum loswerden, und kommen so zum Begriff der abstrakten Mannigfaltigkeit.

Die Relevanz dieses Ansatzes zeigen bereits folgende

16.1 Beispiele

(Siehe auch Abschnitt [9](#)).

1. Das Möbiusband entsteht “topologisch”, wenn man zwei Seiten eines Rechtecks miteinander identifiziert und das Ganze mit der Quotiententopologie versieht. Denkt man sich dieses Gebilde im \mathbb{R}^3 realisiert und zerschneidet es längs der Mittellinie, so entsteht bekanntlich ein mehrfach verdrehtes Band. Führen wir dasselbe aber “topologisch” durch, entsteht ein einfaches, nicht verdrehtes Band. Die beiden Figuren lassen sich aber im \mathbb{R}^3 nicht stetig ineinander überführen, das geht erst im \mathbb{R}^4 .
2. Der “Klein’schen Flasche” oder vor allem der “projektiven Ebene” sieht man gar nicht ohne weiteres an, in welchen \mathbb{R}^n sie “passen”, in den \mathbb{R}^3 jedenfalls nicht.

Wir erweitern nun die Definition von Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n zu einer solchen für abstrakte Mannigfaltigkeiten.

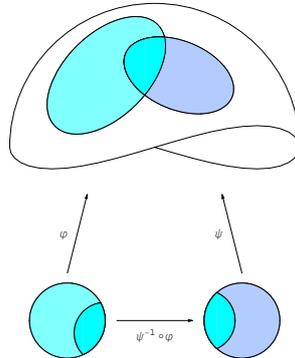
16.2 Definition (Abstrakte Mannigfaltigkeit)

Sei X eine beliebige Menge. Eine KARTE (oder auch LOKALE PARAMETRISIERUNG) von X ist eine injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow X$, definiert auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$.

Zwei Karten φ_1, φ_2 heißen C^∞ -KOMPATIBEL oder VERTRÄGLICH, falls der KARTENWECHSEL

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(\varphi_2(U_2)) \rightarrow \varphi_2^{-1}(\varphi_1(U_1))$$

ein Diffeomorphismus offener Mengen ist. Die Idee dahinter ist, daß jede Karte φ_1 glatt sein soll, und nach [15.4](#) sollte dazu $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ dort wo es definiert ist glatt sein.



Ein C^∞ -ATLAS einer Menge X ist eine Familie C^∞ -kompatibler Karten, deren Bilder ganz X überdecken. Zwei C^∞ -Atlanten heißen ÄQUIVALENT, wenn alle ihre Karten miteinander C^∞ -kompatibel sind.

Eine ABSTRAKTE C^∞ -MANNIGFALTIGKEIT ist eine Menge zusammen mit einer Äquivalenzklasse glatter Atlanten.

16.3 Definition (Topologie einer Mannigfaltigkeit)

Auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit erhält man eine TOPOLOGIE, indem man definiert:

$U \subseteq X$ heißt offen $:\Leftrightarrow \varphi^{-1}(U)$ ist offen im \mathbb{R}^m für jede Karte des Atlas.

Die Karten $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M$ werden dann zu Homöomorphismen. Denn stetig sind sie nach Konstruktion der Topologie auf M und falls $U_1 \subset U$ offen ist, so ist es auch $\varphi(U_1) \subset M$ denn $\psi^{-1}(\varphi(U_1)) = (\varphi^{-1} \circ \psi)^{-1}(U_1)$ ist das Bild unter dem Homöomorphismus $\varphi^{-1} \circ \psi$.

Man verlangt üblicherweise auch noch, daß diese Topologie HAUSDORFF ist, d.h.: je zwei disjunkte Punkte lassen sich durch disjunkte offene Umgebungen trennen.

Die folgende Proposition zeigt, daß diese Definition wirklich eine Erweiterung von Definition [10.4](#) ist.

16.4 Proposition.

Jede C^∞ -Teilmannigfaltigkeit M eines \mathbb{R}^n ist in natürlicher Weise eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und ihre Topologie ist die Teilraumtopologie.

Beweis. Einen Atlas auf M erhält man aus allen lokalen injektiven Parametrisierungen mittels [10.4](#). Die Kartenwechsel sind dann glatt nach [15.3](#) und die Topologie von M ist die induzierte Topologie des umgebenden \mathbb{R}^n , da die Parametrisierungen lokal Einbettungen sind, siehe den Beweis von [10.4](#). \square

16.5 Proposition (Maximaler Atlas).

Sei \mathcal{A} ein C^∞ -Atlas für M , dann ist

$$\mathcal{A}_{\max} := \{\varphi : \varphi \text{ Karte für } M \text{ und } \varphi \text{ verträglich mit allen } \psi \in \mathcal{A}\}$$

der eindeutig bestimmte maximale Atlas, der \mathcal{A} umfaßt.

Beweis. Wir zeigen zuerst \mathcal{A}_{\max} ist ein C^∞ -Atlas: Seien $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_{\max}$, dann ist zu zeigen, daß $\varphi^{-1} \circ \psi$ glatt ist. Sei $x \in \psi^{-1}(\text{Bild } \varphi)$ also $\psi(x) \in \text{Bild } \varphi \cap \text{Bild } \psi$. Da \mathcal{A} ein Atlas ist, folgt die Existenz eines $\chi \in \mathcal{A}$ mit $\psi(x) \in \text{Bild } \chi$. Somit

ist $\varphi^{-1} \circ \chi \circ \chi^{-1} \circ \psi = (\chi^{-1} \circ \varphi)^{-1} \circ (\chi^{-1} \circ \psi)$ lokal um x definiert. Die beiden geklammerten Teile sind laut Definition von \mathcal{A}_{\max} glatt und folglich ist auch $\varphi^{-1} \circ \psi$ glatt.

Sei nun \mathcal{B} ein C^∞ -Atlas, der \mathcal{A} umfaßt, dann ist z.z.: $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}_{\max}$. Sei $\varphi \in \mathcal{B}$, dann ist φ verträglich mit allen $\psi \in \mathcal{B}$. Da $\mathcal{B} \supseteq \mathcal{A}$, ist φ verträglich mit allen $\psi \in \mathcal{A}$, also ist nach Konstruktion $\varphi \in \mathcal{A}_{\max}$. \square

16.6

Die folgenden Überlegungen zeigen, daß die Kartenwechsel, also eine Familie von lokalen Abbildungen $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, schon die ganze Information über M enthalten. Sei dazu $\{g_{\alpha\beta} : \alpha, \beta \in A\}$ eine Familie von Diffeomorphismen offener Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume, sodaß $g_{\alpha\beta}^{-1} = g_{\beta\alpha}$ und (dort wo die linke Seite definiert ist) $g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \subseteq g_{\alpha\gamma}$ gilt (Das sind offensichtlich Eigenschaften von Kartenwechseln). Es sei $U_\alpha := \text{Dom } g_{\alpha\alpha}$ und wir definieren eine Äquivalenzrelation auf der disjunkten Vereinigung $\bigsqcup_\alpha U_\alpha = \bigcup_\alpha \{\alpha\} \times U_\alpha$ durch: $(\alpha, x) \sim (\beta, y) :\Leftrightarrow g_{\alpha\beta}(y) = x$. Dies ist in der Tat eine Äquivalenzrelation:

Reflexivität: Es ist $g_{\alpha\alpha} = \text{id}_{U_\alpha}$, denn aus $(g_{\alpha\alpha})^{-1} = g_{\alpha\alpha}$ folgt $\text{Bild } g_{\alpha\alpha} = \text{Dom } g_{\alpha\alpha} = U_\alpha$ und aus $g_{\alpha\alpha} \circ g_{\alpha\alpha} \subseteq g_{\alpha\alpha}$ folgt, da $g_{\alpha\alpha}$ als Diffeomorphismus injektiv ist, $g_{\alpha\alpha} = \text{id}$. Somit ist $(\alpha, x) \sim (\alpha, x)$.

Symmetrie: Es sei $(\alpha, x) \sim (\beta, y)$ also $x = g_{\alpha\beta}(y)$, d.h. $y = (g_{\alpha\beta})^{-1}(x) = g_{\beta\alpha}(x)$, also $(\beta, y) \sim (\alpha, x)$.

Transitivität: Es sei $(\alpha, x) \sim (\beta, y) \sim (\gamma, z)$, also $g_{\alpha\beta}(y) = x$ und $g_{\beta\gamma}(z) = y$. Somit ist $g_{\alpha\gamma}(z) = (g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma})(z) = g_{\alpha\beta}(y) = x$, also $x \sim z$.

Nun sei $M := \left(\bigsqcup_{\alpha \in A} U_\alpha\right) / \sim$ und $g_\alpha : U_\alpha \rightarrow M$ durch $x \mapsto [(\alpha, x)]_\sim$ definiert. Dann ist g_α injektiv, denn aus $(\alpha, x) \sim (\alpha, y)$ folgt $x = g_{\alpha\alpha}(y) = y$.

Aus $\text{id}_{U_\alpha} = g_{\alpha\alpha} \supseteq g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\alpha} = g_{\beta\alpha}^{-1} \circ g_{\beta\alpha} = \text{id}_{\text{Dom } g_{\beta\alpha}}$ folgt $\text{Dom}(g_{\beta\alpha}) \subseteq U_\alpha$ und $g(\text{Dom}(g_{\beta\alpha})) = \text{Dom}(g_{\alpha\beta}) \subseteq U_\beta$.

Weiters sind die Kartenwechsel $g_\beta^{-1} \circ g_\alpha$ durch $y = (g_\beta^{-1} \circ g_\alpha)(x) \Leftrightarrow g_\beta(y) = g_\alpha(x) \Leftrightarrow (\alpha, x) \sim (\beta, y) \Leftrightarrow x = g_{\alpha\beta}(y) \Leftrightarrow y = g_{\beta\alpha}(x)$ gegeben. Somit ist M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und Kartenwechselabbildungen $g_{\beta\alpha} = g_\beta^{-1} \circ g_\alpha$.

16.7 Definition (Topologische Mannigfaltigkeit)

Ein topologischer Raum M heißt **TOPOLOGISCHE MANNIGFALTIGKEIT** $:\Leftrightarrow$ es gibt eine Familie von Homöomorphismen zwischen offenen Teilmengen eines endlichdimensionalen Vektorraums und offenen Teilmengen von M , deren Bilder M überdecken.

Solche Homöomorphismen heißen **KARTEN** von M . Und eine Familie von Karten, deren Bilder M überdecken, heißt **ATLAS**.

Bemerkungen

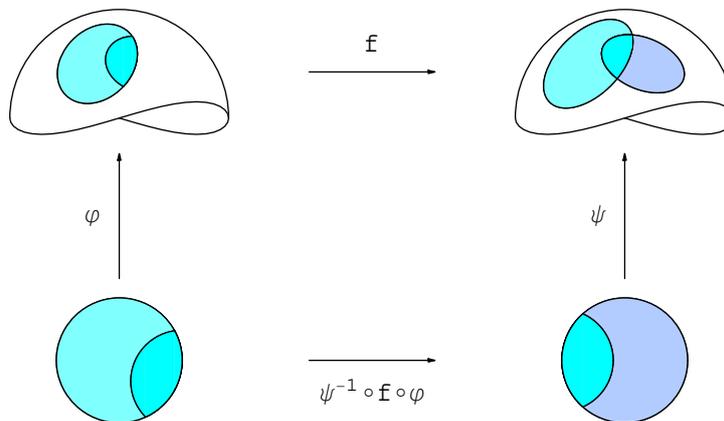
1. Falls M eine topologische Mannigfaltigkeit und \mathcal{A} ein Atlas für M ist, so sind alle Kartenwechsel automatisch Homöomorphismen auf offenen Teilen des \mathbb{R}^m . Man braucht also "nur" genügend viele unter ihnen zu finden, so daß die entsprechenden Kartenwechsel differenzierbar sind, um einen glatten Teilatlas zu erhalten, und somit M als glatte Mannigfaltigkeit zu erkennen.

2. Nicht jede topologische Mannigfaltigkeit besitzt aber einen C^∞ -Atlas. Das erste Beispiel [49] war 10-dimensional. Heute ist 4 die niedrigste Dimension, für die es ein Beispiel gibt.

Wir wollen nun unseren Differenzierbarkeitsbegriff für Abbildungen zwischen Teilmannigfaltigkeiten auf abstrakte Mannigfaltigkeiten übertragen. Das Lemma 15.4 legt folgende Definition nahe:

16.8 Definition (Glatte Abbildung)

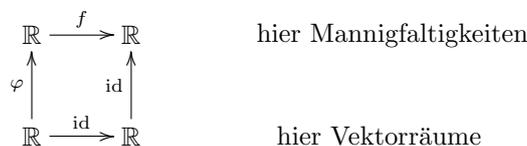
Seien (M, \mathcal{A}) und (N, \mathcal{B}) zwei C^∞ -Mannigfaltigkeiten. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt GLATT $:\Leftrightarrow f$ ist stetig, und für jeden Punkt $x \in M$ existieren Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{B}$, sodaß $x \in \text{Bild } \varphi$, $f(x) \in \text{Bild } \psi$ und die KARTENDARSTELLUNG $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ von f glatt ist. Das gilt dann ebenso für beliebige Karten $\varphi \in \mathcal{A}$ und $\psi \in \mathcal{B}$.



Insbesondere ist die Identität $\text{id} : (M, \mathcal{A}) \rightarrow (M, \mathcal{B})$ genau dann ein Diffeomorphismus, wenn die beiden Atlanten \mathcal{A} und \mathcal{B} äquivalent sind.

16.9 Bemerkungen

1. Die Stetigkeit von f setzt man voraus, damit die Kartendarstellung auf einer offenen Menge definiert ist.
2. Da der Kartenwechsel glatt ist, genügt es, obige Eigenschaft bei jedem x für eine Karte aus \mathcal{A} und für eine aus \mathcal{B} um $f(x)$ zu fordern, sie überträgt sich auf alle Karten.
3. Wenn man \mathbb{R} als topologische Mannigfaltigkeit auffaßt, lassen sich sehr leicht zwei C^∞ -Strukturen angeben: $\mathcal{A}_1 := \{\text{id} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, und $\mathcal{A}_2 := \{\varphi(x) = x^3 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$. Diese sind nicht verträglich, da $\varphi^{-1} \circ \text{id} : x \rightarrow \sqrt[3]{x}$ nicht glatt ist (denn $\frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x})$ existiert nicht bei 0), definieren also zwei verschiedene C^∞ -Mannigfaltigkeitsstrukturen auf \mathbb{R} . Allerdings sind die beiden Strukturen diffeomorph, also doch gewissermaßen gleich.



Die Abbildung $f = \sqrt[3]{x}$ ist ein Diffeomorphismus: f, f^{-1} sind bijektiv und klarerweise stetig. Ebenso ist f glatt, da $(\text{id}^{-1} \circ f \circ \varphi)(x) = f(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$ glatt ist. Analog ist f^{-1} glatt, da $(\varphi^{-1} \circ f^{-1} \circ \text{id})(x) = \varphi^{-1}(x^3) = x$ glatt ist.

4. Ab $\dim M = 4$ gilt nicht mehr allgemein, daß zwei C^∞ -Atlanten einer topologischen Mannigfaltigkeit bis auf Diffeomorphismus gleich sind. Für Dimension kleiner als 4 wurde es hingegen in [75] gezeigt. Nach [68] trägt zum Beispiel die S^7 mindestens 15 nicht diffeomorphe C^∞ -Strukturen; die S^{31} mehr als $16 \cdot 10^6$. Genauer gilt:

$\dim = n$	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	...
Strukturen auf S^n	28	2	8	6	992	1	3	2	16256	2	16	16	...

Für \mathbb{R}^n , $n \neq 4$ gibt es genau eine glatte Struktur. Für $n > 4$ wurde das in [87] bewiesen. Ganz überraschend konnte Kirby 1982 beweisen, daß für den \mathbb{R}^4 eine exotische C^∞ -Struktur existiert. In [89] wurde gezeigt, daß es sogar überabzählbar viele gibt.

5. Die Klasse der C^∞ -Abbildungen zwischen zwei Mannigfaltigkeiten bilden eine KATEGORIE. Dabei versteht man unter einer Kategorie eine Klasse von Räumen (Objekten) und Abbildungen (Morphismen), sodaß zu jedem Objekt die Identität ein Morphismus und die Zusammensetzung von Morphismen wieder ein solcher ist. Es ist also für drei C^∞ -Mannigfaltigkeiten M, N, P und glatte Abbildungen $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ zu zeigen:
- $g \circ f : M \rightarrow P$ ist glatt.
 - $\text{id} : M \rightarrow M$ ist glatt.

16.10 Lemma (Offene Teilmannigfaltigkeit).

Sei (M, \mathcal{A}) eine C^∞ -Mannigfaltigkeit, und U offen in M . Dann ist U in natürlicher Weise eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Ein Atlas auf U ist durch die Einschränkungen von Karten von M gegeben.

Beweis. Klarerweise ist $(U, \mathcal{A}_U := \{\varphi|_{\varphi^{-1}(U)} : \varphi \in \mathcal{A}\})$ eine topologische Mannigfaltigkeit. Bleibt zu zeigen, daß die Kartenwechsel glatt sind:

$$(\psi|_{\psi^{-1}(U)})^{-1} \circ \varphi|_{\varphi^{-1}(U)} = (\psi^{-1} \circ \varphi)|_{\varphi^{-1}(U)}$$

ist eine Einschränkung von C^∞ -Funktionen und somit C^∞ . □

16.11 Bemerkungen

- Es ist also sinnvoll, von C^∞ -Abbildungen zu sprechen, die nur auf offenen Teilmengen einer C^∞ -Mannigfaltigkeit definiert sind.
- Die Karten φ einer C^∞ -Mannigfaltigkeit sind Diffeomorphismen

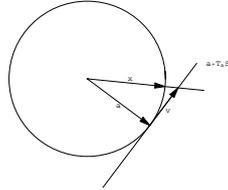
$$\varphi : \underset{\text{off.}}{\mathbb{R}^m \supseteq} \text{Dom } \varphi \rightarrow \text{Bild } \varphi \underset{\text{off.}}{\subseteq} M.$$

Insbesondere besteht \mathcal{A}_{\max} aus all jenen Karten φ , die Diffeomorphismen auf ihr Bild sind, d.h. $\varphi^{-1} \circ \psi$ ist ein Diffeomorphismus offener Mengen für alle Karten $\psi \in \mathcal{A}$.

16.12 Beispiele von Atlanten

- $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = 1\}$

Wir konstruieren Karten durch radial-Projektionen auf die Tangentialebenen ("Radialprojektion").



$$\alpha + v = \lambda x \quad \text{mit} \quad \langle \alpha, v \rangle = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \mapsto v := \langle x, \alpha \rangle^{-1} \cdot x - \alpha, \quad v \mapsto x := (\alpha + v) \cdot |\alpha + v|^{-1}.$$

Eine Karte für eine Umgebung von α ist also

$$\varphi_\alpha : \mathbb{R}^n \cong \alpha^\perp \rightarrow \{x \in S^n : \langle x, \alpha \rangle > 0\} \subseteq M$$

$$\varphi_\alpha(v) := (\alpha + v) \cdot |\alpha + v|^{-1}$$

$$\varphi_\alpha^{-1}(x) = \langle x, \alpha \rangle^{-1} \cdot x - \alpha.$$

Die Menge $\{\varphi_\alpha : \alpha \in S^n\}$ bildet einen C^∞ -Atlas für S^n . Allerdings überdecken auch die Bilder der Karten $\varphi_{\pm e_i}$ für $i = 1 \dots n + 1$ die S^n . Da sowohl φ_α als auch φ_α^{-1} glatt auf einer offenen Umgebung im \mathbb{R}^{n+1} sind, sind klarerweise alle Kartenwechsel glatt.

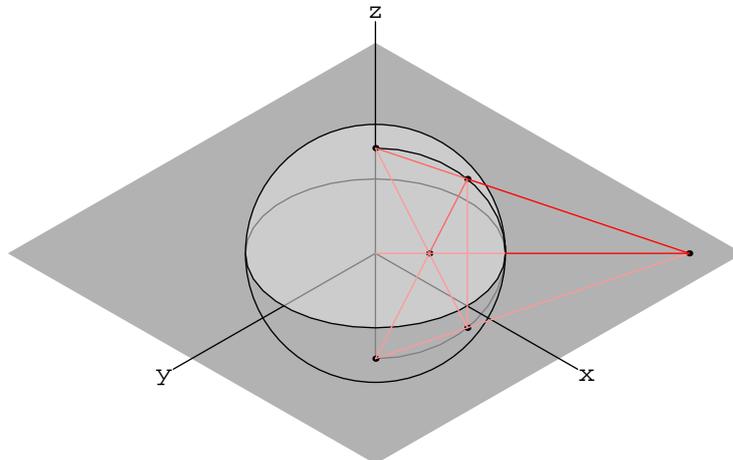
2. Der Atlas der stereographischen Projektion für S^n hat als Karten ψ_α mit $\alpha \in S^n$:

$$\psi_\alpha : \begin{cases} \alpha^\perp \rightarrow S^n \setminus \{\alpha\} \\ v \mapsto \alpha + 2(v - \alpha) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1} \end{cases}$$

mit der Umkehrabbildung

$$\psi_\alpha^{-1}(x) = (x - \langle x, \alpha \rangle \cdot \alpha) \cdot (1 - \langle x, \alpha \rangle)^{-1}.$$

Die Karte ψ_α ist für $S^n \setminus \{\alpha\}$ definiert. Für einen Kartenwechsel genügt es also, noch eine Karte für α zu finden, etwa $\psi_{-\alpha}$. Den Kartenwechsel für diese beiden Karten erhält man aus elementaren geometrischen Überlegungen: Es seien v und v^* die Bilder unter ψ_α^{-1} und $\psi_{-\alpha}^{-1}$. Die Dreiecke $(\alpha, x, -\alpha)$ und $(\alpha, 0, v)$ haben zwei gleiche Winkel, je einen rechten und jenen bei α , also sind sie ähnlich. Die Dreiecke $(0, v^*, -\alpha)$ und $(\alpha, x, -\alpha)$ sind aus entsprechenden Gründen ebenfalls ähnlich.



Aus dem Strahlensatz erhält man:

$$\frac{|v|}{1} = \frac{1}{|v^*|} \Rightarrow |v| = |v^*|^{-1} \Rightarrow (\psi_\alpha^{-1} \circ \psi_\alpha)(v) = v^* = v \cdot |v|^{-2}.$$

3. Die naheliegende Frage, wie die beiden durch (1) und (2) gegebenen Strukturen auf S^n zusammenpassen, ist so zu beantworten: Die Karten sind verträglich (d.h. erzeugen denselben maximalen Atlas), denn

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^{-1} : x &\mapsto x \cdot \langle x, \alpha \rangle^{-1} - \alpha \\ \psi_\beta : v &\mapsto \beta + 2(v - \beta) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1} \\ \varphi_\alpha^{-1} \circ \psi_\beta : v &\mapsto \frac{\beta + 2(v - \beta) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1}}{\langle \beta + 2(v - \beta) \cdot (|v|^2 + 1)^{-1}, \alpha \rangle} - \alpha \end{aligned}$$

ist eine – wenn auch komplizierte – C^∞ -Funktion. Die Verträglichkeit der Karten kann auch daran erkannt werden, daß die Karten als lokale Diffeomorphismen des umgebenden Raums aufgefaßt werden können.

4. EINPUNKTKOMPAKTIFIZIERUNG des \mathbb{R}^n :

Wir definieren auf $\mathbb{R}_\infty^n := \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$ einen Atlas durch χ_0 und χ_∞ , diese sind gegeben durch:

$$\begin{aligned} \chi_0 : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}_\infty^n \\ \chi_0(x) &= x \\ \chi_\infty : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}_\infty^n \\ \chi_\infty(0) &= \infty \text{ und } \chi_\infty(x) = x \cdot |x|^{-2} \text{ sonst.} \end{aligned}$$

Die Kartenwechsel $\chi_0^{-1} \circ \chi_\infty$ und $\chi_\infty^{-1} \circ \chi_0$ von $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ errechnen sich als: $x \mapsto x \cdot |x|^{-2}$. Dieser Kartenwechsel ist uns schon in (2), bei der Sphäre, begegnet.

Behauptung: $\mathbb{R}_\infty^n \cong S^n$ mittels $f(\infty) = e_1$ und $f(x) = \psi_{e_1}(x)$. Es ist klar, daß f bijektiv ist; bleibt zu zeigen, daß sowohl f als auch f^{-1} glatt ist: Die zu untersuchenden Fälle sind:

- $\psi_{e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \chi_0 = \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$
- $\psi_{e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_\infty = \chi_0^{-1} \circ \chi_\infty$
- $\psi_{-e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_0 = \chi_\infty^{-1} \circ \chi_0$
- $\psi_{-e_1}^{-1} \circ f \circ \chi_\infty = \text{id}_{\mathbb{R}^n \setminus \{0\}}$

Dies sind alles Diffeomorphismen, also ist f ein Diffeomorphismus.

5. PROJEKTIVE RÄUME

$$P^n := \{ \text{Geraden durch } 0 \text{ im } \mathbb{R}^{n+1} \} = (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) / \sim$$

wobei $x \sim y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, sodaß $\lambda x = y$. Als Karten wählt man etwa für $0 \leq i \leq n$:

$$\varphi_i : \begin{cases} \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow P^n \\ (y^1, \dots, y^n) \mapsto [(-1)^i (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n)] \end{cases}$$

Das Vorzeichen ist dabei so gewählt, daß P^n so orientiert wie möglich wird, siehe (3) in [46.9](#). Die φ_i gehen bijektiv von \mathbb{R}^n nach $\{x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} : x^{i+1} \neq 0\} / \sim$.

Der Kartenwechsel berechnet sich folgendermaßen:

$$\begin{aligned} (\varphi_j^{-1} \circ \varphi_i)(y^1, \dots, y^n) &= \\ &= \varphi_j^{-1} \left[(-1)^i (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n) \right] \stackrel{\text{(O.B.d.A. } j > i)}{=} \\ &= (y^j)^{-1} (-1)^i (-1)^j (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^{j-1}, y^{j+1}, \dots, y^n). \end{aligned}$$

Das ist ein Diffeomorphismus (auf dem Definitionsbereich). Also ist P^n eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Ganz analoges Vorgehen liefert $P_{\mathbb{C}}^n$ (komplexe Geraden in \mathbb{C}^{n+1}) mit $\dim P_{\mathbb{C}}^n = 2n$ und $P_{\mathbb{H}}^n$ mit $\dim P_{\mathbb{H}}^n = 4n$.

In [11.9](#) hatten wir eine weitere Beschreibung der projektiven Räume P^n als Graßmannmannigfaltigkeit $G(1, n+1) \subseteq L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1})$ gegeben. Dabei hatten wir Geraden durch 0 im \mathbb{R}^{n+1} mit den orthogonal-Projektionen auf sie identifiziert. Wir wollen nun zeigen, daß dies diffeomorphe Räume beschreibt. Sei dazu $\bar{\varphi}_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ gegeben durch $(y^1, \dots, y^n) \mapsto (-1)^i (y^1, \dots, y^i, 1, y^{i+1}, \dots, y^n)$. Dann ist $\varphi_i = \pi \circ \bar{\varphi}_i$, wobei $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow P^n := \mathbb{R}^{n+1} / \sim$ die kanonische Projektion $x \mapsto [x]$ bezeichnet. Für $a, b \in E := \mathbb{R}^{n+1}$ sei $a \otimes b \in L(E, E)$ definiert durch $(a \otimes b)(x) := \langle a, x \rangle b$ (Für eine Erklärung dieser Notation siehe [38](#)). Dann ist $(a \otimes b)^t = b \otimes a$, denn

$$\langle (a \otimes b)x, y \rangle = \langle a, x \rangle \cdot \langle b, y \rangle = \langle x, (b \otimes a)y \rangle.$$

Und weiters ist

$$(a_1 \otimes b_1) \circ (a_2 \otimes b_2) = \langle a_1, b_2 \rangle a_2 \otimes b_1.$$

Folglich ist $P := a \otimes b$ genau dann eine ortho-Projektion (d.h. $P^t = P = P^2$), wenn $a = b$ und $\langle a, b \rangle = 1$ ist. Die ortho-Projektionen P vom Rang 1 sind also genau die P der Gestalt $P = a \otimes a$ mit $|a| = 1$. Die glatte Abbildung $x \mapsto \frac{x}{|x|} \otimes \frac{x}{|x|}$ ist somit eine surjektive Abbildung $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow G(1, n+1)$ und faktorisiert zu einer glatten Bijektion $P^n \rightarrow G(1, n+1)$. Lokal erhalten wir eine inverse Abbildung, indem wir Abbildungen P nahe $a \otimes a$ den Punkt $\pi(P(a)) \in P^n$ zuordnen. Es ist nämlich $P(a) = \langle b, a \rangle b$ für $P = b \otimes b$ und somit $f(\pi(P(a))) = f(\pi(b)) = b \otimes b = P$. Also ist f der gesuchte Diffeomorphismus.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\bar{\varphi}_i} & \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} & \twoheadrightarrow & S^n \\ & \searrow \varphi_i & \downarrow & & \downarrow \\ & & P^n & \xrightarrow[\cong]{f} & G(1, n+1) \hookrightarrow L(\mathbb{R}^{n+1}, \mathbb{R}^{n+1}) \end{array}$$

16.13 Bemerkung

Zwischen projektiven Räumen und Sphären gibt es einige Beziehungen:

- (1) Die projektive Gerade $P^1 \cong S^1$.

Als Karten für die S^1 wählen wir $\psi_+ := \psi_{0,1}$ und $\psi_- := \psi_{0,-1}$, die stereographischen Projektionen zu den Punkten $(0, 1)$ und $(0, -1)$ (vgl. Bsp. [16.12](#)). Für den Kartenwechsel erhalten wir:

$$(\psi_{0,1}^{-1} \circ \psi_{0,-1})(x) = (\psi_{0,-1}^{-1} \circ \psi_{0,1})(x) = x^{-1} \text{ auf } \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Als Karten für P^1 ordnen wir jeder Ursprungsgeraden den Schnittpunkt mit den Geraden $y = 1$ (bzw. $x = 1$) zu, siehe [16.12.5](#):

$$\varphi_- : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow P^1 \setminus [(0, 1)] \\ x \mapsto [(1, x)] \end{cases} \quad \text{und} \quad \varphi_+ : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow P^1 \setminus [(1, 0)] \\ x \mapsto [(x, 1)] \end{cases}$$

Mit der Karte φ_- erhalten wir alle Klassen bis auf $[(0, 1)]$ (das entspricht der y -Achse). Diesen Mangel behebt die Karte φ_+ . Wir berechnen die Umkehrabbildungen:

$$\begin{aligned} \varphi_-^{-1} : [(x, y)] &= [(1, y \cdot x^{-1})] \mapsto y \cdot x^{-1} = \frac{y}{x} \\ \varphi_+^{-1} : P^1 \setminus [(1, 0)] &\rightarrow \mathbb{R} \text{ mit} \\ \varphi_+^{-1} : [(x, y)] &\mapsto x \cdot y^{-1} = \frac{x}{y} \end{aligned}$$

Nun zum Kartenwechsel:

$$(\varphi_+^{-1} \circ \varphi_-)(x) = \varphi_+^{-1}[(1, x)] = x^{-1}, \quad (\varphi_-^{-1} \circ \varphi_+)(x) = \varphi_-^{-1}[(x, 1)] = x^{-1},$$

jeweils auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sei $f : P^1 \rightarrow S^1$ gegeben durch:

$$f := \begin{cases} \psi_- \circ \varphi_-^{-1} & \text{auf } P^1 \setminus [(0, 1)] \\ \psi_+ \circ \varphi_+^{-1} & \text{auf } P^1 \setminus [(1, 0)]. \end{cases}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da aus $\psi_-^{-1} \circ \psi_+ = \varphi_-^{-1} \circ \varphi_+$ folgt, daß $\psi_- \circ \varphi_-^{-1} = \psi_+ \circ \varphi_+^{-1}$. Sie ist aber auch ein Diffeomorphismus. Dies müssen wir nur für die induzierte Funktion zeigen. Auf $P^1 \setminus [(0, 1)]$ ist wegen $f(\text{Bild } \varphi_-) = \text{Bild } \psi_-$ die Kartendarstellung $\psi_-^{-1} \circ f \circ \varphi_- = \psi_-^{-1} \circ \psi_- \circ \varphi_-^{-1} \circ \varphi_- = \text{id}$ ein Diffeomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} P^1 & \xrightarrow{f} & S^1 \\ \varphi_{\pm} \uparrow & & \uparrow \psi_{\pm} \\ \mathbb{R} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R} \end{array}$$

Analog für $x \in P^1 \setminus [(1, 0)]$.

Einfacher sieht man $P^1 \cong S^1$ auch mittels 16.12.4:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} & \\ \varphi_+ \swarrow & & \searrow \chi_{\infty} \\ P^1 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}_{\infty} \\ \varphi_- \swarrow & & \searrow \chi_0 \\ & \mathbb{R} & \end{array}$$

(2) $P_{\mathbb{C}}^1 \cong S^2$: Geometrisch läßt sich das wie folgt veranschaulichen: Man parametrisiert die komplexen Ursprungsgeraden in $P_{\mathbb{C}}^1$ durch ihre eindeutigen Schnitte mit der komplexen Gerade $g := \{(z, 1) : z \in \mathbb{C}\} \cong \mathbb{R}^2$. Nur die komplexe Gerade h parallel zu g d.h. $h = \{(z, 0) : z \in \mathbb{C}\} \in P_{\mathbb{C}}^1$ bekommt kein Bild. Jene Geraden, die nahe bei h liegen, haben ihre Schnittpunkte weit draußen auf g . Also entspricht die noch fehlende Gerade h dem Punkt ∞ in der Einpunktkompaktifizierung \mathbb{R}_{∞}^2 von \mathbb{R}^2 . Daß diese beiden Räume isomorph sind, wissen wir aber (siehe Beispiel 16.12).

17. Produkte und Summen von Mannigfaltigkeiten

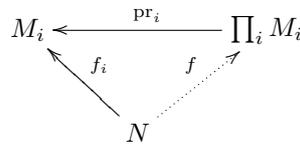
Die einfachste Möglichkeit, aus Mannigfaltigkeiten neue zu basteln, ist die Bildung von Produkten und Summen, die wir in diesen Abschnitt behandeln.

17.1 Proposition (Produkte).

Für $i = 1, \dots, n$ sei (M_i, \mathcal{A}_i) eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Dann ist $\prod_{i=1}^n M_i$ in natürlicher Weise eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Der Atlas auf $\prod M_i$ ist gegeben durch

$$\prod_{i=1}^n \mathcal{A}_i := \{\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n : \varphi_i \in \mathcal{A}_i\}.$$

Das Produkt $\prod M_i$ hat folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder C^∞ -Mannigfaltigkeit N und C^∞ -Abbildungen $f_i : N \rightarrow M_i$ existiert eine eindeutige C^∞ -Abbildung $f = (f_1, \dots, f_n)$, sodaß $\text{pr}_i \circ f = f_i$. Dabei bezeichnet $\text{pr}_i : \prod M_i \rightarrow M_i$ die C^∞ -Abbildung $(x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$. Die universelle Eigenschaft kann auch durch folgendes Diagramm ausgedrückt werden:



Die auf $\prod_i M_i$ induzierte Topologie ist gerade die Produkttopologie.

Beweis. Offensichtlich ist durch den Atlas $\prod_i \mathcal{A}_i$ induzierte Topologie gerade die Produkttopologie, denn das Produkt von Homöomorphismen φ_i ist ebenso ein Homöomorphismus

$$\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n : \text{Dom } \varphi_1 \times \dots \times \text{Dom } \varphi_n \rightarrow \text{Bild } \varphi_1 \times \dots \times \text{Bild } \varphi_n \subseteq \prod M_i.$$

Die Kartenwechsel

$$(\psi_1 \times \dots \times \psi_n)^{-1} \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n) = (\psi_1^{-1} \circ \varphi_1) \times \dots \times (\psi_n^{-1} \circ \varphi_n).$$

sind als Produkte von Diffeomorphismen $(\psi_i^{-1} \circ \varphi_i)$ selbst Diffeomorphismen, und somit ist $\prod M_i$ eine C^∞ -Mannigfaltigkeit.

Wir behaupten nun $\text{pr}_i : \prod M_i \rightarrow M_i$ ist glatt.

Sei $(x^1, \dots, x^n) \in \prod M_i$ und $\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n$ eine Karte um diesen Punkt. Dann ist φ_i Karte um x^i . Somit ist

$$\varphi_i^{-1} \circ \text{pr}_i \circ (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n) : \mathbb{R}^{m_1 + \dots + m_n} \rightarrow \mathbb{R}^{m_i}, \quad (x^1, \dots, x^n) \mapsto x^i$$

eine lineare Projektion, also glatt. Seien $f_i \in C^\infty(N, M_i)$, dann ist $x \mapsto f(x) = (f_1, \dots, f_n)$ die einzige Abbildung mit $\text{pr}_i \circ f = f_i$. Bleibt noch zu zeigen: f ist C^∞ . Sei φ eine Karte von N , dann ist

$$\begin{aligned} & (\varphi_1 \times \dots \times \varphi_n)^{-1} \circ f \circ \varphi = \\ & = (\varphi_1^{-1} \times \dots \times \varphi_n^{-1}) \circ (f_1 \circ \varphi, \dots, f_n \circ \varphi) \\ & = (\varphi_1^{-1} \circ f_1 \circ \varphi, \dots, \varphi_n^{-1} \circ f_n \circ \varphi). \end{aligned}$$

Laut Voraussetzungen waren $\varphi_i^{-1} \circ f_i \circ \varphi$ glatt (da die f_i glatt sind), also ist f glatt. □

17.2 Beispiele von Produkten

1. Der Zylinder ist eine Teilmenge im \mathbb{R}^3 , nämlich das kartesische Produkt aus der S^1 und einen offenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, also C^∞ -Mannigfaltigkeit.
2. Der n -dimensionale Torus im \mathbb{R}^{2n} entsteht durch das n -fache kartesische Produkt der $S^1 \subseteq \mathbb{R}^2$:

$$S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1 = \prod_{i=1}^n S^1 = (S^1)^n = T^n.$$

Für $n = 2$ ergibt sich der uns schon bekannte “Fahrradschlauch” (vgl. [11.6](#)), allerdings als Teilmenge von \mathbb{R}^4 anstelle von \mathbb{R}^3 .

17.3 Proposition (Summen).

Seien (M_i, \mathcal{A}_i) C^∞ -Mannigfaltigkeiten. Dann ist die disjunkte Vereinigung $\bigsqcup_i M_i$ in natürlicher Weise eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Ein Atlas \mathcal{A} auf $\bigsqcup_i M_i$ ist gegeben durch $\bigcup_i \mathcal{A}_i$ (hier ist keine Beschränkung der Indexmenge nötig).

Zusätzlich hat $\bigsqcup M_i$ folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder C^∞ -Mannigfaltigkeit N und für alle C^∞ -Abbildungen $f_i : M_i \rightarrow N$ existiert eine eindeutige glatte Abbildung f mit

$$f := \bigsqcup_i f_i : \bigsqcup M_i \rightarrow N, \text{ soda\ss } f|_{M_i} = f_i.$$

Dies kann auch durch folgendes Diagramm ausgedrückt werden:

$$\begin{array}{ccc} M_i & \hookrightarrow & \bigsqcup_i M_i \\ & \searrow f_i & \swarrow f \\ & & N \end{array}$$

Beweis. Für $\varphi, \psi \in \bigcup \mathcal{A}_i$ ist entweder $\varphi^{-1} \circ \psi = \emptyset$ oder ein i existiert mit $\varphi, \psi \in \mathcal{A}_i$ und somit ist $\psi^{-1} \circ \varphi$ glatt. Offene Mengen in $\bigsqcup M_i$ sind Vereinigungen offener Mengen in M_i . Die universellen Eigenschaft ist nun offensichtlich. \square

18. Zerlegungen der Eins

Um aus lokalen Konstruktionen (wie sie z.B. in der Analysis behandelt werden) auch globale zu erhalten benötigen wir eine Methode, diese lokal zu verkleben. Wir brauchen dazu “Gewichts”-Funktionen, d.h. Funktionen, die nur lokal nicht verschwinden, größer oder gleich 0 sind und zusammen sich auf 1 summieren. Das sind die sogenannten Partitionen der Eins, die wir in diesen Abschnitt behandeln.

18.1 Definition (Partition der Eins)

Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M . Eine \mathcal{U} unterordnete GLATTE PARTITION DER EINS ist eine Menge \mathcal{F} von glatten Abbildungen $M \rightarrow \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ mit den Eigenschaften:

1. $\forall f \in \mathcal{F} \exists U_f \in \mathcal{U} : \text{Trg}(f) \subseteq U_f$
2. Die Familie $\{\text{Trg}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ ist lokal endlich, d.h. $\forall p \in U \exists U(p)$ soda\ss $\{f \in \mathcal{F} : \text{Trg}(f) \cap U(p) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Dabei ist $\text{Trg}(f)$ der Abschlu\ss von $\{x : f(x) \neq 0\}$.
3. $\sum_{f \in \mathcal{F}} f = 1$

18.2 Satz (Partition der Eins).

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Dann gibt es eine C^∞ -Partition der Eins, die \mathcal{U} untergeordnet ist.

Beweis. Beh.: X (und in der Tat jeder separable metrische Raum) ist LINDELÖF, d.h. jede offene Überdeckung von X besitzt eine abzählbare Teilüberdeckung.

Sei also \mathcal{U} eine offene Überdeckung von X . Es sei $X_0 := \{(x, r) : x \in \mathbb{Q}^n \cap X, 0 < r \in$

$\mathbb{Q}, \exists U \in \mathcal{U} : U_r(x) \subseteq U$. Dann ist X_0 abzählbar und nach Definition existiert für jedes $(x, r) \in X_0$ eine Menge $U_{x,r} \in \mathcal{U}$ mit $U_r(x) \subseteq U_{x,r}$. Wir können durch Auswahl also eine Funktion $\Psi : X_0 \rightarrow \mathcal{U}, (x, r) \mapsto U_{x,r}$ definieren. Wir behaupten, daß das Bild $\mathcal{U}_0 := \Psi(X_0)$ von Ψ eine abzählbare Teilüberdeckung zu \mathcal{U} ist. Abzählbarkeit ist klar. Sei also $x \in X$ beliebig. Da \mathcal{U} eine Überdeckung von X ist existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Da U offen ist existiert ein $\delta > 0$ mit $U_\delta(x) \subseteq U$. Sei $r \in \mathbb{Q}$ mit $0 < 2r < \delta$. Da $\mathbb{Q}^n \cap X$ in X dicht liegt existiert ein $x_0 \in \mathbb{Q}^n \cap X$ mit $d(x_0, x) < r$ und somit ist $x \in U_r(x_0) \subseteq U_\delta(x) \subseteq U$, also $x \in U_r(x_0) \subseteq U_{r,x_0}$.

Beh.: Es gibt glatte Funktionen mit beliebig kleinem Träger.

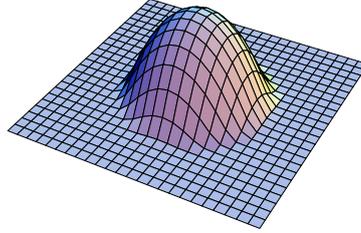
Betrachten wir dazu die glatte Funktion $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$h(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}} > 0 & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t \leq 0 \end{cases}$$

Wenn wir für $x_0 \in \mathbb{R}^n$ und $r > 0$ nun eine glatte Funktion $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ durch $\varphi(x) := h(r^2 - \|x - x_0\|^2)$ definieren, dann ist $\varphi(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ und

$$\begin{aligned} 0 = \varphi(x) &:= h(r^2 - \|x - x_0\|^2) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow r^2 - \|x - x_0\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \notin U_r(x_0). \end{aligned}$$

Das heißt also, der Träger von φ ist gegeben durch $\text{Trg } \varphi = \{x : \|x - x_0\| \leq r\}$.



Beh.: Es gibt eine abzählbare lokal endliche Verfeinerung $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ von \mathcal{U} .

Sei \mathcal{U} die gegebene offene Überdeckung von X . Zu jedem $x \in U \in \mathcal{U}$ wählen wir ein $r > 0$ mit $\{y : \|y - x\| \leq r\} \subseteq U$. Nach obigem wissen wir, daß es ein $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ gibt mit

$$\{y : \|y - x\| < r\} = \{y : \varphi(y) \neq 0\} =: U_\varphi.$$

Diese Mengen bilden eine Verfeinerung von \mathcal{U} . Da X Lindelöf ist, existieren abzählbar viele Funktionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ s.d. $\{U_{\varphi_n} : n \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung von X und eine Verfeinerung von \mathcal{U} ist. Diese muß noch nicht lokal endlich sein, darum definieren wir W_n wie folgt:

$$W_n := \left\{ x : \varphi_n(x) > 0 \wedge \varphi_i(x) < \frac{1}{n} \text{ für } 1 \leq i < n \right\} \subseteq U_{\varphi_n}.$$

Es ist klar, daß die W_n offen sind (durch stetige Ungleichung gegeben), und Teilmengen von U_{φ_n} sind.

Die W_n bilden eine Überdeckung von X , denn zu jedem $x \in X$ existiert ein minimales n_0 mit $\varphi_{n_0}(x) > 0$ und somit ist $x \in W_{n_0}$.

Um zu beweisen, daß $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ lokal endlich ist definieren wir eine offene Umgebung um x :

$$U(x) := \left\{ y : \varphi_{n_0}(y) > \frac{1}{2} \varphi_{n_0}(x) \right\}.$$

Falls $W_k \cap U(x) \neq \emptyset$, dann sei y im Durchschnitt dieser beiden Mengen gewählt und es folgt:

$$\varphi_i(y) < \frac{1}{k} \text{ für } i < k \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \varphi_{n_0}(x) < \varphi_{n_0}(y).$$

Falls $k > n_0$ ist, und zwar so groß, daß $\frac{1}{k} < \frac{\varphi_{n_0}(x)}{2}$ ist, dann erhalten wir durch

$$\frac{1}{k} < \frac{1}{2} \varphi_{n_0}(x) < \varphi_{n_0}(y) < \frac{1}{k}$$

einen Widerspruch. Also existieren nur endlich viele k ($\leq n_0$) mit $W_k \cap U(x) \neq \emptyset$.

Beh.: Es gibt eine Partition der Eins $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ mit $\{x : f_n(x) \neq 0\} = W_n$.
Wir definieren vorerst glatte Funktion $\psi_n : X \rightarrow \{t : 0 \leq t\}$ durch

$$\psi_n(x) := h(\varphi_n(x)) \cdot h\left(\frac{1}{n} - \varphi_1(x)\right) \cdot \dots \cdot h\left(\frac{1}{n} - \varphi_{n-1}(x)\right).$$

Dann ist

$$\psi_n(x) \neq 0 \Leftrightarrow (\varphi_n(x) > 0) \wedge \left(\frac{1}{n} - \varphi_1(x) > 0\right) \wedge \dots \wedge \left(\frac{1}{n} - \varphi_{n-1}(x) > 0\right) \Leftrightarrow x \in W_n.$$

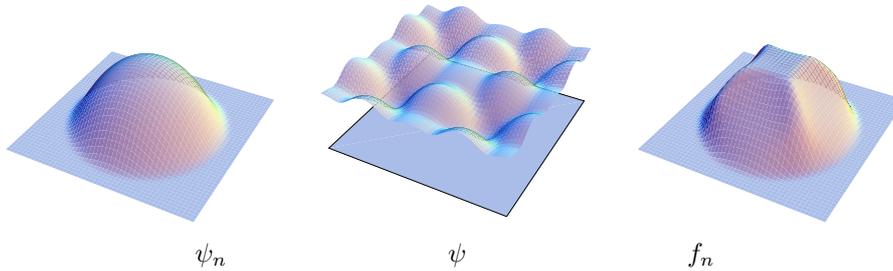
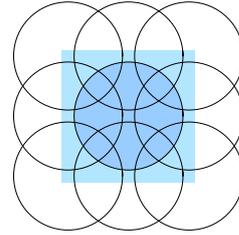
Da $\{W_n : n\}$ lokal endlich ist, sind in der Summe $\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n$ lokal nur endlich viele Summanden ungleich 0, und somit ist $\psi := \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. Diese Funktion ψ verschwindet nirgends, da die $\{W_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Überdeckung bilden.

Nun definieren wir $f_n := \frac{\psi_n}{\psi} \in C^\infty(X, \mathbb{R})$. Dann ist

$$\sum f_n = \frac{\sum \psi_n}{\psi} = \frac{\psi}{\psi} = 1$$

und damit haben wir Punkt (3) von [18.1](#) gezeigt.

(1) und (2) folgt nun aus: $\text{Trg}(f_n) \subseteq \overline{W_n} \subseteq \overline{U_{\varphi_n}} \subseteq U$ für ein $U \in \mathcal{U}$.



□

Bemerkung

Dieser Beweis funktioniert für Lindelöf-Räume X , in denen die Mengen der Gestalt $\{x : f(x) \neq 0\}$ mit $f \in C^\infty$ eine Basis der Topologie bilden.

18.5 Folgerung (Fortsetzung glatter Funktionen).

Sei M eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Eine Abbildung $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann glatt, wenn es eine offene Teilmenge U des \mathbb{R}^n gibt, die M umfaßt, und eine glatte Abbildung $\tilde{f} : U \rightarrow \mathbb{R}$, die f fortsetzt, d.h. $\tilde{f}|_M = f$.

Beweis. Die Richtung von rechts nach links ist trivial! Umgekehrt existiert für jedes $p \in M$ eine offene Umgebung $U(p) \subseteq \mathbb{R}^n$ und eine glatte Fortsetzung $\tilde{f}^p : U(p) \rightarrow \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{U} := \{U(p) : p \in M\}$ und $X := \bigcup \mathcal{U} = \bigcup_{W \in \mathcal{U}} W$. Dann ist $X \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $M \subseteq U$. Nach [18.2](#) existiert eine Partition \mathcal{G} der Eins, welche \mathcal{U} untergeordnet ist, also insbesondere für jedes $g \in \mathcal{G}$ ein $p(g) \in M$ existiert mit $\text{Trg}(g) \subseteq U(p(g))$. Die Abbildung \tilde{f} definieren wir nun folgendermaßen:

$$\tilde{f} := \sum_{g \in \mathcal{G}} g \cdot \tilde{f}^{p(g)},$$

wobei $g \cdot \tilde{f}^{p(g)}$ auf $X \setminus \text{Trg}(g)$ durch 0 fortgesetzt zu denken ist (beachte, daß eine auf einer offenen Überdeckung stückweise glatt definierte Funktion selbst glatt ist). In dieser Summe sind die einzelnen Summanden glatt, aber nur endlich viele sind

$\neq 0$. Das heißt aber gerade, daß $\tilde{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ ebenfalls glatt ist. Um auch die letzte Gleichung zu zeigen, schränken wir \tilde{f} auf M ein und rechnen für ein $x \in M$:

$$\tilde{f}(x) = \sum_{g \in \mathcal{G}} g(x) \cdot \underbrace{\tilde{f}^{p(g)}(x)}_{f(x)} = \underbrace{\left(\sum_{g \in \mathcal{G}} g(x) \right)}_1 \cdot f(x) = f(x). \quad \square$$

18.6 Folgerung (Partition der Eins für Mannigfaltigkeiten).

Jede Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n besitzt für jede offene Überdeckung eine untergeordnete C^∞ -Partition der Eins.

Beweis. Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M . O.B.d.A. Seien die $U \in \mathcal{U}$ so klein gewählt, daß sie Bilder von Parametrisierungen sind und somit es offene Teilmengen \tilde{U} des \mathbb{R}^n gibt, die M lokal trivialisieren, also insbesondere $\tilde{U} \cap M = U$ erfüllen (und für die $\tilde{U} \cap M$ in \tilde{U} abgeschlossen ist). Es ist $X := \bigcup_{U \in \mathcal{U}} \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ offen (und M ist abgeschlossen in X : Sei nämlich $x \in X \setminus M$, dann $\exists U \in \mathcal{U} : x \in \tilde{U} \setminus M$ und somit folgt $\exists U(x) \subseteq \tilde{U} : U(x) \cap M = \emptyset$).

Nach [18.2](#) existiert eine Partition \mathcal{F} der Eins auf X , welche $\tilde{\mathcal{U}} := \{\tilde{U} : U \in \mathcal{U}\}$ untergeordnet ist. Also ist $\{f|_M : f \in \mathcal{F}\}$ eine Partition der Eins, welche \mathcal{U} untergeordnet ist. \square

18.7 Proposition (Nullstellenmengen).

Jede abgeschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist Nullstellenmenge einer C^∞ -Abbildung.

Vergleiche das mit dem Satz [10.4](#) über Nullstellenmengen regulärer Abbildungen.

Beweis. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, und sei $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$, dann gibt es ein glattes $f_x \geq 0$ mit $x \in \text{Trg } f_x \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$, kompakt. Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von $\mathbb{R}^n \setminus A$ mit Mengen der Gestalt $U_x = \{y : f_x(y) > 0\}$, wobei $x \in \mathbb{R}^n \setminus A$. Da $\mathbb{R}^n \setminus A$ Lindelöf ist, besitzt \mathcal{U} eine abzählbare Teilüberdeckung. Seien f_1, f_2, \dots die entsprechenden Funktionen. O.B.d.A. sei

$$\left| \frac{\partial f_k^{t_1 + \dots + t_n}}{\partial x_1^{t_1} \dots \partial x_n^{t_n}}(x) \right| \leq \frac{1}{2^k} \text{ für } x \in \mathbb{R}^n \text{ und } t_1 + \dots + t_n \leq k.$$

Dies erreicht man durch Multiplikation von f_k mit einer genügend kleinen Zahl. Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} f_k$ konvergiert dann in allen partiellen Ableitungen gleichmäßig und definiert somit eine glatte Funktion $f \geq 0$. Für diese gilt: $f(x) = 0 \Leftrightarrow f_k(x) = 0$ für alle $k \Leftrightarrow x \notin U_{f_k}$ für alle $k \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x \in A$. \square

III. Tangentialraum

In diesem Kapitel werden wir den Begriff der Ableitung auf Abbildungen zwischen Mannigfaltigkeiten übertragen. Da Ableitungen Richtungsvektoren ineinander überführen, wirken sie nicht zwischen den Mannigfaltigkeiten sondern den ebenso zu besprechenden Tangentialräumen. Als Anwendung werden wir dann erste einfache infinitesimale Eigenschaften wie Immersivität und Submersivität von Abbildungen besprechen. Unter zusätzlichen lokalen bis globalen Eigenschaften erhalten wir dann Einbettungen, Faserbündel und als Spezialfall die bereits im ersten Kapitel angerissenen Überlagerungen.

20. Tangentialraum und Derivationen

Die Ableitung $f'(x)$ einer Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ an der Stelle x ist definiert als die lineare Approximation an die nach 0 verschobene Funktion f . Auf Mannigfaltigkeiten läßt sich das nun nicht ohne weiteres übertragen, denn um von einer linearen Abbildung $f'(x)$ sprechen zu können, muß diese zwischen Vektorräumen (und nicht zwischen Mannigfaltigkeiten wie f es macht) laufen. Wir benötigen also zuallererst eine lineare Approximation an eine Mannigfaltigkeit M im Punkt $x \in M$. Diese soll dann der Definitionsbereich bzw. Wertebereich der linearen Approximation von f bei x werden.

20.1 Satz (Beschreibung des Tangentialraums).

Sei M eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und $p \in M$. Dann sind folgende Teilmengen des \mathbb{R}^n ident:

1. Bild $\varphi'(0)$, wobei φ eine lokale Parametrisierung von M mit $\varphi(0) = p$ ist.
2. $\{c'(0) : c : I \rightarrow M \text{ glatt, } c(0) = p, I \text{ ein offenes Intervall mit } 0 \in I\}$.
3. $\text{Ker } f'(p)$, wobei f eine reguläre Gleichung ist, die M lokal um p beschreibt.
4. Graph $g'(\bar{p})$, wobei M lokal um p als Graph der Funktion g beschrieben wird mit $p = (\bar{p}, g(\bar{p}))$.

Insbesondere ist diese Teilmenge wegen (1) oder (3) ein linearer Teilraum und wegen (2) unabhängig von der gewählten Parametrisierung, Gleichung und der Darstellung des Graphens.

Beweis. ($1 \subseteq 2$) Sei $\varphi'(0)(v) \in \text{Bild}(\varphi'(0))$, wobei $v \in \mathbb{R}^n$ ist. Wenn wir die lokal in M glatte Kurve c durch

$$c(t) := \varphi(0 + tv)$$

definieren, erhalten wir $c'(0) = \varphi'(0)(v)$.

($2 \subseteq 3$) Wir betrachten nun ein $c'(0)$ für eine Kurve $c \in C^\infty(I, M)$ mit $c(0) = p$ und eine lokal reguläre Gleichung f für M ,

$$f'(\underbrace{p}_{c(0)})(c'(0)) = \underbrace{(f \circ c)'(0)}_0 = 0.$$

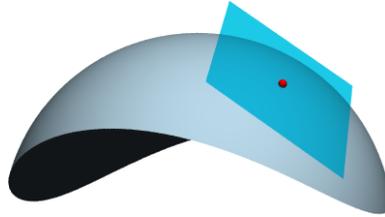
d.h. $c'(0) \in \text{Ker } f'(p)$

(3 \subseteq 1) Da wir bereits $1 \subseteq 2 \subseteq 3$ gezeigt haben, genügt zu zeigen, daß die Teilräume in (1) und (3) gleiche Dimension haben:

$$\begin{aligned} \dim \text{Bild } \varphi'(0) &= \dim \mathbb{R}^m = m \\ \dim \text{Ker } f'(p) &= n - \underbrace{\dim \text{Bild } f'(p)}_{\mathbb{R}^{n-m}} = m. \end{aligned}$$

(1 = 4) Eine Parametrisierung von M ist durch $\varphi(u) = (u, g(u))$ gegeben.

$$\text{Bild } \varphi'(\bar{p}) = \text{Bild}(\text{id}, g'(\bar{p})) = \{(v, g'(\bar{p})(v)) : v \in \mathbb{R}^m\} = \text{Graph } g'(\bar{p}) \quad \square$$



20.2 Definition (Tangentialraum und Tangentialabbildung)

Den in [20.1](#) beschriebenen Teilraum des \mathbb{R}^n nennt man den TANGENTIALRAUM an M im Punkt p und bezeichnet ihn mit $T_p M$. Seine Elemente heißen TANGENTIALVEKTOREN.

Für $f : M \rightarrow N$ definiert

$$T_p f : \begin{cases} T_p M \rightarrow T_{f(p)} N \\ c'(0) \mapsto (f \circ c)'(0) \text{ für } c \in C^\infty(I, M) \text{ mit } c(0) = p \end{cases}$$

die TANGENTIALABBILDUNG von f im Punkte $p \in M$.

Diese Definition ist sinnvoll, d.h. hängt nicht von der Wahl von c ab, sondern nur von $c'(0)$. Seien c_1 und c_2 zwei solche Kurven mit $c_1'(0) = c_2'(0)$. Zu $f : \mathbb{R}^m \supseteq M \rightarrow N \subseteq \mathbb{R}^n$ existiert eine glatte Abbildung

$$\tilde{f} : \mathbb{R}^m \stackrel{\text{offen}}{\supseteq} U(p) \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ mit } \tilde{f}|_M = f|_{U(p)}.$$

Dazu rechnen wir nun:

$$(f \circ c_1)'(0) = (\tilde{f} \circ c_1)'(0) = \tilde{f}'(p)(c_1'(0)) = \tilde{f}'(p)(c_2'(0)) \stackrel{\text{analog}}{=} (f \circ c_2)'(0).$$

Die Tangentialabbildung $T_p f$ ist linear, denn $(T_p f)(c'(0)) = (f \circ c)'(0) = (\tilde{f})'(p)(c'(0))$ also ist

$$T_p f = (\tilde{f})'(p)|_{T_p M}, \text{ wobei } \tilde{f} \text{ eine lokale Erweiterung von } f \text{ ist.}$$

20.3 Beispiel (Quadriken).

Es sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ eine quadratische (d.h. $f(tx) = t^2 f(x)$ und insbesondere $f(0) = 0$) glatte Form und $c \neq 0$. Dann ist die Quadrik $M := f^{-1}(c) = \{x \in E : f(x) = c\}$ eine Teilmannigfaltigkeit von E , denn Differenzieren der Homogenitätsgleichung liefert $f'(tx)(tv) = t^2 f'(x)(v)$, also $f'(tx)(v) = t f'(x)(v)$ und weiters $f''(tx)(tw, v) = t f''(x)(w, v)$, also $f''(x) = f''(tx) = f''(0)$ für $t \rightarrow 0$. Nach dem Taylor'schen Lehrsatz ist somit $f(x) = b(x, x)$, wobei $b := \frac{1}{2} f''(0)$ eine symmetrische quadratische Form ist.

Die Ableitung von f ist $f'(x)(v) = b(x, v) + b(v, x) = 2b(x, v)$ und somit surjektiv bezüglich v für $x \in M$, denn $2b(x, x) = f(x) = c \neq 0$. Der Tangentialraum von M bei x ist also

$$T_x M \{v \in E : b(x, v) = 0\} =: x^\perp.$$

Ein erstes Beispiel ist die Sphäre als Quadrik $S^n = f^{-1}(1)$, wobei $f(x) := |x|^2$.

Die spezielle lineare Gruppe $SL(E) := \{T \in L(E) : \det(T) = 1\}$ (siehe [14.5](#)) hat als Tangentialraum bei $\text{id} \in SL(E)$ den Teilraum $\{T \in L(E) : 0 = \det'(\text{id})(T) = \text{spur}(T)\}$ der spurfreien linearen Abbildungen.

Die orthogonale Gruppe $O(E) := \{T \in L(E) : T^t T = \text{id}\}$ (siehe [14.6](#)) hat als Tangentialraum bei id den Teilraum $\{T \in L(E) : 0 = f'(\text{id})(T) = T^t + T\}$ der schiefsymmetrischen (d.h. antiselbstadjungierten) linearen Abbildungen, wobei f die quadratische Form $f(T) := T^t T$ ist.

Allgemeiner ist für eine bilineare nicht-degenerierte Form $b : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ der Tangentialraum der in [14.7](#) behandelten Gruppe $O_b(E) := \{T \in L(E) : b(Tx, Ty) = b(x, y) \forall x, y \in E\} = \{T \in L(E) : T^t B T = B\}$ (mit $b(x, y) = \langle Bx, y \rangle$) bei id gerade der Teilraum $\{T \in L(E) : T^t B + B T = 0\}$, der bezüglich B schiefsymmetrischen linearen Abbildungen.

Für die in [14.7](#)-[14.19](#) behandelten Gruppen G erhalten wir auf entsprechende Weise folgende Beschreibungen des Tangentialraums bei $\text{id} \in G$, woraus wir wieder leicht die Dimension von G ablesen können.

G	$T_{\text{id}}G$	$\dim_{\mathbb{R}}$
$GL(n)$	$L(n)$	n^2
$GL_{\mathbb{C}}(n)$	$L_{\mathbb{C}}(n)$	$2n^2$
$GL_{\mathbb{H}}(n)$	$L_{\mathbb{H}}(n)$	$4n^2$
$SL(n)$	$\{T \in L(n) : \text{spur}_{\mathbb{R}}(T) = 0\}$	$n^2 - 1$
$SL_{\mathbb{C}}(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : \text{spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\}$	$2(n^2 - 1)$
$SL_{\mathbb{H}}(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : \text{spur}_{\mathbb{R}}(T) = 0\}$	$4n^2 - 1$
$O(n), SO(n)$	$\{T \in L(n) : T^t + T = 0\}$	$n(n-1)/2$
$O(n, k), SO(n, k)$	$\{T \in L(n) : T^t I_k + I_k T = 0\}$	$n(n-1)/2$
$O_{\mathbb{C}}(n), SO_{\mathbb{C}}(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^t + T = 0\}$	$n(n-1)$
$U(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^* + T = 0\}$	n^2
$U(n, k)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^* I_k + I_k T = 0\}$	n^2
$SU(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^* + T = 0, \text{spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\}$	$n^2 - 1$
$SU(n, k)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T^* I_k + I_k T = 0, \text{spur}_{\mathbb{C}}(T) = 0\}$	$n^2 - 1$
$Q(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : T^* + T = 0\}$	$n(2n+1)$
$Q(n, k)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : T^* I_k + I_k T = 0\}$	$n(2n+1)$
$Q_-(n)$	$\{T \in L_{\mathbb{H}}(n) : T^* i + iT = 0\}$	$n(2n-1)$
$Sp(2n)$	$\{T \in L(2n) : T^t J + J T = 0\}$	$n(2n+1)$
$Sp_{\mathbb{C}}(2n)$	$\{T \in L_{\mathbb{C}}(2n) : T^t J + J T = 0\}$	$2n(2n+1)$

Im Detail bedeutet das z.B. für die $O(n, k)$, daß

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in O(n, k) \subseteq L(\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow A^t + A = 0, \quad B^t = C, \quad D^t + D = 0 \end{aligned}$$

und für die $Sp(2n)$, daß

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2n) \subseteq L(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) &\Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^t \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow C^t = C, \quad -A^t = D, \quad B^t = B. \end{aligned}$$

20.4 Lemma.

Kettenregel: Für drei Mannigfaltigkeiten M, N, P und zwei glatte Abbildungen f, g mit $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ gilt die Kettenregel:

$$T_p(g \circ f) = T_{f(p)}g \circ T_p f.$$

Für die Identität $\text{id} : M \rightarrow M$ gilt:

$$T_p(\text{id}_M) = \text{id}_{T_p M} : T_p M \rightarrow T_p M.$$

Produktregel: Sind $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, so gilt die Produktregel

$$T_p(f \cdot g) = f(p) \cdot T_p g + g(p) \cdot T_p f.$$

Satz über inverse Funktionen: Es ist f genau dann ein lokaler Diffeomorphismus um p , wenn $T_p f$ ein Isomorphismus ist.

Beweis. Indem man alle auftretenden Funktionen glatt auf Umgebungen in den umgebenden Vektorräumen erweitert, folgt die Ketten- und die Produkt-Regel aus den klassischen Versionen, siehe [56, 6.1.9] and [56, 6.1.13]. Der Satz über inverse Funktionen ist ohnehin nur lokaler Natur also ebenfalls eine Konsequenz des klassischen Satzes [10.2]. \square

Leider können wir die in [20.1] gegebenen Beschreibungen des Tangentialraums nicht direkt für abstrakte Mannigfaltigkeiten verwenden, da der umgebende Vektorraum wesentlich eingeht. Wir brauchen also noch andere (abstraktere) Beschreibungen. Dazu beachten wir die Wirkung von $v \in T_p M$ auf $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ vermöge $f \mapsto T_p f \cdot v$ und geben folgende

20.5 Definition (Derivation)

Eine Abbildung $\partial : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ heißt DERIVATION über $p \in M$, wenn sie linear ist und die Produktregel erfüllt, d.h. für $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt:

1. $\partial(f + g) = \partial f + \partial g$
2. $\partial(\alpha f) = \alpha \cdot \partial f$
3. $\partial(f \cdot g) = \partial f \cdot g(p) + f(p) \cdot \partial g$

Mit $\text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ bezeichnen wir die Menge aller Derivationen über $p \in M$. Bezüglich der punktweisen Operationen, ist dies ein Vektorraum.

20.6 Satz (Tangentialvektoren als Derivationen).

Die Abbildung

$$\begin{aligned} T_p M \times C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (v, f) &\mapsto (T_p f)(v) \end{aligned}$$

induziert einen linearen Isomorphismus

$$\Phi_p : \begin{cases} T_p M \rightarrow \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ v \mapsto \partial_v \left(: f \mapsto (T_p f)(v) \right) \end{cases}$$

Für jedes glatte $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ entspricht der Tangentialabbildung $T_p f$ von f via Φ_p folgende Zuordnung auf der Seite der Derivation:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{\Phi_p} & \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \ni & \partial \\ \downarrow T_p f & & \downarrow (f^*)^* & & \downarrow \partial \\ T_{f(p)} N & \xrightarrow{\Phi_{f(p)}} & \text{Der}_{f(p)}(C^\infty(N, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \ni & (g \mapsto \partial(g \circ f)) = \partial \circ f^* \end{array}$$

Beweis. Wohldefiniertheit: Die Abbildung $T_p M \times C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$, $(v, f) \mapsto (T_p f)(v)$ ist klarerweise bilinear, also induziert sie eine lineare Abbildung $T_p M \rightarrow L(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ durch $v \mapsto (f \mapsto (T_p f)(v))$. Diese Abbildung hat Werte im Raum der Derivationen über p , denn seien $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ zwei glatte Funktionen und $v \in T_p M$ dann gilt nach der Produktregel [20.4](#):

$$\partial_v(f \cdot g) = T_p(f \cdot g)(v) = f(p) \cdot (T_p g)(v) + g(p) \cdot (T_p f)(v).$$

Kommutativität: Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt und $p \in M$. Dann kommutiert obiges Diagramm, denn für $v \in T_p M$ und $g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ ist $(\Phi_{f(p)} \circ T_p f)(v)(g) = (T_{f(p)} g)((T_p f)(v)) = (T_p(g \circ f))(v) = \partial(g \circ f)$, da $\partial := \Phi_p(v)$ auf $h \in C^\infty(N, \mathbb{R})$ durch $\partial(h) = (T_p h)(v)$ wirkt.

Lokalität von Derivationen: Wir zeigen zuerst, daß jede Derivation ∂ von $C^\infty(M, \mathbb{R})$ über $p \in M$ ein lokaler Operator ist, d.h. der Wert $\partial(f)$ nur von $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ nahe p abhängt.

Seien also $f_1, f_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f_1 = f_2$ nahe p vorgegeben. Sei $f := f_1 - f_2$ und sei $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ so gewählt, daß $g(p) = 1$ und daß der Träger von g in der Menge der x mit $f(x) = 0$ enthalten ist. Dann gilt:

$$0 = \partial(0) = \partial(g \cdot f) = \underbrace{g(p)}_1 \cdot \partial(f) + \underbrace{f(p)}_0 \cdot \partial(g) = \partial(f).$$

Daraus ergibt sich auch, daß $\partial(f) = 0$ für alle konstanten Funktionen f , denn $\partial(1) = \partial(1 \cdot 1) = 1 \cdot \partial(1) + \partial(1) \cdot 1$, also $\partial(1) = 0$.

Bijektivität für offene Teilmannigfaltigkeiten: Wir wollen zuerst für den Spezialfall $0 = p \in M = U \stackrel{\text{offen}}{\subseteq} \mathbb{R}^m$ die Bijektivität von Φ beweisen. Sei $(e_i)_{i=1}^m$ die Standardbasis im \mathbb{R}^m ist, dann kann jeder Vektor $v \in T_p M = \mathbb{R}^m$ in der Basis als $v = \sum_i v^i e_i$ entwickelt werden. Betrachten wir nun

$$\begin{aligned} \Phi : T_p M \ni v &\mapsto \partial_v \in \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ \text{mit } \partial_v(f) &:= (T_p f)(v) = f'(p)(v) = \sum_{i=1}^m (\partial_i f)(p) \cdot v^i, \end{aligned}$$

wobei $\partial_i f$ die i -te partielle Ableitung von f ist, d.h.

$$(\partial_i f)(p) = \left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} f(p + te^i) = f'(p)(e^i).$$

Die Derivation ∂_v ist nichts anderes als ‘‘Richtungsableitung d_v in Richtung v and der Stelle p zu nehmen’’ und Φ ist injektiv, denn die Komponenten von v können vermöge

$$\partial_v(\text{pr}_j) = \sum_{i=1}^m \underbrace{(\partial_i \text{pr}_j)(p)}_{\delta_{i,j}} \cdot v^i = v^j$$

aus ∂_v eindeutig rekonstruiert werden.

Umgekehrt ist Φ aber auch surjektiv, denn für $\partial \in \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$, $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ und x nahe 0 gilt folgendes:

$$f(x) - f(0) = \int_0^1 f'(tx)(x) dt = \int_0^1 \sum_i (\partial_i f)(tx) x^i dt = \sum_{i=1}^m x^i \underbrace{\int_0^1 (\partial_i f)(tx) dt}_{=: h_i(x)}$$

und weiters, da ∂ ein lokaler Operator ist,

$$\begin{aligned} \partial(f) &= \partial(f(0)) + \partial\left(\sum_{i=1}^m \text{pr}^i \cdot h_i\right) = 0 + \sum_{i=1}^m \left(\underbrace{\partial(\text{pr}^i)}_{=: v^i} \underbrace{h_i(0)}_{(\partial_i f)(0)} + \underbrace{\text{pr}^i(0)}_{=0} \cdot \partial(h_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^m v^i \cdot (\partial_i f)(0). \end{aligned}$$

Also ist $\partial(f) = \partial_v(f) = \Phi(v)(f)$ für alle f .

Bijektivität im Allgemeinen: Sei nun M eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und φ eine lokale Parametrisierung von M zentriert bei p . Folgendes Diagramm zeigt, daß Φ_p eine Isomorphismus ist:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m = T_0U & \xrightarrow[\cong]{T_0\varphi} & T_pM \hookrightarrow \mathbb{R}^n \\ \Phi_0 \downarrow \cong & & \Phi_p \downarrow \\ \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \xrightarrow[\cong]{(\varphi^*)^*} & \text{Der}_p(C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R}), \mathbb{R}) \xrightarrow[\cong]{(\text{incl}^*)^*} \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \end{array}$$

Dabei ist $T_0\varphi$ ein Isomorphismus nach [20.4](#); Φ_0 ist einer wegen des Spezialfalls; $(\varphi^*)^* : \partial \mapsto (f \mapsto \partial(f \circ \varphi))$ ist einer, da $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ ein Diffeomorphismus ist; und schließlich ist der rechte untere ein solcher, da Derivationen lokale Operatoren sind; Also ist auch Φ_p ein Isomorphismus, und somit der Satz bewiesen. \square

Wir können den Satz [20.6](#) nun dazu verwenden um den Tangentialraum abstrakter Mannigfaltigkeiten wie folgt zu definieren:

20.7 Definition (Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit)

Unter dem TANGENTIALRAUM einer abstrakten Mannigfaltigkeit M bei p versteht man den Vektorraum

$$T_pM := \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}).$$

Beachte, daß wir damit für Teilmannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und insbesondere für offene Teilmengen den in [20.2](#) definierten Tangentialraum $T_pM \subseteq \mathbb{R}^n$ durch einen nicht identen aber kanonisch isomorphen Vektorraum $T_pM \subseteq L(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ ersetzt haben.

Ist $f \in C^\infty(M, N)$ und $p \in M$, dann heißt die durch

$$\partial \mapsto ((T_p f)(\partial) : g \mapsto \partial(g \circ f)) \text{ für } \partial \in T_pM \text{ und } g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$$

definierte Abbildung $T_p f = (f^*)^* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, die TANGENTIALABBILDUNG von M bei p .

20.8 Basen des Tangentialraums

Wenn wir wie für Abbildungen zwischen \mathbb{R}^m 's die Ableitung einer Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten als Matrix (also als Jacobi-Matrix) schreiben wollen so benötigen wir eine Basis. Aber selbst wenn wir im umgebenden Vektorraum eine Basis gewählt haben, so bekommen wir noch lange keine ausgezeichnete Basis des Tangentialraums (man denke z.B. an die Sphäre S^2). Wir können aber wie folgt vorgehen. Sei dazu M eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$ und φ eine Karte von M zentriert bei p . Dann ist $T_0 \varphi : T_0 \mathbb{R}^m \rightarrow T_p M$ ein linearer Isomorphismus nach [20.4](#) falls M eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n ist, aber auch im allgemeinen Fall einer abstrakten Mannigfaltigkeit, da [20.4](#) für diese ganz leicht zu zeigen ist. Die Standardbasis $(e_i)_{i=1}^m$ des \mathbb{R}^m wird durch den Isomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^m \cong \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ auf die Basis der partiellen Ableitungen $(\partial_i|_0)_{i=1}^m$ in $T_0 U$ abgebildet. Der Isomorphismus $T_0 \varphi$ bildet diese Basis weiter auf eine Basis $(\partial_i^\varphi|_p)_{i=1}^m$ in $T_p M$ ab, welche auf $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ durch

$$\partial_i^\varphi|_p(f) := (T_0 \varphi)(\partial_i|_0)(f) = (\varphi^*)^*(\partial_i|_0)(f) = \partial_i|_0(\varphi^*(f)) = \partial_i(f \circ \varphi)(0).$$

definiert ist, also durch partielles Ableiten der Kartendarstellung $f \circ \varphi$ von f in die i -te Richtung e_i an der Stelle $0\varphi^{-1}(p)$. Zusammengefaßt also:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \xrightarrow[\Phi]{\cong} & T_0 U & \xrightarrow[T_0 \varphi]{\cong} & T_p M = \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\ e_i & \xrightarrow{\Phi} & \partial_i|_0 & \xrightarrow{T_0 \varphi} & \partial_i^\varphi|_p : f \mapsto \partial_i(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \end{array}$$

Im Fall einer Teilmannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^n$, sind dies (via der Einbettung $T_p M \hookrightarrow \mathbb{R}^n$) gerade die partiellen Ableitungen $(T_0 \varphi)(\partial_i|_0) = (\partial_i \varphi)(0) := \varphi'(0)(e_i)$ der Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^n$.

Seien $(u^1, \dots, u^m) := \varphi^{-1} : M \supseteq \varphi(U) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ die zu φ gehörenden lokalen Koordinaten, dann bezeichnen wir $\partial_i^\varphi|_p \in T_p M = \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ auch als

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p := \partial_i^\varphi|_p.$$

Es drückt die Schreibweise ∂_i^φ zwar deutlicher aus, daß diese Derivation von der Karte φ abhängt und nicht, wie man der Bezeichnungsweise $\frac{\partial}{\partial u^i}$ fälschlicherweise entnehmen könnte, nur von der i -ten Komponente u^i der Umkehrfunktion $\varphi^{-1} = (u^1, \dots, u^m)$. Die Bezeichnung $\frac{\partial}{\partial u^i}$ ist allerdings die üblichere und macht auch keine Probleme, falls man sie nur als $(\frac{\partial}{\partial u})_i$ und nicht als $\frac{\partial}{\partial(u^i)}$ interpretiert.

Ist φ nicht bei p zentriert, dann ist

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (f) = \partial_i^\varphi|_p(f) = \partial_i(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \text{ für } f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

und insbesondere ist

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (u^j) = \partial_i(u^j \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i(\text{pr}^j)(0) = \delta_i^j,$$

da wegen der Lokalität von $\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p$ die vorige Formel auch für $f \in C^\infty(\varphi(U), \mathbb{R})$ gilt.

20.9 Transformationsverhalten von Tangentialvektoren

Sei nun $g \in C^\infty(M, N)$ und seien $\varphi^{-1} = u = (u^1, \dots, u^m)$ lokale Koordinaten von M bei p , ebenso seien $\psi^{-1} = v = (v^1, \dots, v^n)$ lokale Koordinaten von N bei $g(p)$. Wir wissen, daß $T_p g : T_p M \rightarrow T_{g(p)} N$ linear ist und $(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p)$ eine Basis von $T_p M$ sowie $(\frac{\partial}{\partial v^i} \Big|_{f(p)})$ eine von $T_{f(p)} N$ ist. Wie sieht nun die Matrixdarstellung $[T_p g]$ von $T_p g$ bezüglich dieser Basen aus?

Da nach Definition von $T_p g$ und wegen [20.6](#) das folgende Diagramm kommutiert

$$\begin{array}{ccc}
 & \mathbb{R}^m & \xrightarrow{(\bar{g})'(0)} & \mathbb{R}^n \\
 & \downarrow \Phi \cong & & \downarrow \Phi \cong \\
 U & \xrightarrow{\bar{g}} & V & \\
 \varphi \downarrow & & \psi \downarrow & \\
 M & \xrightarrow{g} & N & \\
 & \text{Der}_0(C^\infty(U, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \xrightarrow{T_0 \bar{g}} & \text{Der}_0(C^\infty(V, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \\
 & \downarrow T_0 \varphi \cong & & \downarrow T_0 \psi \cong \\
 & \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) & \xrightarrow{T_p g} & \text{Der}_{g(p)}(C^\infty(N, \mathbb{R}), \mathbb{R})
 \end{array}$$

werden die entsprechenden Basen wie folgt abgebildet:

$$\begin{array}{ccc}
 e_i & \xrightarrow{(\bar{g})'(0)} & \bar{g}'(0)(e_i) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot e_j \\
 \downarrow \Phi \cong & & \downarrow \Phi \cong \\
 \partial_i & \xrightarrow{T_0 \bar{g}} & (T_0 \bar{g})(\partial_i) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j \\
 \downarrow T_0 \varphi \cong & & \downarrow T_0 \psi \cong \\
 \partial_i^\varphi & \xrightarrow{T_p g} & (T_p g)(\partial_i^\varphi) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi
 \end{array}$$

Für die Komponenten von Tangentialvektoren $\xi = \sum_i \xi^i \partial_i^\varphi \in T_p M$ erhalten wir also folgendes:

$$\begin{aligned}
 (T_p g)(\xi) &= (T_p g)\left(\sum_i \xi^i \cdot \partial_i^\varphi\right) = \sum_i \xi^i \cdot (T_p g)(\partial_i^\varphi) = \sum_i \xi^i \cdot \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi \\
 &= \sum_j \left(\sum_i \xi^i \cdot \partial_i \bar{g}^j(0)\right) \cdot \partial_j^\psi
 \end{aligned}$$

Die Komponenten von $\eta = \sum_j \eta^j \partial_j^\psi := (T_p g)(\xi) \in T_{g(p)} N$ sind somit durch

$$\eta^j = \sum_i \xi^i \cdot \partial_i \bar{g}^j(0)$$

geben, bzw. in Matrizen-Schreibweise

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{g}^1(0) & \dots & \partial_m \bar{g}^1(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \bar{g}^n(0) & \dots & \partial_m \bar{g}^n(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix},$$

also gerade durch Multiplikation mit der Jacobi-Matrix der Koordinatendarstellung $\bar{g} = \psi^{-1} \circ g \circ \varphi$ von g .

Wählen wir insbesondere $g = \text{id}_M$ und zwei Karten φ und ψ zentriert bei $p \in M$. Dann ist \bar{g} der Kartenwechsel $\psi^{-1} \circ \varphi$ von den Koordinaten $(u^1, \dots, u^m) := \varphi^{-1}$ zu den Koordinaten $(v^1, \dots, v^m) = \psi^{-1}$. Wenn wir obige Formel $\partial_i^\psi = (T_p \text{id})(\partial_i^\varphi) =$

$(T_p g)(\partial_i^\varphi) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi$ formal als Multiplikation von Matrizen auffassen, dann ist

$$\begin{pmatrix} \partial_1^\varphi \\ \vdots \\ \partial_m^\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 \bar{g}^1(0) & \cdots & \partial_1 \bar{g}^m(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_m \bar{g}^1(0) & \cdots & \partial_m \bar{g}^m(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial_1^\psi \\ \vdots \\ \partial_m^\psi \end{pmatrix}$$

also erhalten wir die Basis (∂_i^φ) aus der Basis (∂_j^ψ) indem wir mit der transponierten Jacobi-Matrix des inversen Kartenwechsels $\psi^{-1} \circ \varphi = (\varphi^{-1} \circ \psi)^{-1}$ von φ zu ψ multiplizieren.

Wenn wir nun $\frac{\partial}{\partial u^i} := \partial_i^\varphi$, $\frac{\partial}{\partial v^j} := \partial_j^\psi$ und $\frac{\partial f}{\partial u^i} := \frac{\partial}{\partial u^i} f$ setzen und beachten, daß $(\partial_i^\varphi)|_p(f) = \partial_i(f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p))$ ist und somit

$$\begin{aligned} \partial_i \bar{g}^j(0) &= \partial_i((\psi^{-1} \circ g \circ \varphi)^j)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i(v^j \circ g \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) \\ &= \partial_i^\varphi(v^j \circ g)(p) = \frac{\partial}{\partial u^i}(v^j \circ g)(p) \end{aligned}$$

gilt, dann besagt obige Formel für $g = \text{id}$, daß

$$\frac{\partial}{\partial u^i} = (T_p \text{id})(\partial_i^\varphi) = \sum_j \partial_i \bar{g}^j(0) \cdot \partial_j^\psi = \sum_j \frac{\partial v^j}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial}{\partial v^j}$$

(beachte den memotechnischen Vorteil dieser Notation) bzw. in (formaler) Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial v^m} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u^1}{\partial v^1} & \cdots & \frac{\partial u^m}{\partial v^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u^1}{\partial v^m} & \cdots & \frac{\partial u^m}{\partial v^m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial u^m} \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} \eta^1 \\ \vdots \\ \eta^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v^1}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial v^1}{\partial u^m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v^m}{\partial u^1} & \cdots & \frac{\partial v^m}{\partial u^m} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix}.$$

20.10 Beispiel

Sei $M = \mathbb{R}^3$. Wir wählen 3 verschiedene Koordinatensysteme:

- (1) KARTESISCHE KOORDINATEN x, y, z mit zugehörigen Basisvektoren: $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$.
- (2) ZYLINDERKOORDINATEN r, φ, z mit zugehörigen Basisvektoren: $\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial z}$.
- (3) KUGELKOORDINATEN R, φ, ϑ mit zugehörigen Basisvektoren: $\frac{\partial}{\partial R}, \frac{\partial}{\partial \varphi}, \frac{\partial}{\partial \vartheta}$.

Für den Kartenwechsel und die Jacobimatrizen der Kartenwechsel erhalten wir für

(2) \rightarrow (1): $x = r \cdot \cos \varphi, y = r \cdot \sin \varphi, z = z$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \cdot \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cdot \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

für (3) \rightarrow (2): $r = R \cdot \cos \vartheta, z = R \cdot \sin \vartheta$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial R} & \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial R} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z}{\partial R} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & -R \cdot \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \vartheta & 0 & R \cdot \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

und schließlich für (1) \rightarrow (3):

$R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi = \arctan(y/x)$, $\vartheta = \arctan(z/\sqrt{x^2 + y^2})$. Das Ausrechnen der Jacobi-Matrix dieses Kartenwechsels überlassen wir dem Leser als Übung.

Wenn wir am \mathbb{R}^2 neben den kartesischen Koordinaten x, y neue Koordinaten $\bar{x} := x$, $\bar{y} = x + y$ verwenden, dann stimmen die jeweils ersten Koordinaten überein nicht aber die entsprechenden Derivationen

$$\frac{\partial}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial \bar{x}}{\partial x}}_{=1} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \underbrace{\frac{\partial \bar{y}}{\partial x}}_{=1} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \neq \frac{\partial}{\partial \bar{x}}.$$

Es gibt auch die Möglichkeit, den Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit geometrischer zu beschreiben.

20.11 Lemma (Tangentialvektoren via Kurven).

Sei $C_x^\infty(\mathbb{R}, M) := \{c \in C^\infty(\mathbb{R}, M) : c(0) = x\}$ die Menge der glatten Kurven durch $x \in M$. Für eine solche glatte Kurve c und eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ sei $\partial_c(f) := (f \circ c)'(0)$. Dann definiert $c \mapsto \partial_c$ eine surjektive Abbildung

$$\partial : C_x^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}).$$

Wir können also $T_x M$ mit $C_x^\infty(\mathbb{R}, M)/\sim$ identifizieren, wobei \sim folgende Äquivalenzrelation auf $C_x^\infty(\mathbb{R}, M)$ ist:

$$c_1 \sim c_2 \quad :\Leftrightarrow \quad \forall f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : (f \circ c_1)'(0) = (f \circ c_2)'(0).$$

Die Tangentialabbildung einer glatten Funktion $g : M \rightarrow N$ sieht in dieser Beschreibung so aus:

$$(T_x g)(\partial_c) = \partial_{g \circ c}.$$

Dies entspricht also der Beschreibung von $T_x M$ für Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n in (2) von [20.1](#). Sie hat allerdings den Nachteil, damit die Vektorraumstruktur von $T_p M$ nicht erkennen zu können.

Beweis. Die folgende Rechnung zeigt, daß ∂_c eine Derivation über x ist:

$$\begin{aligned} \partial_c(f + g) &= \left((f + g) \circ c \right)'(0) = \left((f \circ c) + (g \circ c) \right)'(0) \\ &= (f \circ c)'(0) + (g \circ c)'(0) = \partial_c f + \partial_c g \\ \partial_c(\lambda f) &= \left((\lambda f) \circ c \right)'(0) = \left(\lambda(f \circ c) \right)'(0) \\ &= \lambda(f \circ c)'(0) = \lambda \cdot \partial_c f \\ \partial_c(f \cdot g) &= \left((f \cdot g) \circ c \right)'(0) = \left((f \circ c) \cdot (g \circ c) \right)'(0) \\ &= (f \circ c)'(0) \cdot (g \circ c)(0) + (f \circ c)(0) \cdot (g \circ c)'(0) \\ &= (\partial_c f) \cdot g(x) + (\partial_c g) \cdot f(x) \end{aligned}$$

Um zu zeigen, daß die Zuordnung $c \mapsto \partial_c$ surjektiv ist, wählen wir lokale Koordinaten $\varphi^{-1} = (u^1, \dots, u^m)$ zentriert um $x \in M$. Jedes Element von $T_x M = \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ hat dann die Gestalt $\sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x$. Wir definieren nun eine (lokale) Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ durch $c(t) := \varphi(t\xi^1, \dots, t\xi^m)$, d.h. $u^i(c(t)) := t\xi^i$ für

$i = 1, \dots, m$, dann gilt für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} (f \circ c)'(0) &= \left((f \circ \varphi) \circ (\varphi^{-1} \circ c) \right)'(0) = (f \circ \varphi)'(0) \left((\varphi^{-1} \circ c)'(0) \right) \\ &= (f \circ \varphi)'(0)(\xi^1, \dots, \xi^m) = \sum_{i=1}^m \partial_i (f \circ \varphi)(0) \xi^i \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i} |_x (f) \xi^i = \sum_{i=1}^m \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} |_x (f). \end{aligned}$$

Somit ist ∂_c das vorgegebene Element von $T_x M$, mit dem einzigen Schönheitsfehler, daß c nur lokal definiert ist. Da aber obige Rechnung nur vom Aussehen von c nahe 0 abhängt, können wir c so umparametrisieren, daß sich nahe 0 nichts ändert, aber $c(t)$ ganz in $\text{Dom}(\varphi)$ bleibt.

Daß $T_x g$ die angegebene Gestalt hat ergibt sich sofort aus:

$$\begin{aligned} \left((T_x g)(\partial_c) \right) (f) &= \partial_c (f \circ g) = \left((f \circ g) \circ c \right)'(0) \\ &= \left(f \circ (g \circ c) \right)'(0) = \partial_{g \circ c} (f). \quad \square \end{aligned}$$

Vor allem unter Physikern ist auch folgende Beschreibung des Tangentialraums üblich:

20.12 Lemma (Tangentialvektoren via Koordinaten).

Für jede lokale Parametrisierung φ von M zentriert um x seien die Koordinaten $(\xi_\varphi^i)_{i=1}^m$ eines Vektors $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$ so vorgegeben, daß sie sich richtig transformieren, d.h. für je zwei Karten φ_1 und φ_2 mit Kartenwechsel $\psi = \varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ gelte $\xi_{\varphi_2} = \psi'(0) \cdot \xi_{\varphi_1}$, oder in Koordinaten $\xi_{\varphi_2}^i = \sum_{j=1}^m \partial_j \psi^i(0) \cdot \xi_{\varphi_1}^j$. Dann entspricht diesem Koordinaten-Schema ein eindeutiger Tangentialvektor in $T_p M$ und umgekehrt.

Ist $g : M \rightarrow N$ eine glatte Funktion, so bildet $T_x f$ solch ein Schema $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$ auf das Schema $\eta_\psi \in \mathbb{R}^n$ ab, mit $\eta_\psi = (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)'(0) \cdot \xi_\varphi$.

Beweis. Sei $\xi_\varphi \in \mathbb{R}^m$ für eine lokale Parametrisierung φ vorgegeben und seien $(u^1, \dots, u^m) := \varphi^{-1}$ die zugehörigen lokalen Koordinaten. Dann definieren wir eine Derivation $\partial_\xi \in T_x M$ durch $\partial_\xi := \sum_{i=1}^m \xi_\varphi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. Diese Definition macht Sinn, d.h. ist unabhängig von der Wahl der Karte φ , denn die ξ_φ transformieren sich genauso wie die Koeffizienten einer Derivation bezüglich der Basen $(\frac{\partial}{\partial u^i})$.

Umgekehrt bilden die Koeffizienten ξ_φ^i einer Derivation $\partial \in T_x M$ bezüglich der zu $\varphi = (u^1, \dots, u^m)^{-1}$ gehörenden Basis $(\frac{\partial}{\partial u^i})$, genau ein richtig transformierendes Koordinaten-Schema.

Daß $T_x g$ diese Schemata auf angegebene Weise abbildet, folgt sofort aus der Koordinatendarstellung von $T_x f$ bezüglich der Basen $(\frac{\partial}{\partial u^i})$ und $(\frac{\partial}{\partial v^j})$ von $T_x M$ und $T_{g(x)} N$. \square

21. Immersionen

Wir wollen in den verbleibenden Abschnitten dieses Kapitels die Tangentialabbildung verwenden, um spezielle Eigenschaften von glatten Abbildungen zu studieren. Insbesondere interessieren wir uns für den richtigen Begriff von "Unterobjekten" sowie "Quotientenobjekten" von Mannigfaltigkeiten.

21.1 Definition (Immersionen und Submersionen)

Es sei $f \in C^\infty(M, N)$, wo M, N Mannigfaltigkeiten sind. Dann heißt:

- f REGULÄR $:\Leftrightarrow \text{rang}(T_x f)$ ist maximal ($= \max\{\dim T_x M, \dim T_{f(x)} N\}$) $\forall x \in M$;
 f IMMERSIV $:\Leftrightarrow T_x f$ ist injektiv $\forall x \in M$;
 f SUBMERSIV $:\Leftrightarrow T_x f$ ist surjektiv $\forall x \in M$.

Man beachte, daß eine Abbildung genau dann immersiv ist, wenn sie regulär ist und $\dim M \leq \dim N$ gilt. Ebenso ist sie genau dann submersiv, wenn sie regulär ist und $\dim M \geq \dim N$ gilt.

21.2 Rangsatz.

Es sei $f \in C^\infty(M, N)$ und $r \in \mathbb{N}$. Dann ist $\text{rang}(T_x f) = r \forall x \in M$ genau dann, wenn für jedes $x \in M$ eine Karte φ zentriert bei x und eine Karte ψ zentriert bei $f(x)$ existiert, sodaß die lokal definierte Abbildung:

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

die Gestalt $(x, y) \mapsto (x, 0)$ hat.

Beachte, daß wir (durch Einschränken von φ auf $\varphi^{-1}(f^{-1}(\text{Bild } \psi))$) o.B.d.A. voraussetzen können, daß $f(\text{Bild } \varphi) \subseteq \text{Bild } \psi$ ist und somit folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} M \supseteq \text{Bild } \varphi & \xrightarrow{f|_{\text{Bild } \varphi}} & \text{Bild } \psi \subseteq N \\ \varphi \uparrow \cong & & \cong \uparrow \psi \\ \mathbb{R}^m \supseteq \text{Dom } \varphi & \xrightarrow{\psi^{-1} \circ f \circ \varphi} & \text{Dom } \psi \subseteq \mathbb{R}^n \end{array}$$

Durch weiteres Verkleinern können wir die Gestalt $\text{Dom } \varphi = W_1 \times W_2 \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r}$ und $\text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^r = W_1$ (oder mittels Kompaktheitsargument sogar die Gestalt $\text{Dom } \psi = W_1 \times W_3 \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$) erreichen.

Beweis. (\Leftarrow) Es ist $\text{rang } T_x f = \text{rang } T_0(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi) = \text{rang}((x, y) \mapsto (x, 0)) = r$.

(\Rightarrow) O.B.d.A. sei $M = \mathbb{R}^m$, $N = \mathbb{R}^n$, $x = 0$ und $f(x) = 0$. Die Idee des Beweises besteht darin, daß f lokal ungefähr wie die Ableitung $f'(0)$ aussieht, und diese ist als lineare Abbildung vom Rang r bis auf Basiswechsel von der Form $(x, y) \mapsto (x, 0)$. Sei nämlich $F_1 := \text{Bild}(f'(0))$, $F_2 := F_1^\perp$, $E_2 := \text{Ker}(f'(0))$ und $E_1 := E_2^\perp$. Es ist $r = \text{rang}(f'(0)) = \dim(F_1)$ und somit $\dim(E_1) := m - \dim(E_2) = \dim(F_1)$ und die Komponenten-Darstellung von $f'(0) : E_1 \oplus E_2 \rightarrow F_1 \oplus F_2$ hat folgende Gestalt:

$$f'(0) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

mit invertierbaren $A \in L(E_1, F_1)$ und wenn wir $f = (f_1, f_2)$ schreiben, dann ist $A = \partial_1 f_1(0, 0)$.

Wir versuchen nun durch lokale Diffeomorphismen die Abbildung f auf die gewünschte Form zu bringen. Dazu betrachten wir zuerst eine leicht modifizierte Variante von f nämlich die durch $\varphi^{-1} : (x_1, x_2) \mapsto (f_1(x_1, x_2), x_2)$ gegebene glatte Abbildung $\varphi^{-1} : E_1 \oplus E_2 \rightarrow F_1 \oplus E_2$ (die Bezeichnungsweise als Inverse werden wir gleich rechtfertigen). Die Jacobi-Matrix von φ^{-1} in 0 sieht wie folgt aus:

$$(\varphi^{-1})'(0) = \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(0, 0) & \partial_2 f_1(0, 0) \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & \text{id} \end{pmatrix}.$$

Also ist $(\varphi^{-1})'(0)$ invertierbar und wegen dem inversen Funktionen Satz [10.2](#) ist φ^{-1} ein lokaler Diffeomorphismus. Sei φ der zu φ^{-1} inverse lokale Diffeomorphismus und sei $g := f \circ \varphi$, dann hat $g = (g_1, g_2)$ folgende Gestalt:

$$g(y_1, y_2) = (y_1, g_2(y_1, 0)).$$

Denn

$$\begin{aligned} x = (x_1, x_2) &:= \varphi(y_1, y_2) \Rightarrow \\ y = (y_1, y_2) &= \varphi^{-1}(x_1, x_2) = (f_1(x_1, x_2), x_2) \Rightarrow \\ y_1 &= f_1(x_1, x_2) = f_1(\varphi(y_1, y_2)) = g_1(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Weiters gilt $\text{Rang } g'(y) = \text{Rang } f'(\varphi(y)) = r$, da φ ein lokaler Diffeomorphismus ist. Also ist in der Komponenten-Darstellung von $g'(y)$

$$g'(y) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ \partial_1 g_2(y) & \partial_2 g_2(y) \end{pmatrix}$$

die rechte untere Ecke $\partial_2 g_2(y) = 0$ und somit $g_2(y_1, y_2) = g_2(y_1, 0)$. Um nun die zweite Komponente von g zu 0 zu machen setzen wir mit der Abbildung $\psi^{-1} : F_1 \oplus F_2 \rightarrow F_1 \oplus F_2$ (die Bezeichnungsweise als Inverse werden wir ebenfalls gleich rechtfertigen) definiert durch

$$\psi^{-1}(y_1, y_2) := (y_1, y_2 - g_2(y_1, 0))$$

zusammen. Die Komponenten-Darstellung von $(\psi^{-1})'(x)$ ist gegeben durch

$$(\psi^{-1})'(y_1, y_2) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ -\partial_1 g_2(y_1, 0) & \text{id} \end{pmatrix}$$

und somit ist ψ^{-1} ein lokaler Diffeomorphismus, also wirklich das Inverse eines ψ . Weiters gilt

$$\begin{aligned} (\psi^{-1} \circ f \circ \varphi)(y_1, y_2) &= \psi^{-1}(y_1, g_2(y_1, 0)) \\ &= (y_1, g_2(y_1, 0) - g_2(y_1, 0)) = (y_1, 0) \quad \square \end{aligned}$$

21.3 Folgerung (Charakterisierung von Diffeomorphismen).

Für glatte Abbildungen f gilt:

$$f \text{ ist Diffeomorphismus} \Leftrightarrow f \text{ und alle } T_x f \text{ sind bijektiv.}$$

Beweis. (\Rightarrow) Die Abbildung f ist klarerweise bijektiv. Daß auch $T_x f$ bijektiv ist, haben wir in [20.4](#) bereits gezeigt.

(\Leftarrow) Die Abbildung $g := f^{-1}$ ist wohldefiniert und stetig, da f als lokaler Diffeomorphismus offen ist. Nach dem Rangsatz [21.2](#) existieren also Karten φ und ψ um x bzw. $f(x)$, sodaß $f(\text{Bild}(\varphi)) \subseteq \text{Bild}(\psi)$ und $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \text{id}$.

$$\begin{array}{ccc} \text{Bild } \varphi & \xrightarrow{f} & \text{Bild } \psi \\ \cong \uparrow \varphi & & \uparrow \psi \cong \\ \mathbb{R}^m & \xleftarrow{\text{id}} \text{Dom } \varphi \xrightarrow{\text{id}} \text{Dom } \psi \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R}^m \end{array}$$

Es kann O.B.d.A. folglich $\text{Dom } \psi = \text{Dom } \varphi$ gewählt werden. Somit ist $z \mapsto f^{-1}(z) = (\varphi \circ \psi^{-1})(z)$ glatt auf $\text{Bild } \psi$ und f ist ein Diffeomorphismus, da ψ^{-1} eingeschränkt auf $\text{Bild } \varphi$ eine ist. \square

21.4 Charakterisierung von Immersionen

Wir wollen nun versuchen herauszubekommen welche Teilmengen M von Mannigfaltigkeiten N so zu Mannigfaltigkeiten gemacht werden können, daß die Inklusion $f := \text{incl} : M \rightarrow N$ glatt ist und daß die Tangentialräume $T_x M$ von M vermöge $T_x f$ bijektiv auf Teilräume von $T_{f(x)} N$ abgebildet werden, also f eine Immersion ist. Wir müssen dazu versuchen die Eigenschaft, daß f eine Immersion ist, mittels Karten von N auszudrücken.

Nach dem Rangsatz [21.2](#) sehen Immersionen bzgl. geeigneter Karten φ zentriert bei $x \in M$ und ψ zentriert bei $f(x) \in N$ mit $f(\text{Bild } \varphi) \subseteq \text{Bild } \psi$ und $\text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m = \text{Dom } \varphi$ wie die Inklusion $\text{incl} : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ aus, also ist $f|_{\text{Bild } \varphi}$ bijektiv von $\text{Bild } \varphi$ auf

$$\text{Bild}(f|_{\text{Bild } \varphi}) = f(\text{Bild } \varphi) = \psi(\text{incl}(\text{Dom } \varphi)) = \psi(\text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m) = \psi(\mathbb{R}^m),$$

und damit

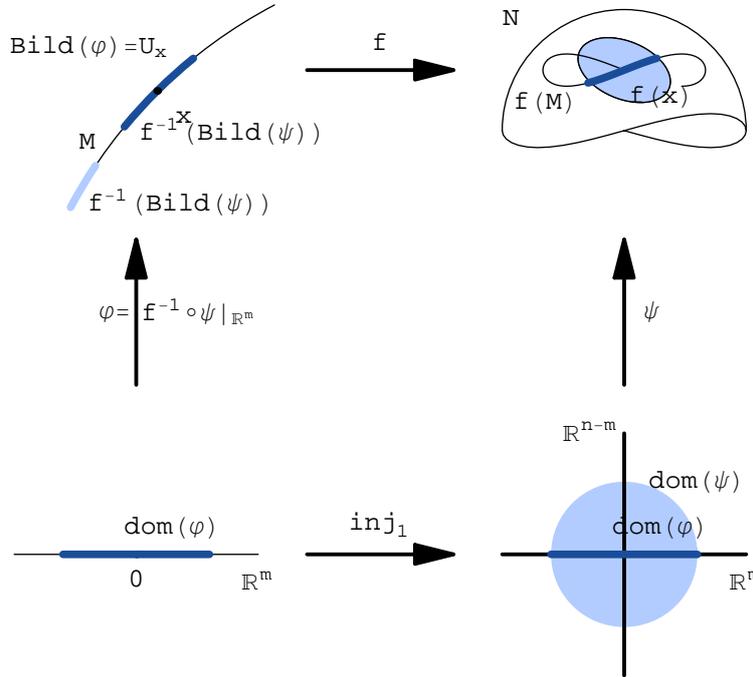
$$\varphi = f|_{\text{Bild } \varphi}^{-1} \circ f|_{\text{Bild } \varphi} \circ \varphi = f|_{\text{Bild } \varphi}^{-1} \circ f|_{\text{Bild } \varphi} \circ \varphi = f|_{\text{Bild } \varphi}^{-1} \circ \psi \circ \text{incl} = f|_{\text{Bild } \varphi}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}.$$

Wir können also durch geeignete Wahlen von Umgebungen $U_x := \text{Bild } \varphi$ von $x \in M$ und Karten ψ von N zentriert bei $f(x)$ einen Atlas mit Karten $\varphi := f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}$ von M erhalten und die Kartendarstellung von f sieht dann wie die Inklusion $\mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ aus. Dies zeigt die Richtung [1](#) \Rightarrow [2](#) von

Proposition. Charakterisierung von Immersionen.

Für $f \in C^\infty(M, N)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist immersiv;
2. $\forall x \in M \exists U_x$ offene Umgebung von x in M und eine Karte ψ zentriert bei $f(x)$ in N , sodaß $f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow U_x$ ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte von M) ist;
3. f besitzt lokale Linksinverse, d.h. $\forall x \in M \exists U_x$ offene Umgebung von x in M und $\exists h : N \supseteq V_{f(x)} \rightarrow M$ glatt mit $V_{f(x)} \supseteq f(U_x)$ offen, $h(f(x)) = x$ und $h \circ f = \text{id}_{U_x}$.



Beweis. (1 \Rightarrow 2) habe wir eben gezeigt.

(2 \Rightarrow 3) sei U_x und ψ wie in 2. Wir setzen $\varphi := f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow U_x$. Durch Verkleinern der Karte ψ können wir erreichen, daß $\text{Dom } \psi$ von der Form $W_1 \times W_2 \subseteq \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ ist. Nun setzen wir $V_{f(x)} := \text{Bild } \psi$ und $h := \varphi \circ \text{pr} \circ \psi^{-1}$, wobei $\text{pr} : \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \supseteq W_1 \times W_2 \rightarrow W_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ die kanonische Projektion auf den ersten Faktor bezeichnet. Dann ist $h : V_{f(x)} \rightarrow U_x$ glatt, $h(f(x)) = \varphi(0) = x$ und

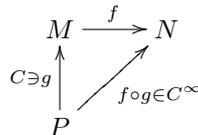
$$h \circ f \circ \varphi = \varphi \circ \text{pr} \circ \psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \varphi \circ \text{pr} \circ \text{incl} = \varphi = \text{id} \circ \varphi,$$

also $h \circ f = \text{id}$ auf $\text{Bild } \varphi = U_x$.

(3 \Rightarrow 1) Wegen $h \circ f = \text{id}$ lokal um x gilt $\text{id} = T_x \text{id} = T_{f(x)} h \circ T_x f$, also ist $T_x f$ injektiv und somit f eine Immersion. \square

21.5 Folgerung.

Es sei $f \in C^\infty(M, N)$ eine Immersion und $g : P \rightarrow M$ eine stetige Abbildung mit $f \circ g \in C^\infty(P, N)$. Dann ist g ist glatt.



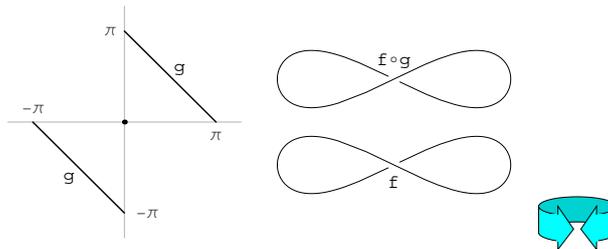
Beweis. Sei $z \in P$ und $x := g(z)$. Es existieren U_x und $h : V_{f(x)} \rightarrow M$ wie in 21.4.3. Da g stetig ist, ist $g^{-1}(U_x)$ eine offene Umgebung von z und darauf ist $g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g)$ glatt. \square

21.6 Bemerkungen

1. Dabei ist die Stetigkeit von g wesentlich: Sei nämlich $g :]-\pi, \pi[\rightarrow]-\pi, \pi[$, definiert durch

$$g : t \mapsto \begin{cases} \pi - t & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \\ -\pi - t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

und $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(t) := (\sin t, -\sin 2t)$



Dann ist $f \circ g$ glatt, aber g ist nicht stetig, ergo auch nicht glatt.

2. Eine Mannigfaltigkeit M , die Teilmenge einer Mannigfaltigkeit N ist, heißt IMMERSIVE TEILMANNIGFALTIGKEIT, falls die Inklusion $\text{incl} : M \rightarrow N$ eine Immersion ist. Eine immersive Teilmannigfaltigkeit ist im allgemeinen keine Teilmannigfaltigkeit im Sinn von [10.4](#) oder allgemeiner von [21.12](#): $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ aus [21.6.1](#) ist eine injektive Immersion, aber $f(\mathbb{R})$ ist keine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 .

3. Die Mannigfaltigkeitsstruktur einer immersiven Teilmannigfaltigkeit ist im allgemeinen nicht durch die von N festgelegt wie [1](#) zeigt: f und $f \circ g$ erzeugen zwei verschiedene Mannigfaltigkeitsstrukturen auf $M = \text{Bild}(f) \cong]-\pi, \pi[$.

21.7 Definition (Initiale und finale Abbildungen)

Sei $f \in C^\infty(M, N)$. Die Abbildung f heißt INITIAL $:\Leftrightarrow$ für jede Abbildung $g : P \rightarrow M$ mit der Eigenschaft, daß $f \circ g$ glatt ist, g selbst glatt ist.

Die Abbildung f heißt FINAL $:\Leftrightarrow$ für jedes $g : N \rightarrow P$ mit der Eigenschaft, daß $g \circ f$ glatt ist, g selbst glatt ist.

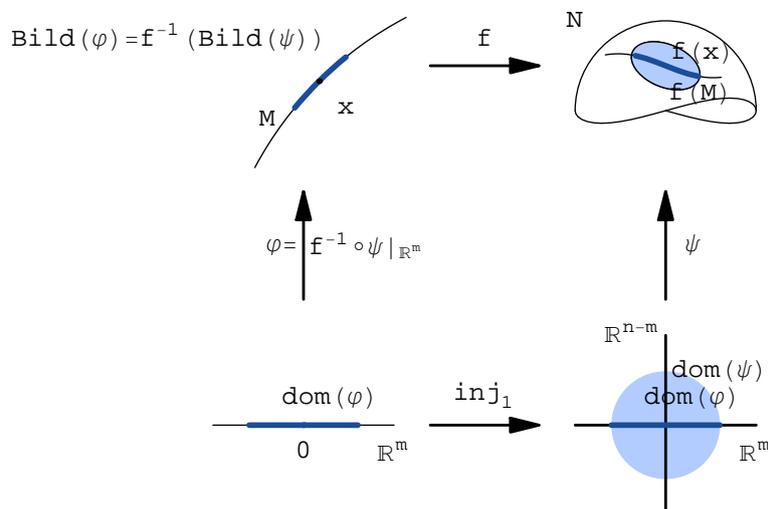
21.10 Definition (Einbettung)

Es sei $f : M \rightarrow N$ glatt, dann heißt f EINBETTUNG $:\Leftrightarrow$ f ist injektive Immersion und $f : M \rightarrow f(M)$ ist ein Homöomorphismus, dabei trage $f(M)$ die Spurtopologie von N .

21.11 Satz (Charakterisierung von Einbettungen).

Für f in $C^\infty(M, N)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist eine Einbettung;
2. für jedes $x \in M$ gibt es eine Karte ψ von N zentriert bei $f(x)$, sodaß $f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow f^{-1}(\text{Bild } \psi)$ ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte) ist;
3. f besitzt lokale Linksinverse im folgenden Sinn: $\forall x \in M \exists h : V_{f(x)} \rightarrow M$ glatt mit einer offenen Umgebung $V_{f(x)}$ von $f(x)$ in N und $h(f(x)) = x$ sowie $h \circ f = \text{id}$ auf $f^{-1}(V_{f(x)})$.



Beachte, daß der Unterschied zur Formulierung von Immersionen in [21.4](#) nur darin besteht, daß das Bild der konstruierten Karten nun ganz $f^{-1}(\text{Bild } \psi)$ und nicht nur eine offene Umgebung U_x von x ist, d.h. $\text{Bild } \psi \cap \text{Bild } f$ nur einen wie $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ aussehenden Teil enthalten darf.

Beweis.

([1](#) \Rightarrow [2](#)) Sei f eine Einbettung. Da f eine Immersion ist, existiert nach [21.4](#) für $x \in M$ ein $U_x \subseteq M$ offen und eine Karte ψ um $f(x)$, sodaß

$$f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow U_x$$

ein wohldefinierter Diffeomorphismus ist. Wir wollen durch Verkleinern von $\text{Dom } \psi$ erreichen, daß $U_x = f^{-1}(\text{Bild } \psi)$. Da f ein Homöomorphismus auf das Bild ist, gibt es $W \subseteq \text{Bild } \psi$ offen mit $W \cap \text{Bild } f = f(U_x)$. O.B.d.A. sei $\text{Bild } \psi = W$, dann ist $U_x = f^{-1}(\text{Bild } \psi)$, denn

$$U_x = (f^{-1} \circ f)(U_x) = f^{-1}(W \cap \text{Bild } f) = f^{-1}(\text{Bild } \psi \cap \text{Bild } f) = f^{-1}(\text{Bild } \psi).$$

([2](#) \Rightarrow [3](#)) Die selbe Definition von h wie im entsprechenden Beweisteil von [21.4](#) liefert nun ein Linksinverses auf $U_x = f^{-1}(\text{Bild } \psi)$.

([3](#) \Rightarrow [1](#)) Nach [21.4](#) ist f immersiv.

Weiters ist f injektiv, denn andernfalls sei $x_1 \neq x_2$ mit $y := f(x_1) = f(x_2)$ und $h : V_y \rightarrow M$ ein lokales Linksinverses wie in [3](#). Dann ist $x_i \in f^{-1}(V_y)$ und somit $x_i = (h \circ f)(x_i) = h(y)$ unabhängig von i , ein Widerspruch.

Schließlich ist f ein Homöomorphismus auf sein Bild: Sei dazu $(x_i)_i$ ein Netz in M für welches $f(x_i)$ gegen ein $f(x_\infty)$ konvergiert. Sei $h : V \rightarrow M$ ein lokales Linksinverses wie in [3](#) mit einer offenen Umgebung V von $f(x_\infty)$. Dann ist $f(x_i)$ schließlich in V und somit x_i schließlich in $f^{-1}(V)$ und damit konvergiert $x_i = (h \circ f)(x_i) = h(f(x_i)) \rightarrow h(f(x_\infty)) = x_\infty$. \square

21.12 Definition (Teilmannigfaltigkeit)

Eine Teilmenge M einer Mannigfaltigkeit N , die selbst Mannigfaltigkeit ist und die obige Eigenschaft bezüglich der Inklusion $\text{incl} : M \hookrightarrow N$ besitzt, heißt (REGULÄRE) TEILMANNIGFALTIGKEIT von N .

Jede Teilmenge $M \subseteq N$, die für jeden Punkt $x \in M$ eine Karte ψ von N zentriert bei x besitzt für welche $M \cap \text{Bild } \psi = \psi(\mathbb{R}^m)$ gilt, ist selbst eine Mannigfaltigkeit mit dem Atlas gebildet durch diese Einschränkungen $\psi|_{\mathbb{R}^m}$ und die Inklusion $\text{incl} : M \hookrightarrow N$ ist dann nach Konstruktion und [21.11](#) eine Einbettung, also M eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von N .

Diese zeigt, daß die Definition für reguläre Teilmannigfaltigkeiten von $N = \mathbb{R}^n$ mit der in [10.4](#) gegebenen übereinstimmt, denn Karten ψ von $N = \mathbb{R}^n$ wie in [21.11](#) (also mit $M \cap \text{Bild } \psi = \psi(\mathbb{R}^m)$) sind gerade lokale Trivialisierungen im Sinn von [10.4.4](#).

Das Bild $f(M)$ jeder Einbettung $f : M \rightarrow N$ ist offensichtlich eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von N und die Einbettung induziert einen Diffeomorphismus $f : M \rightarrow f(M)$ aufs Bild, denn sowohl f als auch $\text{incl} : f(M) \hookrightarrow N$ sind initial, also $f : M \rightarrow f(M)$ ein Diffeomorphismus. Bis auf Diffeomorphismen sind also Einbettungen nichts anders als die Inklusion von regulären Teilmannigfaltigkeiten.

21.13 Whitney'scher Einbettungssatz.

Es sei M eine zusammenhängende σ -kompakte (und somit parakompakte) C^∞ -Mannigfaltigkeit der Dimension m , dann existiert eine Einbettung von M in einen endlichdimensionalen Vektorraum. "Jede" abstrakte Mannigfaltigkeit läßt sich also als Teilmannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^n realisieren.

Beweis. Sei $\{\psi_i : 0 \leq i \leq m\}$ ein endlicher Atlas nach [19.11](#) (für einen elementaren Beweis von [21.13](#) ohne Verwendung von Dimensionstheorie siehe z.B. [\[10, S.73\]](#)). Sei weiters f_i eine zu $\{\text{Bild } \psi_i\}$ gehörige Partition der Eins und sei $f : M \rightarrow \prod_{i=0}^m (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ die glatte Abbildung

$$x \mapsto (f_i(x), f_i(x)\psi_i^{-1}(x))_{i=0}^m.$$

Um [21.11](#) anzuwenden zeigen wir die Existenz lokaler linksinverser Abbildungen $g_i : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)^m \supseteq V_i \rightarrow M$ für eine offene Überdeckung $\{V_i : 0 \leq i \leq m\}$ von $f(M)$.

Sei dazu

$$\begin{aligned} V_i &:= \left\{ (t, y) : t_i > 0, \frac{1}{t_i} y_i \in \text{Dom } \psi_i \right\}, \\ g_i : V_i &\rightarrow M, \quad (t, y) \mapsto \psi_i(t_i^{-1} \cdot y_i) \\ U_i &:= f^{-1}(V_i) = \{x \in M : f_i(x) > 0\}. \end{aligned}$$

Dann ist $g_i \circ f = \text{id}$ auf U_i , denn

$$U_i \ni x \mapsto (g_i \circ f)(x) = \psi_i \left(\frac{f_i(x)\psi_i^{-1}(x)}{f_i(x)} \right) = \psi_i(\psi_i^{-1}(x)) = x$$

□

21.14 Bemerkungen

1. Nach dem Beweis von [21.13](#) lassen sich m -dimensionale Mannigfaltigkeiten in dem $\mathbb{R}^{m(m+1)}$ einbetten. Es geht aber auch in niederen Dimensionen. Und zwar läßt sich M in den \mathbb{R}^n einbetten, wobei
 - (i) für $n = 2m + 1$ der Beweis relativ einfach ist, siehe [\[42, S.55\]](#);
 - (ii) für $n = 2m$ stammt er von [\[100\]](#).
 Vermutung: Das minimale $n = 2m - \alpha(m) + 1$, wobei $\alpha(m)$ die Anzahl der Einsen in der Dualentwicklung von m ist.
 Welches n ist nötig für Immersion?
 - (i) für $n = 2m$ ist der Beweis relativ einfach, siehe [\[42, S.24\]](#)
 - (ii) für $n = 2m - 1$ stammt er von [\[100\]](#) Vermutung: Das minimale $n = 2m - \alpha(m)$ um Immersionen zu erhalten. Diese Vermutung konnte schließlich bewiesen werden! Auf kompakten Mannigfaltigkeiten von [\[16\]](#) und allgemein von [\[11\]](#).
2. Der Rang-Satz liefert uns auf einfachste Weise weitere reguläre Teilmannigfaltigkeiten:
 Sei $f \in C^\infty(M, N)$. Dann gilt $\text{rang}(T_x f) = r \ \forall x \in M \Rightarrow f^{-1}(y)$ ist reguläre Teilmannigfaltigkeit von M .
Beweis. Dies ist lokale Eigenschaft, wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann folgt aus [21.2](#), daß f lokal wie $(x, y) \mapsto (x, 0)$ aussieht und das Urbild $f^{-1}(0)$ somit wie $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-r}$. \square

22. Submersionen

22.1 Proposition (Charakterisierung von Submersionen).

Sei $f \in C^\infty(M, N)$, dann gilt

f ist Submersion $\Leftrightarrow f$ besitzt lokale Schnitte.

(D.h. $\forall x \in M \exists U_{f(x)} \subseteq N \exists g^x \in C^\infty(U_{f(x)}, M) : g^x(f(x)) = x$ und $f \circ g^x = \text{id}$ auf $U_{f(x)}$, also dort, wo g^x definiert ist. Lokal gibt es also ein Rechtsinverses.)

Beweis. (\Rightarrow) Nach dem Rangatz [21.2](#) existieren Karten φ um x , ψ um $f(x)$, sodaß folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Bild } \varphi & \xrightarrow{f} & \text{Bild } \psi \\
 \uparrow \varphi & & \uparrow \psi \\
 \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \cong \mathbb{R}^m \supseteq & \text{Dom } \varphi \xrightarrow{\text{pr}_1} \text{Dom } \psi & \subseteq \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Dabei ist $\text{pr}_1 : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Projektion. Setzen wir jetzt: $U_{f(x)} := \text{Bild}(\psi)$ und $g^x := \varphi \circ \text{incl} \circ \psi^{-1}$, dann ist g^x glatt mit $g^x(f(x)) = x$. Bleibt also noch folgendes nachzurechnen:

$$f \circ g^x = f \circ \varphi \circ \text{incl} \circ \psi^{-1} = \psi \circ \text{pr} \circ \text{incl} \circ \psi^{-1} = \text{id}_{U_{f(x)}} .$$

(\Leftarrow) Seien $U_{f(x)}$ und g^x wie vorausgesetzt, dann gilt:

$$T_{f(x)} \text{id} = \text{id}_{T_{f(x)}N} = T_{f(x)}(f \circ g^x) = T_x f \circ T_{f(x)} g^x \Rightarrow T_x f \text{ ist surjektiv.} \quad \square$$

22.2 Folgerung (Submersionen sind offen und final).

Jede Submersion $f : M \rightarrow N$ ist eine offene Abbildung. Jede surjektive Submersion f ist zusätzlich final.

Beweis. (f ist offen) Sei dazu $U \subseteq M$ offen, $x \in U, y = f(x) \Rightarrow \exists U_y, g^x$ mit $g^x(y) = x$ und $f \circ g^x = \text{id}$. O.B.d.A. sei $(g^x)^{-1}(U) \supseteq U_y \Rightarrow f(U) \supseteq (f \circ g^x)(U_y) = U_y \Rightarrow f(U)$ ist offen.

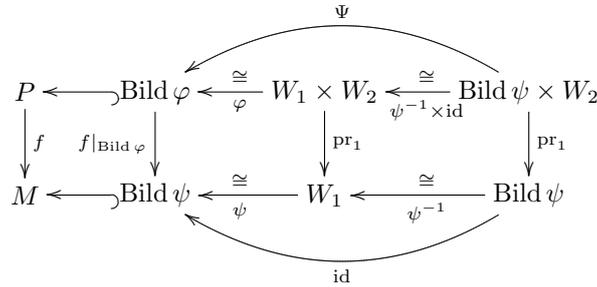
(f ist final) Sei dazu $g : N \rightarrow P$, sodaß $g \circ f$ glatt ist. Da f surjektiv ist, gibt es zu $y \in N$ ein $x \in M$ mit $f(x) = y$, dazu haben wir noch U_y und das glatte $g^x : U_y \rightarrow M$ zur Verfügung, sodaß

$$f \circ g^x = \text{id}_{U_y} \Rightarrow g|_{U_y} = g \circ f \circ g^x$$

glatt ist, also auch g . □

23. Faserbündel

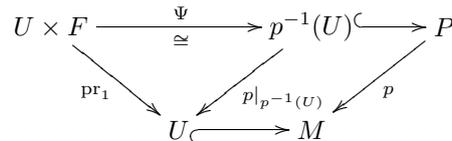
Nach 21.2 lassen sich für submersive Abbildungen $f : P \rightarrow M$ Karten $\varphi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \supseteq W_1 \times W_2 \rightarrow P$ und $\psi : W_1 \rightarrow M$ so finden, daß die Kartendarstellung von f gegeben ist durch $\text{pr}_1 : W_1 \times W_2 \rightarrow W_1$. Die Zusammensetzung $\Psi := \varphi \circ (\psi^{-1} \times \text{id}) : \text{Bild } \psi \times W_2 \rightarrow W_1 \times W_2 \rightarrow \text{Bild } \varphi$ ist dann ein Diffeomorphismus s.d. $f \circ \Psi = \text{pr}_1$:



Eine stärkere Eigenschaft von Abbildungen f werden wir jetzt kennenlernen:

23.1 Definition (Faserbündel)

Eine glatte Abbildung $p : P \rightarrow M$ heißt FASERBÜNDEL $:\Leftrightarrow p$ ist lokal trivial, d.h. $\forall y \in M$ existiert eine offene Umgebung $U \subset M$ und eine TRIVIALISIERUNG Ψ von p über U , d.h. eine C^∞ -Mannigfaltigkeit F sowie ein Diffeomorphismus $\Psi : U \times F \rightarrow p^{-1}(U)$, sodaß folgendes Diagramm kommutiert:

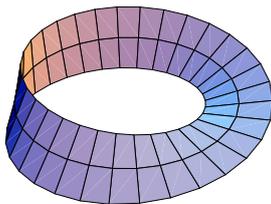


dabei heißt F TYPISCHE FASER (Auf Zusammenhangskomponenten von M sind alle Fasern diffeomorph).

Ein Faserbündel p ist eine ÜBERLAGERUNG $:\Leftrightarrow$ die typische Faser F von p ist diskret. Dies ist die glatte Version der Definition, die wir in 3.5 gegeben haben.

23.2 Beispiele von Faserbündeln

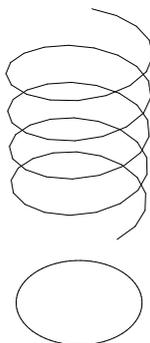
1. Für zwei Mannigfaltigkeiten M und N ist $\text{pr}_1 : M \times F \rightarrow M, (x, y) \mapsto x$ ein Faserbündel mit typischer Faser F . So geartete Faserbündel heißen GLOBAL TRIVIAL (oder kurz trivial).
2. Die Projektion $\text{Möb} \rightarrow S^1$ des Möbiusbandes auf die Mittellinie ist ein Faserbündel mit typischer Faser $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$.



3. Die Hopffaserung: $S^3 \rightarrow S^2$ ist ein Faserbündel mit typischer Faser S^1 , siehe [11.7](#).

Beispiele von Überlagerungen sind:

4. Die Abbildung $\mathbb{R} \rightarrow S^1$ gegeben durch $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ ist eine abzählbarblättrige Überlagerung.



5. Folgende Abbildung $\mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \text{Möb}$

$$\begin{pmatrix} \varphi \\ t \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} (1 + t \cos \varphi) \cos(2\varphi) \\ (1 + t \cos \varphi) \sin(2\varphi) \\ t \sin \varphi \end{pmatrix}$$

ist eine abzählbarblättrige Überlagerung. Dies faktorisiert über $\mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow S^1 \times (-1, 1), (\varphi, t) \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi, t)$ zu einer zweiblättrige Überlagerung des Möbiusbandes durch den Zylinder $S^1 \times (-1, 1)$:

$$\begin{array}{ccc} & \mathbb{R} \times (-1, 1) & \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ S^1 \times (-1, 1) & \xrightarrow{\quad} & \text{Möb} \\ (x, y, t) & \mapsto & \left((1 + tx)(x^2 - y^2), (1 + tx)2xy, ty \right). \end{array}$$

6. $S^n \rightarrow P^n, x \mapsto \mathbb{R} \cdot x$ ist eine zweiblättrige Überlagerung, siehe Aufgabe [72.53](#).

7. $S^3 \rightarrow SO(3)$ und $S^3 \times S^3 \rightarrow SO(4)$ sind zweiblättrige Überlagerungen, siehe [14.19](#) bzw. Aufgabe [72.66](#) und [72.67](#).

25. Tangentialbündel

25.1 Motivation

Wir wollen gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung auf Mannigfaltigkeiten behandeln. Dazu betrachten wir zuerst den klassischen Fall: Ist eine Differentialgleichung $x'(t) = f(x(t))$ bzw. $x'(t) = f(t, x(t))$ gegeben, wobei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, so erhält man als Lösung zur Anfangsbedingung $x(0) = x_0$ eine lokal definierte differenzierbare Kurve $x : (a, b) \rightarrow U$.

Wir wollen nun U durch eine Mannigfaltigkeit M ersetzen. Als Lösungskurve $x : (a, b) \rightarrow M$ werden wir wohl eine differenzierbare Kurve in der Mannigfaltigkeit erhalten. Deren Ableitung $x'(t)$ an der Stelle t ist ein Tangentialvektor in $T_{x(t)}M$. Die die Differentialgleichung konstituierende Funktion f muß folglich Punkte $x \in M$ auf Tangentialvektoren in diesen Punkten abbilden:

$$f : M \ni p \mapsto f(p) \in T_pM, \quad \text{d.h. } f : M \rightarrow \bigsqcup_{p \in M} T_pM,$$

wobei $\bigsqcup_{p \in M} T_pM$ die disjunkte Vereinigung aller T_pM mit $p \in M$ bezeichnet.

25.2 Definition (Tangentialbündel)

Sei M eine Mannigfaltigkeit, so ist der TANGENTIALRAUM von M definiert durch:

$$TM := \bigsqcup_{p \in M} T_pM := \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_pM.$$

Auf TM definiert $\pi_M : \{p\} \times T_pM \ni (p, v) \mapsto p \in M$ die sogenannte FUSSPUNKTABILDUNG. Jedes glatte $f : M \rightarrow N$ induziert eine Abbildung $Tf : TM \rightarrow TN$, die sogenannte TANGENTIALABBILDUNG von f , die durch $(Tf)(p, v) := (f(p), T_p f(v))$ mittels der TANGENTIALABBILDUNG von f bei p $T_p f : T_pM \rightarrow T_{f(p)}N$ definiert ist. Es ist also

$$Tf|_{T_pM} = T_p f : T_pM \cong \{p\} \times T_pM \rightarrow \{f(p)\} \times T_{f(p)}N \cong T_{f(p)}N$$

linear.

Seien $f : M \rightarrow N$ und $g : N \rightarrow P$ glatt, dann nimmt die Kettenregel aus [20.4](#) die sehr einfache Gestalt

$$T(g \circ f) = Tg \circ Tf$$

an, wie folgende Rechnung zeigt:

$$\begin{aligned} (T(g \circ f))(x, v) &= \left((g \circ f)(x), T_x(g \circ f)(v) \right) \\ &\stackrel{\text{20.4}}{=} \left(g(f(x)), T_{f(x)}g((T_x f)(v)) \right) \\ (Tg \circ Tf)(x, v) &= Tg(Tf(x, v)) = Tg(f(x), T_x f(v)) \\ &\stackrel{\text{20.4}}{=} \left(g(f(x)), T_{f(x)}g((T_x f)(v)) \right) \end{aligned}$$

Weiters gilt $T \text{id}_M = \text{id}_{TM}$ und $(Tf)^{-1} = T(f^{-1})$ für Diffeomorphismen f .

25.3 Bemerkungen

Um von $f : M \rightarrow TM$ schöne Eigenschaften (insbesondere Differenzierbarkeit) fordern zu können, brauchen wir eine glatte Mannigfaltigkeitsstruktur auf $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_x M$. Betrachten wir dazu vorerst wieder Teilmannigfaltigkeiten M eines \mathbb{R}^n .

Sei $M = U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, dann ist $T_p M = \mathbb{R}^m$ und somit $TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times \mathbb{R}^m = M \times \mathbb{R}^m$. Für eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow V \subseteq \mathbb{R}^n$ ist die Tangentialabbildung $Tf : U \times \mathbb{R}^m \rightarrow V \times \mathbb{R}^n$ gegeben durch $(Tf)(x, v) = (f(x), f'(x)(v))$.

Sei nun M eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n und sei $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow W \cap M$ eine lokale Parametrisierung. Dann ist

$$TM = \bigcup_{p \in M} \{p\} \times T_p M \subseteq M \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{2m}.$$

Weiters ist $T\varphi : \mathbb{R}^{2m} \supseteq U \times \mathbb{R}^m = TU \rightarrow TM$, $(x, v) \mapsto (\varphi(x), \varphi'(x)(v))$ eine lokale Parametrisierung von TM : Sie ist klarerweise C^∞ und ist auf der offenen Teilmenge TU des \mathbb{R}^{2m} definiert.

Die Ableitung von $T\varphi$ an der Stelle $(x, v) \in TU = U \times \mathbb{R}^m$ in Richtung $(w, h) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ ist

$$(T\varphi)'(x, v)(w, h) = (\varphi'(x)(w) + 0, \varphi''(x)(w, v) + \varphi'(x)(h)).$$

Die Jacobi-Matrix von $T\varphi$ bei (x, v) ist somit:

$$\begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ \varphi''(x)(-, v) & \varphi'(x) \end{pmatrix}.$$

Da φ regulär ist, ist $\varphi'(x)$ invertierbar und somit auch die Jacobi-Matrix von $T\varphi$, d.h. $T\varphi$ ist regulär.

Sei $f : M \rightarrow N$ glatt und seien $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow M$ sowie $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow N$ lokale Parametrisierungen und somit nach dem eben Gezeigten $T\varphi$ und $T\psi$ lokale Parametrisierungen von TM und TN . Die lokale Darstellung von Tf bezüglich dieser Parametrisierungen ist:

$$(T\psi)^{-1} \circ Tf \circ T\varphi = T(\psi^{-1}) \circ Tf \circ T\varphi = T(\psi^{-1} \circ f \circ \varphi).$$

Da die lokale Darstellung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ von f glatt ist, gilt gleiches auch für die von Tf , also ist auch Tf glatt.

Falls nun M eine abstrakte Mannigfaltigkeit ist, dann sollten wir mittels der Karten $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow M$ von M einen glatten Atlas $\{T\varphi : TU = U \times \mathbb{R}^m \rightarrow TM\}$ von TM definieren können. In der Tat zeigt die selbe Rechnung wie zuvor für $f = \text{id}_M$, daß der Kartenwechsel $(T\psi)^{-1} \circ T\varphi = T(\psi^{-1} \circ \varphi)$ glatt ist.

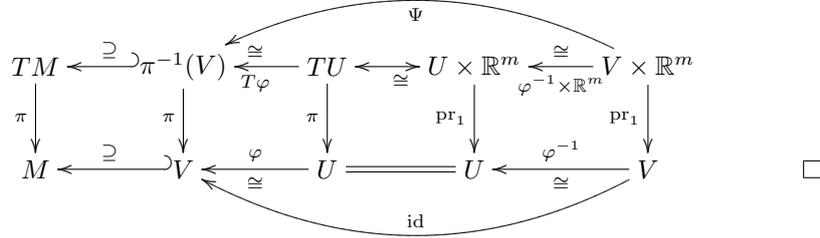
25.4 Lemma (Tangentialbündel als Faserbündel).

Für jede Mannigfaltigkeit M ist $TM \xrightarrow{\pi} M$ ein Faserbündel.

Beweis. Wir müssen lokale Trivialisierungen von $TM \xrightarrow{\pi} M$ finden. Sei dazu $\varphi : U \rightarrow M$ eine Karte von M . Dann ist $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$ ein Diffeomorphismus auf eine offene Teilmenge von M und $T\varphi : U \times \mathbb{R}^m = TU \rightarrow TM$ ist eine Karte von TM nach [25.3](#). Das Bild von $T\varphi$ ist

$$\begin{aligned} \text{Bild}(T\varphi) &= \{(x, v) \in TM : x \in \text{Bild } \varphi =: V, v \in T_x M\} \\ &= \{(x, v) \in TM : x \in V\} = \pi_M^{-1}(V). \end{aligned}$$

Eine Trivialisierung $\Psi := T\varphi \circ (\varphi^{-1} \times \mathbb{R}^m)$ von π über V ist nun durch folgendes Diagramm gegeben:

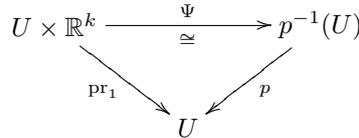


Bemerkung

Wir haben noch eine zusätzliche Struktur auf TM , denn die Fasern $T_x M = \pi^{-1}(x)$ sind Vektorräume und $T_0\varphi : \mathbb{R}^m = T_0\mathbb{R}^m \rightarrow T_x M$ ist linear.

25.5 Definition (Vektorbündel)

Ein Faserbündel $p : E \rightarrow M$ heißt VEKTORBÜNDEL (VB), falls alle Fasern $p^{-1}(x) =: E_x$ Vektorräume sind und für jedes $x_0 \in M$ eine offene Umgebung $U \subseteq M$ sowie eine lokale Trivialisierung Ψ existiert,



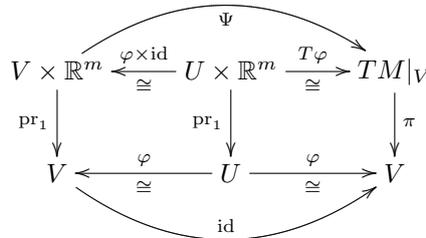
die faserweise linear ist, d.h. $\Psi_x := \Psi(x, \cdot) : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ ist linear für jedes $x \in U$. So eine lokale Trivialisierung heißt dann VEKTORBÜNDELKARTE.

Unter einem Vektorbündel $E \rightarrow M$ kann man sich eine Familie $\{E_x : x \in M\}$ von Vektorräumen vorstellen, welche durch M in einen gewissen Sinn glatt parametrisiert ist.

25.6 Satz (Tangentialbündel als Vektorbündel).

Das Tangentialbündel $TM \rightarrow M$ jeder Mannigfaltigkeit M ist ein Vektorbündel.

Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \xrightarrow{\cong} V \subseteq M$ eine lokale Parametrisierung von M . Dann erhalten wir nach [25.4](#) eine lokale Trivialisierung Ψ von TM als oberste Zeile des folgenden kommutativen Diagramms:



Bleibt zu zeigen, daß $v \mapsto \Psi(x, v)$ von $\mathbb{R}^m \rightarrow \{x\} \times T_x M \cong T_x M$ linear ist. Diese Abbildung ist aber

$$v \mapsto (x, v) \mapsto (\varphi^{-1}(x), v) \mapsto (\underbrace{\varphi(\varphi^{-1}(x))}_{=x}, T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi \cdot v) \mapsto T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi \cdot v$$

und somit klarerweise linear. \square

25.7 Bemerkungen

1. Zu zwei Vektorbündelkarten $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U)$ und $\psi_V : V \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(V)$ ist der Vektorbündelkartenwechsel

$$\psi_V^{-1} \circ \psi_U : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U \cap V) \rightarrow (U \cap V) \times \mathbb{R}^k$$

von der Form

$$(x, v) \mapsto \left(\underbrace{(\text{pr}_1 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, v)}_{=x}, \underbrace{(\text{pr}_2 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, v)}_{=: \psi_{VU}(x) \cdot v} \right).$$

Die wesentliche Komponente $(\text{pr}_2 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U) : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ haben wir dabei durch $\psi_{UV} := (\text{pr}_2 \circ \psi_V^{-1} \circ \psi_U)^\vee : U \cap V \rightarrow L(k, k)$ beschrieben (beachte dabei, daß $\psi_V^{-1} \circ \psi_U$ faserweise linear ist). Diese Abbildung ψ_{VU} heißt TRANSITIONSFUNKTION. Es hat ψ_{VU} Werte in $GL(k) \subseteq L(k, k)$, denn die Inverse zu $\psi_{VU}(x)$ ist $\psi_{UV}(x)$.

2. Im Falle des Tangentialbündels $TM \rightarrow M$ erhalten wir Transitionsfunktionen wie folgt, wobei wir für Karten $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow M$ die Bezeichnungsweise $\varphi'(y)$ für $T_y\varphi : \mathbb{R}^m \cong T_yU \rightarrow T_{\varphi(y)}M$ verwenden:

$$\begin{aligned} \psi_i(x, v) &:= (x, \varphi_i'(\varphi_i^{-1}(x))(v)) \quad \Rightarrow \\ (x, \psi_{i,j}(x)(v)) &:= (\psi_i^{-1} \circ \psi_j)(x, v) \\ &= \left(x, (\varphi_i'(\varphi_i^{-1}(x)))^{-1} (\varphi_j'(\varphi_j^{-1}(x))) (v) \right) \\ &= (x, (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)'(\varphi_j^{-1}(x))(v)) \quad \Rightarrow \\ \psi_{i,j}(x) &:= (\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j)'(\varphi_j^{-1}(x)). \end{aligned}$$

Also sind diese Transitionsfunktionen im wesentlichen die Ableitung des Kartenwechsels $\varphi_i^{-1} \circ \varphi_j$ von M .

3. Die Transitionsfunktionen erfüllen allgemein die Kozykel-Gleichungen:

$$\begin{aligned} \psi_{U_3U_2}(x) \circ \psi_{U_2U_1}(x) &= \psi_{U_3U_1}(x) \text{ für alle } x \in U_1 \cap U_2 \cap U_3 \\ \psi_{UU}(x) &= \text{id}_{\mathbb{R}^n} \text{ für alle } x \in U \end{aligned}$$

4. Nach Konstruktion ist die Abbildung $\hat{\psi}_{UV} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ mit $\hat{\psi}_{UV} : (x, v) \mapsto \psi_{VU}(x) \cdot v$ glatt. Und wir behaupten nun, daß dies dazu äquivalent ist, daß $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow GL(k) \subseteq L(k, k)$ selbst glatt ist. Um das zu beweisen, bezeichnen wir mit ev die glatte (da bilineare) Evaluationsabbildung $ev : L(k, k) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$, $(A, v) \mapsto A \cdot v$. (\Leftarrow) gilt, da

$$\hat{\psi}_{VU} : (U \cap V) \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\psi_{VU} \times \mathbb{R}^k} L(k, k) \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{ev} \mathbb{R}^k$$

(\Rightarrow) Es ist $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow L(k, k)$ C^∞ , falls $ev_y \circ \psi_{VU}$ glatt ist $\forall y \in \mathbb{R}^k$, wobei $ev_y : L(k, k) \rightarrow \mathbb{R}^k$, $T \mapsto T(x)$ bezeichnet. Das ist der Fall, denn

$$\begin{aligned} (ev_y \circ \psi_{VU})(x) &= \psi_{VU}(x) \cdot y = \hat{\psi}_{VU}(x, y) \\ \Rightarrow ev_y \circ \psi_{VU} &= \hat{\psi}_{VU}(-, y) \text{ ist } C^\infty \quad \forall y. \end{aligned}$$

5. Sei nun M eine Mannigfaltigkeit und $p : E \rightarrow M$ eine auf einer Menge E definierte Abbildung so, daß eine Familie von fasertreuen (d.h. $p \circ \psi_U = \text{pr}_1$) bijektiven Abbildungen $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow p^{-1}(U)$ existiert, wobei die U eine

offene Überdeckung von M bilden und die zugehörigen Transitionsfunktionen $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow GL(k)$ wohldefiniert und glatt sind.

Dann können wir E auf eindeutige Weise zu einer Mannigfaltigkeit machen, sodaß $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Vektorbündelkarten ψ_U wird:

$$\begin{array}{ccccccc}
 E & \xleftarrow{\psi_U} & p^{-1}(U) & \xleftarrow{\psi_U} & U \times \mathbb{R}^k & \xleftarrow{\varphi \times \mathbb{R}^k} & W \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \\
 \downarrow p & & \downarrow p & & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow \text{pr}_1 \\
 M & \xleftarrow{\psi_U} & U & \xleftarrow{\varphi} & U & \xleftarrow{\varphi} & W & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^m
 \end{array}$$

Als Parametrisierungen von E können wir $\psi_U \circ (\varphi \times \mathbb{R}^k)$ verwenden, wobei die ψ_U die gegebenen fasertreuen Abbildungen und φ Karten von M sind. Die Kartenwechselabbildungen von E sind dann

$$\begin{aligned}
 (\psi_V \circ (\varphi_2 \times \mathbb{R}^k))^{-1} \circ (\psi_U \circ (\varphi_1 \times \mathbb{R}^k)) &= \\
 &= (\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1, \hat{\psi}_{VU} \circ ((\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1) \times \mathbb{R}^k)).
 \end{aligned}$$

Nach Konstruktion sind die ψ_U Faserbündelkarten und wir können die Fasern E_x vermögen diesen zu Vektorräumen machen und zwar so, daß die ψ_U faserlinear werden.

6. Aus 16.7 wissen wir, daß sich eine Mannigfaltigkeit aus ihren Kartenwechseln zurückgewinnen läßt. Bei Transitionsfunktionen eines VB haben wir eine ähnliche Situation: Sei \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M . Ein Kozykel von Transitionsfunktionen, d.h. eine Familie von glatten Funktionen $\psi_{VU} : U \cap V \rightarrow GL(k)$ für $U, V \in \mathcal{U}$, welche die Kozykel-Gleichungen (3) erfüllt, definiert ein bis auf Isomorphie eindeutiges Vektorbündel.

Um das zu zeigen, definieren wir: $E_x := \{(U, w) : x \in U \in \mathcal{U}, w \in \mathbb{R}^k\} / \sim$, wobei

$$(U, w) \sim (V, w') \Leftrightarrow w' = \psi_{VU}(x) \cdot w.$$

Es ist E_x ein Vektorraum mit $\psi_U(x) : w \mapsto [(U, w)]$, ein Vektorraum-Isomorphismus $\mathbb{R}^k \rightarrow E_x$. Die disjunkte Vereinigung

$$E := \bigsqcup_{x \in M} E_x := \bigcup_{x \in M} (\{x\} \times E_x)$$

ist ein Vektorbündel über M mit der Fußpunktabbildung $p : E \ni (x, v) \mapsto x \in M$, denn $E|_U := p^{-1}(U) = \bigsqcup_{x \in U} E_x \cong U \times \mathbb{R}^k$ vermöge der Trivialisierung ψ_U definiert durch $\psi_U(x, w) := (x, [(U, w)])$. Für den Kartenwechsel gilt:

$$\begin{aligned}
 (\psi_V^{-1} \circ \psi_U)(x, w) &= \psi_V^{-1}(x, \psi_U(x) \cdot w) = (x, w') \Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow (x, [(V, w')]) = \psi_V(x, w') = \psi_U(x, w) = (x, [(U, w)]),
 \end{aligned}$$

also $w' = \psi_{VU}(x) \cdot w$.

25.9 Definition (Vektorbündelhomomorphismen)

Sind $p : V \rightarrow M$ und $q : W \rightarrow N$ Vektorbündel, so heißt eine glatte Funktion \bar{f} VEKTORBÜNDELHOMOMORPHISMUS über $f : M \rightarrow N$, falls folgendes Diagramm kommutiert und $\bar{f}_x : V_x \rightarrow W_{f_x}$ linear ist $\forall x \in M$.

$$\begin{array}{ccc}
 V & \xrightarrow{\bar{f}} & W \\
 p \downarrow & & \downarrow q \\
 M & \xrightarrow{f} & N
 \end{array}$$

26.1 Definition (Teilvektorbündel)

Es seien $p : E \rightarrow M, q : F \rightarrow M$ zwei Vektorbündel, sodaß F_x Teilvektorraum von E_x ist $\forall x \in M$. Dann heißt $q : F \rightarrow M$ TEILVEKTORBÜNDEL von $p : E \rightarrow M$, falls zu E ein VB-Atlas $\{\psi_U\}$ existiert, der $F|_U$ auf $U \times \mathbb{R}^n$ abbildet, d.h. $\psi_U : U \times \mathbb{R}^k \cong E|_U = p^{-1}(U)$ und $\psi|_U(U \times \mathbb{R}^n) : U \times \mathbb{R}^n \cong F|_U$.

Das bedeutet, daß $\psi_U(x)$ den "konstanten" Teilraum \mathbb{R}^n genau auf F_x abbildet.

27. Vektorfelder

27.1 Definition (Schnitte von Bündeln)

Unter einem SCHNITT σ EINES VEKTORBÜNDELS (oder Faserbündels) $E \xrightarrow{p} M$ versteht man eine Abbildung $\sigma : M \rightarrow E$, welche $p \circ \sigma = \text{id}_M$ erfüllt. Die Schnitte des Tangentialbündels $TM \rightarrow M$ heißen VEKTORFELDER (VF) auf der Mannigfaltigkeit M .

Den RAUM DER GLATTEN SCHNITTE $\{\sigma \in C^\infty(M, E) : p \circ \sigma = \text{id}\}$ bezeichnet man mit $\Gamma(E \xrightarrow{p} M)$ oder kurz mit $\Gamma(E)$, wenn die Fußpunktabbildung klar ist.

Die Menge aller GLATTEN VEKTORFELDER auf M bezeichnen wir auch mit $\mathfrak{X}(M) := \Gamma(TM \xrightarrow{\pi} M)$.

Schnitte können addiert und mit reellwertigen Funktionen f auf M punktweise multipliziert werden. Somit ist $\Gamma(E \xrightarrow{p} M)$ ein Vektorraum und sogar ein Modul über $C^\infty(M, \mathbb{R})$, also ein "Vektorraum" über dem Ring $C^\infty(M, \mathbb{R})$ (anstatt über einem Körper), d.h. es gilt:

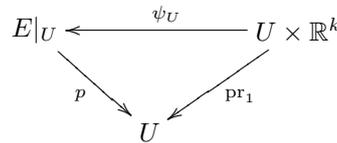
- (1) $(f + g)\xi = f\xi + g\xi, \quad f(\xi + \eta) = f\xi + f\eta,$
- (2) $(f \cdot g)\xi = f(g \cdot \xi), \quad 1 \cdot \xi = \xi$

Wir wollen mit Vektorfeldern oder allgemeiner mit Schnitten von Vektorbündeln konkret rechnen. Dazu benötigen wir lokale Darstellungen.

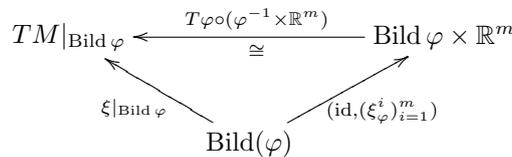
27.2 Lokale Beschreibung von Schnitten

Lokal ist ein Schnitt s durch eine Abbildung \bar{s} der Basis M in die typische Faser \mathbb{R}^k gegeben.

$$s(x) \longleftarrow \psi_U^{-1}(s(x)) = (x, \bar{s}(x))$$



Speziell für das Tangentialbündel erhalten wir: Dem Vektorfeld ξ entsprechen lokal Abbildungen $(\xi_\varphi^i)_{i=1}^m : M \rightarrow \mathbb{R}^m$, deren Gestalt von der Wahl der Karte φ abhängt:



Wir haben in [20.8](#) gesehen, daß falls $(u^1, \dots, u^m) = \varphi^{-1}$ lokale Koordinaten auf M sind, so ist $(\partial_1^\varphi|_p = \frac{\partial}{\partial u^1}|_p, \dots, \partial_m^\varphi|_p = \frac{\partial}{\partial u^m}|_p)$ eine Basis von $T_p M$ für alle p im Definitionsbereich U der Karte φ und der Isomorphismus $T\varphi \circ (\varphi^{-1} \times \mathbb{R}^m)$ bildet die Standardbasis (x, e_i) auf $\frac{\partial}{\partial u^i}|_x$ ab. Jedes Vektorfeld ξ läßt sich also auf U als $\xi = \sum_{i=1}^m \xi_\varphi^i \partial_i^\varphi$ schreiben, wobei ∂_i^φ die Vektorfelder $p \mapsto \partial_i^\varphi|_p = \frac{\partial}{\partial u^i}|_p$ sind. Der Index φ der Komponenten ξ_φ^i von ξ bezüglich der Basis ∂_i^φ deutet die Abhängigkeit dieser Komponenten von der Basis an, die ja wiederum von φ abhängt. Zumeist werden wir diesen Index aber, wie allgemein üblich, weglassen. Wir können die Komponenten ξ^i berechnen, indem wir $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ auf die lokale Koordinatenfunktion u^j anwenden: $\xi(u^j) = \left(\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(u^j) = \sum_i \xi^i \delta_i^j = \xi_j$. Also ist $\xi = \sum_i \xi(u^i) \frac{\partial}{\partial u^i}$.

27.3 Folgerung.

Ein Vektorfeld ξ ist genau dann glatt, wenn alle Komponenten ξ_φ^i glatt sind.

Beweis. Dies folgt sofort daraus, daß die lokalen Schnitte $\frac{\partial}{\partial u^i}$ glatt sind, was wiederum aus dem Diagramm

$$\begin{array}{ccccc} TM|U & \xleftarrow{T\varphi} & V \times \mathbb{R}^m & \xrightarrow{\varphi \times \text{id}} & U \times \mathbb{R}^m \\ \pi|U \downarrow & & \text{pr}_1 \downarrow & & \text{pr}_1 \downarrow \\ U & \xleftarrow{\varphi} & V & \xrightarrow{\varphi} & U \end{array}$$

folgt, denn dem Schnitt $\frac{\partial}{\partial u^i}$ ganz links entspricht rechts der konstante Schnitt $x \mapsto (x, e^i)$. □

27.4 Beispiele von Schnitten

1. Das Tangentialbündel von $S^n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ als Teilbündel von $T\mathbb{R}^{n+1}|_{S^n} = S^n \times \mathbb{R}^{n+1}$ ist $TS^n = \{(x, v) \in S^n \times \mathbb{R}^{n+1} : \langle x, v \rangle = 0\}$. Insbesondere ist $TS^1 = \{(x, y, u, v) : x^2 + y^2 = 1, xu + yv = 0\}$, also $TS^1 \cong S^1 \times \mathbb{R}$ mittels $(x, y, t) \mapsto (x, y, -ty, tx)$. Somit ist das Tangentialbündel der S^1 trivial, und zwar ist es der Zylinder.
2. Die Projektion: Möbiusband $\rightarrow S^1$ auf die Mittellinie ist auch ein VB, dessen Faser $(-1, 1) \cong \mathbb{R}$ ist. Dieses VB ist jedoch nicht trivial, denn andernfalls hätte man eine globale Trivialisierung ψ :

$$\begin{array}{ccc} S^1 \times \mathbb{R} & \xrightarrow{\psi} & \text{Möb} \\ & \cong & \\ & \searrow & \swarrow \\ & & S^1 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\psi(-,1)} & \text{Möb} \\ & \searrow & \swarrow \\ & & S^1 \end{array}$$

mit $\psi(S^1, 1) \cap S^1 = \emptyset$. So eine Abbildung gibt es aber nicht.

3. Auch TS^2 ist ein Vektorbündel. Um die Frage, ob es auch trivial ist, beantworten zu können, nehmen wir an, es gäbe eine Trivialisierung $\psi : S^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow TS^2$. Mit $\psi(-, e_1)$ hätte man eine stetige Abbildung, die jedem $x \in S^2$ einen nichtverschwindenden Tangentialvektor zuordnet, so eine Abbildung existiert aber nicht (Igelsatz [50.11](#)).
4. Da die S^3 eine glatte Gruppenstruktur trägt, ist $TS^3 \cong S^3 \times \mathbb{R}^3$ wieder ein triviales Vektorbündel.

27.5 Definition (Linear unabhängige Vektorfelder)

Eine Familie von Vektorfeldern $\{\xi_1, \dots, \xi_k\}$ auf M heißt (ÜBERALL) LINEAR UNABHÄNGIG, falls $\{\xi_i|_p : 1 \leq i \leq k\}$ linear unabhängig in T_pM ist für alle $p \in M$.

27.6 Bemerkung (Parallelisierbare Mannigfaltigkeiten)

Eine Mannigfaltigkeit M hat ein triviales Tangentialbündel genau dann, wenn sie $m = \dim M$ überall linear unabhängige Vektorfelder besitzt. Sie heißt dann PARALLELISIERBAR. Ist TM trivial, d.h.

$$\begin{array}{ccc}
 TM & \xleftarrow[\psi]{\cong} & M \times \mathbb{R}^m \\
 \pi_M \searrow & & \swarrow \text{pr}_1 \\
 & M &
 \end{array}$$

dann sind die $\xi_i : x \mapsto \psi(x, e_i)$ für $1 \leq i \leq m$ linear unabhängiges Vektorfelder. Umgekehrt definiert $\psi(x, (v^i)_{i=1}^m) := \sum_i v^i \xi_i(x)$ eine Trivialisierung von TM , falls $\{\xi_i\}_{i=1}^m$ linear unabhängig ist. So besitzt S^1 ein linear unabhängiges Vektorfeld, da ihr Tangentialbündel trivial ist.

Der folgende Satz gibt Auskunft darüber, wieviele linear unabhängige Vektorfelder auf den höherdimensionalen Sphären existieren (“wie trivial also das Tangentialbündel ist”).

27.7 Satz (Linear unabhängige Vektorfelder auf den Sphären).

Auf der S^n können genau m Vektorfelder linear unabhängig gewählt werden, wobei $n + 1 = 2^{4a+b} \cdot c$ mit $a \in \mathbb{N}_0$, $b \in \{0, 1, 2, 3\}$, ungeraden c und $m + 1 = 8 \cdot a + 2^b$

Ohne Beweis. Das Resultat wurde durch [20], [45] und [1] erhalten.

Die Anzahl der linear unabhängigen Vektorfelder auf den Sphären hängt mit der Struktur gewisser Algebren zusammen:

27.8 Proposition.

Es sei $b : \mathbb{R}^{k+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ eine bilineare Abbildung, sodaß

1. Aus $b(v, x) = 0$ folgt $v = 0$ oder $x = 0$ (Nullteilerfreiheit),
2. $\exists v_0 \in \mathbb{R}^{k+1}$, sodaß $b(v_0, x) = x \ \forall x \in \mathbb{R}^{n+1}$ (Linkseinheit),

dann existieren k linear unabhängige Vektorfelder auf der S^n .

Beweis. Sei $v \in \mathbb{R}^{k+1}$, dann ist die Abbildung $\mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ mit $x \mapsto b(v, x)$ linear. Mit den Abbildungen $\rho : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n$ (Radialprojektion) und $\text{incl} : S^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ (kanonische Inklusion), kann ein glattes Vektorfeld $\xi_v : S^n \rightarrow TS^n$ wie folgt definiert werden: $\xi_v = T\rho \circ b(v, \cdot) \circ \text{incl}$. Sind $\{v_0, v_1, \dots, v_k\}$ überall linear unabhängig im \mathbb{R}^{k+1} , dann sind $\{\xi_{v_1}, \dots, \xi_{v_k}\}$ linear unabhängig: Sei

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \xi_{v_i}|_x = 0 \Rightarrow 0 = \sum_{i=1}^k \lambda_i T_x \rho(b(v_i, x)) = T_x \rho\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i b(v_i, x)\right)$$

Der Kern von $T_x\rho$ ist der von x erzeugte Teilraum im $\mathbb{R}^{n+1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^k \lambda_i b(v_i, x) = -\lambda_0 x = -\lambda_0 b(v_0, x) \text{ für ein } \lambda_0 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow b\left(\sum_{i=0}^k \lambda_i v_i, x\right) = 0; \text{ da } x \neq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \quad \forall i$$

(weil die v_i linear unabhängig sind). \square

27.9 Folgerungen.

1. Die Sphären S^1 , S^3 und S^7 sind parallelisierbar:

Als bilineare Funktionen $b : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, welche die Eigenschaften (i), (ii) von [27.8](#) erfüllen, können folgende \mathbb{R} -Algebra-Multiplikationen verwendet werden:

$$n = 1 : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$n = 3 : \mathbb{H} \times \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$$

$$n = 7 : \mathbb{O} \times \mathbb{O} \rightarrow \mathbb{O} \quad \text{wobei } \mathbb{O} \cong \mathbb{R}^8 \text{ die Cayley-Zahlen (Oktaven oder Oktonionen) sind.}$$

Wegen [27.7](#) sind dies die einzigen parallelisierbaren Sphären, denn aus $2^{4a+b} \cdot c = 8a + 2^b$ folgt $c = 1$ und weiter $a = 0$, also $n = 2^b - 1$ für $b \in \{0, 1, 2, 3\}$.

2. Wenn n ungerade ist, dann besitzt S^n ein nichtverschwindendes Vektorfeld. Für $b : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, wobei $n + 1 = 2k$ für $k \in \mathbb{N}$ ist, kann die Skalarmultiplikation mit komplexen Zahlen verwendet werden:

$$\mathbb{C} \times \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k, \quad (\lambda; \lambda^1, \dots, \lambda^k) \mapsto (\lambda \cdot \lambda^1, \dots, \lambda \cdot \lambda^k)$$

3. Wenn G eine Lie-Gruppe mit neutralem Element $e \in G$ ist, so ist $TG \cong G \times T_e G$. Der Isomorphismus ist durch

$$\xi \mapsto (\pi(\xi), TL_{\pi(\xi)^{-1}} \cdot \xi) = (\pi(\xi), T\mu(0_{\pi(x_s)^{-1}}, \xi))$$

gegeben, für Details siehe [67.2](#).

28. Gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

28.1 Definition (Integralkurve)

Es sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ und I ein offenes Intervall mit $0 \in I$. Dann heißt $c : I \rightarrow M$ (Lösungskurve) INTEGRALKURVE des Vektorfeldes ξ durch $p \Leftrightarrow$

$$c(0) = p, \quad c'(t) = \xi_{c(t)} \text{ für } t \in I.$$

Wir werden folgenden üblichen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen in Vektorräumen benutzen.

28.2 Satz über gewöhnliche Differentialgleichungen.

Sei E ein Euklidischer Vektorraum (oder allgemeiner ein Banachraum) und $f : \mathbb{R} \times E \rightarrow E$ eine glatte Funktion. Dann existiert ein offenes Intervall I um 0 in \mathbb{R}

und eine offene Kugel U um 0 in E , so daß für alle $x \in U$ eine eindeutige Lösung $c_x : I \rightarrow E$ der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$c'_x(t) = f(t, c_x(t)) \text{ mit } c_x(0) = x$$

existiert. Weiters ist $(t, x) \mapsto c_x(t)$ glatt als Abbildung $I \times U \rightarrow E$.

Ohne Beweis. Siehe z.B. [19, 10.8.1 und 10.8.2].

Damit können wir nun folgende globale Version auf Mannigfaltigkeiten beweisen.

28.3 Satz über gewöhnliche Differentialglg. auf Mannigfaltigkeiten.

Sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt:

1. Zu jedem $p \in M$ existiert eine eindeutige maximale Integralkurve $c_p : (t_-^p, t_+^p) \rightarrow M$ zu ξ durch p (d.h. jede andere Integralkurve ist eine Einschränkung von c_p). ist.
2. Ist $t_+^p < \infty$, dann gilt $\lim_{t \nearrow t_+^p} c(t) = \infty$, d.h. für jede kompakte Menge $K \subseteq M$ ist $c(t)$ nicht in K für t hinreichend nahe bei t_+^p .
3. Die Menge $U = \{(t, p); t_-^p < t < t_+^p\} \subseteq \mathbb{R} \times M$ ist eine offene Umgebung von $\{0\} \times M$. Die Abbildung $\text{Fl}^\xi : U \rightarrow M$, definiert durch $\text{Fl}^\xi(t, p) := c_p(t)$, ist C^∞ und heißt der **LOKALE FLUSS** des Vektorfeldes. Falls $q := \text{Fl}^\xi(s, p)$ existiert, so existiert $\text{Fl}^\xi(t+s, p)$ genau dann wenn $\text{Fl}^\xi(t, q)$ existiert, und die beiden stimmen überein. Diese Gleichung heißt auch **EINPARAMETERGRUPPEN-EIGENSCHAFT**, denn wenn Fl^ξ global definiert ist, dann besagt sie: $(\text{Fl}^\xi)^\vee : \mathbb{R} \rightarrow \text{Diff}(M)$ ein Gruppen-Homomorphismus.

Beweis. (1) **lokale Existenz und Eindeutigkeit:** O.B.d.A. sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ glatt. Wir suchen ein c mit $c'(t) = \xi_{c(t)}$ und $c(0) = x$. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung, deren lokale Lösung nach [28.2] existiert und eindeutig ist, weil ξ lokal Lipschitz ist. Sie ist C^∞ , da ξ glatt ist.

Globale Existenz und Eindeutigkeit: Seien c_1, c_2 zwei Integralkurven. Die Menge $\{t \geq 0 : c_1(t) = c_2(t)\}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge von $\text{Dom } c_1 \cap \text{Dom } c_2$. Angenommen sie stimmt nicht mit dieser überein, dann gibt es ein t in der Differenz. O.B.d.A. sei $t > 0$ dann existiert $t_0 := \inf\{0 < t \in \text{Dom } c_1 \cap \text{Dom } c_2 : c_1(t) \neq c_2(t)\}$. Klarerweise ist $c_1(t_0) = c_2(t_0)$. Nun sind aber $t \mapsto c_1(t_0 + t)$ und $t \mapsto c_2(t_0 + t)$ Integralkurven durch $c_1(t_0) = c_2(t_0)$ und stimmen somit lokal überein. Das ist ein Widerspruch zur Eigenschaft des Infimums. Somit ist $c_p := \bigcup\{c : c \text{ ist Integralkurve durch } p\}$ die wohldefinierte eindeutig bestimmte maximale Integralkurve durch p . Wir setzen $(t_-^p, t_+^p) := \text{Dom } c_p$.

(3) Wegen (1) ist $\{0\} \times M \subset U$ und $\text{Fl}^\xi(0, p) = c_p(0) = p$.

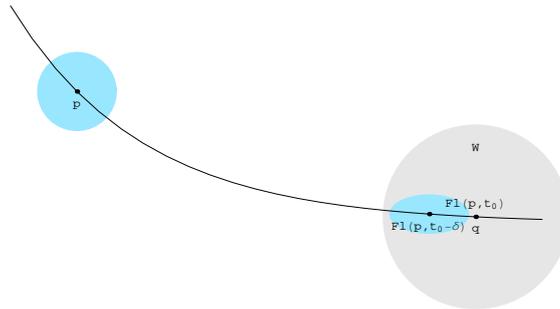
Einparametergruppen-Eigenschaft: Es existiere $q := \text{Fl}(s, p)$, d.h. $t_-^p < s < t_+^p$, da $r \mapsto \text{Fl}(r, p)$ die maximale Integralkurve mit Anfangswert p ist und diese ist für $t_-^p < r < t_+^p$ definiert. Es ist $t \mapsto \text{Fl}(t, \text{Fl}(s, p))$ die maximale Integralkurve mit Anfangswert q . Sie ist für $t_-^q < t < t_+^q$ definiert. Für t mit $t_-^p < s + t < t_+^p$ ist $t \mapsto \text{Fl}(t + s, p)$ eine Lösung mit Anfangswert $q = \text{Fl}(s, p)$. Also gilt wegen der Maximalität und Eindeutigkeit von $t \mapsto \text{Fl}(t, q)$ Gleichheit und $t_-^q \leq t_-^p - s < -s < t_+^p - s \leq t_+^q$. Insbesondere existiert also $\text{Fl}(-s, q)$ und stimmt mit $\text{Fl}(-s + s, p) = p$ überein. Also folgt aus Symmetriegründen, daß $t_-^p \leq t_-^q + s$ und $t_+^q + s \leq t_+^p$. Zusammen ergibt daß $t_-^p - t_-^q = s = t_+^q - t_+^p$ und somit existiert $\text{Fl}(t + s, p)$ genau dann wenn $\text{Fl}(t, q)$ existiert und die beiden stimmen überein.

Wir zeigen jetzt, daß $U \subseteq \mathbb{R} \times M$ offen in der Produkttopologie ist und Fl darauf C^∞ : Für $p \in M$ sei

$$I := \{t' \in [0, t_+^p) : \text{Fl ist auf einer offenen Umgebung von } [0, t'] \times \{p\} \subseteq U \text{ definiert und glatt}\}.$$

Wir zeigen indirekt, daß $I = [0, t_+^p)$ ist (analog geht man für t_-^p vor):
 Angenommen $I \subset [0, t_+^p[$. Sei $t_0 := \inf([0, t_+^p[\setminus I)$ und $q := \text{Fl}(t_0, p)$. Für $p \in M$ existiert nach [28.2](#) eine offene Umgebung von $(0, p) \in \mathbb{R} \times M$, auf welcher der Fluß Fl definiert und glatt ist, somit ist $t_0 > 0$.

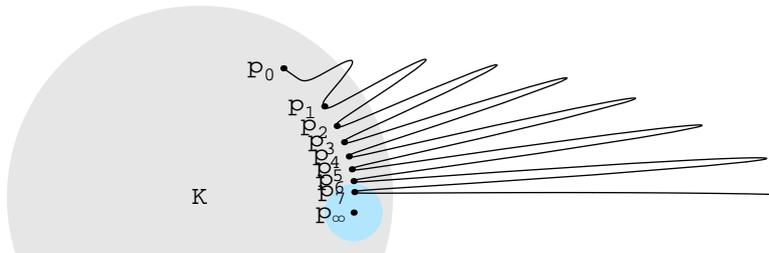
Ebenso ist Fl auf einer Umgebung $(-\varepsilon, \varepsilon) \times W$ von $(0, q)$ glatt und wegen der Stetigkeit von $t \mapsto \text{Fl}(t, p)$ bei t_0 existiert ein $0 < \delta < \varepsilon$ so, daß $\text{Fl}(t_0 - \delta, p)$ in W enthalten ist. Nach Konstruktion von t_0 ist Fl auch auf einer Umgebung von $[0, t_0 - \delta] \times \{p\}$ glatt. Somit bildet $x \mapsto \text{Fl}(t_0 - \delta, x)$ eine Umgebung von p glatt nach W ab und damit ist die Zusammensetzung $(s, x) \mapsto \text{Fl}(s, \text{Fl}(t_0 - \delta, x))$ auf einer Umgebung von $[0, \delta] \times \{p\}$ glatt. Wegen der Einparametergruppen-Eigenschaft ist $\text{Fl}(s, \text{Fl}(t_0 - \delta, x)) = \text{Fl}(s + t_0 - \delta, x)$, also Fl lokal um $[t_0 - \delta, t_0] \times \{p\}$ glatt. Insgesamt ist Fl auf einer Umgebung von $([0, t_0 - \delta] \cup [t_0 - \delta, t_0]) \times \{p\} = [0, t_0] \times \{p\}$ glatt, und damit eine Umgebung von t_0 in I enthalten, ein Widerspruch zur Annahme.



(2) Sei $K \subseteq M$ kompakt. Angenommen es existieren $t_n \rightarrow t_+^p < \infty$, sodaß $p_n := c_p(t_n) \in K$ für alle n . O.B.d.A. gelte $p_n \rightarrow p_\infty \in K$ (denn K ist kompakt). Nach (3) existiert ein $\delta > 0$ so, daß der Fluß $\text{Fl}(t, q)$ wohldefiniert für $|t| \leq \delta$ und q nahe bei p_∞ . Für n genügend groß seien p_n solche Werte für q , d.h. $\text{Fl}(t, p_n)$ ist wohldefiniert für $|t| < \delta$. Andererseits gilt:

$$\text{Fl}(t, p_n) = \text{Fl}(t, c_p(t_n)) = \text{Fl}(t, \text{Fl}(t_n, p)) = \text{Fl}(t + t_n, p) = c_p(t + t_n).$$

Also ist $c_p(s)$ wohldefiniert für $0 \leq s < t_+^p$, aber auch für $s = t + t_n$ mit $|t| < \delta$ und n beliebig, d.h. $t_n - \delta < s < t_n + \delta$. Sei n so groß, daß $t_n > t_+^p - \delta$. Dann ist c_p auf $[0, t_+^p) \cup (t_n - \delta, t_n + \delta) \supseteq [0, t_+^p]$ wohldefiniert, ein Widerspruch zur Voraussetzung, daß die Lösungskurven nur bis vor t_+^p definiert sind.



□

28.4 Beispiel (Exponentialabbildung)

Es sei $T \in L(n, n)$ und die Matrixmultiplikation von links $S \mapsto T \circ S$ definiere ein Vektorfeld auf $L(n, n)$. Gesucht ist die Lösungskurve $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow L(n, n)$, die $\Gamma'(t) = T \circ (\Gamma(t))$, als auch $\Gamma(0) = S \in L(n, n)$ erfüllt. Man definiert

$$\exp(T) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} T^k$$

und zeigt, daß die Reihe absolut konvergiert. Die Lösung obiger Differentialgleichung lautet dann $\Gamma(t) = \exp(tT) \circ S$, und der Fluß ist $Fl(t, S) = \exp(tT) \circ S$. Siehe Aufgabe [72.50](#).

28.5 Definition (Vollständige Vektorfelder)

Ein Vektorfeld ξ heißt VOLLSTÄNDIG, wenn Fl^ξ global (d.h. für alle $t \in \mathbb{R}$) definiert ist.

28.6 Bemerkungen

1. Aus Punkt 2 des vorigen Satzes folgt direkt:
Ist M kompakt, so ist jedes Vektorfeld vollständig.
2. Falls M eine nichtkompakte Zusammenhangskomponente besitzt, dann existieren nichtvollständige Vektorfelder, z.B.: $M = \mathbb{R}$, $\xi(t) = 1 + t^2$, also $c'(t) = 1 + c(t)^2$. Zum Anfangswert $c(0) = 0$ ist dann die Lösung $c(t) = \tan(t)$ nur für $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ definiert.
3. Sei $M = \mathbb{R}^2$, $\xi(x, y) = y \frac{\partial}{\partial x}$ und $\eta(x, y) = (x^2/2) \frac{\partial}{\partial y}$. Wir behaupten, daß ξ und η vollständig sind:

$$Fl^\xi(t; x, y) = (x + ty, y),$$

$$Fl^\eta(t; x, y) = (x, y + tx^2/2), \text{ denn}$$

$$\frac{d}{dt} Fl^\xi(t; x, y) = (y, 0) = y \cdot \frac{\partial}{\partial x} + 0 \cdot \frac{\partial}{\partial y} = \xi(Fl(t; x, y)),$$

für η analog. Aber: $\xi + \eta$ ist nicht vollständig!

Es ist $(\xi + \eta)|_{(x, y)} = y \frac{\partial}{\partial x} + \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}$ und sei $c(t) = (x(t), y(t))$ eine Lösungskurve. Dann ist $x'(t) = y(t)$ und $y'(t) = x^2(t)/2$, d.h. $x''(t) = x^2(t)/2 \Rightarrow x'(t)^2 = x(t)^3/3 + C$. Löst man die Differentialgleichung zum Anfangswert $(y_0^2 - x_0^3)/3 = 0$, für $x_0 > 0$, so zeigt sich, daß $Fl^{\xi+\eta}$ nicht global definiert ist.

4. Sei $Fl_t^\xi(p) := Fl^\xi(t, p)$. Weil die Lösungskurven in einer offenen Umgebung von p existieren, gilt wegen der 1-Parameteruntergruppen-Eigenschaft für kleine t : $(Fl_t^\xi)^{-1} = Fl_{-t}^\xi$. Der Fluß Fl_t^ξ ist also ein lokaler Diffeomorphismus.

29. Lie-Klammer

In [20.6](#) haben wir gesehen, daß wir $T_p M$ mit $\text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ identifizieren können. Und zwar war für lokale Koordinaten (u^1, \dots, u^m) die Wirkung eines Tangentialvektors $v = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \in T_p M$ auf $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} v(f) &= \left(\sum_i v^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right) (f) = \sum_i v^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (f) \text{ und insbesondere} \\ v(u^j) &= \sum_i v^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (u^j) = v^j, \text{ denn} \\ \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p (u^j) &= \partial_i(u^j \circ \varphi)(\varphi^{-1}(p)) = \partial_i(\text{pr}_j)(\varphi^{-1}(p)) = \delta_i^j. \end{aligned}$$

29.1 Satz (Vektorfelder als Derivationen).

Es gibt eine bilineare Abbildung

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(M) \times C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}), \\ (\xi, f) &\mapsto \xi \cdot f = \xi(f) \quad (: p \mapsto \xi_p(f) \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Beachte, daß $\xi \cdot f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ wohingegen $f \cdot \xi \in \mathfrak{X}(M)$. Diese bilineare Abbildung induziert einen \mathbb{R} -linearen Isomorphismus von $\mathfrak{X}(M)$ mit

$$\text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R})) := \{ \partial \in L(C^\infty(M, \mathbb{R})) : \partial(f \cdot g) = \partial(f) \cdot g + f \cdot \partial(g) \}.$$

Außerdem gilt: $(f \cdot \xi) \cdot g = f \cdot (\xi \cdot g)$, d.h. dieser Isomorphismus ist sogar $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear, wobei $\text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$ durch $(f \cdot \partial)(g) := f \cdot \partial(g)$ zu einem Modul über der kommutativen Algebra $C^\infty(M, \mathbb{R})$ gemacht wird.

Beweis. Wir definieren:

$$\xi(f)(x) = (\xi(f))(x) := \xi(x)(f) = (T_x f)(\xi(x)) = (\text{pr}_2 \circ T f \circ \xi)(x).$$

Also ist $\xi(f) = \text{pr}_2 \circ T f \circ \xi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Die Zuordnung $(\xi, f) \mapsto \xi(f)$ ist linear in ξ , da $T_x f$ linear ist. Sie ist linear in f , da $\xi(x) \in \text{Der}_x$, also linear ist.

Die induzierte Abbildung $f \mapsto \xi(f)$ ist eine Derivation, denn

$$\begin{aligned} \xi(fg)(x) &= \xi(x)(fg) = \xi(x)(f) \cdot g(x) + f(x) \cdot \xi(x)(g) \\ &= \xi(f)(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \xi(g)(x) \\ &= (\xi(f) \cdot g)(x) + (f \cdot \xi(g))(x) \\ &= (\xi(f)g + f \xi(g))(x). \end{aligned}$$

Die induzierte Abbildung $\mathfrak{X}(M) \rightarrow \text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$ ist surjektiv:

Sei $\partial \in \text{Der}(C^\infty(M, \mathbb{R}))$ gegeben. Wir suchen ein Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, welches $\xi(x)(f) = \partial(f)(x)$ erfüllt. Also ist

$$\xi(x) = \text{ev}_x \circ \partial \in \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \cong T_x M.$$

Verbleibt zu zeigen, daß ξ glatt ist. Seien dazu (u^1, \dots, u^m) lokale Koordinaten. Dann ist $\xi(x) = \sum_i \xi(x)^i \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x$, und die Komponenten $\xi(x)^i = (\text{ev}_x \circ \partial)(u^i) = \partial(u^i)(x)$ sind glatt in x . Also ist $\xi \in \mathfrak{X}(M)$. Daß die beiden Abbildungen $\xi \leftrightarrow \partial$ invers zueinander sind, ist klar, denn

$$\begin{aligned} \xi^i(x) &= (\text{ev}_x \circ \partial)(u^i) = \partial(u^i)(x) = \xi_x(u^i) = \xi^i(x) \\ \partial(f)(x) &= (\text{ev}_x \circ \partial)(f) = \partial(f)(x). \end{aligned}$$

Schließlich können wir noch folgende Umformung durchführen:

$$\begin{aligned}(f \cdot \xi)(g)|_p &= (f \cdot \xi)_p \cdot g = (f_p \cdot \xi_p) \cdot g = f(p) \cdot (\xi_p \cdot g) \\ &= f(p) \cdot (\xi \cdot g)_p = f(p) \cdot \xi(g)(p) = (f \cdot \xi(g))|_p. \quad \square\end{aligned}$$

29.2 Folgerung (Raum der Vektorfelder als Lie-Algebra).

Durch die Zuordnung:

$$\begin{aligned}\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) &\rightarrow \mathfrak{X}(M), \\ (\xi, \eta) &\rightarrow [\xi, \eta] \\ [\xi, \eta] : f &\mapsto (\xi(\eta(f)) - \eta(\xi(f))),\end{aligned}$$

wird eine bilineare Abbildung definiert, die den Raum $\mathfrak{X}(M)$ zu einer LIE-ALGEBRA macht. D.h.:

1. *Schiefsymmetrie*: $[\xi, \eta] + [\eta, \xi] = 0$;
2. *“Jacobi-Identität”*: $[\xi, [\eta, \chi]] + [\eta, [\chi, \xi]] + [\chi, [\xi, \eta]] = 0$;
3. *Zusätzlich gilt*: $[f\xi, g\eta] = fg \cdot [\xi, \eta] + f\xi(g) \cdot \eta - g\eta(f) \cdot \xi$.

Beweis. Wir führen den Beweis für den Raum $\text{Der}(A)$ der Derivationen einer allgemeinen assoziativen Algebra A . Dazu definieren wir für $\xi, \eta \in \text{Der}(A)$ die LIE-KLAMMER von ξ mit η als $[\xi, \eta] := \xi \circ \eta - \eta \circ \xi$.

Dann gilt $[\xi, \eta] \in \text{Der}(A)$, denn klarerweise ist $[\xi, \eta]$ linear und für $f, g \in A$ gilt:

$$\begin{aligned}[\xi, \eta](f \cdot g) &= \xi(\eta(f \cdot g)) - \eta(\xi(f \cdot g)) \\ &= \xi(f \cdot \eta(g)) + \xi(\eta(f) \cdot g) - \eta(f \cdot \xi(g)) - \eta(\xi(f) \cdot g) \\ &= f \cdot \xi(\eta(g)) + \xi(f)\eta(g) + \eta(f)\xi(g) + \xi(\eta(f)) \cdot g \\ &\quad - f \cdot \eta(\xi(g)) - \eta(f)\xi(g) - \xi(f)\eta(g) - \eta(\xi(f)) \cdot g \\ &= f \cdot [\xi, \eta](g) + [\xi, \eta](f) \cdot g.\end{aligned}$$

Die Abbildung $(\xi, \eta) \mapsto [\xi, \eta]$ ist bilinear, denn die Komposition in $L(A, A)$ ist bilinear und die Subtraktion in $L(A, A)$ ist linear.

Sie ist schiefssymmetrisch, denn

$$[\xi, \eta] = \xi \circ \eta - \eta \circ \xi = -(\eta \circ \xi - \xi \circ \eta) = -[\eta, \xi]$$

und erfüllt die Jacobi-Gleichung, denn:

$$\begin{aligned}[\xi, [\eta, \chi]] + [\eta, [\chi, \xi]] + [\chi, [\xi, \eta]] \\ &= [\xi, \eta \circ \chi - \chi \circ \eta] + [\eta, \chi \circ \xi - \xi \circ \chi] + [\chi, \xi \circ \eta - \eta \circ \xi] \\ &= \xi \circ (\eta \circ \chi - \chi \circ \eta) - (\eta \circ \chi - \chi \circ \eta) \circ \xi \\ &\quad + \eta \circ (\chi \circ \xi - \xi \circ \chi) - (\chi \circ \xi - \xi \circ \chi) \circ \eta \\ &\quad + \chi \circ (\xi \circ \eta - \eta \circ \xi) - (\xi \circ \eta - \eta \circ \xi) \circ \chi \\ &= 0\end{aligned}$$

Zuletzt zeigen wir noch Punkt (3). Dazu rechnen wir:

$$\begin{aligned}
([f \cdot \xi, g \cdot \eta])(h) &= ((f \cdot \xi) \circ (g \cdot \eta) - (g \cdot \eta) \circ (f \cdot \xi))(h) = \\
&= (f \cdot \xi)((g \cdot \eta)(h)) - (g \cdot \eta)((f \cdot \xi)(h)) \\
&= (f \cdot \xi)(g \cdot \eta(h)) - (g \cdot \eta)(f \cdot \xi(h)) \\
&= f \cdot \xi(g) \cdot \eta(h) + f \cdot g \cdot \xi(\eta(h)) \\
&\quad - g \cdot \eta(f) \cdot \xi(h) - g \cdot f \cdot \eta(\xi(h)) \\
&= (f \cdot g \cdot [\xi, \eta] + f \cdot \xi(g) \cdot \eta - g \cdot \eta(f) \cdot \xi)(h). \quad \square
\end{aligned}$$

Bemerkung

Bezüglich der VB-Kartendarstellung sieht $[\xi, \eta]$ folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
[\xi, \eta] &= \left[\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_k \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right] \stackrel{\text{Bilinearität}}{=} \\
&= \sum_{i,k} \left[\xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \eta^k \frac{\partial}{\partial u^k} \right] \\
&\stackrel{29.2.3}{=} \sum_{ik} \left(\xi^i \eta^k \left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right] + \xi^i \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \cdot \eta^k \right) \frac{\partial}{\partial u^k} - \eta^k \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \cdot \xi^i \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\
&= \sum_k \sum_i \left(\xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \eta^k - \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^k \right) \frac{\partial}{\partial u^k}, \quad \text{da } \left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^k} \right] = 0.
\end{aligned}$$

Es ist der Koeffizient von $[\xi, \eta]$ bezüglich $\frac{\partial}{\partial u^k}$ gerade $[\xi, \eta]^k = \sum_i \left(\xi^i \frac{\partial \eta^k}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^k}{\partial u^i} \right)$.

Man kann umgekehrt diese lokale Formel dazu verwenden, die Lieklammer zu definieren. Man muß dazu aber die Verträglichkeit mit Kartenwechsel nachrechnen. Dies geht wie folgt:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j} \left(\bar{\xi}^i \frac{\partial \bar{\eta}^j}{\partial \bar{u}^i} - \bar{\eta}^i \frac{\partial \bar{\xi}^j}{\partial \bar{u}^i} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^j} \\
&= \sum_{i,j} \left(\sum_i \xi^i \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} \left(\sum_j \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^j} \eta^j \right) - \sum_i \eta^i \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} \left(\sum_j \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^j} \xi^j \right) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^j} \\
&= \sum_j \left(\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_j \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^j} \eta^j \right) - \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_j \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^j} \xi^j \right) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^j} \\
&= \sum_j \left(\sum_i \xi^i \sum_j \left(\frac{\partial^2 \bar{u}^j}{\partial u^i \partial u^j} \eta^j + \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \eta^j \right) \right. \\
&\quad \left. - \sum_i \eta^i \sum_j \left(\frac{\partial^2 \bar{u}^j}{\partial u^i \partial u^j} \xi^j + \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^j \right) \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^j} \\
&= \sum_{i,j} \left(\xi^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u^i} - \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}
\end{aligned}$$

Für offenes $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gilt also:

$$[\xi, \eta]_x^k = \sum_i (\xi_x^i \partial_i \eta^k|_x - \eta_x^i \partial_i \xi^k|_x) = (\eta^k)'(x)(\xi_x) - (\xi^k)'(x)(\eta_x)$$

d.h. $[\xi, \eta](x) = \eta'(x) \cdot \xi_x - \xi'(x) \cdot \eta_x$.

Beispiel

Es gilt: $[\xi, \eta]$ ist nicht vollständig, wenn ξ und η wie in Punkt (3) der Bemerkung 28.6 sind:

$$[\xi, \eta] = [y \frac{\partial}{\partial x}, \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y}] = y \frac{x^2}{2} [\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}] + y \frac{\partial}{\partial x} (\frac{x^2}{2}) \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial y} (y) \frac{\partial}{\partial x} = yx \frac{\partial}{\partial y} - \frac{x^2}{2} \frac{\partial}{\partial x}$$

$$c(t) = \begin{pmatrix} c_1(t) \\ c_2(t) \end{pmatrix} \text{ ist Lösungskurve} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{d}{dt} c_1(t) = -c_1^2(t)/2 \\ \frac{d}{dt} c_2(t) = c_1(t) \cdot c_2(t) \end{cases}$$

Es folgt: $c_1(t) = \frac{2}{(t+A)}$ und $c_2(t) = (t+A)^2 \cdot B$. Aus der Anfangsbedingung $c(0) = (x, y)$ ergibt sich $A = \frac{2}{x}$ und $B = \frac{x^2 y}{4}$. Somit ist

$$c_{(x,y)}(t) = \text{Fl}^{[\xi, \eta]}(t; x, y) = (\frac{2x}{2+tx}, (t + \frac{2}{x})^2 \frac{x^2 y}{4}).$$

Für $t = -\frac{2}{x}$ ist der Fluß nicht definiert, d.h. $[\xi, \eta]$ ist nicht vollständig.

29.3 Definition (Verwandtschaft von Vektorfeldern)

Es sei $f : M \rightarrow N$ glatt, $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ und $\eta \in \mathfrak{X}(N)$. Das Vektorfeld ξ heißt f -VERWANDT mit η : $\Leftrightarrow Tf \circ \xi = \eta \circ f$

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \xi \uparrow & & \uparrow \eta \\ M & \xrightarrow{f} & N \xrightarrow{g} \mathbb{R} \end{array}$$

Es gilt dann, daß ξ genau dann f -verwandt mit η ist, wenn $\xi(g \circ f) = (\eta g) \circ f$ für alle glatten $g : N \rightarrow \mathbb{R}$.

$$(\Rightarrow) \xi(g \circ f)(p) = \xi_p(g \circ f) = (T_p f \cdot \xi_p)g = \eta_{f(p)}g = \eta(g)(f(p)) = (\eta(g) \circ f)(p)$$

$$(\Leftarrow) (Tf \circ \xi)_p g = (Tf \cdot \xi_p)g = \xi_p(g \circ f) = \xi(g \circ f)(p) = (\eta g \circ f)(p) = \eta g(f(p)) = \eta_{f(p)}(g)$$

29.4 Bemerkung (Push-forward von Vektorfeldern)

Für ein allgemeines f läßt sich zu einem gegebenen Vektorfeld kein f -verwandtes Vektorfeld finden. Ist jedoch f ein Diffeomorphismus, dann ist $Tf \circ \xi \circ f^{-1}$ ein Vektorfeld $f_* \xi$ auf N für jedes Vektorfeld ξ auf M .

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \xi \uparrow & & \uparrow f_* \xi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Es folgt für ξ aus der Konstruktion, daß es f -verwandt mit $f_* \xi$ ist. Umgekehrt hat man folgende Aussage:

29.5 Lemma (Pull-back von Vektorfeldern).

Es sei $f : M \rightarrow N$ eine Immersion, $\eta \in \mathfrak{X}(N)$ und $\eta_{fp} \in \text{Bild}(T_p f)$ für alle $p \in M$, dann folgt daraus: $\exists!$ Vektorfeld $\xi (= f^* \eta)$, sodaß ξ f -verwandt mit η ist.

Beweis. Da Tf injektiv ist, kann jedem η_{fp} in $\text{Bild}(T_p f)$ ein eindeutig bestimmtes Element $\xi_p \in T_p M$ zugeordnet werden, es bleibt zu zeigen, $\xi : M \rightarrow TM$ ist C^∞ . Da f eine Immersion ist, existieren Karten φ und ψ um p bzw. f_p , sodaß $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi = \text{incl}_{\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n}$. Sei $\xi = \sum \xi_\varphi^i \partial_i^\varphi$. Es genügt zu zeigen, daß $\xi_\varphi^i : M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt sind. Da

$$\begin{aligned} (\xi_\varphi^i)_p &= \xi_p(\text{pr}_i \circ \varphi^{-1}) = \xi_p(\text{pr}_i \circ \psi^{-1} \circ f) = (Tf \circ \xi_p)(\text{pr}_i \circ \psi^{-1}) \\ &= \eta_{f(p)}(\text{pr}_i \circ \psi^{-1}) = (\eta_\psi^i)_{f(p)} = (\eta_\psi^i \circ f)_p \text{ in } p \text{ glatt ist,} \end{aligned}$$

folgt, daß ξ_p lokal um p glatt ist. Die f -Verwandtschaft folgt unmittelbar aus der Konstruktion von ξ . \square

29.6 Bemerkung

Wir haben gezeigt, daß unter gewissen Voraussetzungen Vektorfelder durch geeignete glatte Abbildungen transportiert werden können. Dabei bezeichne $f^* \eta = Tf^{-1} \circ \eta \circ f$ (siehe Lemma [29.5](#)):

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ \xi \uparrow & & \uparrow f_* \xi \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array} \quad \begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{Tf} & TN \\ f^* \eta \uparrow & & \uparrow \eta \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

Wobei das linke Diagramm existiert, falls f ein Diffeomorphismus ist und das rechte, falls f eine Immersion ist und η Werte im Bild von Tf hat. Es gilt dann:

$$f_*(f^* \eta) = Tf \circ (f^* \eta) \circ f^{-1} = Tf \circ Tf^{-1} \circ \eta \circ f \circ f^{-1} = \eta$$

sowie $f^*(f_* \xi) = \xi$, wobei f , ξ und η die oben genannten Voraussetzungen erfüllen. Insgesamt haben wir gezeigt: $f^* = (f_*)^{-1} : \mathfrak{X}(N) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ und $f_* : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(N)$.

29.7 Proposition.

Die Vektorfelder ξ_i seien f -verwandt mit η_i für $i = 1, 2$. Dann gilt:

1. $\xi_1 + \xi_2$ ist f -verwandt mit $\eta_1 + \eta_2$.
2. $[\xi_1, \xi_2]$ ist f -verwandt mit $[\eta_1, \eta_2]$.
3. $(g \circ f) \cdot \xi$ ist f -verwandt mit $g \cdot \eta$, wobei $g : N \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist.

Beweis.

(1) folgt aus der Linearität von $T_x f$.

(2) folgt, da

$$\begin{aligned} [\xi_1, \xi_2](g \circ f) &= \xi_1(\xi_2(g \circ f)) - \xi_2(\xi_1(g \circ f)) \\ &\stackrel{\text{29.3}}{=} \xi_1((\eta_2 g) \circ f) - \xi_2((\eta_1 g) \circ f) \\ &\stackrel{\text{29.3}}{=} (\eta_1(\eta_2 g)) \circ f - (\eta_2(\eta_1 g)) \circ f = ([\eta_1, \eta_2]g) \circ f. \end{aligned}$$

(3) folgt, wegen

$$\begin{aligned} (Tf \circ ((g \circ f) \cdot \xi))(p) &= Tf(g(f(p)) \cdot \xi_p) = g(f(p)) \cdot (T_p f) \xi_p \\ &= g(f(p)) \cdot \eta_{f(p)} = ((g \cdot \eta) \circ f)(p). \quad \square \end{aligned}$$

29.8 Lemma.

Seien ξ und η zwei Vektorfelder, dann ist ξ f -verwandt mit $\eta \Leftrightarrow f \circ \text{Fl}^\xi = \text{Fl}^\eta \circ (\text{id} \times f)$ lokal um $\{0\} \times M$.

Beweis.

(\Leftarrow) Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(\text{Fl}^\xi(t, p)) &= Tf(\text{Fl}^\xi(-, p)'(0)) = Tf(\xi_p) \text{ und} \\ \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \text{Fl}^\eta(t, f(p)) &= \eta(\text{Fl}^\eta(0, f(p))) = \eta(f(p)). \end{aligned}$$

(\Rightarrow) Die Kurve $\text{Fl}^\eta(-, f(p))$ ist die Integralkurve zu η mit Startwert $f(p)$. Es ist $f(\text{Fl}^\xi(t, p))|_{t=0} = f(p)$ und durch Differenzieren folgt:

$$\left(f \circ \text{Fl}^\xi(-, p) \right)'(t) = Tf\left((\text{Fl}^\xi(-, p))'(t) \right) = (Tf \cdot \xi)|_{\text{Fl}^\xi(t, p)} = \eta|_{f(\text{Fl}^\xi(t, p))}.$$

Die Gleichheit der beiden Ausdrücke folgt nun aus der Eindeutigkeit der Integralkurven. \square

29.9 Definition (Lie-Ableitung)

1. Für $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ist die LIE-ABLEITUNG \mathcal{L}_ξ in Richtung ξ auf Funktionen $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ definiert durch

$$\mathcal{L}_\xi : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$$

$$f \mapsto \left(p \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* f(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (f \circ \text{Fl}_t^\xi)(t, p) \right).$$

2. Für $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ist die LIE-ABLEITUNG \mathcal{L}_ξ in Richtung ξ auf Vektorfeldern $\eta \in \mathfrak{X}(M)$ definiert durch

$$\mathcal{L}_\xi : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

$$\eta \mapsto \left(p \mapsto \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* \eta(p) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)(p) \right).$$

Dabei beachte man, daß $T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi : M \rightarrow TM$ für alle t lokal ein Schnitt ist, und somit $t \mapsto (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)(p)$ eine lokal definierte Kurve im Vektorraum $T_p M$ für jedes p ist (wohingegen $t \mapsto (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)$ keine Kurve $\mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ist), und somit die Ableitung $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)(p)$ ebenfalls in $T_p M$ liegt.

Der folgende Satz zeigt, daß wir die Lie-Ableitung von Funktionen und Vektorfeldern schon kennen.

29.10 Satz (Beschreibungen der Lie-Ableitung).

1. Sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, dann gilt:

$$\mathcal{L}_\xi f = \xi f.$$

2. Seien $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$, dann gilt:

$$\mathcal{L}_\xi(\eta) = [\xi, \eta].$$

Beweis. (1) Da $\xi_p = c'_p(0)$ ist, wobei bei $c_p := \text{Fl}^\xi(-, p)$, gilt

$$(\mathcal{L}_\xi f)_p = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* f(p) = (f \circ \text{Fl}^\xi(-, p))'(0) = (f \circ c_p)'(0) = \xi_p(f) = (\xi f)_p.$$

(2) Sei $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$(t, s) \mapsto (\eta|_{\text{Fl}^\xi(t, p)})(f \circ \text{Fl}^\xi(s, \cdot)) = T \text{Fl}^\xi(s, -)(\eta|_{\text{Fl}^\xi(t, p)})(f) = (T \text{Fl}_s^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)_p(f)$$

lokal definiert. Dann ist

$$\begin{aligned} \alpha(t, 0) &= \eta|_{\text{Fl}^\xi(t,p)} f \\ \alpha(0, s) &= \eta_p(f \circ \text{Fl}^\xi(s, \cdot)) \\ \Rightarrow \partial_1 \alpha|_{(0,0)} &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\eta|_{\text{Fl}^\xi(t,p)})f = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\eta f)(\text{Fl}^\xi(t,p)) = \xi_p(\eta f) \\ \partial_2 \alpha|_{(0,0)} &= \frac{d}{dt}|_{t=0}\eta_p(f \circ \text{Fl}^\xi(t, \cdot)) = \eta_p \frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ \text{Fl}^\xi(t, \cdot)) = \eta_p(\xi f), \end{aligned}$$

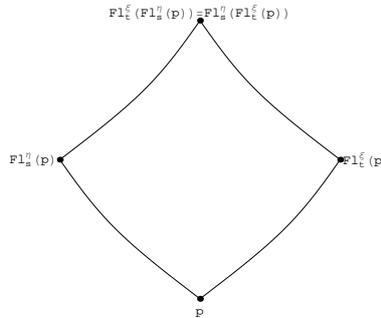
da η_p linear ist. Es gilt also

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|_{t=0}\alpha(-t, t) &= \partial_2 \alpha(0, 0) - \partial_1 \alpha(0, 0) = \xi_p(\eta f) - \eta_p(\xi f) = [\xi, \eta]_p f \\ \text{sowie } \frac{d}{dt}|_{t=0}\alpha(t, -t) &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(\eta|_{\text{Fl}^\xi(t,p)})(f \circ \text{Fl}^\xi(-t, \cdot)) \\ &= \frac{d}{dt}|_{t=0}(T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)_p f = \mathcal{L}_\xi(\eta)_p f. \quad \square \end{aligned}$$

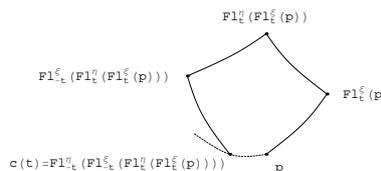
29.11 Satz.

Die Lie-Klammer ist eine Obstruktion gegen Kommutativität der Flüsse. Genauer heißt das:

1. Es ist $[\xi, \eta] = 0 \Leftrightarrow \text{Fl}_t^\xi \circ \text{Fl}_s^\eta = \text{Fl}_s^\eta \circ \text{Fl}_t^\xi$ (Diese Abbildungen sind lokal für kleine t und s definiert).



2. Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $c(t) := (\text{Fl}_{-t}^\eta \circ \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \text{Fl}_t^\eta \circ \text{Fl}_t^\xi)_p$ lokal definiert. Dann gilt: $c(0) = p$, $c'(0) = 0$, $c''(0) \in T_p M$ ist wohldefiniert und $c''(0) = 2[\xi, \eta]_p$.



Beweis. (1) (\Leftarrow) Es gilt

$$\text{Fl}_t^\xi(\text{Fl}^\eta(s, p)) = \text{Fl}_t^\xi \text{Fl}_s^\eta(p) = \text{Fl}_s^\eta \text{Fl}_t^\xi(p) = \text{Fl}^\eta(s, \text{Fl}_t^\xi(p)),$$

$$\text{d.h. } \text{Fl}_t^\xi \circ \text{Fl}^\eta = \text{Fl}^\eta \circ (1 \times \text{Fl}_t^\xi)$$

$$\stackrel{\text{29.8}}{\Rightarrow} \eta \text{ ist } \text{Fl}_t^\xi\text{-verwandt mit } \eta, \text{ d.h. } T \text{Fl}_t^\xi \circ \eta = \eta \circ \text{Fl}_t^\xi.$$

$$\Rightarrow \eta = T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi, \text{ da } (\text{Fl}_t^\xi)^{-1} = \text{Fl}_{-t}^\xi \text{ ein lokaler Diffeomorphismus}$$

$$\Rightarrow 0 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \eta = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi \stackrel{\text{29.10}}{=} [\xi, \eta].$$

(\Rightarrow) Aus $[\xi, \eta] = 0$ folgt:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt} (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi)(p) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ T \text{Fl}_{-s}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_s^\xi \circ \text{Fl}_t^\xi)(p) \\ &= \left(T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} (T \text{Fl}_{-s}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_s^\xi) \circ \text{Fl}_t^\xi \right)(p) \\ &\stackrel{\text{29.10}}{=} (T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ [\xi, \eta] \circ \text{Fl}_t^\xi)(p) = 0 \end{aligned}$$

Also ist $\eta = T \text{Fl}_0^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_0^\xi = T \text{Fl}_{-t}^\xi \circ \eta \circ \text{Fl}_t^\xi$ konstant in t , d.h. $\eta \circ \text{Fl}_t^\xi = T \text{Fl}_t^\xi \circ \eta$. Somit ist η ist Fl_t^ξ -verwandt mit η . Nach [29.8](#) ist schließlich $\text{Fl}_s^\eta \circ \text{Fl}_t^\xi = \text{Fl}_t^\xi \circ \text{Fl}_s^\eta$.

(2) Es sei $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ lokal definiert und C^∞ und $c' : \mathbb{R} \rightarrow TM$ der kanonische Lift von c . Die Kurve $c'' : \mathbb{R} \rightarrow T(TM)$ kann ebenfalls als Lift aufgefaßt werden.

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R} & \xlongequal{\quad} & \mathbb{R} \\ c \downarrow & & c' \downarrow & & c'' \downarrow \\ M & \xleftarrow{\pi_M} & TM & \xleftarrow{\pi_{TM}} & T(TM) \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} c = \pi_M \circ c' \\ c' = \pi_{TM} \circ c'' \end{array} \right\} \Rightarrow c = \pi_M \circ \pi_{TM} \circ c''$$

Falls $c'(0) = 0$, läßt sich $c''(0)$ als Derivation auffassen: $f \mapsto c''(0)f := (f \circ c)''(0)$ ist linear und

$$\begin{aligned} c''(0)(fg) &= ((fg) \circ c)''(0) = ((f \circ c)(g \circ c))''(0) \\ &= (f \circ c)''(0)(g \circ c)(0) + 2(f \circ c)'(0)(g \circ c)'(0) + (f \circ c)(0)(g \circ c)''(0) \\ &= (c''(0)f)g(c(0)) + f(c(0))(c''(0)g). \end{aligned}$$

Also ist $c''(0)$ eine Derivation über $c(0) = p$, d.h. $c''(0) \in T_p M$.

$$\begin{aligned} \text{Es sei } \alpha_0(t, s) &:= (\text{Fl}_t^\eta \circ \text{Fl}_s^\xi)(p) \\ \alpha_1(t, s) &:= (\text{Fl}_{-t}^\xi \circ \text{Fl}_s^\eta \circ \text{Fl}_s^\xi)(p) \\ \alpha_2(t, s) &:= (\text{Fl}_{-t}^\eta \circ \text{Fl}_{-s}^\xi \circ \text{Fl}_s^\eta \circ \text{Fl}_s^\xi)(p). \end{aligned}$$

Dann gilt: $c(t) = \alpha_2(t, t)$

$$\alpha_2(0, s) = \alpha_1(s, s)$$

$$\alpha_1(0, s) = \alpha_0(s, s).$$

Sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, so gilt:

$$\begin{aligned}\partial_1(f \circ \alpha_0) &= (\eta f) \circ \alpha_0 \\ \partial_1(f \circ \alpha_1) &= -(\xi f) \circ \alpha_1 \\ \partial_1(f \circ \alpha_2) &= -(\eta f) \circ \alpha_2 \\ \partial_2(f \circ \alpha_0)(0, s) &= (\xi f)(\alpha_0(0, s)) \\ \partial_2(f \circ \alpha_1)(0, s) &= \partial_1(f \circ \alpha_0)(s, s) + \partial_2(f \circ \alpha_0)(s, s) \\ \partial_2(f \circ \alpha_2)(0, s) &= \partial_1(f \circ \alpha_1)(s, s) + \partial_2(f \circ \alpha_1)(s, s)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow c'(0)f &= (f \circ c)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \alpha_2)(t, t) \\ &= \partial_1(f \circ \alpha_2)(0, 0) + \partial_2(f \circ \alpha_2)(0, 0) \\ &= -(\eta f)_p + \partial_1(f \circ \alpha_1)(0, 0) + \partial_2(f \circ \alpha_1)(0, 0) \\ &= -(\eta f)_p - (\xi f)_p + \partial_1(f \circ \alpha_0)(0, 0) + \partial_2(f \circ \alpha_0)(0, 0) = 0 \\ c''(0)f &= (f \circ c)''(0) = \left. \left(\frac{d}{dt} \right)^2 \right|_{t=0} (f \circ \alpha_2)(t, t) \\ &= \partial_1^2(f \circ \alpha_2)(0, 0) + 2\partial_2\partial_1(f \circ \alpha_2)(0, 0) + \partial_2^2(f \circ \alpha_2)(0, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_1^2(f \circ \alpha_2)(0, 0) &= \partial_1(-(\eta f) \circ \alpha_2)(0, 0) \\ &= (-\eta(-\eta f))\alpha_2(0, 0) = (\eta(\eta f))_p \\ \partial_2\partial_1(f \circ \alpha_2)(0, 0) &= \partial_2((-\eta f) \circ \alpha_2)(0, 0) \\ &= \partial_1((-\eta f) \circ \alpha_1)(0, 0) + \partial_2((-\eta f) \circ \alpha_1)(0, 0) \\ &= (\xi\eta f)_p + \partial_1(-\eta f \circ \alpha_0)(0, 0) + \partial_2(-\eta f \circ \alpha_0)(0, 0) \\ &= (\xi\eta f)_p - (\eta\eta f)_p - (\xi\eta f)_p = -(\eta\eta f)_p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_2^2(f \circ \alpha_2)(0, 0) &= \partial_1^2(f \circ \alpha_1)(0, 0) + 2\partial_1\partial_2(f \circ \alpha_1)(0, 0) \\ &\quad + \partial_2^2(f \circ \alpha_1)(0, 0)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_1^2(f \circ \alpha_1)(0, 0) &= (\xi\xi f)_p \\ \partial_2\partial_1(f \circ \alpha_1)(0, 0) &= \partial_2((-\xi f) \circ \alpha_1)(0, 0) \\ &= \partial_1(-\xi f \circ \alpha_0)(0, 0) + \partial_2(-\xi f \circ \alpha_0)(0, 0) \\ &= -(\eta\xi f)_p - (\xi\xi f)_p \\ \partial_2^2(f \circ \alpha_1)(0, 0) &= \partial_1^2(f \circ \alpha_0)(0, 0) + 2\partial_1\partial_2(f \circ \alpha_0)(0, 0) + \partial_2^2(f \circ \alpha_0)(0, 0) \\ &= (\eta\eta f)_p + 2(\xi\eta f)_p + (\xi\xi f)_p\end{aligned}$$

Durch Einsetzen ergibt sich:

$$\begin{aligned}c''(0)f &= \eta\eta f - 2\eta\eta f + \xi\xi f - 2\eta\xi f - 2\xi\xi f + \eta\eta f + 2\xi\eta f + \xi\xi f \\ &= 2(\xi\eta f - \eta\xi f) = 2[\xi, \eta]f \quad \square\end{aligned}$$

29.12 Satz (Kommutierende Flüsse kommen von Karten).

Es seien $\{\xi_i\}_{i=1}^k$ linear unabhängige Vektorfelder auf M , und $[\xi_i, \xi_j] = 0 \quad \forall \quad i, j$. Dann existiert eine Karte φ , sodaß lokal gilt: $\xi_i = \partial_i^\varphi$ für $i = 1 \dots k$.

Beweis. O.B.d.A. sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $p = 0$ und $\xi_i(0) = e_i$ für $i = 1, \dots, k$. Es sei

$$\begin{aligned} \varphi(t_1, \dots, t_n) &:= \text{Fl}^{\xi_1} \left(t_1, \text{Fl}^{\xi_2}(t_2, \dots, \text{Fl}^{\xi_k}(t_k; 0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \dots) \right) \\ &= \left(\text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n). \end{aligned}$$

Es gilt $\varphi(0) = p$ und φ ist ein lokaler Diffeomorphismus, da die partiellen Ableitungen für $i \leq k$ folgende Gestalt haben:

$$\begin{aligned} \partial_i \varphi(t_1, \dots, t_n) &= \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_i}^{\xi_i} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &= \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\text{Fl}_{t_i}^{\xi_i} \circ \text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \dots \circ \overline{\text{Fl}_{t_i}^{\xi_i}} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \\ &= \xi_i \left(\left(\text{Fl}_{t_i}^{\xi_i} \circ \text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \dots \circ \overline{\text{Fl}_{t_i}^{\xi_i}} \circ \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \right) \\ &= \xi_i \left(\left(\text{Fl}_{t_1}^{\xi_1} \dots \circ \text{Fl}_{t_k}^{\xi_k} \right) (0, \dots, 0, t_{k+1}, \dots, t_n) \right) \\ &= \xi_i \left(\varphi(t_1, \dots, t_n) \right), \end{aligned}$$

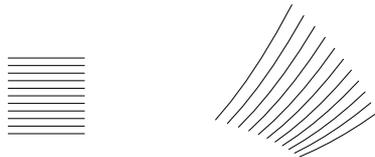
dabei bedeutet $\overline{\dots}$, daß der entsprechende Term ausgelassen wird. Also ist $\xi_i = \partial_i^\varphi$ für $i \leq k$. Für $i > k$ und $t_1 = \dots = t_k = 0$ gilt nach Voraussetzung:

$$\partial_i|_{t_i=0} \varphi(0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0) = \left(\frac{\partial}{\partial t_i} \right) (0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0) = e_i.$$

Somit ist $\varphi'(0) = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$ und $\partial_i^\varphi(q) = \partial_i(\varphi)(\varphi^{-1}q) = \xi_i(q)$ für $i \leq k$. □

29.13 Bemerkungen

1. Es gilt auch die Umkehrung: Ist φ eine Karte, dann verschwinden die Lie-Klammern der Basisvektorfelder ∂_i^φ , also kommutieren ihre Flüsse paarweise.
2. Es sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ und $\xi_p \neq 0$. Dann existiert nach 29.12 für $k = 1$ eine Karte φ mit $\xi = \partial_1^\varphi$. Da offensichtlich ∂_1 φ -verwandt mit ∂_1^φ ist, ist $\varphi(\text{Fl}^{\partial_1}(t, x)) = \text{Fl}^\xi(t, \varphi(x))$ nach 29.8 und somit ist $\text{Fl}^\xi(t, p) = \varphi(\text{Fl}^{\partial_1}(t, \varphi^{-1}(p))) = \varphi(\varphi^{-1}(p) + te_1)$. Der Fluß jedes nicht-stationären Vektorfelds ist also bis auf Diffeomorphismen φ durch die Translation $x \mapsto x + te_1$ mit konstanten Geschwindigkeitsvektor e_1 gegeben.



3. Es sei $\xi_p = 0$ (also p eine Nullstelle des Vektorfelds) und somit $\text{Fl}^\xi(t, p) = p$, d.h. p ist ein Fixpunkt (stationärer Punkt) des lokalen Flusses. O.B.d.A. ist $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $\xi : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ mit $\xi(0) = 0$. Dann ist $\xi'(0) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear, und die Eigenwerte von $\xi'(0)$ bestimmen generisch das lokale Verhalten des Flusses (Siehe Bücher über dynamische Systeme).

29.14 Proposition.

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche und X_1, X_2 punktweise linear unabhängige Vektorfelder auf M . Dann existiert eine lokale Parametrisierung φ von M mit $\partial_i \varphi(u)$ parallel zu $X_i(\varphi(u))$ für $i \in \{1, 2\}$.

Für Hyperflächen im \mathbb{R}^n mit $n > 3$ ist der analoge Satz falsch!

Direkter Beweis. Sei ψ eine lokale Parametrisierung von M und Y_i die lokalen Vektorfelder auf \mathbb{R}^2 mit $T_v\psi \cdot Y_i(v) = X_i(\psi(v))$. Wir suchen einen lokalen Diffeomorphismus $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(v^1, v^2) \mapsto (u^1, u^2)$ mit $\varphi := \psi \circ h^{-1}$ wie gewünscht, d.h. $\partial_i\varphi(u)$ parallel zu $X_i(\varphi(u))$. Dies bedeutet: $0 = (u^i)'(v) \cdot Y_j(v) = \sum_{k=1}^2 \partial_k u^i(v) \cdot Y_j^k(v)$ für $i \neq j$, denn dann ist $(h^{-1})'(u) \cdot e_i = h'(h^{-1}(u))^{-1} \cdot e_i$ parallel zu $Y_i(h^{-1}(u))$ und somit $\partial_i\varphi(u) = T_{h^{-1}(u)}\psi \cdot (h^{-1})'(u) \cdot e_i$ parallel zu $T_{h^{-1}(u)}\psi \cdot Y_i(h^{-1}(u)) = X_i(\psi(h^{-1}(u))) = X_i(\varphi(u))$. Obige partielle Differentialgleichungen von der Form $\partial_1 u(v) \cdot Y^1(v) + \partial_2 u(v) \cdot Y^2(v) = 0$ sind lösbar, denn sei $t \mapsto v(t)$ eine Integralkurve des Vektorfelds Y , dann ist $\frac{d}{dt}u(v(t)) = \partial_1 u(v(t)) \cdot (v^1)'(t) + \partial_2 u(v(t)) \cdot (v^2)'(t) = \partial_1 u(v(t)) \cdot Y^1(v(t)) + \partial_2 u(v(t)) \cdot Y^2(v(t)) = 0$ für jede Lösung u der partiellen Differentialgleichung, also $u \circ v$ konstant. Also ist $u(\text{Fl}^Y(t, v)) = u(v)$. Wenn wir somit u auf einer Kurve normal zu Y vorgeben, so ist u dadurch lokal definiert und erfüllt die partielle Differentialgleichung. \square

Beweis mittels kommutierender Vektorfelder. Vergleiche dies mit [29.12](#). Seien X_1, X_2 punktweise linear unabhängig. Dann existieren lokal Funktionen $a_i > 0$ mit $0 = [a_1 X_1, a_2 X_2] = a_1 a_2 [X_1, X_2] + a_1 X_1(a_2) X_2 - a_2 X_2(a_1) X_1 = a_1 a_2 ([X_1, X_2] + \frac{X_1(a_2)}{a_2} X_2 - \frac{X_2(a_1)}{a_1} X_1)$ und somit nach [29.12](#) für $k=2$ eine Karte φ mit $\partial_i\varphi = a_i X_i$ für $i=1, 2$, denn $[X_1, X_2] = b_1 X_1 + b_2 X_2$ mit glatten Koeffizienten Funktionen b_1 und b_2 und somit müssen wir nur die partiellen Differentialgleichung erster Ordnung $\frac{X_1(a_2)}{a_2} = b_2$ und analog $\frac{X_2(a_1)}{a_1} = -b_1$ lösen, was offensichtlich möglich ist, denn dazu können wir die Werte auf einer Kurve transversal zu X_1 beliebig vorgeben (nach [29.12](#) für $k=1$ können wir zu einem nicht verschwindenden Vektorfeld X eine Karte φ mit $X = \partial_1\varphi$ finden). \square

32. Riemann-Mannigfaltigkeiten

32.2 Definition (Riemann-Mannigfaltigkeit)

Eine RIEMANN-METRIK auf einer Mannigfaltigkeit M ist eine Funktion g die jedem Punkt $x \in M$ eine positiv definite symmetrische Bilinearform $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnet, sodaß für beliebige Vektorfelder $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ die Abbildung $x \mapsto g_x(\xi_x, \eta_x)$ von M nach \mathbb{R} glatt ist.

Eine RIEMANN-MANNIGFALTIGKEIT ist eine Mannigfaltigkeit M zusammen mit einer ausgezeichneten Riemann-Metrik g .

Ersetzt man die Bedingung der positiven Definitheit, durch die des nicht-Degeneriertseins, d.h. $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$ und $v \mapsto \langle \cdot, v \rangle$ ist injektiv als Abbildungen $\mathbb{R}^m \rightarrow (\mathbb{R}^m)^*$, so erhält man eine PSEUDO-RIEMANN-METRIK und als zugehörige Mannigfaltigkeiten PSEUDO-RIEMANN-MANNIGFALTIGKEITEN.

32.3 Definition (Länge und Distanz)

Sei (M, g) eine Riemann-Mannigfaltigkeit, dann können wir die LÄNGE VON TANGENTIALVEKTOREN $\xi_x \in T_x M$ als $\sqrt{g_x(\xi_x, \xi_x)}$ definieren.

Falls $c : [0, 1] \rightarrow M$ eine glatte Kurve in M ist, so sei die LÄNGE c definiert durch

$$L(c) := \int_0^1 \sqrt{g_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt.$$

Für jedes glatte immersive $f : N \rightarrow M$ definiert $(v, w) \mapsto g_{f(x)}(T_x f \cdot v, T_x f \cdot w)$ für $v, w \in T_x N$ eine Riemann-Metrik f^*g auf N und für diese gilt:

$$L_{f^*g}(c) = L_g(f \circ c) \text{ und somit } f(\{x : d_{f^*g}(x, x_0) < r\}) \subseteq \{y : d_g(y, f(x_0)) < r\}.$$

Wie man sich leicht überzeugen kann, haben wir für Riemann-Mannigfaltigkeiten (M, g) auch eine Metrik $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}^+$ im Sinne der Topologie:

$$d(p, q) := \inf \left\{ L(c) : c \in C^\infty(\mathbb{R}, M); c(0) = p, c(1) = q \right\}.$$

Wir zeigen nun, daß diese Metrik die Topologie erzeugt:

Um zu sehen, daß d stetig ist, verwenden wir, daß g in der Kartendarstellung bzgl. einer Karte $u : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow u(U) \subseteq M$ Ungleichungen der Form $M_1^2 \cdot |v|^2 \leq (u^*g)_x(v, v) \leq M_2^2 \cdot |v|^2$ mit $M_1, M_2 > 0$ erfüllt (In der Tat: Einerseits ist $\{u^*g_x(w, w) : |w| \leq 1, x \in \text{Kompaktum}\}$ kompakt, also beschränkt durch ein M_2^2 und somit $u^*g_x(v, v) = |v|^2 u^*g_x(w, w) \leq M_2^2 |v|^2$ mit $v = |v|w$. Andererseits ist $\{v : u^*g_x(v, v) \leq 1\}$ beschränkt, denn andernfalls existieren v_n mit $|v_n| = 1$ und $u^*g_{x_n}(v_n, v_n) \rightarrow 0$ und für Häufungspunkte v_∞ von v_n ist dann $|v_\infty| = 1$ aber $u^*g_{x_\infty}(v_\infty, v_\infty) = 0$). Damit ist

$$u\left(\{x : |x - x_0| \leq \frac{\varepsilon}{M_2}\right) \subseteq u\left(\{x : d_{u^*g}(x, x_0) \leq \varepsilon\}\right) \subseteq \{y : d_g(y, u(x_0)) \leq \varepsilon\}.$$

Umgekehrt sei $u(U)$ eine Kartenumgebung zentriert bei y_0 und V eine relativ kompakte offene Umgebung von 0 mit $\bar{V} \subseteq U$. Da d stetig ist, gilt $r := d(u(\bar{V}), M \setminus u(U)) > 0$, und somit ist $\{y : d_g(y, y_0) < \varepsilon\} = u(\{x : d_{u^*g}(x, 0) < \varepsilon\})$ für alle $\varepsilon < \frac{r}{2}$. Weiters ist $d_{u^*g}(x, 0) \geq M_1|x|$ wegen

$$L_{u^*g}(c) = \int_0^1 \sqrt{(u^*g)_{c(t)}(c'(t), c'(t))} dt \geq M_1 \int_0^1 |c'(t)| dt = M_1 L(c)$$

Sei $0 < \varepsilon < \frac{r}{2}$ mit $V \supseteq \{x : M_1|x| < \varepsilon\} \supseteq \{x : d_{u^*g}(x, 0) < \varepsilon\}$. Dann ist $\{y : d_g(y, y_0) < \varepsilon\} = u(\{x : d_{u^*g}(x, 0) < \varepsilon\}) \subseteq u(\bar{V}) \subseteq u(U)$.

Interessant ist es, eine kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten tatsächlich zu finden. Dies ist ein Variationsproblem, welches wir in Paragraph [57](#) angehen werden.

33. Isometrische und konforme Diffeomorphismen

33.1 Definition (Isometrie)

Seien (M, g) und (N, h) zwei Riemann-Mannigfaltigkeiten und $f : M \rightarrow N$ glatt, dann heißt f genau dann ISOMETRIE, wenn

$$T_x f : (T_x M, g_x) \rightarrow (T_{f(x)} N, h_{f(x)})$$

für alle x eine lineare Isometrie (siehe [1.2](#)) ist. Beachte, daß f genau dann eine Isometrie ist, wenn $f^*h = g$ ist.

Bemerkung

1. Falls f eine Isometrie ist und $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ glatt ist, so gilt:

$$\begin{aligned} L_a^b(f \circ c) &= \int_a^b \sqrt{h((f \circ c)'(t), (f \circ c)'(t))} dt \\ &= \int_a^b \sqrt{g(c'(t), c'(t))} dt = L_a^b(c) \end{aligned}$$

Wir erhalten für die Distanz $d(f(x), f(y))$:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) &= \inf\{L_0^1(c) : c \text{ verbindet } f(x) \text{ mit } f(y)\} \\ &\leq \inf\{L_0^1(f \circ c) : c \text{ verbindet } x \text{ mit } y\} = d(x, y), \end{aligned}$$

d.h. die Isometrie kann die Distanz nicht vergrößern. Falls f ein Diffeomorphismus und eine Isometrie ist, so gilt: $d(x, y) = d(f(x), f(y))$.

2. Falls die Menge der Fixpunkte einer Isometrie als glatte Kurve c parametrisiert werden kann, so ist diese Kurve lokal die kürzeste Verbindung je zweier ihrer Punkte: Wir werden in [58.4](#) sehen, daß lokal die kürzesten Verbindungen existieren und eindeutig sind. Da aber das isometrische Bild einer solchen Kurve gleiche Länge hat, muß es in der Fixpunktmenge enthalten sein.

33.2 Satz von Nash.

Jede abstrakte und zusammenhängende Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) läßt sich isometrisch in einen \mathbb{R}^n , für $n = (2m + 1)(6m + 14)$ einbetten.

Ohne Beweis, siehe [76](#).

33.3 Satz (Existenz von Riemann-Metriken).

Jede parakompakte glatte Mannigfaltigkeit besitzt (viele) vollständige Riemann-Metriken, d.h. Riemann-Metriken, deren zugehörige Metriken d auf M vollständig sind.

Beweis. Wir brauchen nur (die Zusammenhangskomponenten von) M in einen \mathbb{R}^n einzubetten und dann die von der Standardmetrik induzierte Metrik zu nehmen, um eine Riemann-Metrik auf M zu erhalten.

Oder wir verwenden, daß wir mittels Karten lokal Riemann-Metriken finden können, die wir mit Hilfe einer Partition der Eins zu einer globalen Riemann-Metrik verkleben dürfen, da "eine Riemann-Metrik zu sein" eine konvexe Bedingung ist. Die Existenz vollständiger Riemann-Metriken werden wir in [62.12](#) zeigen. \square

33.4 Satz (Lie-Gruppe der Isometrien).

Sei (M, g) eine zusammenhängende m -dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit, dann ist

$$\text{Isom}(M) := \{f \in \text{Diff}(M) : f \text{ ist Isometrie}\}$$

eine Lie-Gruppe (zu einer Lie-Gruppe machbar) der Dimension höchstens $\frac{1}{2}m(m+1)$.

Die Gruppe $\text{Isom}(M)$ ist also im Unterschied zur Gruppe $\text{Diff}(M)$ aller Diffeomorphismen endlichdimensional. Z.B. haben $\text{Isom}(\mathbb{R}^m) = O(m) \times \mathbb{R}^m$ und $\text{Isom}(S^m) = O(m+1)$ Dimension $\frac{m(m-1)}{2} + m = \frac{(m+1)(m+1-1)}{2}$.

Ohne Beweis. Siehe [53](#), 2.1.2].

Da man mittels eines inneren Produktes Winkel zwischen Vektoren durch

$$\cos \sphericalangle(x, y) := \frac{\langle x, y \rangle}{\sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}}$$

definieren kann, können wir auf jeder Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) Winkel α zwischen Tangentialvektoren und somit zwischen Kurven c_1 und c_2 in ihren Schnittpunkten auf folgende Weise messen:

$$\cos \alpha := \frac{g(c_1'(0), c_2'(0))}{\sqrt{g(c_1'(0), c_1'(0))} \sqrt{g(c_2'(0), c_2'(0))}}.$$

33.5 Definition (Konforme Abbildungen)

Eine glatte Abbildung $f : (M, g) \rightarrow (N, h)$ heißt WINKELERHALTEND (KONFORM), falls $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ für alle $x \in M$ winkelerhaltend ist.

33.6 Satz (Lie-Gruppe der konformen Diffeomorphismen).

Die Gruppe der konformen Isomorphismen einer m -dimensionalen parakompakten zusammenhängenden Riemann-Mannigfaltigkeit bilden eine Lie-Gruppe der Dimension höchstens $\frac{1}{2}(m+1)(m+2)$.

Z.B. ist diese Gruppe nach dem Satz [52.11](#) (bzw. [33.10](#)) von Liouville für $M = \mathbb{R}^m$ die Gruppe der Ähnlichkeitsabbildungen von Dimension $\dim(O(m)) + \dim(\mathbb{R}^m) + 1 = \frac{m(m-1)}{2} + m + 1 = \frac{m^2+m+2}{2}$ und für $M = S^2$ ist nach [33.10](#) die Zusammenhangskomponente $SL_{\mathbb{C}}(2)/\mathbb{Z}_2$ (der Moebius-Transformationen) dieser Gruppe von Dimension $6 = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4$.

Ohne Beweis. Siehe [\[53, 4.6.1\]](#).

33.7 Lemma (Lineare konforme Abbildungen).

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ linear und injektiv, dann sind äquivalent:

1. f ist winkelerhaltend,
2. $\exists \lambda > 0 : \langle f(x), f(y) \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$;
3. $\exists \mu > 0 : \mu f$ ist Isometrie.

Siehe Aufgabe [5](#).

Beweis. $(2 \Leftrightarrow 3)$ ist offensichtlich mit $\lambda \mu^2 = 1$.

$(1 \Leftrightarrow 2)$ Sei α der von den Vektoren x und y aufgespannte Winkel und α' der von den Vektoren $f(x)$ und $f(y)$ aufgespannte Winkel. Dann gilt:

$$\cos \alpha' = \frac{\langle f(x), f(y) \rangle}{|f(x)| \cdot |f(y)|} = \frac{\lambda \langle x, y \rangle}{\sqrt{\lambda}|x| \sqrt{\lambda}|y|} = \cos \alpha.$$

Also ist $\alpha = \alpha'$, und f winkelerhaltend.

$(1 \Rightarrow 2)$ Wir definieren $\lambda(v) \geq 0$ implizit durch $\langle f(v), f(v) \rangle =: \lambda(v) \langle v, v \rangle$.

Für Vektoren v und w ist $v + w \perp v - w \Leftrightarrow 0 = \langle v + w, v - w \rangle = |v|^2 - |w|^2 \Leftrightarrow |v| = |w|$. Da f konform ist gilt somit für Vektoren mit $|v| = 1 = |w|$:

$$0 = \langle f(v + w), f(v - w) \rangle = \langle f(v), f(v) \rangle - \langle f(w), f(w) \rangle = \lambda(v) - \lambda(w).$$

Also ist λ konstant auf der Einheits-Sphäre und damit auch auf $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, denn mit $w = |w|v$ mit $v := \frac{1}{|w|}w \in S^{n-1}$ ist

$$\begin{aligned} \lambda(w) \langle w, w \rangle &= \langle f(w), f(w) \rangle = \langle f(|w|v), f(|w|v) \rangle = \langle |w|f(v), |w|f(v) \rangle \\ &= |w|^2 \langle f(v), f(v) \rangle = \langle w, w \rangle \lambda(v) 1. \end{aligned}$$

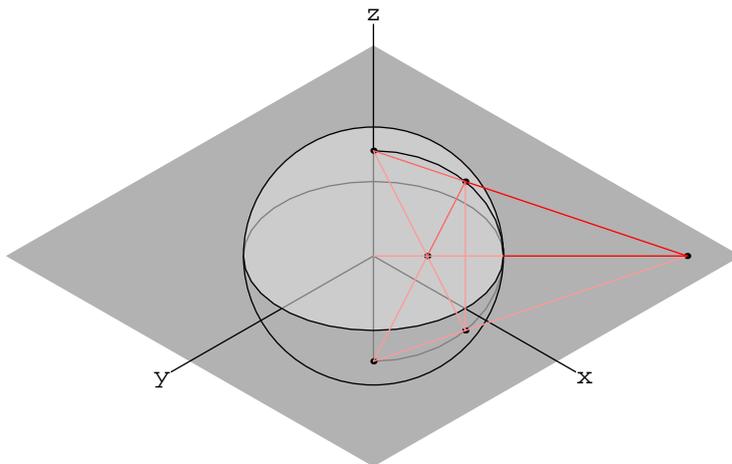
Somit ist für zwei beliebige Vektoren v und w :

$$\begin{aligned} \langle f(v), f(w) \rangle &= \frac{1}{4} \left(|f(v) + f(w)|^2 - |f(v) - f(w)|^2 \right) = \frac{1}{4} \left(|f(v + w)|^2 - |f(v - w)|^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \lambda \left(|v + w|^2 - |v - w|^2 \right) = \lambda \langle v, w \rangle. \quad \square \end{aligned}$$

33.8 Beispiele konformer Abbildungen

(1) Stereographische Projektion $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ (siehe Aufgabe [72.40](#)).

(2) Spiegelung $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $z \mapsto \frac{z}{|z|^2}$ an der Einheitssphäre.



Die Abbildung f ist konform, da $f'(z)(v) = \frac{v\langle z, z \rangle - 2z\langle z, v \rangle}{\langle z, z \rangle^2}$ und somit

$$\begin{aligned} \langle f'(z)(v), f'(z)(w) \rangle &= \left\langle \frac{v\langle z, z \rangle - 2z\langle z, v \rangle}{\langle z, z \rangle^2}, \frac{w\langle z, z \rangle - 2z\langle z, w \rangle}{\langle z, z \rangle^2} \right\rangle = \\ &= \frac{1}{\langle z, z \rangle^4} \left(\langle v, w \rangle \langle z, z \rangle^2 - 4\langle z, z \rangle \langle z, v \rangle \langle z, w \rangle + 4\langle z, z \rangle \langle z, v \rangle \langle z, w \rangle \right) = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle z, z \rangle^2}. \end{aligned}$$

In Analogie zur Definition von holomorph in [30.9](#) heißt eine Funktion f ANTIHOLOMORPH, falls $f : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^2$ glatt ist und $f'(z)$ konjugiert komplex-linear ist, d.h. $f'(z)(iv) = -if'(z)(v)$ für alle v, z .

33.9 Satz (Konforme Abbildungen der Ebene).

Sei $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$ ein Diffeomorphismus, dann gilt:

f ist konform $\Leftrightarrow f$ ist holomorph oder antiholomorph. Dabei heißt f antiholomorph, wenn \bar{f} holomorph ist.

Beweis.

$$\begin{aligned}
 f = (f^1, f^2) \text{ ist konform} &\Leftrightarrow \\
 &\Leftrightarrow f'(z) \text{ ist konform} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \langle \partial_1 f, \partial_2 f \rangle = 0 \\ \langle \partial_1 f, \partial_1 f \rangle = \langle \partial_2 f, \partial_2 f \rangle \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} f_1^1 f_2^1 + f_1^2 f_2^2 = 0 \\ (f_1^1)^2 + (f_1^2)^2 = (f_2^1)^2 + (f_2^2)^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} AB^* + BA^* = 0 \text{ wo } A := f_1^1 - f_2^2 \text{ und } B := f_2^1 + f_1^2 \\ AA^* - BB^* = 0 \text{ wo } A^* := f_1^1 + f_2^2 \text{ und } B^* := f_2^1 - f_1^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} A = B = 0 \text{ falls } (A^*)^2 + (B^*)^2 \neq 0 \\ \text{oder } (A^*)^2 + (B^*)^2 = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ ist holomorph} \\ \text{oder } A^* = B^* = 0, \text{ d.h. } f \text{ ist antiholomorph.} \end{cases}
 \end{aligned}$$

Kürzer kann man das auch so sehen: $f'(z)$ ist wegen [33.7](#) genau dann konform, wenn es ein Vielfaches einer Isometrie ist, also Multiplikation mit einer komplexen Zahl und eventuell noch mit der Spiegelung $z \mapsto \bar{z}$ zusammengesetzt. \square

33.10 Proposition.

Es sei f eine glatte (nicht notwendig reguläre) Abbildung und U offen und zusammenhängend. Wir nennen sie in Verallgemeinerung zu [33.7](#) KONFORM, falls $T_z f$ für jedes z (reelles) Vielfaches einer Isometrie ist. Dann gilt:

1. $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow \mathbb{C}$ ist konform $\Leftrightarrow f$ oder \bar{f} ist holomorph.
2. $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ ist konform $\Leftrightarrow f$ ist konstant.
3. $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow S^2$ ist konform \Leftrightarrow bezüglich stereographischer Parametrisierung $\mathbb{C} \subseteq S^2$ ist f oder \bar{f} meromorph, d.h. ist holomorph bis auf Pole.
4. $f : S^2 \rightarrow S^2$ ist konform \Leftrightarrow bezüglich stereographischer Parametrisierung $\mathbb{C} \subseteq S^2$ ist f oder \bar{f} rational, d.h. Quotient zweier Polynome.
5. $f : S^2 \rightarrow S^2$ ist konformer Diffeomorphismus \Leftrightarrow bezüglich stereographischer Parametrisierung $\mathbb{C} \subseteq S^2$ ist f oder \bar{f} eine Möbiustransformation, d.h. ist Quotient der Form $z \mapsto (az + b)/(cz + d)$.
6. $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist konformer Diffeomorphismus $\Leftrightarrow f$ ist eine Ähnlichkeitsabbildung, d.h. eine Bewegung zusammengesetzt mit einer Streckung.

Beweis. Die Implikationen (\Leftarrow) sind leicht zu verifizieren. In (5) geht das wie folgt. Es sei $f : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ eine Möbiustransformation. Dann ist $f : \mathbb{C} \setminus \{-d/c\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a/c\}$ ein konformer Diffeomorphismus, mit Inverser $w \mapsto \frac{dw-b}{-cw+a}$, denn

$$f(z) = w \Leftrightarrow az + b = (cz + d)w \Leftrightarrow z = \frac{dw - b}{-cw + a}.$$

Falls $c \neq 0$ so erweitern wir diesen nun durch $f(-d/c) := \infty$ und $f(\infty) := a/c$ zu einer Bijektion $S^2 \rightarrow S^2$. Diese Erweiterung ist holomorph bei $-d/c$, denn $z \mapsto 1/f(z) = (cz + d)(az + b)$, ist holomorph nahe $z = -d/c$, da $a(-d/c) + b = -(ad - bc)/c$ und

$$z \mapsto f(1/z) = (a/z + b)/(c/z + d) = (bz + a)/(dz + c),$$

ist holomorph nahe 0, da $d0 + c = c \neq 0$.

Falls $c = 0$, so erweitern wir f durch $f(\infty) := \infty$. Dann ist die Erweiterung holomorph bei ∞ , da

$$1/f(1/z) = (c/z + d)/(a/z + b) = (dz + c)/(bz + a)$$

und $a \neq 0$ wegen $ad - bc \neq 0$. Also definiert jede Möbiustransformation f einen konformen Diffeomorphismus $S^2 \rightarrow S^2$.

Für die umgekehrte Richtungen (\Rightarrow) gehen wir wie folgt vor:

(1) Jede Isometrie $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist eine Drehung (eventuell mit einer Spiegelung zusammengesetzt). Also ist $f'(z)$ oder $\overline{f'(z)} = \overline{f'}(z)$ Multiplikation mit einer komplexen Zahl und die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $\frac{\partial u}{\partial x} = \pm \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial u}{\partial y} = \mp \frac{\partial v}{\partial x}$ sind für $f =: u + iv$ erfüllt. Daraus erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \pm \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \pm \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = 0,$$

d.h. $u = \Re f$ ist harmonisch. Wir suchen ein w , s.d. $u + iw$ holomorph ist, d.h. die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen erfüllt. Es soll also $dw = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$ gelten, was wegen der Integrabilitätsbedingung

$$d\left(-\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy\right) = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dx \wedge dy = 0$$

durch den Ansatz

$$w(z) := \int_{z_0}^z \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy$$

erreichbar ist. Also ist $u + iw$ holomorph und somit sind die Stellen, wo $f'(z) = 0$ ist isoliert, d.h. $f = u + iv = u \pm iw$ mit konstanter Wahl von \pm . Also ist f oder \bar{f} holomorph.

(2) Es sei $f : S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ konform. Dann ist auch die Zusammensetzung $\mathbb{C} \rightarrow S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ mit der stereographischen Parametrisierung konform, also holomorph oder antiholomorph nach (1). Da $f(S^2)$ kompakt ist, ist diese Zusammensetzung beschränkt, und nach dem Satz von Liouville (siehe [83, S.116]) konstant.

(3) Es sei $f : \mathbb{C} \supseteq U \rightarrow S^2$ konform und $z_0 \in U$. Falls $f(z_0) \in \mathbb{C} \subseteq S^2$ liegt, dann ist $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ lokal konform und nach (1) also (anti) holomorph. Andernfalls ist $f(z_0) = \infty$ und somit $z \mapsto \frac{1}{z} f(z)$ holomorph und folglich lokal beschränkt und lokal $\neq 0$. Also hat f eine isolierte Singularität in z_0 und kommt lokal um z_0 den Wert 0 nicht nahe und hat folglich nach dem Satz von Casorati-Weierstrass (siehe [83, S. 166]) in z_0 keine wesentliche Singularität, sondern einen Pol. Also ist f oder \bar{f} meromorph.

(4) Nach (3) ist $f|_{\mathbb{C}} : S^2 \supseteq \mathbb{C} \rightarrow S^2$ (oder \bar{f}) meromorph und hat nur endlich viele Pole z_j , da diese auf S^2 isoliert sind. Dort ist die Laurent-Entwicklung $f(z) = \sum_{k=-n_j}^{\infty} (z - z_j)^k f_k^j$ für ein $n_j \in \mathbb{N}$. Also ist $z \mapsto f(z) - \sum_{k=1}^{n_j} (z - z_j)^{-k} f_{-k}^j$ holomorph um z_j . Falls auch ∞ ein Pol ist, dann ist die Laurent-Entwicklung $f(\frac{1}{z}) = \sum_{k=-n_{\infty}}^{\infty} z^k f_k^{\infty}$, also $f(z) - \sum_{k=1}^{n_{\infty}} z^k f_{-k}^{\infty}$ holomorph bei ∞ . Also ist

$$z \mapsto f(z) - \sum_j \sum_{k=1}^{n_j} (z - z_j)^{-k} f_{-k}^j - \sum_{k=1}^{n_{\infty}} z^k f_{-k}^{\infty}$$

holomorph $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ und nach (2) konstant, d.h. f ist rational.

(5) Nach (4) ist $f = \frac{p}{q}$ für relativ prime Polynome p und q . Falls der Grad von p oder von q größer als 1 ist, dann hat $h(z) := p(z) - cq(z)$ für geeignete $c := f(z)$ Grad größer als 1. Da f injektiv ist, darf nur eine Lösung $z = z_0$ von $h(z) = 0$

existieren, d.h. $h(z) = k(z - z_0)^n$ für ein $n \geq 2$ und $k \neq 0$. Dann ist $p(z_0) = cq(z_0)$ und $p'(z_0) = cq'(z_0)$ und somit $f'(z_0) = \frac{qp' - p'q}{q^2}(z_0) = 0$, ein Widerspruch dazu, daß f ein Diffeomorphismus ist.

(6) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein konformer Diffeomorphismus. O.B.d.A. (ersetze wenn nötig f durch \bar{f}) ist somit f holomorph nach (1) und erfüllt $f(0) = 0$ (ersetze f durch $f - f(0)$). Sei $i : z \mapsto \frac{1}{z}$. Dann ist $\tilde{f} := i \circ f \circ i : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ein holomorpher Diffeomorphismus. Da f ein Diffeomorphismus bei 0 ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $|f^{-1}(z)| < \delta$ für alle $|z| < 1$. Somit gilt $|z| \leq \frac{1}{\delta} \Rightarrow |i(z)| \geq \delta \Rightarrow |f(i(z))| \geq 1 \Rightarrow |\tilde{f}(z)| = |i(f(i(z)))| \leq 1$, d.h. \tilde{f} ist nahe 0 beschränkt und somit zu einer holomorphen Funktion auf \mathbb{C} erweiterbar mit $\tilde{f}(0) = 0$ (siehe z.B. [?, 115]). Gleiches Argument gilt auch für die Umkehrfunktion \tilde{f}^{-1} , d.h. f läßt sich zu einem konformen Diffeomorphismus $S^2 \rightarrow S^2$ erweitern. Damit ist f nach (5) eine Möbiustransformation $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ mit $\infty \mapsto \infty$, also $c = 0$, d.h. eine Ähnlichkeitsabbildung. \square

34. Riemann-Flächen

34.1 Definition (Riemann-Fläche)

Eine RIEMANN-FLÄCHE ist eine 2-dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit.

34.2 Satz von Korn-Lichtenstein.

Auf jeder Riemann-Fläche existieren konforme lokale Koordinaten (auch ISOTHERMALE KOORDINATEN genannt).

Ohne Beweis. Siehe [14] oder [86, Vol.II, Addendum 2]

34.3 Definition (Komplexe Mannigfaltigkeit)

Eine KOMPLEXE MANNIGFALTIGKEIT ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, dessen Kartenwechsel komplex differenzierbar (holomorph) sind.

Eine ORIENTIERTE MANNIGFALTIGKEIT ist eine glatte Mannigfaltigkeit mit einem Atlas, dessen Kartenwechsel orientierungserhaltend sind. Für ein detaillierteres Studium von Orientierbarkeit siehe Abschnitt [46](#).

34.4 Folgerung.

Jede orientierte Riemann-Fläche ist eine komplexe Mannigfaltigkeit.

Beweis. Man wähle einen Atlas, dessen Kartenwechsel konform und orientierungserhaltend, also holomorph, sind. \square

34.5 Beispiele konformer Diffeomorphismen

(1) Die S^2 hat als Atlas die stereographische Projektion vom Nord- und Südpol. Der Kartenwechsel ist die Inversion am Einheitskreis, ist also konform aber vertauscht die Orientierungen. Wir ändern die Orientierung einer Karte und erhalten so einen holomorphen Atlas. Dies nennt man auch die RIEMANN'SCHE ZAHLENKUGEL. Wir betrachten nun die AUTOMORPHISMENGRUPPE der S^2 . Das ist die Menge aller biholomorphen Abbildungen $f : S^2 \rightarrow S^2$, wobei die BIHOLOMORPHEN ABBILDUNGEN, genau die konformen, orientierungserhaltenden Diffeomorphismen

sind. Nach [33.10](#) gilt bezüglich der stereographischen Projektion von $S^2 \rightarrow \mathbb{C}$ folgende Beschreibung:

$$\text{Aut}(S^2) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Diese Gruppe der MÖBIUSTRANSFORMATIONEN kann man auch mit folgender Matrizen­gruppe bis auf eine Multiplikation mit ± 1 identifizieren:

$$\text{SL}_{\mathbb{C}}(2) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1 \right\}.$$

Die Gruppe $\text{Aut}(S^2)$ ist also isomorph zu $\text{SL}_{\mathbb{C}}(2)/\mathbb{Z}_2$, wobei die Untergruppe \mathbb{Z}_2 gegeben ist durch $\mathbb{Z}_2 := \{\text{id}, -\text{id}\}$. Dies ist eine Lie-Gruppe.

Die Gruppe der Möbiustransformationen wird von $z \mapsto az$, $z \mapsto z + b$ und $z \mapsto 1/z$ erzeugt.

Offensichtlich sind die angegebenen Funktionen Möbiustransformationen. Sei umgekehrt eine Möbiustransformation $f : z \mapsto (az + b)/(cz + d)$ mit $ad - bc \neq 0$ gegeben. Falls $c = 0$ und damit $d \neq 0$ so ist f die Zusammensetzung $z \mapsto \frac{a}{d}z \mapsto \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Ist $c \neq 0$ und damit $f(\infty) = a/c \in \mathbb{C}$, so ist die Zusammensetzung $z \mapsto f(z) \mapsto f(z) - f(\infty) \mapsto \frac{1}{f(z) - f(\infty)}$ ein konformer Diffeomorphismus von \mathbb{C} (mit $\infty \mapsto \infty$), also nach dem ersten Teil eine Zusammensetzung einer Drehstreckung und einer Translation.

(2) Die Automorphismengruppe von \mathbb{C} besteht aus jenen Möbiustransformationen von $\text{Aut}(S^2)$, welche $\mathbb{C} \subset S^2$ oder – äquivalent – den Nordpol $\hat{=} \infty \in \mathbb{C}$ invariant lassen: In der Tat sei f so ein Diffeomorphismus, dann ist $f_{\infty} : z \mapsto 1/f(1/z)$ holomorph auf der punktierten Ebene. Da f ein Diffeomorphismus ist, ist f_{∞} durch $f_{\infty}(0) = 0$ stetig ergänzbar, also ist ∞ eine hebbare Singularität und f durch $f(\infty) := \infty$ zu einem holomorphen Diffeomorphismus $S^2 \rightarrow S^2$ erweiterbar. Wegen

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \frac{a}{c}.$$

bildet die Möbiustransformation $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ den Punkt ∞ auf a/c ab, und somit ist ∞ genau dann invariant, wenn $c = 0$ und $a \neq 0$ ist. Die Möbiustransformation hat dann die Gestalt

$$\frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}.$$

Also gilt:

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b : a \neq 0, a, b \in \mathbb{C}\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a \neq 0, a, b \in \mathbb{C} \right\}.$$

Man nennt dies auch die “ $az + b$ -Gruppe”, siehe [14.2](#). Sie ist komplex 2-dimensional.

(3) Für die offene Einheits­scheibe \mathbb{D} besteht die Automorphismengruppe aus jenen Möbiustransformationen von S^2 , die \mathbb{D} invariant lassen, d.h.

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}} : a\bar{a} - b\bar{b} = 1 \right\} \cong \text{SU}(2, 1)/\mathbb{Z}_2.$$

Es ist leicht zu sehen, daß jede solche Möbiustransformation \mathbb{D} invariant läßt. Für die Umkehrung benötigen wir dafür das

Schwarz'sche Lemma.

Es sei $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Dann ist $|f'(0)| \leq 1$ und $|f(z)| \leq |z|$ für alle z . Genauer gesagt, es tritt einer der beiden folgenden Fälle ein:

- $|f'(0)| < 1$ und $|f(z)| < |z|$ für $z \neq 0$;

- $f(z) = e^{i\theta}z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$ und alle z .

Es sei f ein Automorphismus von \mathbb{D} mit $f(0) = c$. Die Abbildung $z \mapsto \frac{z-c}{1-\bar{c}z}$ ist eine Möbiustransformation der angegebenen Gestalt und setzt man f mit ihr zusammen so wird 0 invariant gelassen. O.B.d.A. ist also $f(0) = 0$. Nach dem Schwarzschen Lemma ist $|f'(0)| \leq 1$ und da f ein Diffeomorphismus ist, ist $f'(0) \neq 0$ und gleiches gilt für die Inverse f^{-1} . Wegen $f^{-1} \circ f = \text{id}$ ist also $(f^{-1})'(0) \circ f'(0) = 1$ und somit $|f'(0)| = 1$, d.h. $f(z) = e^{i\theta}z$ für ein $\theta \in \mathbb{R}$ nach dem Schwarzschen Lemma. Dies ist ebenfalls eine Möbiustransformation der gesuchten Gestalt.

Es ist $\text{Aut}(\mathbb{D})$ eine 3-dimensionale Gruppe. Sei dazu $a = a_1 + ia_2$ und $b = b_1 + ib_2$. Dann ist $a_1^2 + a_2^2 - b_1^2 - b_2^2 = 1$ und durch die Beziehungen

$$(3) \quad r_{1,1} = a_1 + b_1 \quad r_{1,2} = a_2 + b_2$$

$$(4) \quad r_{2,1} = -a_2 - b_2 \quad r_{2,2} = a_1 - b_1$$

wird ein Element $\begin{pmatrix} r_{1,1} & r_{1,2} \\ r_{2,1} & r_{2,2} \end{pmatrix} \in \text{SL}(2)/\mathbb{Z}_2$ definiert. Somit erhalten wir einen Isomorphismus $\text{Aut}(\mathbb{D}) \cong \text{SL}(2)/\mathbb{Z}_2$, siehe Aufgabe 72.62.

34.6 Die Hyperbolische Scheibe

Wir definieren eine neue Riemann-Metrik auf \mathbb{D} durch

$$g_z(v, w) := \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} \langle v, w \rangle.$$

Dies ist eine konform äquivalente Metrik, d.h. $\text{id} : (\mathbb{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (\mathbb{D}, g)$ ist ein konformer Diffeomorphismus. Es ist also

$$\text{Aut}(\mathbb{D}, g) = \text{Aut}(\mathbb{D}, \langle \cdot, \cdot \rangle).$$

Für $f(z) := \frac{az+b}{bz+\bar{a}}$, d.h. $f \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, ergibt sich

$$g_z(v, v) = \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} |v|^2 = \frac{|f'(z)(v)|^2}{(1 - |f(z)|^2)^2} = g_{f(z)}(f'(z)v, f'(z)v),$$

denn es gilt

$$(1 - |z|^2)|f'(z)v| = (1 - |f(z)|^2)|v|.$$

Es ist demnach $\text{Aut}(\mathbb{D}, g) = \text{Isom}(\mathbb{D}, g)$, man nennt diese Riemann-Fläche (\mathbb{D}, g) die HYPERBOLISCHE SCHEIBE. Für sie ist jeder winkelerhaltende Diffeomorphismus also längenerhalten.

VIII. Hyperflächen

In diesem Kapitel kehren wir vorerst zu konkreten 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^3 -zurück. Wir besprechen die verschiedenen Krümmungsbegriffe (wie Normal-, Haupt-, Gauß und mittlere Krümmung) und stellen die nötigen Formeln bereit. Dann untersuchen wir spezielle Klassen solcher Hyperflächen: Drehflächen, Regelflächen, Torsen und Minimalflächen. Schließlich behandeln wir noch Geodäten, die Exponentialabbildung die jedem Tangentialvektor die Geodäte mit dieser Startgeschwindigkeit zuordnet und Jacobifelder die mit der Variation von Geodäten zusammenhängen. Wir zeigen den Integralsatz von Gauß-Bonnet. Dann besprechen wir den Paralleltransport von Tangentialvektoren längs Kurven und die damit verbundene kovariante Ableitung. Schließlich führen wir noch die Riemann-, die Ricci- und die Schnittkrümmung ein und behandeln den Zusammenhang zu zuvor definierten Krümmungen.

51. Normalkrümmungen

51.1 Definition (Hyperfläche)

Eine HYPERFLÄCHE M im \mathbb{R}^n ist eine Teilmannigfaltigkeit der Kodimension 1, d.h. der Dimension $m := n - 1$. Sie kann lokal z.B. durch eine Gleichung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ oder eine Parametrisierung $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ gegeben sein.

Beispiele

Flächen im \mathbb{R}^3 , Sphären $S^m \subset \mathbb{R}^n$ und $SL(n) \subset L(n, n)$.

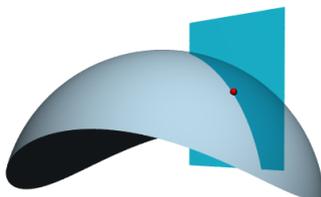
51.2 Gaußabbildung

In jedem Punkt $p \in M$ haben wir genau zwei normierte Normalvektoren auf $T_p M$ im \mathbb{R}^n . Falls M orientiert ist, können wir einen dieser Normalvektoren auszeichnen, nämlich so, daß (ν_p, e_1, \dots, e_m) eine positiv orientierte Orthonormalbasis von \mathbb{R}^n ist, für eine (jede) positiv orientierte Orthonormalbasis (e_1, \dots, e_m) von $T_p M$, cf. [47.11](#). Ist M lokal durch eine Gleichung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so ist der Gradient $\text{grad } f$ ein Normalvektor, den wir nur noch normieren müssen, cf. [46.8](#). Es gibt also lokal und für orientierte Hyperflächen sogar global eine glatte Abbildung $M \ni p \mapsto \nu_p \in S^m \subset \mathbb{R}^n$ mit $\nu_p \perp T_p M$. Ein derart gewählte Funktion ν wird GAUSS-ABBILDUNG genannt.

51.3 Normalkrümmung

Wir wollen nun die "Krümmung einer Hyperfläche" definieren. Es sei $\nu_p \perp T_p M$ ein fix gewählter Einheits-Normalvektor und $\xi \in T_p M$ ein Einheits-Tangentialvektor.

Wir betrachten den Schnitt der Ebene $(t, s) \mapsto p + t\nu + s\xi$ durch p mit den Richtungsvektoren ξ und ν , mit M .



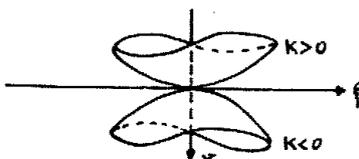
Sei f eine lokale reguläre Gleichung von M um p . O.B.d.A. sei $|\text{grad}_p f|$ normiert und gleichorientiert wie ν_p , also $\nu_p = \text{grad}_p f$. Der Schnitt der Ebene mit M ist dann durch die Gleichung $f(p + t\nu_p + s\xi) = 0$ in (t, s) gegeben. Wir wollen in dieser impliziten Gleichung t nach s mittels impliziten Funktionensatz [10.2](#) auflösen. Dies ist wegen

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} f(p + t\nu_p + s\xi) \Big|_{s=0} = f'(p)(\nu_p) = \langle \text{grad}_p f, \nu_p \rangle = |\text{grad}_p f|^2 = 1 \neq 0.$$

möglich. Wir erhalten also als Durchschnitt lokal eine Schnittkurve $c : s \mapsto p + t(s)\nu_p + s\xi$ in M mit $c(0) = p$ und $c'(0) = \xi + t'(s)\nu_p = \xi$, da $c'(0) \in T_p M$. Von der Kurve c können wir annehmen, daß sie proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist. Die in [3.2](#) definierte signierte Krümmung der ebenen Kurve c , wobei wir als positiv orientierte Basis (ν_p, ξ) wählen, nennt man die NORMALKRÜMMUNG $K(\xi) := K_M(\xi) := K_c(0)$ von M im Punkt p und Richtung ξ . Beachte, daß $(\xi, -\nu_p)$ das Begleitbein von c im Punkte $p = c(0)$ ist! Eine Formel von $K(\xi)$ erhalten wir wie folgt: Wegen $c(t) \in M$ gilt $c'(t) \in T_{c(t)} M = \nu_{c(t)}^\perp$, also $\langle c'(t), \nu_{c(t)} \rangle = 0$. Durch Differenzieren an der Stelle 0 erhalten wir: $\langle c''(0), \nu_p \rangle + \langle \xi, T_p \nu \cdot \xi \rangle = 0$. Folglich gilt:

$$K(\xi) = K_c(0) = -\langle c'', \nu_p \rangle = \langle \xi, T_p \nu \cdot \xi \rangle$$

Diese Formel können wir nun auch für $|\xi| \neq 1$ verwenden.



51.4 Weingarten-Abbildung

Man nennt die Tangentialabbildung

$$L_p := T_p \nu : T_p M \rightarrow T_{\nu_p} S^m = \nu_p^\perp = T_p M$$

der Gauß-Abbildung $\nu : M \rightarrow S^m$ die WEINGARTEN-ABBILDUNG, nach Julius Weingarten, 1836–1910. Der Vektor $L_p(\xi)$ mißt also die infinitesimale Änderung der Normalen, wenn man auf M von p in Richtung $\xi \in T_p M$ geht. Nach dem gerade Gezeigten gilt

$$K(\xi) = \langle \xi, L \cdot \xi \rangle.$$

51.5 Lemma.

Die Weingarten-Abbildung $L_p : T_p M \rightarrow T_p M$ ist symmetrisch.

1. Beweis. Seien ξ_1 und ξ_2 zwei Vektorfelder auf M . Wir setzen sowohl ξ_i , als auch ν lokal um p zu Vektorfeldern des \mathbb{R}^n fort. Wegen $\langle \xi_1, \nu \rangle|_M = 0$ gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \xi_1, \nu \rangle'(p)(\xi_2(p)) = \langle \xi_1'(p)(\xi_2(p)), \nu(p) \rangle + \langle \xi_1(p), \nu'(p)(\xi_2(p)) \rangle \\ &= \langle \xi_1'(p)(\xi_2(p)), \nu_p \rangle + \langle \xi_1(p), L_p(\xi_2(p)) \rangle. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \langle \xi_1(p), L_p(\xi_2(p)) \rangle - \langle \xi_2(p), L_p(\xi_1(p)) \rangle &= \\ = \langle \xi_2'(p)(\xi_1(p)) - \xi_1'(p)(\xi_2(p)), \nu_p \rangle &= \langle \underbrace{[\xi_1, \xi_2](p)}_{\in T_p M}, \nu_p \rangle = 0. \quad \square \end{aligned}$$

2. Beweis. Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale bei p zentrierte Parametrisierung. Mit φ_i bezeichnen wir die i -te partielle Ableitung von φ . Die $\varphi_i(0)$ bilden für $i = 1, \dots, m$ eine Basis von $T_p M$ und es gilt:

$$\begin{aligned} \langle \varphi_i(0), L_p \cdot \varphi_j(0) \rangle &= \langle \frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi(t e_i), T_p \nu \cdot \frac{d}{ds}|_{s=0} \varphi(s e_j) \rangle \\ &= \langle \frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi(t e_i), \frac{d}{ds}|_{s=0} \nu(\varphi(s e_j)) \rangle \\ &= \frac{d}{ds}|_{s=0} \langle \frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi(t e_i + s e_j), \nu(\varphi(s e_j)) \rangle \\ &\quad - \langle \frac{d}{ds}|_{s=0} \frac{d}{dt}|_{t=0} \varphi(t e_i + s e_j), \nu(\varphi(0 e_j)) \rangle \\ &= 0 - \langle \varphi_{i,j}(0), \nu_p \rangle, \end{aligned}$$

und ist somit offensichtlich symmetrisch in (i, j) , da die gemischten 2-ten partiellen Ableitungen $\varphi_{i,j}$ von φ es sind. \square

51.6 Fundamentalformen

Die symmetrische bilinear-Form $\mathbb{I}_p(\xi_1, \xi_2) := \langle \xi_1, L_p(\xi_2) \rangle$ auf $T_p M$ heißt 2-TE FUNDAMENTALFORM von M . Unter der 1-TE FUNDAMENTALFORM versteht man die Riemann-Metrik, d.h. $\mathbb{I}(\xi, \eta) := \langle \xi, \eta \rangle$. Wir haben in [51.3](#) gezeigt, daß $K(\xi) = \mathbb{I}(\xi, \xi)$ gilt.

52. Haupt-, Gauß- und mittlere Krümmung

52.1

Jetzt wollen wir die Extremalwerte der Normalkrümmung bestimmen. Wegen der Homogenität von L macht diese Aufgabe nur Sinn, wenn wir die Abbildung K auf die Einheitssphäre $S^{m-1} \subset T_p M$ einschränken. Damit $\xi \in S^{m-1}$ ein kritischer Punkt ist, muß $T_\xi K : T_\xi S^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}$ konstant 0 sein, d.h. $K'(\xi)(v) = 0$ für alle $v \in T_\xi S^{m-1} = \xi^\perp$. Es gilt:

$$K'(\xi)(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \mathbb{I}(\xi + tv, \xi + tv) \stackrel{51.5}{=} 2 \mathbb{I}(\xi, v) = 2 \langle L\xi, v \rangle.$$

Es muß also $L\xi \in T_x M$ normal stehen auf alle v , welche auf ξ normal stehen, d.h. $L\xi$ muß proportional zu ξ sein. Dies zeigt den

Satz von Rodriguez.

Die kritischen Punkte ξ der Normalkrümmung sind genau die Eigenvektoren der

symmetrischen linearen Abbildung L , und der zu ξ gehörige Eigenwert λ ist gegeben durch

$$\lambda = \lambda \langle \xi, \xi \rangle = \langle \xi, \lambda \xi \rangle = \langle \xi, L\xi \rangle = \mathbb{I}(\xi, \xi) = K(\xi),$$

die Normalkrümmung von M in Richtung von ξ . Im Fall $m = 2$ sind die kritischen Punkte auch extremal, nämlich das Minimum und das Maximum von $K(\xi)$ für $|\xi| = 1$. Für $m > 2$ sind die kritischen Punkte nicht notwendig extremal. \square

52.2 Haupt- und Gauß-Krümmung

Man nennt die Eigenwerte von L die HAUPTKRÜMMUNGEN und die zugehörigen Eigenvektoren HAUPTKRÜMMUNGSRICHTUNGEN. Da L symmetrisch ist, gibt es nur reelle Eigenwerte und dazu eine Orthonormalbasis von $T_p M$ aus Eigenvektoren (Verwende: $0 = \langle Av, w \rangle - \langle v, Aw \rangle = (\lambda - \mu) \langle v, w \rangle$). Seien K_i die Hauptkrümmungen und ξ_i eine Orthonormalbasis von zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen. Dann gilt nach Euler:

$$\begin{aligned} K(\xi) = \mathbb{I}(\xi, \xi) &= \mathbb{I}\left(\sum_i \langle \xi, \xi_i \rangle \xi_i, \sum_j \langle \xi, \xi_j \rangle \xi_j\right) = \\ &= \sum_{i,j} \langle \xi, \xi_i \rangle \langle \xi, \xi_j \rangle \mathbb{I}(\xi_i, \xi_j) = \sum_i \langle \xi, \xi_i \rangle^2 K_i. \end{aligned}$$

Unter der GAUSS-KRÜMMUNG $K \in \mathbb{R}$ im Punkt p versteht man das Produkt aller Hauptkrümmungen, also die Determinante von L .

Die MITTLERE KRÜMMUNG $H \in \mathbb{R}$ ist das arithmetische Mittel der Hauptkrümmungen, also $\frac{1}{m}$ der Spur von L .

Eine Kurve c in M heißt KRÜMMUNGSLINIE, falls ihre Ableitung in jedem Punkt eine Hauptkrümmungsrichtung ist.

Ein Vektor $\xi \neq 0$ heißt ASYMPTOTENRICHTUNG, falls $\mathbb{I}(\xi, \xi) = K(\xi) = 0$ ist. Eine Kurve c in M heißt ASYMPTOTENLINIE, falls ihre Ableitung in jedem Punkt eine Asymptotenrichtung ist.

Schließlich heißen zwei Vektoren $\xi_1 \neq 0$ und $\xi_2 \neq 0$ KONJUGIERT, falls $\mathbb{I}(\xi_1, \xi_2) = 0$ ist.

Ein Punkt p heißt NABELPUNKT, falls alle Hauptkrümmungen gleich sind, L also ein Vielfaches der Identität ist. Dann ist die Normalkrümmung konstant gleich der mittleren Krümmung.

Sind alle Hauptkrümmungen 0, so spricht man von einem FLACHPUNKT.

52.3 Beispiele

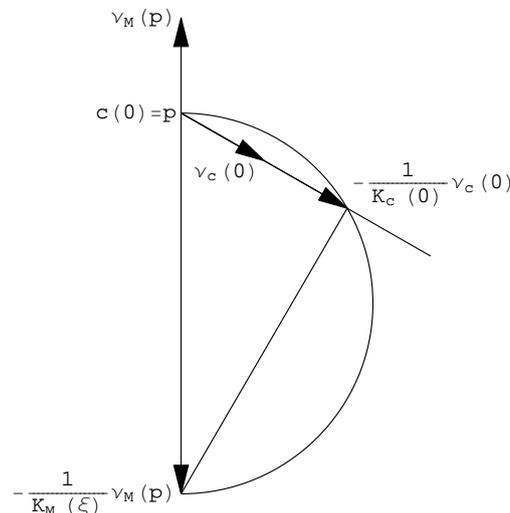
1. Hyperebene: $\mathbb{R}^m := e_0^\perp \subset \mathbb{R}^n$. Als Normalvektor verwenden wir e_0 . Die Gaußabbildung ist somit konstant e_0 und die Weingarten-Abbildung $L = 0$. Also sind die oben definierten Krümmungen alle gleich 0. Alle Punkte sind Flachpunkte und alle Richtungen Hauptkrümmungsrichtungen und Asymptotenrichtungen.
2. Sphäre: $S^m = \{x : |x| = R\} \subset \mathbb{R}^n$. Hier können wir im Punkte $x \in S^m$ als Normale $\nu_x = \frac{1}{R}x$ nehmen. D.h. die Gaußabbildung ist die lineare Abbildung $\frac{1}{R}$ id und somit ist dies auch die Weingarten-Abbildung. Also sind alle Punkte Nabelpunkte und alle Richtungen Hauptkrümmungsvektoren mit Hauptkrümmung $\frac{1}{R}$. Es gibt keine Asymptotenrichtungen. Die Gauß-Krümmung ist somit $\frac{1}{R^m}$ und die mittlere Krümmung ist $\frac{1}{R}$.
3. Zylinder: $M := \{(x, t) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^n$. Als Normale in $(x, t) \in M$ können wir $\nu_{x,t} = (x, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ verwenden. Der Tangentialraum von

M in diesem Punkt ist also $T_{(x,t)}M := \nu_{x,t}^\perp = \{(y,s) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : y \perp x\}$ und die Gaußabbildung ist die Einschränkung der linearen Abbildung $\text{id} \oplus 0$ auf $T_x S^{m-1} \times \mathbb{R}$. Die Weingarten-Abbildung sieht somit genauso aus. Eine Hauptkrümmung ist also 0 mit Krümmungsrichtung $(0,1)$ und alle anderen Hauptkrümmungen sind 1. Die Erzeuger $\{x\} \times \mathbb{R}$ sind die Asymptotenlinien. Eine Kurve $c : s \mapsto (x(s), t(s))$ ist genau dann Krümmungslinie, wenn $s \mapsto t(s)$ oder $s \mapsto x(s)$ konstant ist.

52.4 Lemma [65].

Ist c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve auf M mit $c(0) = p \in M$ und $c'(0) = \xi \in T_p M$, $|\xi| = 1$, so gilt:

1. $(\nu \circ c)'(0) = L_p \cdot \xi$, d.h. $L_p \cdot \xi$ mißt die infinitesimale Änderung von ν längs c .
2. $-\langle c''(0), \nu_p \rangle = \text{II}(\xi, \xi) = \langle L_p \cdot \xi, \xi \rangle = K(\xi)$, d.h. die Normalkomponente der Beschleunigung hängt nur vom Geschwindigkeitsvektor ab, und ist die Normalkrümmung in dessen Richtung.
3. Es ist $-K_M(\xi) = K_c(0) \langle \nu_M(p), \nu_c(0) \rangle = K_c(0) \cos \theta$, wobei θ der Winkel zwischen der Flächennormale $\nu_M(p)$ und dem Hauptnormalenvektor $\nu_c(0)$ (oder äquivalent der Schmiegebene) von c in p ist und $K_c(0) \geq 0$ die Krümmung der Raumkurve c ist.
4. Der Schmiegekreis an c in p hat seinen Mittelpunkt auf der Sphäre um $p - \frac{1}{2K_M(\xi)} \nu_M(p)$ durch p .



Beweis. (1) ist gerade die Definition der Weingarten-Abbildung.

(2) Dazu differenzieren wir $0 = \langle c'(t), \nu_M(c(t)) \rangle$ wie in [51.3](#) und erhalten

$$-\langle c''(0), \nu_M(c(0)) \rangle = \langle c'(0), (\nu \circ c)'(0) \rangle \stackrel{(1)}{=} \langle \xi, L \cdot \xi \rangle = \text{II}(\xi, \xi) = K(\xi).$$

(3) Das Resultat folgt aus (2) wegen

$$-K(\xi) \stackrel{(2)}{=} \left\langle c''(0), \nu_M(p) \right\rangle \stackrel{7.1}{=} \left\langle K_c(0)\nu_c(0), \nu_M(p) \right\rangle = K_c(0) \left\langle \nu_c(0), \nu_M(p) \right\rangle.$$

(4) Aus der Theorie der Kurven 2.3 wissen wir, daß der Mittelpunkt des Schmiegekrees durch $c(0) + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0)$ gegeben ist. Nun betrachten wir das Dreieck mit den Ecken p , $p - \frac{1}{K(\xi)}\nu_M(p)$ und $p + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0)$. Dieses hat einen rechten Winkel bei $c(0) + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0)$, denn nach (3) ist

$$\left\langle \nu_M(p), \nu_c(0) \right\rangle = -\frac{\mathbb{II}(\xi, \xi)}{K_c(0)} = -\frac{K_M(\xi)}{K_c(0)}$$

und somit

$$\left\langle \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0), \frac{1}{K_M(\xi)}\nu_M(p) + \frac{1}{K_c(0)}\nu_c(0) \right\rangle = -\frac{1}{K_c(0)K_M(\xi)}\frac{K_M(\xi)}{K_c(0)} + \frac{1}{K_c(0)^2} = 0.$$

Also liegt der Schmiegekreesmittelpunkt auf dem Thaleskreis (oder in Wirklichkeit auf der Sphäre) mit der Strecke von p nach $p - \frac{1}{K_M(\xi)}\nu_M(p)$ als Durchmesser. \square

52.5 Lemma (Flächen mit lauter Nabelpunkten).

Eine zusammenhängende Hyperfläche M besitzt genau dann nur Nabelpunkte, wenn sie Teil einer Ebene oder einer Sphäre ist.

Beweis. (\Leftarrow) Dies haben wir in 52.3 gezeigt.

(\Rightarrow) Da jeder Punkt Nabelpunkt ist, ist die Weingarten-Abbildung proportional zur Identität, i.e. $L_{\varphi(x)} \cdot \varphi_i(x) = \lambda(x)\varphi_i(x)$, wobei wir mit dem Index i die partielle Ableitung in die i -te Koordinatenrichtung für eine fix gewählte Karte φ bezeichnen. Wegen $\lambda(x) := \frac{1}{m} \text{Spur}(L_{\varphi(x)})$ ist $\lambda: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ glatt. Also ist $\nu_{i,j} := \partial_j \partial_i(\nu \circ \varphi) = \partial_j(L \cdot \varphi_i) = \partial_j(\lambda \varphi_i) = \lambda_j \varphi_i + \lambda \varphi_{i,j}$. Insbesondere gilt

$$\lambda_j \varphi_i = \nu_{i,j} - \lambda \varphi_{i,j} = \nu_{j,i} - \lambda \varphi_{j,i} = \lambda_i \varphi_j$$

und somit ist $\lambda_i = 0 = \lambda_j$ für $i \neq j$, d.h. λ ist konstant.

Falls $\lambda = 0$ ist, so ist $0 = L_p = T_p\nu$ für alle $p \in M$, also ν konstant und M eine Ebene. Ist $\lambda \neq 0$, dann ist $(\lambda\varphi - \nu)_i = \lambda\varphi_i - L \cdot \varphi_i = 0$ und somit $\xi := \frac{1}{\lambda}(\lambda\varphi - \nu)$ konstant, d.h. $|\varphi - \xi| = \frac{1}{|\lambda|}$. Somit liegt M lokal auf einer Sphäre um ξ . Da die Sphäre aber durch einen kleinen Teil von M eindeutig bestimmt ist, liegt M ganz auf der Sphäre. \square

52.6 Satz von Dupin.

Für ein $m \geq 3$ sei $\Phi: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein lokaler Diffeomorphismus dessen partielle Ableitungen Φ_i orthogonal stehen, d.h. $\langle \Phi_i, \Phi_j \rangle = 0$ für alle $i \neq j$. Dann sind die Parameterlinien $t \mapsto \Phi(t \cdot e_i)$ Krümmungslinien auf jeder Hyperfläche $\Phi(e_j^\perp)$ für $i \neq j$.

Man kann sich Φ vorstellen als m jeweils durch $t \in \mathbb{R}$ parametrisierte, paarweise orthogonal schneidende Familien von Flächen $\Phi(te_j + e_j^\perp)$ für $i = 1, \dots, m$. Man nennt deshalb so ein Φ auch ein m -fach orthogonales Flächensystem.

Beweis. Es sei j fix gewählt. Wir müssen zeigen, daß für $i \neq j$ der Tangentenvektor der Parameterlinie $t \mapsto \Phi(t \cdot e_i)$, also die partielle Ableitung Φ_i , ein Eigenvektor der Weingarten-Abbildung L der Hyperfläche $M := \Phi(e_j^\perp)$ ist. Da $\langle \Phi_k, \Phi_j \rangle = 0$ für alle $k \neq j$ ist, ist Φ_j ein Normalvektor an den Tangentialraum der Hyperfläche M , der ja von den Φ_k mit $k \neq j$ erzeugt wird. Sei ν der normierte Normalvektor. Da

$L \Phi_i \in TM = \Phi_j^\perp$ ist, ist Φ_i genau dann ein Eigenvektor zu L , wenn $\langle L \Phi_i, \Phi_k \rangle = 0$ ist für alle $k \neq i, j$.

$$0 = \langle \Phi_k, \Phi_i \rangle \xrightarrow{\partial_j} 0 = \langle \Phi_{k,j}, \Phi_i \rangle + \langle \Phi_k, \Phi_{i,j} \rangle \quad (+)$$

$$0 = \langle \Phi_k, \Phi_j \rangle \xrightarrow{\partial_i} 0 = \langle \Phi_{k,i}, \Phi_j \rangle + \langle \Phi_k, \Phi_{j,i} \rangle \quad (-)$$

$$0 = \langle \Phi_i, \Phi_j \rangle \xrightarrow{\partial_k} 0 = \langle \Phi_{i,k}, \Phi_j \rangle + \langle \Phi_i, \Phi_{j,k} \rangle \quad (-)$$

Zieht man von der ersten Gleichung die beiden anderen ab, so erhält man $0 = -2\langle \Phi_{k,i}, \Phi_j \rangle$ und da Φ_j proportional zu ν ist, auch $\langle L \Phi_i, \Phi_k \rangle = -\langle \nu, \Phi_{k,i} \rangle = 0$, da partielles Differenzieren nach i von $\langle \nu \circ \Phi, \Phi_k \rangle$ wie im 2.ten Beweis von [51.5](#) die Gleichung $\langle L \cdot \Phi_i, \Phi_k \rangle + \langle \nu, \Phi_{k,i} \rangle = 0$ liefert. \square

52.7 Beispiel.

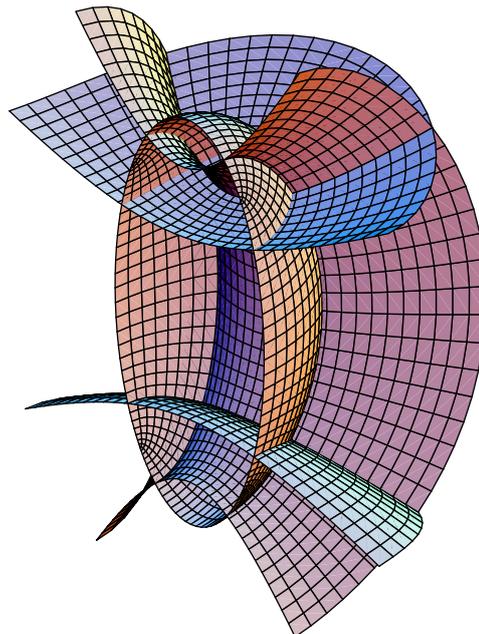
Die folgenden lokalen Koordinatensysteme erfüllen die Voraussetzungen des Satzes von Dupin [52.6](#):

1. Kartesische Koordinaten: $\Phi = \text{id}$;
2. Zylinder-Koordinaten: $\Phi : (\varphi, r, z) \leftrightarrow (r \cdot \cos \varphi, r \cdot \sin \varphi, z)$;
3. Kugel-Koordinaten: $\Phi : (\varphi, \alpha, s) \leftrightarrow (s \cos \alpha \cos \varphi, s \cos \alpha \sin \varphi, s \sin \alpha)$.

52.8 Beispiel (Elliptische Koordinaten)

Es sei: $g(t; x, y, z) := \frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} + \frac{z^2}{c-t}$ mit $0 < a < b < c$. Es ist $g(t; x, y, z) = 1$ ein

$$\begin{cases} \text{Ellipsoid} & \text{für } t < a, \\ \text{einschaligen Hyperboloid} & \text{für } a < t < b, \\ \text{zweischaligen Hyperboloid} & \text{für } b < t < c, \\ \text{die leere Menge} & \text{für } c < t. \end{cases}$$



Wir betrachten die Funktion

$$G : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \supset U \times V \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$G(u, v, w; x, y, z) := \left(g(u; x, y, z), g(v; x, y, z), g(w; x, y, z) \right)$$

mit $U :=]-\infty, a[\times]a, b[\times]b, c[$ und $V := \{(x, y, z) : x, y, z > 0\}$, und behaupten, daß die Lösung $\Phi : (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ der impliziten Gleichung $G(u, v, w; x, y, z) = (1, 1, 1)$ ein dreifach orthogonales Flächensystem ist.

Es ist $\Phi : U \rightarrow V$ bijektiv, denn durch jeden Punkt $(x, y, z) \in V \subset \mathbb{R}^3$ geht genau

1. ein Ellipsoid mit $u(x, y, z) := t \in]-\infty, a[$;
2. ein einschaliges Hyperboloid mit $v(x, y, z) := t \in]a, b[$;
3. und ein zweischaliges Hyperboloid mit $w(x, y, z) := t \in]b, c[$.

Um das einzusehen beachte man, daß die Gleichung $g(t; x, y, z) - 1 = 0$ nach Ausmultiplizieren der Nenner ein kubisches Polynom γ in t wird bei fixen (x, y, z) :

$$\gamma(t) := x^2(b-t)(c-t) + y^2(a-t)(c-t) + z^2(a-t)(b-t) - (a-t)(b-t)(c-t).$$

Für dieses Polynom gilt: $\gamma(a) > 0$, $\gamma(b) < 0$, $\gamma(c) > 0$ und weiters

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\gamma(t)}{(a-t)(b-t)(c-t)} = -1.$$

Also existiert in jedem der Intervalle $]-\infty, a[$, $]a, b[$ und $]b, c[$ genau eine Nullstelle. Durch Differenzieren der impliziten Gleichung erhalten wir

$$\frac{\partial(G_1, G_2, G_3)}{\partial(u, v, w)} + \frac{\partial(G_1, G_2, G_3)}{\partial(x, y, z)} \cdot \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 0.$$

Die Matrix $\frac{\partial(G_1, G_2, G_3)}{\partial(u, v, w)}$ ist von Diagonalgestalt mit Eintragungen

$$\frac{\partial g}{\partial t}(t, x, y, z) = \frac{x^2}{(a-t)^2} + \frac{y^2}{(b-t)^2} + \frac{z^2}{(c-t)^2} \neq 0 \text{ für } t = u, v, w.$$

Die Matrix $\frac{\partial(G_1, G_2, G_3)}{\partial(x, y, z)}$ hat als Zeilen $\frac{\partial g}{\partial(x, y, z)} = \left(\frac{2x}{a-t}, \frac{2y}{b-t}, \frac{2z}{c-t} \right) \neq 0$ für $t = u, v, w$. Diese Zeilen sind paarweise orthogonal, denn z.B.

$$\begin{aligned} & \frac{4x^2}{(a-u)(a-v)} + \frac{4y^2}{(b-u)(b-v)} + \frac{4z^2}{(c-u)(c-v)} = \\ & = \frac{4}{u-v} \left(\left(\frac{x^2}{a-u} + \frac{y^2}{b-u} + \frac{z^2}{c-u} \right) - \left(\frac{x^2}{a-v} + \frac{y^2}{b-v} + \frac{z^2}{c-v} \right) \right) \\ & = \frac{4}{u-v} (g(u; x, y, z) - g(v; x, y, z)) \\ & = \frac{4}{u-v} (1 - 1) = 0. \end{aligned}$$

Also ist der implizite Funktionensatz anwendbar und somit Φ glatt mit Jacobimatrix

$$\Phi'(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = - \left(\frac{\partial(G_1, G_2, G_3)}{\partial(x, y, z)} \right)^{-1} \cdot \frac{\partial(G_1, G_2, G_3)}{\partial(u, v, w)}.$$

Diese hat (als Inverse einer Matrix mit orthogonalen Zeilen) orthogonale Spalten, also erfüllt Φ die Voraussetzungen von [52.6](#). Der Diffeomorphismus Φ ist übrigens

explizit gegeben durch:

$$\begin{aligned}x(u, v, w)^2 &= \frac{(a-u)(a-v)(a-w)}{(a-b)(a-c)} \\y(u, v, w)^2 &= \frac{(b-u)(b-v)(b-w)}{(b-a)(b-c)} \\z(u, v, w)^2 &= \frac{(c-u)(c-v)(c-w)}{(c-a)(c-b)}\end{aligned}$$

Die Bilder unter Φ der auf die Koordinatenachsen e_i normalstehenden Ebenen sind nach Konstruktion die Punkte $(x, y, z) \in V$ für welche $(u, v, w) \in U$ mit fixer i -ter Koordinate existieren mit $1 = g(u, x, y, z) = g(v, x, y, z) = g(w, x, y, z)$, die also auf der entsprechenden Quadrik vom i . Typ liegen. Die Bilder der zu den Achsen parallelen Geraden sind also die Schnittkurven der entsprechenden übrigen beiden Quadriken. Wir wissen also nach [52.6](#), daß die Krümmungslinien obiger Quadriken gerade die Schnittlinien der orthogonalen Familien sind.

52.9 Beispiel (Parabolische Koordinaten)

Wir gehen analog zu [52.8](#) vor. Es sei nun: $g(t; x, y, z) := \frac{x^2}{a-t} + \frac{y^2}{b-t} - 2z + c + t$ mit $0 < a < b$ und $c \in \mathbb{R}$. Es ist $g(t; x, y, z) = 0$ für verschiedene t ein elliptisches bzw. ein hyperbolisches Paraboloid. Es seien $u < a$, $a < v < b$ und $b < w$ die Lösungen der kubischen Gleichung $g(t; x, y, x) = 0$ in t , d.h.

$$(u-t)(v-t)(w-t) = (a-t)(b-t)(2z - c - t) - x^2(b-t) - y^2(a-t),$$

also ist

$$\begin{aligned}x^2 &= \frac{(u-a)(v-a)(w-a)}{a-b} \\y^2 &= \frac{(u-b)(v-b)(w-b)}{b-a} \\z &= \frac{c-a-b+u+v+w}{2}\end{aligned}$$

Die durch diese Gleichungen definierte Funktion $\Phi : (u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ erfüllt nun auf $\{(u, v, w) : u, v, w \text{ paarweise verschieden}\}$ die Voraussetzungen des Satzes von Dupin [52.6](#), denn

$$\Phi'(u, v, w) = \begin{pmatrix} \frac{x}{2(u-a)} & \frac{x}{2(v-a)} & \frac{x}{2(w-a)} \\ \frac{y}{2(u-b)} & \frac{y}{2(v-b)} & \frac{y}{2(w-b)} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Wir wissen also nach [52.6](#), daß die Krümmungslinien obiger Quadriken gerade die Schnittlinien der orthogonalen Familien sind.

52.10 Satz von Liouville.

Für $m \geq 3$ bildet jeder konforme Diffeomorphismus offener Mengen des \mathbb{R}^m Sphären auf Sphären ab.

Beweis. Sei S eine Sphäre und $x \in S$ und $v \in T_x S$. O.B.d.A. sei 0 ihr Mittelpunkt. Wir wählen eine lokale orthogonale Parametrisierung φ von S um x mit $\partial_1 \varphi(0) = v$ (z.B. die stereographische Projektion). Dann ist $\Phi(t; u) := t\varphi(u)$ eine Funktion, welche die Voraussetzungen von [52.6](#) erfüllt. Die Zusammensetzung $f \circ \Phi$ mit einem konformen Diffeomorphismus f muß ebenfalls die Voraussetzungen von [52.6](#) erfüllen, also ist $t \mapsto f(\varphi(te_1))$ eine Krümmungslinie und

$f'(x)(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\varphi(t e_1))$ eine Hauptkrümmungsrichtung. Da aber $v \in T_x S$ beliebig war, sind alle Tangentialvektoren Hauptkrümmungsrichtungen, d.h. $f(S)$ hat nur Nabelpunkte. Wegen [52.5] ist $f(S)$ also Teil einer Sphäre oder einer Ebene. Da $f(S)$ kompakt ist, ist es eine Sphäre. \square

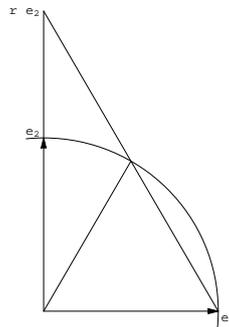
Vergleiche dieses Resultat mit den Ergebnissen über konformen Abbildungen im 2-dimensionalen ([33] und [34]).

52.11 Satz von Liouville.

Sei $m \geq 2$. Die Gruppe der konformen Diffeomorphismen des \mathbb{R}^m besteht genau aus den Ähnlichkeitsabbildungen (d.h. (nicht notwendig eigentliche) Bewegungen zusammengesetzt mit Streckungen). Die Gruppe der konformen Diffeomorphismen der S^m wird durch die Ähnlichkeitsabbildungen und die Inversion $x \mapsto \frac{1}{|x|^2} x$ in einer stereographischen Karte erzeugt.

Beweis. Den Fall $m = 2$ haben wir bereits in [33.10] behandelt. Sei also $m > 2$ und f ein konformer Diffeomorphismus des \mathbb{R}^m . Nach [52.10] bildet dieser Sphären auf Sphären ab. Und ebenso zeigt man, daß er auch Hyperebenen auf solche abbildet. Da sich Geraden als Durchschnitte von $m-1$ Hyperebenen schreiben lassen, werden auch Geraden auf Geraden abgebildet. Geometrisch kann man das auch mittels des konformen Diffeomorphismus f^{-1} sehen: Seien x_1, x_2, x_3 verschiedene Punkte einer Geraden. Angenommen die Punkte $y_i = f(x_i)$ lägen auf keiner Gerade. Dann würde eine Sphäre S existieren mit $y_i \in S$. Das Bild $f^{-1}(S)$ müßte aber wieder eine Sphäre sein, auf welcher die Punkte $x_i := f^{-1}(y_i)$ lägen, das ist unmöglich.

Eine Abbildung des \mathbb{R}^m , welche Geraden erhält, ist aber bereits affin: Eine solche erhält auch antipodale Punkte auf den Sphären, denn die Tangentialebenen in solchen sind parallel, i.e. sie schneiden den Durchmesser orthogonal, und diese Eigenschaft wird durch f erhalten. Damit muß f aber auch die Mittelpunkte erhalten, denn diese sind die Durchschnitte aller Durchmesser, die ja gerade antipodale Punkte verbinden. Durch Anwenden einer Translation können wir erreichen, daß $f(0) = 0$ ist und somit $f(r S^{m-1}) = \rho(r) S^{m-1}$ für alle $r > 0$ mit eine Funktion $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Durch Anwenden einer Streckung können wir $\rho(1) = 1$ erreichen. Bleibt zu zeigen, daß $\rho = \text{id}$ und somit f nach [1.2] eine Isometrie ist. Wir betrachten dazu das rechtwinkelige Dreieck mit Ecken $0, e_1, r \cdot e_2$.



Es wird auf das Dreieck mit Ecken $f(0) = 0, f(e_1), \rho(r) f(e_2)$ abgebildet. Schneiden wir die Hypotenuse des ursprünglichen Dreiecks mit der Einheits-Sphäre so erhalten wir ein gleichschenkeliges Dreieck mit diesen beiden Schnittpunkten und 0 als Ecken. Dieses wird durch f auf ein ähnliches Dreieck abgebildet, da der Winkel bei 0 erhalten bleibt, und die Längen der Schenkel um den Faktor $\rho(1) = 1$ gestreckt werden. Damit muß aber auch das ursprüngliche Dreieck auf ein ähnliches

abgebildet werden, denn es ist durch den Schnitt der 0 gegenüberliegenden Seite des 2.ten Dreiecks mit den beiden Koordinatenachsen eindeutig festgelegt. Für das Verhältnis der Katheten muß also gelten: $\rho(r)/\rho(1) = r/1$, und somit ist $\rho = \text{id}$.

Im Fall eines konformen Diffeomorphismus f der S^m gehen wir zur Darstellung bezüglich einer stereographischen Projektion über. Diese Darstellung ist dann konform, da die stereographische Projektion Winkel erhält. Falls f den Pol der Projektion nicht invariant läßt, so verschieben wir sein Bild zuerst nach 0 in der Karte und danach wenden wir die Inversion an. Die Zusammensetzung der Kartendarstellung mit diesen beiden konformen Diffeomorphismen liefert uns somit einen konformen Diffeomorphismus \tilde{f} des \mathbb{R}^n , welcher wegen Teil 1 eine Ähnlichkeitsabbildung sein muß. \square

53. Formeln für Hyperflächen

53.1 Formeln für parametrisierte Flächen

Sei $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow M \subset \mathbb{R}^n$ eine lokale Parametrisierung der Hyperfläche M . Für einen Punkt $p = \varphi(u) \in M$ ist eine Basis des Tangentialraums $T_p M = \text{Bild } \varphi'(u)$ durch $(\partial_1 \varphi(u), \dots, \partial_m \varphi(u))$ gegeben, wobei $\partial_i \varphi(u) = \frac{\partial}{\partial u^i} \varphi(u)$ die i -te partielle Ableitung von φ in u ist, wir wollen dafür kurz $\varphi_i(u)$ schreiben. Analog soll $\varphi_{i,j}$ die zweite partielle Ableitung $\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} \varphi(u)$ sein. Es gilt $\langle (\nu \circ \varphi)(u), \varphi_i(u) \rangle = 0$ für alle i . Als j -te partielle Ableitung erhalten wir: $0 = \langle L \cdot \varphi_j, \varphi_i \rangle + \langle \nu, \varphi_{i,j} \rangle$, also $\langle L \cdot \varphi_j, \varphi_i \rangle = -\langle \nu, \varphi_{i,j} \rangle$. Falls die φ_i orthonormal sind, hätten wir damit die Matrix von L bestimmt. Auch im allgemeinen Fall müßte L durch alle diese inneren Produkte festgelegt sein. Dazu benötigen wir folgendes Lemma aus der linearen Algebra.

53.2 Lemma.

Sei (g_1, \dots, g_m) eine Basis des Vektorraums V und $T : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Sei $g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle$ und $G = (g_{i,j})$ die zugehörige symmetrische positiv definite Matrix, $[T] := (T_j^i)$ die Matrix von T bezüglich der Basis (g_1, \dots, g_m) , d.h. $Tg_j = \sum_i T_j^i g_i$, und schließlich A die Matrix mit Eintragungen $A_j^i := \langle g_i, Tg_j \rangle$. Dann gilt $[T] = G^{-1} \cdot A$.

Beweis. Es ist also $Tg_j = \sum_i T_j^i g_i$, wobei j die Spalten und i die Zeilen zählt, und somit

$$A_j^k := \langle g_k, Tg_j \rangle = \left\langle g_k, \sum_i T_j^i g_i \right\rangle = \sum_i \langle g_k, g_i \rangle T_j^i = \sum_i g_{k,i} T_j^i$$

Also ist $A = G \cdot [T]$ und somit $[T] = G^{-1} \cdot A$. \square

53.3 Folgerung (Matrixdarstellung der Weingarten-Abbildung).

Die Weingarten-Abbildung hat bezüglich der Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ folgende Matrixdarstellung

$$[L] = -(\langle \varphi_i, \varphi_j \rangle)^{-1} \cdot (\langle \nu, \varphi_{i,j} \rangle). \quad \square$$

53.4 Formeln für 2-Flächen

Sei nun speziell $m = 2$ (d.h. $n = 3$) und $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(t, s) \mapsto \varphi(t, s)$ eine lokale Parametrisierung. Dann setzt man:

$$\begin{aligned} E &:= g_{11} = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle, & F &:= g_{12} = \langle \varphi_t, \varphi_s \rangle, & G &:= g_{22} = \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle \\ \nu &:= \frac{\varphi_t \times \varphi_s}{|\varphi_t \times \varphi_s|}, & |\varphi_t \times \varphi_s| &= \sqrt{|\varphi_t|^2 \cdot |\varphi_s|^2 - \langle \varphi_t, \varphi_s \rangle^2} = \sqrt{EG - F^2} \\ e &:= -\langle \nu, \varphi_{t,t} \rangle, & f &:= -\langle \nu, \varphi_{t,s} \rangle, & g &:= -\langle \nu, \varphi_{s,s} \rangle. \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet daß die Länge eines Vektors der Form $v \times w$, also die Fläche des von v und w aufgespannten Parallelogramms wie folgt gegeben ist:

$$\begin{aligned} |v \times w| &= |v| \cdot |w| \cdot \sin \angle(v, w) = |v| \cdot |w| \cdot \sqrt{1 - \cos^2 \angle(v, w)} \\ &= |v| \cdot |w| \cdot \sqrt{1 - \frac{\langle v, w \rangle^2}{|v|^2 \cdot |w|^2}} = \sqrt{|v|^2 \cdot |w|^2 - \langle v, w \rangle^2}. \end{aligned}$$

Bezüglich der Basis (φ_t, φ_s) sehen die Fundamentalformen wie folgt aus:

$$[\mathbf{I}] = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad [\mathbf{II}] = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

Die Weingarten-Abbildung ist:

$$\begin{aligned} [L] &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} eG - fF & fG - gF \\ fE - eF & gE - fF \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Gauß-Krümmung ist also

$$K = \det L = \frac{(eg - f^2)(EG - F^2)}{(EG - F^2)^2} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2},$$

wie man auch aus $K = \det L = \det(\mathbf{I}^{-1} \cdot \mathbf{II}) = \det \mathbf{I} / \det \mathbf{II}$ sieht, und die mittlere Krümmung ist

$$2H = \text{spur } L = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} Ge - Ff & * \\ * & Eg - Ff \end{pmatrix} = \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2}.$$

Die Hauptkrümmungen erhalten wir als Lösung der charakteristischen Gleichung $\lambda^2 - \text{spur } L \cdot \lambda + \det L = 0$, also

$$K_{1,2} = H \pm \sqrt{H^2 - K}.$$

Die Hauptkrümmungsrichtungen sind dann Vektoren $\xi = a_t \varphi_t + a_s \varphi_s$ mit $L(\xi) = K_i \xi$, d.h.

$$\begin{aligned} 0 &= 0 \cdot (EG - F^2) = \det \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a_t \\ a_s \end{pmatrix} & [L] \begin{pmatrix} a_t \\ a_s \end{pmatrix} \end{pmatrix} \cdot (EG - F^2) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_t & (Ge - Ff)a_t + (Gf - Fg)a_s \\ a_s & (Ef - Fe)a_t + (Eg - Ff)a_s \end{pmatrix} \\ &= a_t^2(Ef - Fe) + a_t a_s (Eg - Ge) + a_s^2(Fg - Gf) \\ &= \det \begin{pmatrix} a_t^2 & -a_t a_s & a_s^2 \\ g & f & e \\ G & F & E \end{pmatrix} \end{aligned}$$

53.5 Folgerung.

Die Krümmungslinien $c(t) = \varphi(u(t), v(t))$ sind durch folgende Differentialgleichung gegeben:

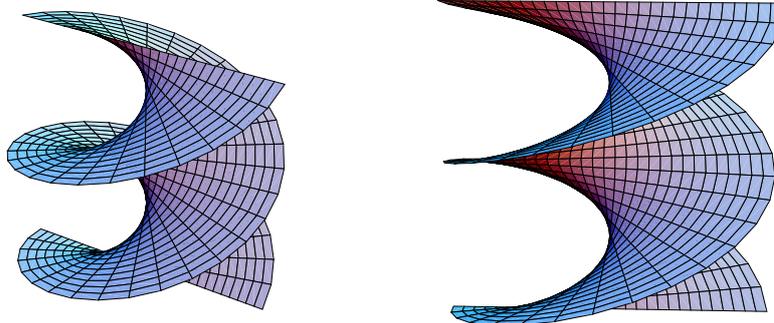
$$(fE - eF)_{c(t)} u'(t)^2 + (gE - eG)_{c(t)} u'(t)v'(t) + (gF - fG)_{c(t)} v'(t)^2 = 0$$

Beweis. Dies folgt sofort aus 53.4

□

Beispiel.

Das Heliocoid (oder Wendelfläche) ist durch $\varphi : (u, v) \mapsto (av \cos u, av \sin u, bu)$ mit $a, b > 0$ gegeben.



Es ist

$$\varphi_u = (-av \sin u, av \cos u, b)$$

$$\varphi_v = (a \cos u, a \sin u, 0)$$

$$\varphi_u \times \varphi_v = (-ab \sin u, ab \cos u, -a^2v)$$

$$\varphi_{u,u} = (-av \cos u, -av \sin u, 0)$$

$$\varphi_{u,v} = (-a \sin u, a \cos u, 0)$$

$$\varphi_{v,v} = (0, 0, 0)$$

$$E = a^2v^2 + b^2$$

$$G = a^2$$

$$F = 0$$

$$\nu = \frac{1}{a^2v^2 + b^2} (-b \sin u, b \cos u, -av)$$

$$e = 0, \quad \text{da } v \varphi_v = -\varphi_{u,u}$$

$$f = -\frac{a^2b}{D} = -\frac{ab}{\sqrt{a^2v^2 + b^2}}$$

$$g = 0, \quad \text{da } \varphi_{v,v} = 0$$

und somit ist

$$\begin{aligned}
[L] &= \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2v^2 + b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{ab}{\sqrt{a^2v^2 + b^2}} \\ -\frac{ab}{\sqrt{a^2v^2 + b^2}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a^2(a^2v^2 + b^2)} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2v^2 + b^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{ab}{\sqrt{a^2v^2 + b^2}} \\ -\frac{ab}{\sqrt{a^2v^2 + b^2}} & 0 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a^2v^2 + b^2} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{ab}{\sqrt{a^2v^2 + b^2}} \\ -\frac{b\sqrt{a^2v^2 + b^2}}{a} & 0 \end{pmatrix} \\
\Rightarrow H &= \frac{1}{2} \operatorname{Spur}(L) = 0 \text{ und } K = \det(L) = -\frac{b^2}{(a^2v^2 + b^2)^2} \\
\Rightarrow K_{1,2} &= H \pm \sqrt{H^2 - K} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{(a^2v^2 + b^2)^2}} = \pm \frac{b}{a^2v^2 + b^2}
\end{aligned}$$

Die Krümmungslinien $t \mapsto \varphi(u(t), v(t))$ sind somit durch

$$\begin{aligned}
0 &= (fE - eF)_{c(t)} u'(t)^2 + (gE - eG)_{c(t)} u'(t)v'(t) + (gF - fG)_{c(t)} v'(t)^2 \\
&= f \cdot \left((a^2v(t)^2 + b^2) u'(t)^2 - a^2 v'(t)^2 \right)
\end{aligned}$$

beschrieben. Wenn wir die Krümmungslinie o.B.d.A. nach v parametrisieren, d.h. $v(t) = t$ annehmen, dann erhalten wir:

$$u'(v) = \pm \frac{1}{\sqrt{v^2 + (b/a)^2}}$$

also

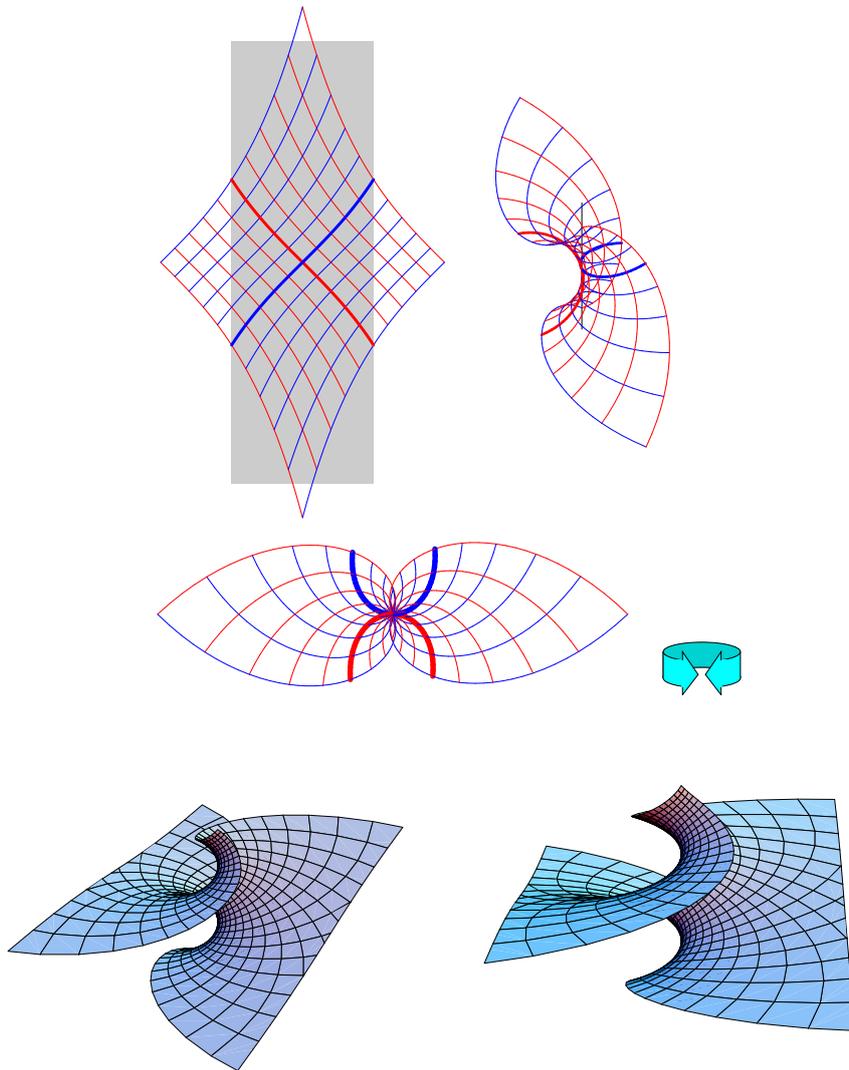
$$u(v) := c \pm \operatorname{arsinh} \frac{av}{b} \text{ und somit } v(u) := \frac{b}{a} \sinh(c \pm u).$$

Die beiden Krümmungslinien durch $(u, v) = (0, 0)$ werden somit durch $t \mapsto (t, \frac{b}{a} \sinh(t))$ und $s \mapsto (s, \frac{b}{a} \sinh(-s))$ parametrisiert. Durch die Punkte $(t, \frac{b}{a} \sinh(t))$ gehen die orthogonalen Krümmungslinien die durch $(u, \frac{b}{a} \sinh(2t - u))$ parametrisiert werden und durch die Punkte $(s, \frac{b}{a} \sinh(-s))$ jene die durch $(u, \frac{b}{a} \sinh(-2s + u))$ parametrisiert werden. Um also eine Reparametrisierung ψ von φ zu erhalten, deren Koordinatenlinien (diese) Krümmungslinien sind, betrachten wir die Zusammensetzung $(t, s) \mapsto (u(t, s), \frac{b}{a} \sinh(-2s + u(t, s)))$, wobei $u(t, s)$ so gewählt wird, daß

$$(u(t, s), \frac{b}{a} \sinh(-2s + u(t, s))) = (u(t, s), \frac{b}{a} \sinh(2t - u(t, s))),$$

also $-2s + u(t, s) = 2t - u(t, s)$, d.h. $u(t, s) = t + s$ ist. Die gesuchte Parametrisierung nach Krümmungslinien ist somit

$$(t, s) \mapsto \varphi\left(t + s, \frac{b}{a} \sinh(t - s)\right).$$

**53.6 Lemma.**

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ eine lokale Parametrisierung um einen Punkt p von M , der nicht Nabelpunkt ist, so gilt: Die Koordinatenrichtungen φ_t und φ_s sind genau dann Hauptkrümmungsrichtungen, wenn $F = \mathbf{I}(\varphi_s, \varphi_t) = 0$ und ebenso $f = \mathbf{II}(\varphi_t, \varphi_s) = 0$. Es gibt immer eine lokale Parametrisierung mit dieser Eigenschaft.

Beweis. (\Rightarrow) Da die Krümmungslinien orthogonal stehen ist $F = 0$. Setzen wir die Koordinatenrichtung φ_t in Determinanten-Formel aus [53.4](#) für die Hauptkrümmungsrichtungen ein, so erhalten wir:

$$0 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & f & e \\ * & 0 & E \end{pmatrix} = fE$$

und da $E = |\varphi_t|^2 \neq 0$, gilt ebenso $f = 0$.

(\Leftarrow) Die Koordinaten-Richtungen werden durch $a_t = 0$ bzw. $a_s = 0$ beschrieben. Dann ist aber wegen $F = f = 0$ die zweite Spalte obiger Matrix 0. Somit ist deren Determinante ebenfalls 0.

Nun zur Existenz solch einer Parametrisierung: Wir können die (bis auf Vorzeichen) eindeutig bestimmten normierten Hauptkrümmungsrichtungen betrachten. Diese sind punktweise linear unabhängige Vektorfelder und sind glatt, denn die Koeffizienten K und H des charakteristischen Polynoms von L sind glatt und somit auch die zwei (verschiedenen) Hauptkrümmungen und damit auch die zugehörigen bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmten normierten Eigenvektoren. Somit existiert nach [29.14](#) eine Parametrisierung φ mit $\partial_i \varphi$ proportional zu den normierten Hauptkrümmungsrichtungen, also sind deren Parameterlinien Krümmungslinien. \square

53.7 Determinatenformeln für die Krümmung

Wir wollen nun bestimmen, welche Größen INTRINSISCH sind, d.h. sich nicht ändern, wenn wir zu einer isometrischen Fläche übergehen. Das sind also jene Größen, die von einem in der Fläche lebenden Wesen erkannt werden können, ohne das sich diese eines umgebenden Raums bewußt sein müssen. Klarerweise können diese Längen und damit auch Winkel messen. D.h. die 1-te Fundamentalform ist intrinsisch. Nicht jedoch die 2-te Fundamentalform, da sie über die Ableitung des Normalenvektors definiert ist. Wir wissen also von vornherein von keiner der definierten Krümmungen, ob sie intrinsisch sind. Wenn wir Zylinder und Ebene vergleichen, so sehen wir, daß sowohl die Hauptkrümmungen als auch die mittlere Krümmung nicht intrinsisch sind. Wir wollen nun zeigen, daß die Gaußkrümmung es dennoch ist. Dazu benötigen wir zuerst Formeln für e , f und g , in welchen ν nicht vorkommt:

$$\begin{aligned} e &= -\langle \nu, \varphi_{t,t} \rangle = -\left\langle \frac{\varphi_t \times \varphi_s}{|\varphi_t \times \varphi_s|}, \varphi_{t,t} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \langle \varphi_t \times \varphi_s, \varphi_{t,t} \rangle = -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,t}) \\ \text{ sowie } f &= -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s}) \\ \text{ und } g &= -\frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{s,s}). \end{aligned}$$

Hier haben wir verwendet, daß $|\varphi_t \times \varphi_s| = \sqrt{EG - F^2}$ nach [53.4](#).

Wir wollen nun versuchen die Gauß-Krümmung allein durch die Koeffizienten der 1.ten Fundamentalform, sowie deren partiellen Ableitungen darzustellen. Sei dazu $D := \sqrt{EG - F^2}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} KD^4 &\stackrel{53.4}{=} (-eD)(-gD) - (-fD)^2 \\ &= \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,t}) \cdot \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{s,s}) - \det(\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s})^2 \\ &= \det((\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,t})^* \cdot (\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{s,s})) - \det((\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s})^* \cdot (\varphi_t, \varphi_s, \varphi_{t,s})) \\ &= \det \begin{pmatrix} \varphi_t^* \varphi_t & \varphi_t^* \varphi_s & \varphi_t^* \varphi_{s,s} \\ \varphi_s^* \varphi_t & \varphi_s^* \varphi_s & \varphi_s^* \varphi_{s,s} \\ \varphi_{t,t}^* \varphi_t & \varphi_{t,t}^* \varphi_s & \varphi_{t,t}^* \varphi_{s,s} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} \varphi_t^* \varphi_t & \varphi_t^* \varphi_s & \varphi_t^* \varphi_{t,s} \\ \varphi_s^* \varphi_t & \varphi_s^* \varphi_s & \varphi_s^* \varphi_{t,s} \\ \varphi_{t,s}^* \varphi_t & \varphi_{t,s}^* \varphi_s & \varphi_{t,s}^* \varphi_{t,s} \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{s,s} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{s,s} \rangle \\ \langle \varphi_{t,t}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{t,t}, \varphi_s \rangle & \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \det \begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{t,s} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{t,s} \rangle \\ \langle \varphi_{t,s}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{t,s}, \varphi_s \rangle & \langle \varphi_{t,s}, \varphi_{t,s} \rangle \end{pmatrix} \\
& = \det \begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{s,s} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{s,s} \rangle \\ \langle \varphi_{t,t}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{t,t}, \varphi_s \rangle & \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle - \langle \varphi_{t,s}, \varphi_{t,s} \rangle \end{pmatrix} \\
& - \det \begin{pmatrix} E & F & \langle \varphi_t, \varphi_{t,s} \rangle \\ F & G & \langle \varphi_s, \varphi_{t,s} \rangle \\ \langle \varphi_{t,s}, \varphi_t \rangle & \langle \varphi_{t,s}, \varphi_s \rangle & 0 \end{pmatrix} \\
& = \det \begin{pmatrix} E & F & F_s - \frac{1}{2}G_t \\ F & G & \frac{1}{2}G_s \\ \frac{1}{2}E_t & F_t - \frac{1}{2}E_s & F_{t,s} - \frac{1}{2}(E_{s,s} + G_{t,t}) \end{pmatrix} \\
& - \det \begin{pmatrix} E & F & \frac{1}{2}E_s \\ F & G & \frac{1}{2}G_t \\ \frac{1}{2}E_s & \frac{1}{2}G_t & 0 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

wegen des Entwicklungssatzes von Matrizen und weil:

$$\begin{aligned}
E &= \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle, & G &= \langle \varphi_s, \varphi_s \rangle, & F &= \langle \varphi_t, \varphi_s \rangle \\
E_t &= 2\langle \varphi_{t,t}, \varphi_t \rangle, & G_t &= 2\langle \varphi_{s,t}, \varphi_s \rangle, & F_t &= \langle \varphi_{t,t}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_t, \varphi_{s,t} \rangle \\
E_s &= 2\langle \varphi_{t,s}, \varphi_t \rangle, & G_s &= 2\langle \varphi_{s,s}, \varphi_s \rangle, & F_s &= \langle \varphi_{t,s}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_t, \varphi_{s,s} \rangle, \\
F_s - \frac{1}{2}G_t &= \langle \varphi_t, \varphi_{s,s} \rangle, & F_t - \frac{1}{2}E_s &= \langle \varphi_{t,t}, \varphi_s \rangle, \\
\frac{1}{2}E_{s,s} &= \langle \varphi_{t,s,s}, \varphi_t \rangle + \langle \varphi_{t,s}, \varphi_{t,s} \rangle, \\
F_{t,s} &= \langle \varphi_{t,t,s}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle + \langle \varphi_{t,s}, \varphi_{s,t} \rangle + \langle \varphi_t, \varphi_{s,t,s} \rangle, \\
F_{t,s} - \frac{1}{2}E_{s,s} &= \langle \varphi_{t,t,s}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle, \\
\frac{1}{2}G_{t,t} &= \langle \varphi_{s,t,t}, \varphi_s \rangle + \langle \varphi_{s,t}, \varphi_{s,t} \rangle, \\
F_{t,s} - \frac{1}{2}(E_{s,s} + G_{t,t}) &= \langle \varphi_{t,t}, \varphi_{s,s} \rangle - \langle \varphi_{s,t}, \varphi_{s,t} \rangle.
\end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren der Determinanten obiger Formel für K erhalten wir:

$$\begin{aligned}
4(EG - F^2)^2 K &= E(E_s G_s - 2F_t G_s + G_t^2) \\
&+ F(E_t G_s - E_s G_t - 2E_s F_s + 4F_t F_s - 2F_t G_t) \\
&+ G(E_t G_t - 2E_t F_s + E_s^2) \\
&- 2(EG - F^2)(E_{s,s} - 2F_{t,s} + G_{t,t}).
\end{aligned}$$

Eine symmetrischere Formel für K ist die folgende:

$$K = -\frac{1}{4D^4} \det \begin{pmatrix} E & E_t & E_s \\ F & F_t & F_s \\ G & G_t & G_s \end{pmatrix} - \frac{1}{2D} \left(\partial_s \frac{E_s - F_t}{D} + \partial_t \frac{G_t - F_s}{D} \right)$$

wobei wieder $D := \sqrt{EG - F^2}$. Diese kann leicht durch Auflösen der Determinante und durch Differenzieren verifiziert werden.

53.8 Theorema Egregium [25].

Sind zwei Flächen aufeinander abwickelbar, d.h. sie sind (lokal) isometrisch, so haben sie in entsprechenden Punkten die gleiche Gauß-Krümmung. Die Gauß-Krümmung K ist also eine intrinsischer Begriff, d.h. sie hängt nur von der Metrik der Fläche und nicht vom umgebenden Raum ab.

Für eine partielle Umkehrung siehe [60.1](#).

Beweis. Wegen obiger Formel in [53.7](#) hängt die Gauß-Krümmung nur von den Koeffizienten der Riemann-Metrik sowie deren 1.ten und 2.ten partiellen Ableitungen ab. Diese sind aber für zwei isometrische Flächen gleich, denn für eine Parametrisierung φ der einen ist $\psi = g \circ \varphi$ eine Parametrisierung der anderen, wo g die lokale Isometrie ist, also ist $\langle T_p g(\xi_1), T_p g(\xi_2) \rangle = \langle \xi_1, \xi_2 \rangle$. Wählt man nun für $\xi_i = T\varphi \circ \eta_i$, so folgt das Resultat. \square

53.9 Lemma (Jacobi-Gleichung).

Sind (t, s) geodätische Koordinaten auf M (d.h. für die zugehörige Parametrisierung gilt $E = 1, F = 0$), so erfüllt die Gauß-Krümmung die JACOBI-GLEICHUNG:

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \sqrt{G}$$

Wir werden in [58.5](#) und [58.6](#) zeigen, daß solche Koordinaten immer existieren. Beachte, daß die Bedingung $E = 1$ besagt, daß die Parameterlinien $t \mapsto \varphi(t, s)$ nach Bogenlänge parametrisiert sind und $F = 0$ besagt, daß die anderen Parametrlinien $s \mapsto \varphi(t, s)$ dazu orthogonal stehen.

Beweis. Obige Determinanten-Formel für K liefert in diesem Fall:

$$\begin{aligned} K \cdot G^2 &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2}G_t \\ 0 & G & \frac{1}{2}G_s \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}G_{t,t} \end{pmatrix} - \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & G & \frac{1}{2}G_t \\ 0 & \frac{1}{2}G_t & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}GG_{t,t} + \frac{1}{4}G_t^2 \\ \Rightarrow K &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 \sqrt{G} \quad \square \end{aligned}$$

53.10 Formeln für durch eine Gleichung gegebene Hyperflächen

Sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ eine reguläre, lokale Gleichung für M . Der Normalvektor ν ist dann der normierte Gradient von f , i.e.

$$\nu = \frac{\text{grad } f}{|\text{grad } f|} = \frac{(f_1, \dots, f_n)}{\sqrt{f_1^2 + \dots + f_n^2}}.$$

Der Tangentialraum ist gegeben durch

$$T_x M = \text{Ker } f'(x) = (\text{grad}_x f)^\perp = \left\{ (h^1, \dots, h^n) : 0 = \sum_{i=1}^n h^i f_i \right\}.$$

Für die zweite Fundamentalform gilt somit:

$$\begin{aligned} \mathbb{I}_x(k, h) &= \langle k, L_x h \rangle = \langle k, \frac{d}{dt} \Big|_0 \nu(x + th) \rangle = \left\langle k, \frac{d}{dt} \Big|_0 \frac{\text{grad } f(x + th)}{|\text{grad } f(x + th)|} \right\rangle \\ &= \left\langle k, \frac{d}{dt} \Big|_0 \frac{\text{grad } f(x + th)}{|\text{grad } f(x)|} + \frac{d}{dt} \Big|_0 \frac{\text{grad } f(x)}{|\text{grad } f(x + th)|} \right\rangle \\ &= \frac{1}{|\text{grad } f(x)|} \frac{d}{dt} \Big|_0 \underbrace{\langle k, \text{grad } f(x + th) \rangle}_{f'(x+th)(k)} \\ &\quad + \frac{d}{dt} \Big|_0 \frac{1}{|\text{grad } f(x + th)|} \langle k, \text{grad } f(x) \rangle \\ &= \frac{1}{|\text{grad } f(x)|} f''(x)(h, k) + \frac{d}{dt} \Big|_0 \frac{1}{|\text{grad } f(x + th)|} f'(x)(k) \end{aligned}$$

Für $h \in T_x M$ gilt somit

$$K(h) = \mathbb{I}(h, h) = \frac{1}{|\text{grad}_x f|} f''(x)(h, h) + 0.$$

Wir wollen nun die Hauptkrümmungen, d.h. die kritischen Werte von K auf $\{h : h \perp \nu, |h| = 1\} = \{h \in \mathbb{R}^n : f'(x)h = 0, \langle h, h \rangle = 1\}$ bestimmen. Anstelle von K können wir wegen obiger Formel auch die auf $T_x M$ proportionale Form $h \mapsto f''(x)(h, h)$ verwenden. Wir verwenden die Methode der Lagrange-Multiplikatoren: Danach ist h mit $|h| = 1$ und $f'(x)h = 0$ genau dann ein kritischer Punkt, wenn λ und μ existieren mit

$$2 f''(x)(h, -) = \lambda 2 \langle h, - \rangle + \mu f'(x)(-),$$

oder äquivalent

$$2 f''(x)(h, k) = \lambda 2 \langle h, k \rangle + \mu f'(x)(k) \text{ für alle } k \in \mathbb{R}^n.$$

Wenn wir die Hessesche Matrix $\text{Hess}_x f$ von f bei x durch

$$\langle \text{Hess}_x f \cdot h, k \rangle := f''(x)(h, k)$$

definieren, so ist diese Gleichung mit

$$2 \text{Hess}_x f \cdot h = \lambda 2 h + \mu \text{grad}_x f$$

äquivalent. Als Matrizen-Gleichung läßt sich das zusammen mit $f'(x)h = 0$ wie folgt schreiben:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Hess}_x f - \lambda \text{id} & \text{grad}_x f \\ f'(x) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h \\ -\frac{\mu}{2} \end{pmatrix}$$

Eine Lösung $h \neq 0$ existiert genau dann, wenn die Determinante verschwindet, denn wenn $h = 0$ ist, so muß wegen der Gleichung auch $\mu = 0$ sein. Seien die λ_i die Lösungen dieser polynomialen Gleichung in λ . Dann sind die Hauptkrümmungen durch

$$K_i = \frac{\lambda_i}{|\text{grad}_x f|} = \frac{\lambda_i}{\sqrt{f_1^2 + \dots + f_n^2}}$$

gegeben, da

$$|\text{grad}_x f| K(h) = f''(x)(h, h) = \lambda |h|^2 + \frac{\mu}{2} f'(x)h.$$

Im Spezialfall, wo die Hessesche Matrix Diagonalgestalt hat, d.h. $f_{i,j} = 0$ für alle $i \neq j$ ist, gilt:

$$\begin{aligned} 0 &= \det \begin{pmatrix} f_{1,1} - \lambda & \dots & 0 & f_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n} - \lambda & f_n \\ f_1 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix} = (\text{Entwicklung n. 1. Zeile}) \\ &= (f_{1,1} - \lambda) \det \begin{pmatrix} f_{2,2} - \lambda & \dots & 0 & f_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n} - \lambda & f_n \\ f_2 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^n f_1 \det \begin{pmatrix} 0 & f_{2,2} - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f_{n,n} - \lambda \\ f_1 & f_2 & \dots & f_n \end{pmatrix} \\
& = (f_{1,1} - \lambda) \det \begin{pmatrix} f_{2,2} - \lambda & \dots & 0 & f_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n} - \lambda & f_n \\ f_2 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix} \\
& + (-1)^{2n-1} f_1^2 \det \begin{pmatrix} f_{2,2} - \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n} - \lambda \end{pmatrix} \\
& = (f_{1,1} - \lambda) \det \begin{pmatrix} f_{2,2} - \lambda & \dots & 0 & f_2 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & f_{n,n} - \lambda & f_n \\ f_2 & \dots & f_n & 0 \end{pmatrix} - f_1^2 \prod_{j \neq 1} (f_{j,j} - \lambda)
\end{aligned}$$

Da die Determinante bei einer Permutation der Koordinaten des \mathbb{R}^n unverändert bleibt, muß der Koeffizient von f_i^2 analog zu jenem von f_1^2 sein und andere Potenzen von f_i kommen nicht vor. Somit erhalten wir weiter

$$\begin{aligned}
& = - \sum_{i=1}^n f_i^2 \prod_{j \neq i} (f_{j,j} - \lambda) \\
& = - \left((-\lambda)^{n-1} \sum_i f_i^2 + (-\lambda)^{n-2} \sum_i f_i^2 \sum_{j \neq i} f_{j,j} + \dots + \sum_i f_i^2 \prod_{j \neq i} f_{j,j} \right).
\end{aligned}$$

Somit ist die Gauß-Krümmung

$$K = \prod_{i=1}^m K_i = \prod_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{|\operatorname{grad}_x f|} = \sum_i f_i^2 \prod_{j \neq i} f_{j,j} \left(\sum_i f_i^2 \right)^{-(1+\frac{m}{2})}$$

und die mittlere Krümmung

$$mH = \sum_{i=1}^m K_i = \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{|\operatorname{grad}_x f|} = \sum_i f_i^2 \sum_{j \neq i} f_{j,j} \left(\sum_i f_i^2 \right)^{-\frac{3}{2}}.$$

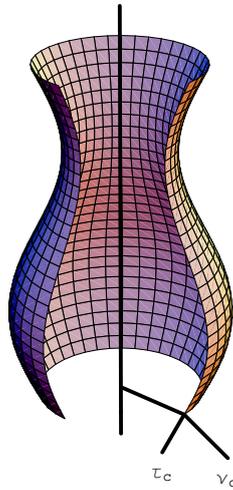
Speziell im \mathbb{R}^3 gilt, daß $h = (h^1, h^2, h^3)$ genau dann ein Hauptkrümmungsvektor ist, wenn $f'(x)h = \sum_i h^i f_i = 0$ und $\det(\operatorname{grad}_x f, h, \operatorname{Hess}_x f \cdot h) = 0$, denn

$$\begin{aligned}
& h = (h^1, h^2, h^3) \text{ ist ein Hauptkrümmungsvektor} \Leftrightarrow \\
& \Leftrightarrow h \in T_x M \text{ und } \{L_x h, h\} \text{ sind linear abhängig} \\
& \Leftrightarrow h \in T_x M \text{ und } L_x h \times h = 0 \\
& \Leftrightarrow h \in T_x M \text{ und } \langle L_x h \times h, \nu \rangle = \det(L_x h, h, \nu) = 0 \\
& \Leftrightarrow \sum_i h^i f_i = 0 \text{ und } 0 = \det(\nu, h, Lh) = \\
& = \det \left(\frac{\operatorname{grad} f}{|\operatorname{grad} f|}, h, \frac{1}{|\operatorname{grad} f|} \operatorname{Hess}_x f \cdot h + \mathbb{R} \cdot \operatorname{grad} f \right) \\
& = \frac{1}{(\operatorname{grad} f)^2} \det(\operatorname{grad} f, h, \operatorname{Hess}_x f \cdot h).
\end{aligned}$$

54. Drehflächen

54.1 Definition (Drehfläche)

Unter einer DREHFLÄCHE versteht man jenes Gebilde, das entsteht, wenn eine Kurve in der (x, z) -Ebene um die z -Achse gedreht wird. Sei also $c : s \mapsto (r(s), z(s))$ diese Kurve, von der wir annehmen dürfen, daß sie nach der Bogenlänge parametrisiert ist. Dann ist die davon erzeugte Drehfläche M durch $\{(r(s)x, z(s)) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R} : x \in S^{m-1}\}$ gegeben. Ist also speziell $m = 2$, so können wir S^1 durch $\theta \mapsto (\cos \theta, \sin \theta)$ parametrisieren und erhalten somit eine Parametrisierung $\varphi : (s, \theta) \mapsto (r(s) \cos \theta, r(s) \sin \theta, z(s))$ von M .



Wir wollen die Gauß-Krümmung berechnen. Die partiellen Ableitungen von φ sind

$$\begin{aligned} \left. \begin{aligned} \varphi_s(s, \theta) &= (r'(s) \cos \theta, r'(s) \sin \theta, z'(s)) \\ \varphi_\theta(s, \theta) &= (-r(s) \sin \theta, r(s) \cos \theta, 0) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} E &= r'(s)^2 + z'(s)^2 = 1 \\ F &= 0 \\ G &= r(s)^2 \end{aligned} \right\} \xrightarrow{\text{53.9}} \\ \Rightarrow K &= -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^2 (\sqrt{G}) = -\frac{1}{r(s)} \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^2 (r(s)) = -\frac{r''(s)}{r(s)}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun den Satz von Dupin [52.6](#) verwenden um die Krümmungslinien auf Drehflächen zu bestimmen. Sei dazu $c = (r, z) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ die nach Bogenlänge parametrisierte Kurve, welche durch Rotation die Drehfläche erzeugt. Es sei $\Psi(u^1, u^2) := c(u^1) + u^2 \nu(u^1) = (r(u^1) - u^2 z'(u^1), z(u^1) + u^2 r'(u^1))$, wobei ν die Einheitsnormale an c bezeichnet. Dann ist

$$\Psi_1(u^1, u^2) = c'(u^1) + u^2 \nu'(u^1) = (1 - u^2 K(u^1)) \tau(u^1) \perp \nu(u^1) = \Psi_2(u^1, u^2).$$

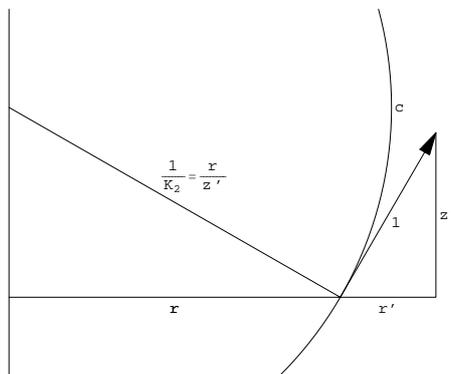
Folglich erfüllt $\Phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, gegeben durch

$$\begin{aligned} \Phi(u^1, u^2, u^3) &:= \\ &= ((r(u^1) - u^2 z'(u^1)) \cos(u^3), (r(u^1) - u^2 z'(u^1)) \sin(u^3), z(u^1) + u^2 r'(u^1)), \end{aligned}$$

die Voraussetzungen von [52.6](#). Damit sind sowohl die MERIDIANE $s \mapsto \Phi(s, 0, \theta) = \varphi(s, \theta)$ als auch die BREITENKREISE $\theta \mapsto \Phi(s, 0, \theta) = \varphi(s, \theta)$ Krümmungslinien. Ein Meridian ist der Schnitt von M mit einer Ebene durch die z -Achse. Die Schnittkrümmung in Richtung ξ des Meridians ist also gerade die Krümmung des Meridians bzw. der erzeugenden Kurve c , wenn wir als ν_M gerade $-\nu_c = (z', -r')$ wählen. Das dies eine Hauptkrümmung ist, sieht man übrigens auch direkt: Der Normalvektor an die Fläche in einem Punkt des Meridians liegt in dieser Ebene. Wenn wir ihn also in Richtung ξ des Meridians differenzieren, liegt das Resultat $L\xi$ wieder in der Ebene, muß also proportional zu ξ sein. Da c nach der Bogenlänge parametrisiert ist, gilt: $(r'', z'') = K_c(-z', r')$ und somit ist $K_1 := K(\xi) = -\frac{r''}{z'} = \frac{z''}{r'}$. Daß die Breitenkreise ebenfalls Krümmungslinien sind, folgt auch direkt daraus, daß sie normal auf die Meridiane stehen. Für die zweite Hauptkrümmung ergibt sich somit: $K_2 = \frac{K}{K_1} = \frac{z'}{r} = -\frac{r''r'}{z''r}$. Der Satz von Meusnier [52.4](#) liefert aber auch eine geometrische Methode die zweite Hauptkrümmung und damit die Gauß-Krümmung zu berechnen: Die Einheitsnormale an die Fläche ist bis auf eine Drehung um die z -Achse um den Winkel θ gerade $(z', 0, -r')$. Die Hauptnormale an den Breitenkreis ist der ebenso gedrehte Vektor $(-1, 0, 0)$. Die Krümmung des Breitenkreises ist $\frac{1}{r}$ und die Normalkrümmung in Richtung seiner Tangente also

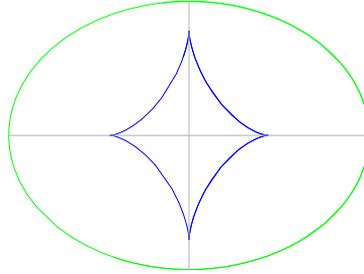
$$K_2 \stackrel{\text{52.4}}{=} -K_c \langle \mu_M, \nu_c \rangle = -\frac{1}{r} \langle (z', 0, -r'), (-1, 0, 0) \rangle = \frac{z'}{r}.$$

Die Nabelpunkte sind durch die Gleichung $K_1 = K_2$ gegeben, also durch $-\frac{r''}{z'} = \frac{z'}{r}$, oder äquivalent $-r''r = (z')^2 = 1 - (r')^2$. Geometrisch liegt der Krümmungsmittelpunkt der Schnittkurve mit der von ν_M und φ_θ erzeugten Ebene durch den Punkt $\varphi(s, 0)$ auf der Normalen $\nu_c(s)$ im Abstand $1/K_2 = \frac{r}{z'}$ also am Schnittpunkt mit der Drehachse. Es ist somit $\varphi(s, 0)$ (und damit $\varphi(s, \theta)$ für alle θ) ein Nabelpunkt genau dann, wenn diese Schnittpunkt auch der Krümmungsmittelpunkt von c an der Stelle s ist.



Z.B. sind die einzigen Nabelpunkte eines Rotationsellipsoids (das keine Kugel ist)

somit die Pole.



Asymptotenrichtungen $\xi = \xi^1 \varphi_s + \xi^2 \varphi_\theta$ auf einer Drehfläche sind durch

$$\begin{aligned} 0 = K(\xi) &= \langle \xi, L\xi \rangle = \langle \xi^1 \varphi_s + \xi^2 \varphi_\theta, \xi^1 K_1 \varphi_s + \xi^2 K_2 \varphi_\theta \rangle \\ &= (\xi^1)^2 K_1 E + (\xi^2)^2 K_2 G + \xi^1 \xi^2 (K_1 + K_2) F \\ &= K_1 (\xi^1)^2 + G K_2 (\xi^2)^2 \end{aligned}$$

gegeben. Für

$$\begin{aligned} 1 = |\xi|^2 &= \langle \xi^1 \varphi_s + \xi^2 \varphi_\theta, \xi^1 \varphi_s + \xi^2 \varphi_\theta \rangle \\ &= E(\xi^1)^2 + G(\xi^2)^2 + 2F\xi^1\xi^2 \\ &= (\xi^1)^2 + G(\xi^2)^2 \end{aligned}$$

und $K = K_1 K_2 < 0$ bedeutet dies

$$\begin{aligned} (\xi^1)^2 &= -\frac{K_2}{K_1} G (\xi^2)^2 = \frac{\frac{K_2}{K_1}}{-1 + \frac{K_2}{K_1}} = \frac{K_2}{K_2 - K_1} \\ (\xi^2)^2 &= \frac{1}{G} \frac{1}{1 - \frac{K_2}{K_1}} = \frac{1}{G} \frac{K_1}{K_1 - K_2}. \end{aligned}$$

54.2 Beispiel.

Wir betrachten den Torus mit Radius A der Seele und Radius $a < A$ der Meridiane. Dieser wird durch Rotation der bogenlängenparametrisierten Kurve

$$c(s) := \left(A, 0 \right) + a \left(\cos\left(\frac{s}{a}\right), \sin\left(\frac{s}{a}\right) \right)$$

erzeugt. Folglich ist die eine Hauptkrümmung $K_1 := \frac{1}{a} > 0$, die Gaußkrümmung

$$K = -\frac{r''(s)}{r(s)} = \frac{\cos(s/a)/a}{A + a \cos(s/a)},$$

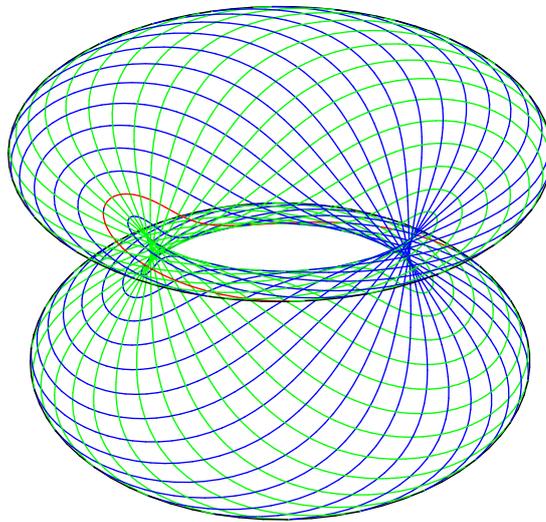
und schließlich die zweite Hauptkrümmung

$$K_2 := \frac{K}{K_1} = \frac{\cos(s/a)}{A + a \cos(s/a)} = \frac{1}{a + A/\cos(s/a)}.$$

Somit verschwindet die Gaußkrümmung am Nord- und am Südpolkreis ($s/a = \pm\pi/2$). Sie ist positiv auf dem äußeren Hemi-Torus (gegeben durch $|s/a| < \pi/2$)

und negativ am inneren. Am äußeren Hemi-Torus existieren keine Asymptotenrichtungen. Die Pol-Kreise sind Asymptotenlinien. In jedem Punkt des inneren Hemi-Torus existieren genau zwei Asymptotenrichtungen $\xi = \xi^1\varphi_s + \xi^2\varphi_\theta$ mit

$$\begin{aligned}(\xi^1)^2 &= \frac{K_2}{K_2 - K_1} = \frac{\frac{1}{a+A/\cos(s/a)}}{\frac{1}{a+A/\cos(s/a)} - \frac{1}{a}} = -\frac{a \cos(s/a)}{A} \\(\xi^2)^2 &= \frac{1}{G} \frac{K_1}{K_1 - K_2} \\ &= \frac{1}{A(A + a \cos(s/a))}\end{aligned}$$



54.3 Drehflächen konstanter Gauß-Krümmung

Um Drehflächen zu finden, die konstante Gauß-Krümmung $K = -\frac{r''}{r}(s)$ haben, müssen wir also das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}r''(s) + Kr(s) &= 0 \\ r'(s)^2 + z'(s)^2 &= 1\end{aligned}$$

lösen. Die erste Gleichung hat als lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung einen 2-dimensionalen linearen Lösungsraum.

Der Fall $K = 0$ ist nicht sehr interessant, denn dann ist $r'' = 0$, d.h. $r(s) = as + b$ und somit $z(s) = \sqrt{1 - a^2} s$. Also ist die Lösung ein Kegel für $0 < a < 1$ und in den degenerierten Fällen $a = 0$ ein Zylinder, bzw. für $a = 1$ eine Ebene.

Für $K \neq 0$ erhält man ein Erzeugendensystem durch den Ansatz $r(s) := e^{\lambda s}$, woraus sich $\lambda^2 = -K$ ergibt.

Betrachten wir zuerst den Fall $K > 0$, dann ist $s \mapsto e^{\pm i\sqrt{K}s}$ ein Erzeugendensystem der Lösungen. Die allgemeine reelle Lösung ist also $r : s \mapsto a \cos(\sqrt{K}s) +$

$b \sin(\sqrt{K}s)$. Wenn wir (a, b) in Polarkoordinaten darstellen, also

$$(a, b) =: r_0 \left(\cos(-\sqrt{K}s_0), \sin(-\sqrt{K}s_0) \right)$$

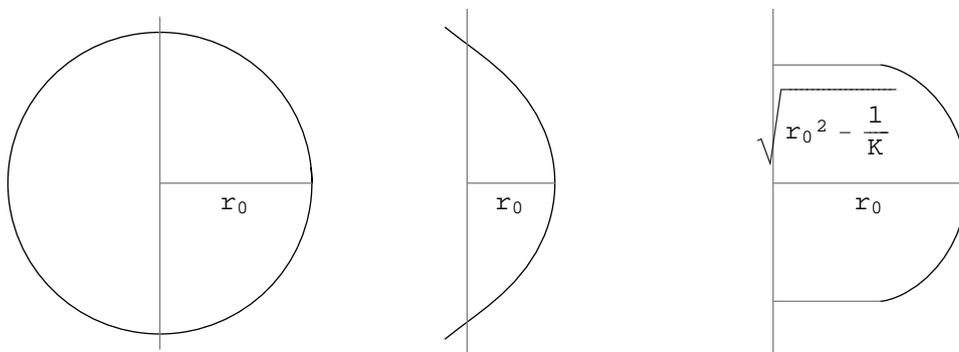
mit $r_0 \geq 0$ setzen, dann ist

$$r(s) = r_0 \cos(\sqrt{K}(s - s_0)).$$

O.B.d.A. ist $s_0 = 0$ (nach einer Zeitverschiebung) und $r_0 > 0$ (sonst parametrisiert φ keine Fläche). Folglich ist

$$z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - r'(\sigma)^2} d\sigma = \int_0^s \sqrt{1 - r_0^2 K \sin^2(\sqrt{K}\sigma)} d\sigma,$$

ein Legendre-Integral. Für $r_0^2 K = 1$ liefert das eine Kugel. Für $r_0^2 K > 1$ eine sogenannte WULSTFLÄCHE, und für $r_0^2 K < 1$ eine SPINDELFLÄCHE. Diese sind alle lokal isometrisch (siehe [60.1](#)), aber nicht ineinander durch Bewegungen überführbar.



Nun betrachten wir den Fall $K < 0$, dann ist $r(s) = ae^{\sqrt{-K}s} + be^{-\sqrt{-K}s}$ mit beliebigem a und b die allgemeine Lösung.

Falls $ab = 0$, so können wir durch eine Spiegelung der Zeitachse erreichen, daß $a = 0$ ist. Durch eine Zeitverschiebung um $-\ln(b)/\sqrt{-K}$ können wir $b = 1/\sqrt{-K}$ erreichen und durch eine Streckung um $\sqrt{-K}$ und gleichzeitige Umparametrisierung mit Faktor $1/\sqrt{-K}$ ist die Lösung dann

$$r(s) = e^{-s}, \text{ und somit } z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - e^{-2\sigma}} d\sigma \text{ für } s \geq 0.$$

Das ist die Bogenlängen-Parametrisierung der Traktrix. Die zugehörige Drehfläche heißt PSEUDOSPHERE. Man kann $z(s)$ wie folgt ausrechnen:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - e^{-2s}} ds &= \int -\sqrt{1 - r^2} \frac{dr}{r} \\ &= \int -\sqrt{1 - \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2} \frac{1+u^2}{2u} \frac{2(1-u^2)}{(1+u^2)^2} du \\ &= \int \frac{(1-u^2)^2}{u(1+u^2)^2} du = \int \frac{1}{u} - \frac{4u}{(1+u^2)^2} du \\ &= c + \ln u + \frac{2}{1+u^2} = c + \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1-r^2}}{r} \right) + 1 - \sqrt{1-r^2} \\ &= c + 1 + \operatorname{Arcosh}\left(\frac{1}{r}\right) - \sqrt{1-r^2}, \end{aligned}$$

$$\text{also } z(s) = \operatorname{Arcosh}\left(\frac{1}{r(s)}\right) - \sqrt{1-r(s)^2}$$

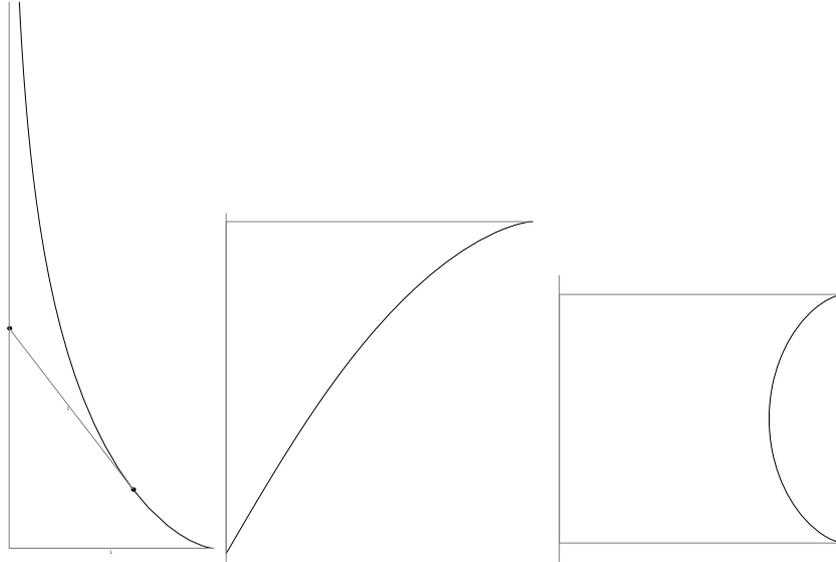
Im Fall $ab \neq 0$ kann man erreichen, daß $a = -b$ oder $a = b$ ist, indem wir s durch $s - c$ ersetzen: Dann ist $r(s - c) = a e^{-\sqrt{-K}c} e^{\sqrt{-K}s} + b e^{\sqrt{-K}c} e^{-\sqrt{-K}s}$ und mit $e^{2\sqrt{-K}c} := |\frac{a}{b}|$ ist $|a e^{-\sqrt{-K}c}| = |b e^{\sqrt{-K}c}|$.

Die entstehenden Flächen

$$r(s) := a \sinh(\sqrt{-K}s), \text{ und somit } z(s) := \int_0^s \sqrt{1 + a^2 K \cosh^2(\sqrt{-K}\sigma)} d\sigma;$$

$$r(s) := a \cosh(\sqrt{-K}s), \text{ und somit } z(s) := \int_0^s \sqrt{1 + a^2 K \sinh^2(\sqrt{-K}\sigma)} d\sigma$$

nennt man FLÄCHEN VOM KEGELTYP bzw. vom KEHLTYP.



54.4 Geodätische Koordinaten der Poincaré'schen Halbebene

Die POINCARÉ'SCHE HALBEBENE M ist die obere Halbebene $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ versehen mit der Riemann-Metrik $g : (ds)^2 = \frac{1}{y^2}((dx)^2 + (dy)^2)$.

Wir wollen geodätische Koordinaten für sie finden. In [58.6](#) werden wir eine Methode kennenlernen diese mittels Geodäten zu konstruieren. Es zeigt sich, daß die Geodäten die Kreise mit Mittelpunkt auf der x -Achse sind, also jene Kreise, die die x -Achse rechtwinklig schneiden. Die Kreise durch ∞ sind dabei die zur y -Achse parallele Geraden. Wir wollen letztere nach Bogenlänge parametrisieren. Sei also $c(t) := (x, t)$. Dann ist die Bogenlänge

$$s(t) = \int |c'(t)|_{c(t)} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln(t)$$

mit Umkehrfunktion $t(s) = e^s$. Als Parametrisierung von M verwenden wir nun

$$\varphi : (r, \theta) \mapsto (\theta, e^r).$$

Die Ableitung von φ ist somit

$$\varphi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ e^r & 0 \end{pmatrix}$$

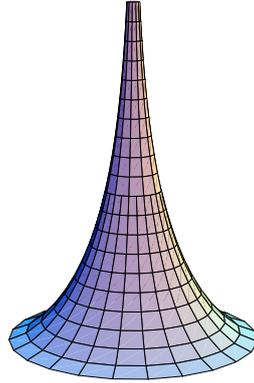
und für die Koeffizienten der Metrik erhalten wir:

$$E = g(\partial_r \varphi, \partial_r \varphi) = 1, \quad F = g(\partial_r \varphi, \partial_\theta \varphi) = 0, \quad G = g(\partial_\theta \varphi, \partial_\theta \varphi) = e^{-2r}.$$

Es gilt somit

$$\sqrt{G}(0, \theta) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{G}(0, \theta) = -1, \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \sqrt{G} = -1.$$

54.5 Geodätische Koordinaten der Pseudosphäre



Die Pseudosphäre ist die Drehfläche M die bei Rotation der Traktrik

$$\tau : \rho \mapsto z = \operatorname{Arcosh}\left(\frac{1}{\rho}\right) - \sqrt{1 - \rho^2} = \ln \frac{1 + \sqrt{1 - \rho^2}}{\rho} - \sqrt{1 - \rho^2} \text{ für } 0 < \rho \leq 1$$

um die z -Achse entsteht (siehe [54.3](#)). Die Bogenlängen-Parametrisierung der Traktrix ist durch $\rho = e^{-s}$ gegeben und beschreibt nach [57.3.4](#) eine Geodäte (einen Meridian) auf der Pseudosphäre. Geodätische Koordinaten erhalten wir somit durch:

$$\varphi(r, \theta) := (e^{-r} \cos \theta, e^{-r} \sin \theta, \tau(e^{-r})).$$

Die Ableitung von φ ist

$$\varphi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} -e^{-r} \cos \theta & -e^{-r} \sin \theta \\ -e^{-r} \sin \theta & e^{-r} \cos \theta \\ -e^{-r} \tau'(e^{-r}) & 0 \end{pmatrix}$$

und wegen $\tau'(\rho) = -\frac{\sqrt{1-\rho^2}}{\rho}$ sind die Koeffizienten der Metrik

$$E = \langle \partial_r \varphi, \partial_r \varphi \rangle = 1, \quad F = \langle \partial_r \varphi, \partial_\theta \varphi \rangle = 0, \quad G = \langle \partial_\theta \varphi, \partial_\theta \varphi \rangle = e^{-2r}$$

und somit wie in [54.4](#)

$$\sqrt{G}(0, \theta) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{G}(0, \theta) = -1, \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \sqrt{G} = -1.$$

Diese Koordinaten stimmen mit den in [54.4](#) konstruierten für die Poincaré'sche Halbebene überein, also erhalten wir wie folgt eine Isometrie der Teilmenge $\{(x, y) :$

$y \geq 1$ } der Poincaré'sche Halbebene auf die Pseudosphäre:

Poincaré'sche Halbebene \longrightarrow Pseudosphäre

$$\begin{array}{ccc} (x, y) & \longrightarrow & \left(\frac{\cos x}{y}, \frac{\sin x}{y}, \tau\left(\frac{1}{y}\right)\right) \\ & & \uparrow \\ (\theta, e^r) & \longrightarrow & (e^{-r} \cos \theta, e^{-r} \sin \theta, \tau(e^{-r})) \\ & \swarrow \quad \searrow & \\ & (r, \theta) & \end{array}$$

\mathbb{R}^2

Dies kann auch mit einer direkten Rechnung verifiziert werden.

54.6 Geodätische Koordinaten der hyperbolische Scheibe

Die hyperbolische Scheibe ist nach [34.6](#) die offene Einheitskreis $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ versehen mit der Riemann-Metrik

$$g : (ds)^2 = \frac{1}{(1 - (x^2 + y^2))^2} ((dx)^2 + (dy)^2).$$

Wieder wollen wir die Methode aus [58.6](#) verwenden um geodätische Koordinaten zu bestimmen. Es sind die Geodäten jene Kreise (und Geraden), die den Einheitskreis orthogonal treffen. Wir wollen die Geodäten durch 0 wieder nach Bogenlänge parametrisieren. Sei also $c(t) := (t, 0)$. Dann ist die Bogenlänge

$$s(t) = \int |c'(t)|_{c(t)} dt = \int \frac{dt}{1-t^2} = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+t}{1-t} \right)$$

mit Umkehrfunktion $t(s) = \frac{e^s - e^{-s}}{e^s + e^{-s}} = \tanh(s)$. Als Parametrisierung von \mathbb{D} verwenden wir somit

$$\varphi : (r, \theta) \mapsto (\theta, \tanh r) \mapsto (\tanh r \cos \theta, \tanh r \sin \theta).$$

Deren Ableitung ist

$$\varphi'(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta / \cosh^2 r & -\tanh r \cdot \sin \theta \\ \sin \theta / \cosh^2 r & \tanh r \cdot \cos \theta \end{pmatrix}$$

und für die Koeffizienten der Metrik erhalten wir:

$$E = g(\partial_r \varphi, \partial_r \varphi) = 1, \quad F = g(\partial_r \varphi, \partial_\theta \varphi) = 0, \quad G = g(\partial_\theta \varphi, \partial_\theta \varphi) = \cosh^2 r.$$

Es gilt somit

$$\sqrt{G}(0, \theta) = 1, \quad \frac{\partial}{\partial r} \sqrt{G}(0, \theta) = 0, \quad K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \sqrt{G} = -1.$$

Dies sind gerade die Koeffizienten einer Fläche von Kehltyp mit Koordinaten

$$r(s) := \frac{1}{2} (e^s + e^{-s}) = \cosh s \quad \text{und} \quad z(s) := \int_0^s \sqrt{1 - r'(\sigma)^2} d\sigma$$

aus [54.3](#). Also erhalten wir analog zu [54.5](#) eine Isometrie der hyperbolischen Scheibe mit einer Fläche von Kehltyp.

54.7 Eine andere Beschreibung der hyperbolischen Scheibe

Wir wollen die hyperbolische Scheibe nun durch einen Diffeomorphismus so verzerren, daß die Geodäten genau die Geraden werden. Dieser Diffeomorphismus soll die Scheibe invariant lassen und ihren Mittelpunkt und ihren Rand punktweise fix lassen. Dazwischen müssen wir also die Kreise die den Rand orthogonal treffen so deformieren, daß sie Geraden durch die gleichen Schnittpunkte mit den Rand werden. Eine elementar-geometrische Überlegung zeigt, daß dies in Polarkoordinaten durch $(r, \theta) \mapsto (\frac{2r}{1+r^2}, \theta)$ erreicht wird. Unseren gewünschten Diffeomorphismus erhalten wir also durch folgende Zusammensetzung:

$$\begin{array}{ccc}
 (r, \theta) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & (\frac{2r}{1+r^2}, \theta) \\
 \parallel & & \downarrow \text{kart. Koord.} \\
 (\sqrt{x^2 + y^2}, \arctan \frac{y}{x}) & & (\frac{2r}{1+r^2} \cos \theta, \frac{2r}{1+r^2} \sin \theta) \\
 \text{Pol. Koord.} \uparrow & & \parallel \\
 (x, y) & & (\frac{2x}{1+x^2+y^2}, \frac{2y}{1+x^2+y^2})
 \end{array}$$

Beachte noch, daß die Ableitung von $r \mapsto \frac{2r}{1+r^2}$ durch $r \mapsto \frac{2(1-r^2)}{(1+r^2)^2}$ und die Umkehrfunktion durch $\frac{1-\sqrt{1-r^2}}{r} \leftarrow r$ gegeben ist (die Wahl der Lösung der quadratische Gleichung ergibt sich dabei aus $r < \frac{2r}{1+r^2}$). Beachte aber, daß wir auf diese Weise keine geodätischen Koordinaten erhalten, denn dazu müßten wir die radialen Geodäten wie in [54.6](#) zurückparametrisieren.

54.8 Die Poincaré'sche Halbebene ist isomorph zur hyperbolischen Scheibe

Wir betrachten die Möbius-Transformation $\mu : z \mapsto (az + b)/(cz + d)$, die folgende speziellen Werte hat:

$$0 \mapsto -i, \quad i \mapsto 0, \quad \pm 1 \mapsto \pm 1, \quad \infty \mapsto i.$$

Aus diesen Gleichungen erhalten wir: $d = ib$, $b = -ia$, $c = -ia$ und wegen $1 = ad - bc = 2a^2$ schließlich $a = d = 1/\sqrt{2}$ und $b = c = -i/\sqrt{2}$, oder (wenn wir mit $i\sqrt{2}$ erweitern)

$$z \mapsto \frac{iz + 1}{z + i}.$$

Sie bildet die obere Halbebene auf die Einheitskreis ab. Ihre Umkehrfunktion ist durch $w \mapsto (w + i)/(iw + 1)$ gegeben. Wenn wir nun die hyperbolische Metrik auf \mathbb{D} mittels μ auf die obere Halbebene zurückziehen, so erhalten wir die Metrik:

$$|v|_z = |\mu'(z)v|_{\mu(z)} = \frac{|\mu'(z)|}{1 - |\mu(z)|^2} |v| = \frac{|v|}{i(\bar{z} - z)} = \frac{|v|}{2\Im(z)}.$$

Dies ist bis auf den Faktor $1/2$ die Metrik der Poincaré'schen Halbebene aus [54.4](#). Also ist die Poincaré'schen Halbebene isometrisch diffeomorph zur hyperbolischen Scheibe

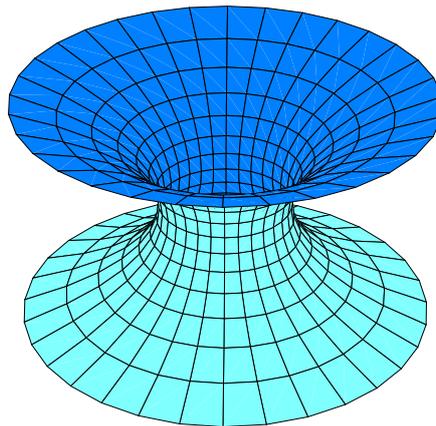
54.9 Minimale Drehflächen

Wir wollen jene Drehflächen bestimmen, die $H = 0$ erfüllen, also lokal minimale Oberfläche haben (siehe dazu Abschnitt [56](#)). Da die beiden Hauptkrümmungen

$-\frac{r''}{z'}$ und $\frac{z'}{r}$ sind, müssen wir das Differentialgleichungssystem $r''r = (z')^2 = 1 - (r')^2$ lösen. Dies ist äquivalent zu

$$\left(\frac{r^2}{2}\right)'' = rr'' + (r')^2 = 1 \text{ mit der allgemeinen Lösung } r(s)^2 = (s+a)^2 \pm b^2.$$

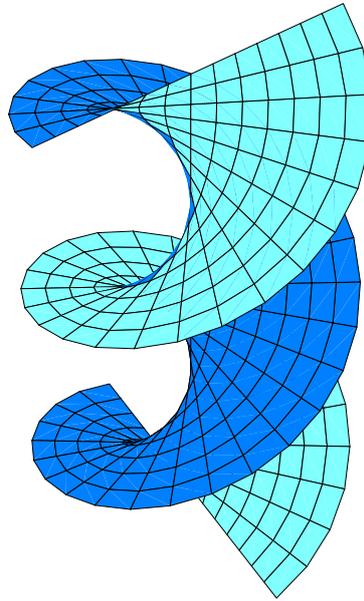
Nach Zeitverschiebung erhalten wir $a = 0$ und $2r(s)r'(s) = 2s$. Der Fall $-b^2$ kann nicht eintreten, denn dann ist $r'(s) = \frac{s}{r(s)} = \frac{s}{\sqrt{s^2-b^2}} > 1$ ein Widerspruch. Für $b = 0$ erhalten wir (nach einer Spiegelung) die Lösung $r(s) = s$ und $z(s) = 0$, eine Ebene. Für $r(s)^2 = s^2 + b^2$ mit $b > 0$ erhalten wir $z(s) = \int_0^s \sqrt{1 - r'(\sigma)^2} d\sigma = \int_0^s \sqrt{1 - \frac{\sigma^2}{\sigma^2+b^2}} d\sigma = \int_0^s \frac{b}{\sqrt{\sigma^2+b^2}} d\sigma = b \operatorname{Arsinh}(s/b)$, d.h. $s = b \sinh(z/b)$ und $r = b\sqrt{1 + \sinh^2(z/b)} = b \cosh(z/b)$. Dies ist also gerade die Bogenlängen-Parametrisierung der Kettenlinie $r/b = \cosh(z/b)$.



55. Regelflächen und Torsen

55.1 Definition (Regelflächen und Torsen)

Unter einer REGELFLÄCHE versteht man eine 2-Fläche, die sich lokal durch $\varphi : (s, \theta) \mapsto c(\theta) + s w(\theta)$ parametrisieren läßt, d.h. durch Transport der Gerade mit (sich ändernden) Richtungsvektor w längs der Kurve c . Damit φ regulär ist muß man offensichtlich voraussetzen, daß $\varphi_s(s, \theta) = w(\theta)$ und $\varphi_\theta(s, \theta) = c'(\theta) + s w'(\theta)$ linear unabhängig sind. Durch jeden Punkt einer Regelfläche geht also ein Geradenstück $s \mapsto c(\theta) + s w(\theta)$. Diese Gerade heißt ERZEUGENDE. Ist der Normalvektor längs jeder Erzeugenden konstant, so spricht man von einer TORSION.



55.2 Bemerkung

Wir wollen nun die Parametrisierung $\varphi : (s, \theta) \mapsto c(\theta) + s w(\theta)$ einer Regelfläche in 3 Schritten noch etwas verbessern.

1) O.B.d.A. $|w|=1$, denn

$$\bar{\varphi}(\bar{s}, \theta) := c(\theta) + \bar{s} \bar{w}(\theta) = \varphi(s, \theta)$$

mit $\bar{w}(\theta) := \frac{w(\theta)}{|w(\theta)|}, \quad \bar{s}(s, \theta) := s |w(\theta)|$

2) O.B.d.A. ist zusätzlich $c' \perp w$, denn

$$\bar{\varphi}(\bar{s}, \theta) := \bar{c}(\theta) + \bar{s} w(\theta) = \varphi(s, \theta)$$

mit $\bar{c}(\theta) := c(\theta) + g(\theta) w(\theta), \quad \bar{s}(s, \theta) := s - g(\theta),$

wobei $0 = \langle \bar{c}', w \rangle = \langle c' + g' w + g w', w \rangle = \langle c', w \rangle + g'$, d.h. $g(\theta) := g(0) - \int_0^\theta \langle c', w \rangle$.

3) O.B.d.A. ist zusätzlich $|c'| = 1$, denn

$$\bar{\varphi}(s, \bar{\theta}) := \bar{c}(\bar{\theta}) + s \bar{w}(\bar{\theta}) = \varphi(s, \theta)$$

mit $\bar{c}(\bar{\theta}) := c(\theta), \quad \bar{w}(\bar{\theta}) := w(\theta), \quad \bar{\theta}'(\theta) := |c'(\theta)|$

Alle diese Annahmen wollen wir im folgenden an die lokale Parametrisierung einer Regelfläche stellen.

55.3 Ein Begleitbein für c

Wir haben in jedem Punkt θ der Kurve c die Orthonormalbasis $(c'(\theta), w(\theta), \nu_{c(\theta)})$ des \mathbb{R}^3 . Dabei sei M so orientiert, daß diese Basis positiv orientiert ist. Wir wollen für das Begleitbein $(c', w, v := \nu \circ c)$ der Kurve c das Analogon zu den Frenetschen Ableitungsgleichungen herleiten, d.h. die Ableitungen dieser Vektoren in eben dieser Basis ausdrücken. Dazu beachten wir noch, daß $v'(\theta) = T\nu \cdot c'(\theta) = Lc'(\theta)$ ist, und rechnen:

$$\begin{aligned} 1 &= \langle w, w \rangle = \langle c', c' \rangle = \langle v, v \rangle \\ \Rightarrow 0 &= \langle w', w \rangle = \langle c'', c' \rangle = \langle v', v \rangle \\ \text{Sei } \begin{cases} p(\theta) & := \langle c'', w \rangle(\theta) = -\langle c', w' \rangle(\theta) \\ r(\theta) & := \langle c'', v \rangle(\theta) = -\langle c', v' \rangle(\theta) \\ q(\theta) & := \langle w', v \rangle(\theta) = -\langle w, v' \rangle(\theta) \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} c'' & = \langle c'', w \rangle w + \langle c'', v \rangle v = pw + rv \\ w' & = \langle w', c' \rangle c' + \langle w', v \rangle v = -pc' + qv \\ v' & = \langle v', c' \rangle c' + \langle v', w \rangle w = -rc' - qw \end{cases} \\ \text{Kurz also: } \frac{d}{d\theta} \begin{pmatrix} c' \\ w \\ v \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & p & r \\ -p & 0 & q \\ -r & -q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c' \\ w \\ v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Obige Rechnung läßt sich auch für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve c auf einer allgemeinen Fläche durchführen. Dann ist w ein tangentiales Einheitsvektorfeld, welches normal auf c' steht. Die Funktion p heißt dann auch GEODÄTISCHE KRÜMMUNG, r NORMALKRÜMMUNG und q RELATIVE TORSION von c .

Für unsere Parametrisierung bedeutet das:

$$\begin{aligned} \varphi &= c + s w \\ \varphi_s &= w \\ \varphi_\theta &= c' + s w' = c' + s(-pc' + qv) = (1 - sp)c' + sqv \\ \varphi_{s,s} &= 0 \\ \varphi_{s,\theta} &= w' = -pc' + qv \end{aligned}$$

Somit sind dies geodätische Koordinaten mit

$$\begin{aligned} E &= 1, \quad F = 0, \quad G = (1 - sp)^2 + (sq)^2, \quad D^2 = EG - F^2 = G \\ e &= -\frac{1}{D} \det(\varphi_s, \varphi_\theta, \varphi_{s,s}) = 0 \\ f &= -\frac{1}{D} \det(\varphi_s, \varphi_\theta, \varphi_{s,\theta}) = -\frac{1}{D} \begin{pmatrix} 0 & 1 - sp & -p \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & sq & q \end{pmatrix} = \frac{q}{D} \end{aligned}$$

Die Gauß-Krümmung einer Regelfläche ist somit

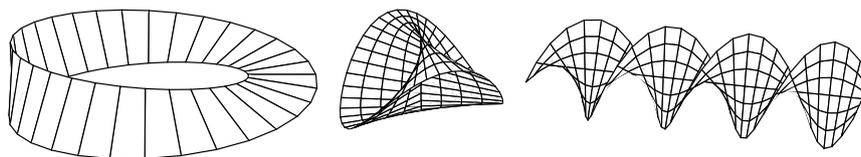
$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{q^2}{G^2} = -\frac{q^2}{((1 - sp)^2 + (sq)^2)^2} \leq 0.$$

Die Erzeuger $s \mapsto s w(\theta)$ sind als Geraden natürlich Asymptotenlinien.

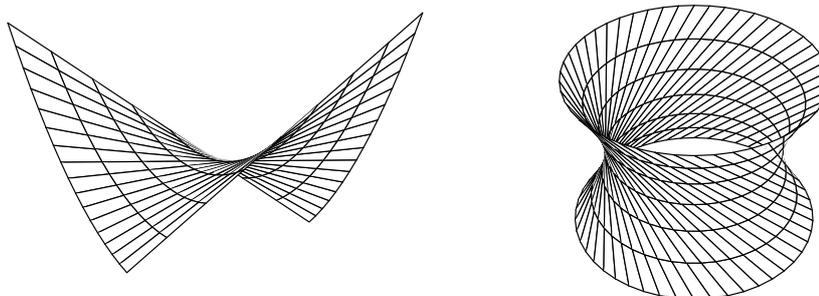
Beispiele.

Regelflächen sind z.B:

1. Möbiusband: $\varphi(s, \theta) := ((2 - s \sin \frac{\theta}{2}) \cos \theta, (2 - s \sin \frac{\theta}{2}) \sin \theta, s \cos \frac{\theta}{2})$.
2. Plückers Kegel: $z = \frac{xy}{x^2+y^2}$ mit Erzeuger $z = \text{konstant}$, d.h. $\frac{y}{x} = \frac{1}{z} \pm \sqrt{\frac{1}{z^2} - 1}$.
Bzw. parametrisiert durch $\varphi : (s, \theta) \mapsto (0, 0, \sin(2\theta)/2) + s \cdot (\cos \theta, \sin \theta, 0)$.
3. Helicoid oder Wendelfläche: $\tan \frac{z}{a} = \frac{y}{x}$ mit Erzeuger $z = \text{konstant}$, d.h. $\frac{y}{x} = \tan \frac{z}{a}$.

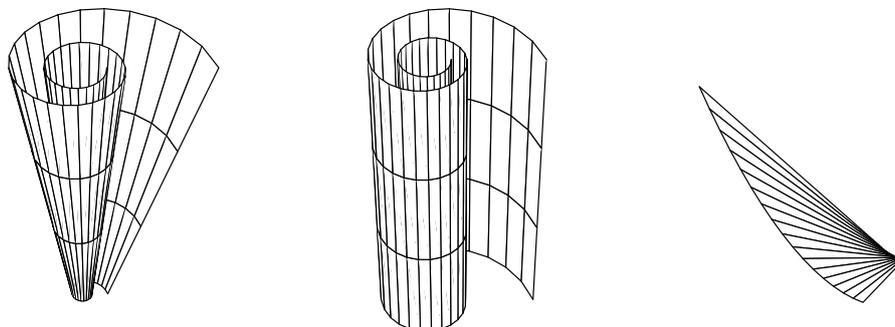


4. hyperbolisches Paraboloid: $z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$, oder parametrisiert durch $\varphi : (t, s) \mapsto (a(t+s), \pm b s, t^2 + 2t s)$
5. einschaliges Hyperboloid: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$, oder parametrisiert durch $\varphi : (t, s) \mapsto (a(\cos t \mp s \sin t), b(\sin t \pm s \cos t), \pm c s)$.



Beispiele von Torsen sind:

6. (verallgemeinerter) Kegel; parametrisiert durch $\varphi(s, \theta) := c_0 + s w(\theta)$ für $s \neq 0$ mit $w'(s) \times w(s) \neq 0$.
7. (verallgemeinerter) Zylinder; parametrisiert durch $\varphi(s, \theta) := c(\theta) + s w_0$ mit $w_0 \times c'(s) \neq 0$.
8. Tangentialfläche einer regulären Raum-Kurve c mit nirgends verschwindender Krümmung K_c ; parametrisiert durch $\varphi(s, \theta) := c(\theta) + s c'(\theta)$ für $s \neq 0$.



55.4 Satz (Charakterisierung von Torsen).

Für eine Regelfläche M , parametrisiert durch $\varphi(s, \theta) = c(\theta) + s w(\theta)$ mit $w \perp c'$ und $|w| = 1 = |c'|$, sind folgende Aussagen äquivalent:

1. M ist eine Torse;

2. $K = 0$;
3. Die relative Torsion $q(\theta) := \langle w'(\theta), v(\theta) \rangle = 0$ für alle θ ;
4. $L_{\varphi(s,\theta)} w(\theta) = 0$ für alle θ und $s (= 0)$;
5. $w(\theta)$ ist Hauptkrümmungsrichtung im Punkt $\varphi(s, \theta)$ für alle θ und $s (= 0)$;
6. $w'(\theta) \in T_{\varphi(s,\theta)}M$ für alle θ und $s (= 0)$;

Beweis. Es ist $\varphi_s = w$, $\varphi_\theta = (1 - sp)c' + sqv$ und somit

$$\nu_{\varphi(s,\theta)} = \frac{\varphi_\theta \times \varphi_s}{|\varphi_\theta \times \varphi_s|}(s, \theta) = \frac{(sp(\theta) - 1)v(\theta) + sq(\theta)c'(\theta)}{\sqrt{s^2q(\theta)^2 + (sp(\theta) - 1)^2}}$$

(1 \Leftrightarrow 3) Es bleibt ν genau dann konstant längs jedes Erzeugers, wenn $(\varphi_\theta \times \varphi_s)(s, \theta) = (sp(\theta) - 1)v(\theta) + sq(\theta)c'(\theta)$ konstante Richtung bei variierenden s hat, also wenn $(sq(\theta)) : (sp(\theta) - 1) = q(\theta) : (p(\theta) - \frac{1}{s})$ konstant in s ist, d.h. $q(\theta) = 0$ ist.

(3 \Leftrightarrow 2) Klar, da $K = -\left(\frac{q}{(1-sp)^2 + (sq)^2}\right)^2$ nach [55.3](#).

(1 \Rightarrow 4) $L_{\varphi(s,\theta)} w(\theta) = \frac{\partial}{\partial s} \nu(c(\theta) + sw(\theta)) = 0$.

(4 \Rightarrow 3) Klar, da $Lw \in TM$ und $\langle w, Lw \rangle = K(s \mapsto c(\theta) + sw(\theta)) = 0$. Also gilt $L_{\varphi(0,\theta)} \cdot w(\theta) = 0 \Leftrightarrow 0 = \langle Lw, c' \rangle = \langle w, Lc' \rangle = \langle w, v' \rangle = -\langle w', v \rangle = q$ wegen [55.3](#).

(4 \Leftrightarrow 5) Aus $Lw = \lambda w$ folgt $\lambda = \langle w, Lw \rangle = 0$, wie in (4 \Rightarrow 3)

(3 \Leftrightarrow 6) Es ist $w'(\theta) \in T_{\varphi(s,\theta)}M \Leftrightarrow 0 = \langle w'(\theta), (\varphi_\theta \times \varphi_s)(s, \theta) \rangle = \langle qv - pc', (sp - 1)v + sqc' \rangle = -q(\theta)$ für $s = 0$. \square

55.5 Folgerung (Verschwindende Gauß-Krümmung).

Eine Fläche ohne Nabelpunkte ist genau dann eine Torse, wenn die Gauß-Krümmung überall verschwindet.

Beweis. Da keine Nabelpunkte vorliegen existiert nach [53.6](#) eine Parametrisierung φ nach Krümmungslinien. Wegen $K = 0$ sei O.B.d.A. $0 = K_2\varphi_s = L \cdot \varphi_s$. Wir können φ noch mit einem Diffeomorphismus der Form $h_1 \times h_2$ umparametrisieren um für die neue Parametrisierung $|\varphi_t(t, 0)| = 1 = |\varphi_s(0, s)|$ zu erreichen. Wir behaupten, daß für diese nun $\varphi_{s,s} = 0$ gilt, also $\varphi(t, s) = \varphi(t, 0) + s\varphi_s(t, 0)$ eine Regelfläche beschreibt und wegen [55.4](#) ist diese sogar eine Torse.

Es ist $\nu_s = L \cdot \varphi_s = 0$ und $\langle \varphi_s | \nu \rangle = 0$ also $\langle \varphi_{s,s} | \nu \rangle = -\langle \varphi_s | \nu_s \rangle = 0$.

Weiters ist $\langle \varphi_t | \varphi_s \rangle = 0$ und $\nu_t = L \cdot \varphi_t = K_1\varphi_t \neq 0$. Somit ist $\langle \varphi_s | \nu_t \rangle = \langle \varphi_s | K_1\varphi_t \rangle = 0$, also

$$\langle \varphi_{s,s} | \varphi_t \rangle = \frac{1}{K_1} \langle \varphi_{s,s} | \nu_t \rangle = -\frac{1}{K_1} \langle \varphi_s | \nu_{s,t} \rangle = 0.$$

Schließlich folgt aus $|\varphi_s(s, 0)| = 1$ und $\langle \varphi_s | \varphi_s \rangle_t = 2\langle \varphi_s | \varphi_{s,t} \rangle = -2\langle \varphi_{s,s} | \varphi_t \rangle = 0$ und somit $\langle \varphi_s | \varphi_s \rangle = 1$, also auch $\langle \varphi_{s,s} | \varphi_s \rangle = 0$. \square

Bemerkung

Für Flächen mit Nabelpunkten ist obige Folgerung nicht gültig. Ein Beispiel einer Fläche mit $K = 0$, die aber keine Torse ist, findet sich in [51](#), S.53].

55.6 Lemma (Schmiegtorse).

Sei c eine Kurve in einer Fläche M , für welche es ein Vektorfeld w in TM längs c

gibt, mit $\mathbb{I}(c'(t), w(t)) = 0$ und $\{c'(t), w(t)\}$ linear unabhängig für alle t . Dann ist $(s, \theta) \mapsto c(\theta) + sw(\theta)$ eine Torse, die sogenannte SCHMIEGTORSE, da sie die Fläche längs c berührt.

Die Existenz so eines Vektorfelds w ist unter der Voraussetzung, daß $K(c'(t)) \neq 0$ für alle t , gewährleistet.

Beweis. Es sei $K(c'(t)) \neq 0$ für alle t . Sei \bar{w} ein Vektorfeld in TM längs c welches punktweise linear unabhängig von c' ist (also z.B. $\bar{w}(t) := c'(t) \times \nu(c(t))$). Wir machen den Ansatz $w(t) := \bar{w}(t) + \lambda(t)c'(t)$. Dann ist auch w punktweise linear unabhängig von c' und tangential an M . Schließlich ist $0 = \mathbb{I}(c'(t), w(t)) = \mathbb{I}(c'(t), \bar{w}(t) + \lambda(t)c'(t)) = \mathbb{I}(c'(t), \bar{w}(t)) + \lambda(t)K(c'(t))$ (also das gesuchte Vektorfeld w) genau dann, wenn $\lambda(t) = \frac{\mathbb{I}(c'(t), \bar{w}(t))}{K(c'(t))}$.

Sei nun w so ein Vektorfeld und o.B.d.A. $|c'(t)| = 1 = |w(t)|$. Dann parametrisiert $\varphi : (s, \theta) \mapsto c(\theta) + sw(\theta)$ für s nahe 0 eine Regelfläche, denn

$$\begin{aligned} \varphi_s(s, \theta) &= w(\theta) \text{ und } \varphi_\theta(s, \theta) = c'(\theta) + s w'(\theta) \\ &\Rightarrow \{\varphi_s(0, \theta), \varphi_\theta(0, \theta)\} \text{ ist linear unabhängig.} \end{aligned}$$

Diese Regelfläche ist sogar eine Torse, d.h. nach 55.4 $K = 0$, denn mit $v(t) := \nu(c(t))$ erhalten wir

$$\begin{aligned} e &= -\frac{1}{D} \det(\varphi_s, \varphi_\theta, \varphi_{s,s}) = -\frac{1}{D} \det(w, c' + s w', 0) = 0 \\ f &= -\frac{1}{D} \det(\varphi_s, \varphi_\theta, \varphi_{s,\theta}) = -\frac{1}{D} \det(w, c' + s w', w') \\ &= -\frac{1}{D} \det(w, c', \langle w'|v \rangle v) = \frac{\langle w|v' \rangle}{D} \det(w, c', v) = \frac{\mathbb{I}(w, c')}{D} \det(w, c', v) = 0 \\ \Rightarrow K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = 0. \end{aligned}$$

Oder kürzer: $q = \langle v, w' \rangle = -\langle v', w \rangle = -\langle (\nu \circ c)', w \rangle = -\langle Lc', w \rangle = -\mathbb{I}(c', w) = 0$. □

55.7 Folgerung.

Die tangential an eine Fläche M liegende Normale an eine nach der Bogenlänge parametrisierte Krümmungslinie c von M erzeugt eine Schmiegtorse.

Beweis. Für ein normales Tangentialvektorfeld w an c gilt $\mathbb{I}(c', w) = \langle Lc', w \rangle = K(c')\langle c', w \rangle = 0$. □

55.8 Proposition.

Eine Kurve c auf einer Fläche M ist genau dann eine Krümmungslinie, wenn $\varphi(s, \theta) := c(\theta) + s\nu(c(\theta))$ eine Torse parametrisiert.

Beweis. Offensichtlich parametrisiert φ eine Regelfläche mit $w(\theta) := \nu(c(\theta))$. Die Kurve c ist genau dann Krümmungslinie von M , wenn zu jedem θ ein λ existiert mit $L \cdot c'(\theta) = \lambda c'(\theta)$. Wegen $L \cdot c'(\theta) = (\nu \circ c)'(\theta) = w'(\theta)$ ist das genau dann der Fall, wenn $w'(\theta) \in TM$, da $\langle w', w \rangle = 0$, also nach 55.4 genau dann wenn φ eine Torse parametrisiert. □

Beispiel.

Für die Breitenkreise auf Drehflächen sind diese Torsen offensichtlich Kegel und für die Meridiane sind sie Ebenen.

55.9 Lemma (Generische Torsen).

Jede Torse ist in einer offenen und dichten Teilmenge lokal ein Zylinder, ein Kegel oder die Tangentialfläche an eine Kurve.

Beweis. Sei $\varphi(s, \theta) = c(\theta) + s w(\theta)$ eine lokale Parametrisierung einer Torse mit $|c'| = 1 = |w|$ und $c' \perp w$. Falls w lokal konstant ist, so ist M lokal ein Zylinder. Falls andernfalls $0 \neq w' (= qv - pc')$ gilt, so ist für Torsen $p = -\langle w', c' \rangle \neq 0$ wegen $q = 0$ nach [55.4](#). In diesem Fall versuchen wir die Regelfläche so umzuparametrisieren, daß $|c'| = 1 = |w|$ und $c' \perp w'$ gilt. Dazu machen wir den Ansatz $\bar{\varphi}(\bar{s}, \theta) = \bar{c}(\theta) + \bar{s} \bar{w}(\theta) = \varphi(s, \theta)$ mit $\bar{c}(\theta) := c(\theta) + g(\theta) w(\theta)$ und $\bar{s} = s - g(\theta)$, wobei

$$0 = \langle w'(\theta), \bar{c}'(\theta) \rangle = \underbrace{\langle w'(\theta), c'(\theta) \rangle}_{-p(\theta)} + g(\theta) \underbrace{\langle w'(\theta), w(\theta) \rangle}_{p(\theta)^2 + q(\theta)^2} + g'(\theta) \underbrace{\langle w'(\theta), w(\theta) \rangle}_0,$$

d.h. $g := \frac{p}{p^2 + q^2}$. Die Kurve \bar{c} heißt auch Striktionslinie der Regelfläche.

Wir können nun noch wie in [55.2](#) erreichen, daß $|\bar{c}'| = 1$ gilt.

Für jede Torse gilt $q = 0$ nach [55.4](#). Somit ist $\bar{c}(\theta) = c(\theta) + \frac{1}{p(\theta)} w(\theta)$ und

$$\bar{c}'(\theta) = c'(\theta) + \frac{1}{p(\theta)} \underbrace{w'(\theta)}_{p(\theta) c'(\theta)} - \frac{p'(\theta)}{p(\theta)^2} w(\theta) = -\frac{p'(\theta)}{p(\theta)^2} w(\theta)$$

Es ist also die Striktionslinie \bar{c} genau dann konstant und somit M lokal ein (verallgemeinerter) Kegel, wenn $p' = 0$ gilt. Falls andererseits p' lokal nicht verschwindet, dann ist \bar{c} regulär und \bar{c}' proportional zu w , also M lokal die Tangentialfläche zu \bar{c} . Die Menge der θ , wo eine der folgenden drei Bedingungen gilt, ist offensichtlich offen und auch dicht,

1. $p = 0$ lokal (dann ist M lokal ein verallgemeinerter Zylinder);
2. $0 \neq p$ lokal konstant (dann ist M lokal ein verallgemeinerter Kegel);
3. $p(\theta) p'(\theta) \neq 0$ (dann ist M lokal eine Tangentialfläche):

Falls nämlich eine Umgebung von θ_0 im Komplement dieser Menge liegt, so ist $pp' = 0$ lokal und somit, falls $p(\theta) \neq 0$ ist, $p' = 0$ lokal um θ , d.h. p lokal konstant wäre, ein Widerspruch. \square

55.10 Taille, Striktions- oder Kehl-Linie

Wir wollen nun noch andere Beschreibungen der Striktionslinie aus [55.9](#) einer nicht zylindrischen Regelfläche geben. Es seien zwei windschiefe Geraden $t \mapsto a_j + tw_j$ für $j = 0, 1$ gegeben, d.h. $w_1 \times w_2 \neq 0$. Der Abstand zweier Punkte mit Parameter t_0 und t_1 auf ihnen ist

$$d(t_0, t_1) := |a_0 - a_1 + t_0 w_0 - t_1 w_1|.$$

Der kritische Wert muß

$$0 = \frac{d}{dt_0} d(t_0, t_1)^2 = \langle a_0 - a_1 + t_0 w_0 - t_1 w_1, w_0 \rangle \quad \text{und}$$

$$0 = \frac{d}{dt_1} d(t_0, t_1)^2 = \langle a_0 - a_1 + t_0 w_0 - t_1 w_1, w_1 \rangle$$

erfüllen. Wegen

$$\det \begin{pmatrix} \langle w_0, w_0 \rangle & -\langle w_1, w_0 \rangle \\ \langle w_0, w_1 \rangle & -\langle w_1, w_1 \rangle \end{pmatrix} = -(\langle w_0, w_0 \rangle \langle w_1, w_1 \rangle - \langle w_0, w_1 \rangle^2) = -|w_0 \times w_1|^2 \neq 0$$

existiert eine eindeutige Lösung und zwar ist

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\langle v_0, a_0 - a_1 \rangle \langle v_1, v_1 \rangle - \langle v_1, a_0 - a_1 \rangle \langle v_0, v_1 \rangle}{\langle w_0, w_1 \rangle^2 - \langle w_0, w_0 \rangle \langle w_1, w_1 \rangle} \\ &= \frac{\langle \langle v_1, v_1 \rangle v_0 - \langle v_0, v_1 \rangle v_1, a_0 - a_1 \rangle}{|w_0 \times w_1|^2} \\ &= \frac{\langle v_1 \times (v_0 \times v_1), a_0 - a_1 \rangle}{|w_0 \times w_1|^2} = \frac{\det(v_1, v_0 \times v_1, a_0 - a_1)}{|w_0 \times w_1|^2}. \end{aligned}$$

Sei nun $\varphi : (s, \theta) \mapsto c(\theta) + s w(\theta)$ Parametrisierung eine Regelfläche mit $|w| = 1$ und $w'(\theta) \neq 0$. Dann ist der Punkt auf dem Erzeuger durch $c(\theta)$ der vom Erzeuger $c(\theta + \varepsilon)$ minimalen Abstand hat, durch

$$c(\theta) - \frac{\det(w(\theta + \varepsilon), w(\theta) \times w(\theta + \varepsilon), c(\theta + \varepsilon) - c(\theta))}{|w(\theta) \times w(\theta + \varepsilon)|^2} w(\theta)$$

gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(w(\theta + \varepsilon), w(\theta) \times w(\theta + \varepsilon), c(\theta + \varepsilon) - c(\theta))}{|w(\theta) \times w(\theta + \varepsilon)|^2} &= \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\det(w(\theta + \varepsilon), w(\theta) \times \frac{w(\theta + \varepsilon) - w(\theta)}{\varepsilon}, \frac{c(\theta + \varepsilon) - c(\theta)}{\varepsilon})}{|w(\theta) \times \frac{w(\theta + \varepsilon) - w(\theta)}{\varepsilon}|^2} \\ &= \frac{\det(c'(\theta), w(\theta), w(\theta) \times w'(\theta))}{|w(\theta) \times w'(\theta)|^2} = \frac{\langle c'(\theta) \times w(\theta), w(\theta) \times w'(\theta) \rangle}{|w(\theta) \times w'(\theta)|^2} \\ &= \frac{\langle c'(\theta), w(\theta) \rangle \langle w(\theta), w'(\theta) \rangle - \langle c'(\theta), w'(\theta) \rangle \langle w(\theta), w(\theta) \rangle}{|w(\theta) \times w'(\theta)|^2} \\ &= - \frac{\langle c'(\theta), w'(\theta) \rangle}{|w(\theta) \times w'(\theta)|^2} \end{aligned}$$

Dabei haben wir die Identitäten:

$$\begin{aligned} \det(a, b, c) &= \langle a \times b, c \rangle \\ a \times (b \times c) &= \langle a, c \rangle b - \langle a, b \rangle c \\ \langle a \times b, c \times d \rangle &= \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle \end{aligned}$$

verwendet. Dabei folgt die erste Gleichung durch Interpretation als Volumen des Parallelepipedes; die zweite, da $a \times (b \times c)$ normal auf $b \times c$ und damit im Erzeugnis $\langle \{b, c\} \rangle$ liegt; die dritte durch

$$\begin{aligned} \langle a \times b, c \times d \rangle &\stackrel{(1)}{=} \det(a, b, c \times d) = \det(b, c \times d, a) \stackrel{(1)}{=} \langle b \times (c \times d), a \rangle \\ &\stackrel{(2)}{=} \langle \langle b, d \rangle c - \langle b, c \rangle d, a \rangle = \langle a, c \rangle \langle b, d \rangle - \langle a, d \rangle \langle b, c \rangle. \end{aligned}$$

Der Grenzpunkt

$$c(\theta) - \frac{\langle c', w' \rangle}{|w \times w'|^2}(\theta) w(\theta) = c(\theta) + \frac{p(\theta)}{p(\theta)^2 + q(\theta)^2} w(\theta)$$

heißt der ZENTRALE PUNKT am Erzeuger. Die Verbindungskurve der zentralen Punkte ist genau die Striktionslinie.

Wir wollen nun die Punkte der Erzeuger mit minimaler Gauß-Krümmung $K = -(q/((1 - sp)^2 + (sq)^2))^2$ bestimmen. Dazu müssen wir $s(\theta)$ so bestimmen, daß der Nenner $1 - 2sp(\theta) + s^2(p(\theta)^2 + q(\theta)^2) \geq 0$ möglichst klein wird, d.h. $s(\theta) =$

$p(\theta)/p(\theta)^2 + q(\theta)^2$. Diese Punkte sind also genau die zentralen Punkte und für die Gauß-Krümmung in diesen Punkten gilt:

$$\begin{aligned} K &= - \left(\frac{q}{\left(1 - \frac{p^2}{p^2+q^2}\right)^2 + \left(\frac{pq}{p^2+q^2}\right)^2} \right)^2 = - \left(\frac{q(p^2+q^2)^2}{q^4+p^2q^2} \right)^2 \\ &= - \left(\frac{p(\theta)^2 + q(\theta)^2}{q(\theta)} \right)^2 \end{aligned}$$

Insgesamt haben wir also folgendes Theorem gezeigt:

55.11 Theorem (Kehllinie).

Die Gauß-Krümmung einer Regelfläche mit $w'(\theta) \neq 0$ ist auf den Erzeugern genau in den zentralen Punkten von maximalem Betrag und zwar $K = - \left(\frac{p(\theta)^2 + q(\theta)^2}{q(\theta)} \right)^2$. Die zentralen Punkte sind gegeben durch:

$$c(\theta) + \frac{p(\theta)}{p^2(\theta) + q^2(\theta)} w(\theta),$$

und sind genau jene Punkte x , wo $w' \perp T_x M$, bzw. jene, die infinitesimal von benachbarten Erzeugern minimalen Abstand haben. \square

55.12 Satz Chasle 1839.

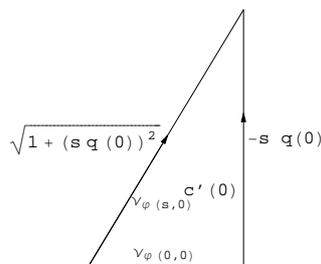
Sei M eine Regelfläche, $c(0)$ der zentrale Punkt, dann gilt

$$\tan \angle(\nu_{c(0)}, \nu_{c(0)+s w(0)}) = -s q(0).$$

Es ist also der Anstieg der Normalen relativ zur Normalen im zentralen Punkt proportional zur Distanz vom zentralen Punkt.

Beweis. Sei also $x := c(0)$ ein zentraler Punkt.

$$\begin{aligned} w'(0) \perp T_x M &\Rightarrow 0 = \langle w', \varphi_\theta \rangle = \langle w', c' \rangle = -\langle w, c'' \rangle = -p \\ &\Rightarrow \varphi_\theta(s, 0) = c'(0) + s q(0) v(0) \\ &\Rightarrow \nu_{\varphi(s,0)} = \frac{\varphi_s \times \varphi_s}{|\varphi_\theta \times \varphi_s|} (s, 0) \\ &= \frac{1}{|c'(0) + s q(0) v(0)|} w(0) \times (c'(0) + s q(0) v(0)) \\ &= \frac{1}{1 + s^2 q^2(0)} (\nu_{c(0)} - s q(0) c'(0)) \\ &\Rightarrow \sqrt{1 + s^2 q^2(0)} \nu_{\varphi(s,0)} = \nu_{c(0)} - s q(0) c'(0) \\ &\Rightarrow \tan \angle(\nu_{\varphi(0,0)}, \nu_{\varphi(s,0)}) = -s q(0) \quad \square \end{aligned}$$



56. Minimalflächen

56.1 Definition (Minimalfläche)

Eine Fläche heißt MINIMALFLÄCHE, falls sie (lokal) ein kritischer Punkt für die Oberfläche ist, d.h. wenn wir sie nur lokal (bzw. auf einem kompakten Teil) variieren. Wir brauchen also nicht die gesamte Oberfläche (die unendlich sein kann), sondern nur jenen Teil, der sich ändert, betrachten.

Nach [57, 8.1.5] ist die Oberfläche einer durch Parametrisierung $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq K \rightarrow M \subseteq \mathbb{R}^3$ mit kompakten J -meßbaren K durch

$$\text{vol}(M) := \int_K \|\partial_1 \varphi \times \partial_2 \varphi\|$$

gegeben, also

$$\begin{aligned} \text{vol}(M) &:= \int_K \sqrt{\|\partial_1 \varphi\|^2 \|\partial_2 \varphi\|^2 - \langle \partial_1 \varphi, \partial_2 \varphi \rangle^2} = \int_K \sqrt{EG - F^2} \\ &= \int_K \sqrt{\det((g_{i,j})_{i,j \in \{1,2\}})}, \end{aligned}$$

wobei $g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle$ die Koeffizienten der ersten Fundamentalform mit $g_i := \partial_i \varphi$ sind. Allgemeiner gilt für parametrisierte Hyperflächen $M \subseteq \mathbb{R}^n$, daß ihr $n - 1$ -dimensionales Volumen durch

$$\text{vol}(M) = \int_K \sqrt{\det((g_{i,j})_{i,j})}$$

gegeben ist.

56.2 Satz, [65].

Eine Fläche ist genau dann eine Minimalfläche, wenn $H = 0$.

Beweis. Das vorliegende Variationsproblem besteht also darin, die lokalen Minima der Funktion $M \mapsto \text{vol}(M) := \int_M \text{vol}_M \in \mathbb{R}$ zu bestimmen. Sei die Fläche M ein kritischer Punkt dieses Funktionals. Jede in der Nähe von M liegende Fläche läßt sich per Definition als $\{x + f(x)\nu(x) : x \in M\}$ mit einer reellwertigen glatten Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompakten Träger darstellen. Somit muß $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{t=0} \text{vol}(M^t) = 0$

sein, wobei M^t die Fläche $\{x + t f(x)\nu(x)\}$ ist. Dazu müssen wir $\frac{d}{dt} \Big|_0 \text{vol}_{M^t}$ bestimmen. Wir wählen eine lokale Parametrisierung $\varphi : U \rightarrow M$ von M mit zugehörigen lokalen Koordinaten (u^1, \dots, u^m) . Eine lokale Parametrisierung von M^t ist dann $\varphi^t(u) = \varphi(u) + t f(\varphi(u))\nu(\varphi(u))$. Lokal ist

$$\text{vol}_{M^t} = \sqrt{\det(g_{i,j}^t)} du^1 \wedge \dots \wedge du^m,$$

wobei

$$g_i^t := \partial_i \varphi^t = \partial_i \varphi + t \left(\partial_i (f \circ \varphi) \cdot (\nu \circ \varphi) + (f \circ \varphi) \cdot \partial_i (\nu \circ \varphi) \right)$$

und $g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle$. Also ist

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 g_i^t = \left(\partial_i (f \circ \varphi) \cdot (\nu \circ \varphi) + (f \circ \varphi) \cdot L(\partial_i \varphi) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot \nu + f \cdot L(g_i) \right)$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_0 g_{i,j}^t &= \langle g_i, \frac{d}{dt} \Big|_0 g_j^t \rangle + \langle \frac{d}{dt} \Big|_0 g_i^t, g_j \rangle \\ &= f \cdot \left(\langle L(\partial_i \varphi), \partial_j \varphi \rangle + \langle \partial_i \varphi, L(\partial_j \varphi) \rangle \right) =: 2f h_{i,j}, \end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_0 \sqrt{\det(g_{i,j}^t)} &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\det(g_{i,j})}} \det(g_{i,j}) \text{spur} \left((g_{i,j})^{-1} \left(\frac{d}{dt} \Big|_0 g_{i,j}^t \right) \right) \\ &= \sqrt{\det(g_{i,j})} (f \circ \varphi) \text{spur} \left((g_{i,j})^{-1} (h_{i,j}) \right) \\ &= \sqrt{\det(g_{i,j})} (f \circ \varphi) \text{spur} L \\ &= m \sqrt{\det(g_{i,j})} (f \circ \varphi) H. \end{aligned}$$

Dabei haben wir verwendet, daß $\det'(A)(B) = \det A \cdot \text{spur}(A^{-1}B)$. Also:

$$\frac{d}{dt} \Big|_0 \text{vol}_{M^t} = m f H \text{vol}_M$$

Schlußendlich gilt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{vol}(M^t) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \int \text{vol}_{M^t} = \int \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \text{vol}_{M^t} \\ &= m \int_M f H \text{vol}_M. \end{aligned}$$

Soll das für alle in der Nähe von M liegenden Flächen gelten, d.h. für alle $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, so muß $H = 0$ sein (wähle $f = H$) und umgekehrt. \square

56.3 Plateausches Problem

Sei $c : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine einfachgeschlossene rektifizierbare Kurve. Gesucht ist eine Minimal-Fläche $\varphi : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit $\varphi(S^1) = c(S^1)$. Rado Douglas 1930 haben gezeigt, daß es eine Lösung mit eventuellen, isolierten Singularitäten gibt. [80] zeigte, daß die absoluten Minima keine Singularitäten besitzen. Nach [41] ist φ auch am Rand differenzierbar, falls c differenzierbar ist.

Folgendes Lemma stellt einen, wegen der Schwingungsgleichung erwarteten, Zusammenhang zwischen Minimalflächen und dem Laplaceoperator her.

56.4 Lemma (Minimalfläche via isothermale Koordinaten).

Eine Fläche M ist genau dann eine Minimalfläche, wenn alle Komponenten einer (jeder) isothermalen Parametrisierung φ harmonisch sind.

Beweis. Eine isothermale Parametrisierung erfüllt $E = G$, $F = 0$. Also ist

$$\begin{aligned} 2H &= \frac{Ge - 2Ff + Eg}{EG - F^2} = \frac{E(e + g)}{E^2} = \frac{e + g}{E}. \\ \langle \varphi_1, \varphi_1 \rangle &= E = G = \langle \varphi_2, \varphi_2 \rangle \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi_{1,1}, \varphi_1 \rangle = \langle \varphi_{2,1}, \varphi_2 \rangle. \\ \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle &= F = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle \varphi_{1,2}, \varphi_2 \rangle = -\langle \varphi_1, \varphi_{2,2} \rangle. \\ \Rightarrow \quad \langle \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2}, \varphi_1 \rangle &= 0 \text{ und analog } \langle \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2}, \varphi_2 \rangle = 0. \\ \Rightarrow \quad \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2} &= \lambda\nu \text{ und } e + g = -\langle \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2}, \nu \rangle = -\langle \lambda\nu, \nu \rangle = -\lambda. \\ \Rightarrow \quad \Delta\varphi := \varphi_{1,1} + \varphi_{2,2} &= -(e + g)\nu = -2HE\nu \text{ mit } E = |\varphi_1|^2 = |\varphi_2|^2 > 0. \end{aligned}$$

Daraus folgt nun $H = 0 \Leftrightarrow \Delta\varphi = 0$. \square

Das führt natürlich in die komplexe Analysis, denn eine lokal definierte Funktion $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist genau dann harmonisch, wenn sie der Realteil (oder äquivalent der Imaginärteil) einer holomorphen Funktion $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist.

56.5 Lemma (konforme Gaußabbildung).

Die Gauß-Abbildung einer zusammenhängenden Fläche ist genau dann konform, wenn M eine Sphäre oder eine Minimalfläche ist.

Beweis. (\Leftarrow) Falls M Teil einer Sphäre ist, so ist die Gaußabbildung proportional zur Identität, also konform.

Sei M eine Minimal-Fläche, d.h. $H = 0$. Dann gilt für die Hauptkrümmungen $K_1 = -K_2$, und somit ist $K \leq 0$. Nun benutzen wir die charakteristische Gleichung $L^2 - 2HL + K \text{ id} = 0$ für L . Also ist $L^2 = -K \cdot \text{id}$, d.h. $\langle Lv, Lw \rangle = -K \langle v, w \rangle$, und somit ist die Gaußabbildung konform.

(\Rightarrow) Sei umgekehrt die Gaußabbildung konform, d.h. $\langle Lv, Lw \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$, i.e. $L^2 = \lambda \cdot \text{id}$. Also gilt $2HL = (K + \lambda) \cdot \text{id}$ wegen der charakteristischen Gleichung von L . Falls in einem Punkt $H \neq 0$ ist, dann ist $L = (K + \lambda)/H \cdot \text{id}$, d.h. auf der Menge $H \neq 0$ sind alle Punkte Nabelpunkte, also muß nach [52.5](#) M dort Teil einer Sphäre (oder eine Ebene) sein, und somit H konstant sein. Falls H konstant 0 ist, so liegt eine Minimalfläche vor. \square

56.6 Historisches über Minimalflächen

In Lagrange 1760 wurden erstmals Minimalflächen betrachtet, und zwar waren dies solche, die Graph einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sind. Die Minimalflächen charakterisierende Differentialgleichung ist dann

$$f_{x,x}(1 + f_y^2) - 2f_x f_y f_{x,y} + f_{y,y}(1 + f_x^2) = 0.$$

Dann zeigte [\[65\]](#), daß eine Fläche genau dann minimal ist, wenn ihre mittlere Krümmung verschwindet. Er fand auch heraus, daß die einzigen Minimalflächen mit Geraden als Niveaulinien die Ebene und die Wendelfläche sind, und daß die einzige minimale Drehfläche durch die Kettenlinie entsteht, also das Katenoid, gegeben durch $\varphi(t, s) = (a \cosh s \cos t, a \cosh s \sin t, bs)$, ist.

[85] suchte nach Funktionen $z = f(x, y) = g(x) + h(y)$, deren Graph eine Minimalfläche ist und fand $g(x) = -\frac{1}{a} \ln \cos ax$, $h(y) = \frac{1}{a} \ln \cos ay$ und somit $f(x, y) = \frac{1}{a} \ln \left(\frac{\cos ay}{\cos ax} \right)$: In der Tat ist

$$f_{x,x} = g'', \quad f_{x,y} = 0, \quad f_{y,y} = h''$$

für $f(x, y) := g(x) + h(y)$ und somit ist die obige Differentialgleichung

$$g''(x)(1 + h'(y)^2) + h''(y)(1 + g'(x)^2) = 0$$

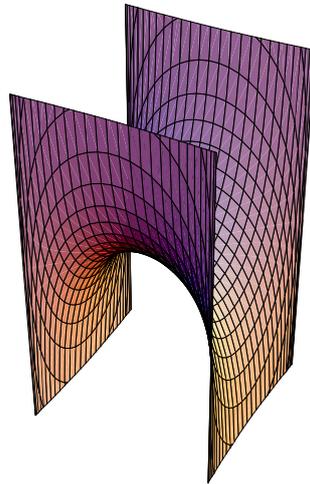
Also ist

$$\frac{g''(x)}{1 + g'(x)^2} = a = -\frac{h''(y)}{1 + h'(y)^2},$$

für eine Konstante a , also

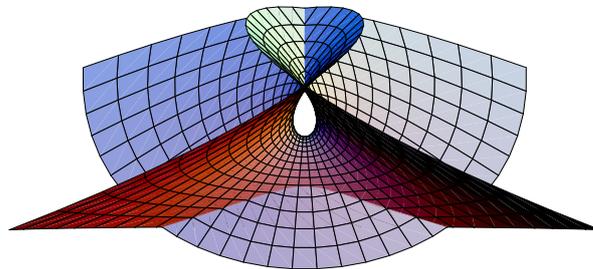
$$g(x) = -\frac{1}{a} \log \cos(ax)$$

$$h(y) = \frac{1}{a} \log \cos(ay)$$



Ein weiteres Beispiel einer Minimalfläche ist Enneper's Fläche

$$(u, v) \mapsto \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$



[13] gelang es schließlich zu zeigen, daß die Wendelfläche die einzige Minimalfläche ist, die eine Regelfläche ist.

[98] fand die erste allgemeine Konstruktion für Minimalflächen.

[8] zeigte, daß der Graph einer auf ganz \mathbb{R}^2 definierten Funktion nur dann eine Minimalfläche ist, wenn er eine Ebene ist.

[101] konnte schließlich zeigen, daß die Gaußabbildung einer Minimalfläche, die nicht eine Ebene ist, höchstens 6 Punkte auf der S^2 ausläßt. Ennepers Fläche läßt einen aus. Das Katenoid 2, Scherk's Fläche 4, und es gibt auch Beispiele (Chen's und Voss's Fläche), wo die Gaußabbildung keinen bzw. 3 Punkte ausläßt. Ob es ein Beispiel für 5 bzw. 6 ausgelassene Punkte wirklich gibt, ist unbekannt.

Für dies und vieles andere mehr siehe [4].

Für das folgende siehe auch [6, S.431]: Sei M eine Riemann-Fläche, $\nu : M \rightarrow S^2$ eine meromorphe Funktion und ω eine meromorphe 1-Form auf M . Wir setzen

$$\begin{aligned}x(p) &:= \Re \int_{p_0}^p (1 - \nu^2(z)) \omega(z) \\y(p) &:= \Re \int_{p_0}^p i(1 + \nu^2(z)) \omega(z) \\z(p) &:= \Re \int_{p_0}^p 2\nu(z) \omega(z)\end{aligned}$$

Dann ist $p \mapsto (x(p), y(p), z(p))$ eine Immersion $M \rightarrow \mathbb{R}^3$, deren Bild eine immerisierte Minimalfläche ist. Jede immerisierte Minimalfläche läßt sich so erhalten: Die geometrische Bedeutung von ν ist die der stereographischen Projektion der Gaußabbildung. Die Gauß-Krümmung ist

$$\int_M K \operatorname{vol}_M = \text{Fläche}(\nu(M))$$

[78]. Eine symmetrischere Gestalt obiger Formeln ist: Seien ω_j holomorphe 1-Formen ohne reelle Perioden, mit $\sum_{j=1}^3 \omega_j^2 = 0$, d.h. falls $\omega_j = \varphi_j(z) dz$ ist, so soll $\sum_j \varphi_j^2 = 0$ gelten, und $\sum_{j=1}^3 |\omega_j|^2 > 0$. Dann ist $x_j := \Re(\int \omega_j)$ die Parametrisierung einer Minimalfläche.

56.7 Folgerung.

Die Gauß-Krümmung einer Minimalfläche ist nirgends positiv. Es gibt keine kompakte Minimalfläche im \mathbb{R}^3 .

Beweis. Daß $K \leq 0$ gilt, haben wir im Beweis von [56.5] gezeigt. Und, da nach [60.6] jede kompakte Fläche im \mathbb{R}^3 Punkte mit positiver Gauß-Krümmung besitzt, gibt es keine kompakten Minimalflächen. \square

57. Geodäten

Wir wollen nun auf allgemeinen Hyperflächen das Problem der kürzesten Verbindungswege lösen.

57.1 Definition (Geodäte)

Unter einer GEODÄTE versteht man eine Kurve in M , welche ein kritischer Punkt für die Bogenlänge ist.

57.2 Satz (Charakterisierung der Geodäten).

Eine Kurve c ist genau dann eine Geodäte, wenn für eine Parametrisierung von

c gilt: $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ für alle t , d.h. die Beschleunigung nur dazu dient, daß die Kurve auf der Mannigfaltigkeit bleibt. Diese Parametrisierung ist dann automatisch proportional zur Bogenlänge.

Beweis. Sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Kurve, o.B.d.A. nach der Bogenlänge parametrisiert. Diese ist ein kritischer Punkt der Bogenlänge, wenn für alle 1-PARAMETER-FAMILIEN von Kurven (c^s) mit $s \in \mathbb{R}$, die Ableitung $\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(c^s)$ gleich 0 ist. Unter 1-Parameter-Familien von Kurven versteht man Abbildungen $\mathbb{R}^2 \rightarrow M$, $(t, s) \mapsto c^s(t)$, welche $c^s(a) = c(a)$, $c^s(b) = c(b) \forall s$ und $c^0 = c$ erfüllen. Berechnen wir also diese Ableitung, wobei wir $c(t, s) := c^s(t)$ setzen:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(c^s) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \int_a^b \left| \frac{\partial}{\partial t} c(t, s) \right| dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left| \frac{\partial}{\partial t} c(t, s) \right| dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} \frac{\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left\langle \frac{\partial}{\partial t} c(t, s), \frac{\partial}{\partial t} c(t, s) \right\rangle}{\underbrace{\left| \frac{\partial}{\partial t} c(t, 0) \right|}_{=1}} dt \\ &= \int_a^b \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} c(t, s), \frac{\partial}{\partial t} c(t, 0) \right\rangle dt \\ &= \int_a^b \left\langle \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} c(t, s), \frac{\partial}{\partial t} c(t, 0) \right\rangle dt = \quad (\text{part.Integr.}) \\ &= \left[\left\langle \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} c(t, s), \frac{\partial}{\partial t} c(t, 0) \right\rangle \right]_{t=a}^b \\ &\quad - \int_a^b \left\langle \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} c(t, s), \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 c(t, 0) \right\rangle dt \\ &= 0 - \int_a^b \langle \eta(t), c''(t) \rangle dt = \int_a^b \underbrace{h \cdot (\langle c'', \nu \circ c \rangle^2 - \langle c'', c'' \rangle)}_{\leq 0 \text{ (Cauchy-Schwarz)}} dt \end{aligned}$$

Wobei wir $\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} c(t, s) =: \eta(t)$ so gewählt haben, daß

$$\eta(t) = h(t) \left(c''(t) - \langle c''(t), \nu(c(t)) \rangle \nu(c(t)) \right) \in T_{c(t)}M$$

gilt, für eine glatte Funktion $h : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ mit $h(a) = 0 = h(b)$. Dies ist möglich, da η ein Vektorfeld auf M längs c ist, welches nur $\eta(a) = 0 = \eta(b)$ erfüllen muß.

Die Ableitung verschwindet also für solche η genau dann, wenn in der Cauchy-Schwarz Ungleichung Gleichheit gilt: $\langle c'', c'' \rangle = \langle c'', \nu \circ c \rangle^2$, i.e. $c''(t) \parallel \nu(c(t))$. Mit anderen Worten, falls $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ für alle t .

Umgekehrt sei c eine Parametrisierung, welche $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ erfüllt. Dann ist insbesondere $c''(t) \perp c'(t)$ und somit $\langle c'(t), c''(t) \rangle$ konstant, also c proportional zur Bogenlänge parametrisiert. D.h. obige Argumente sind auf c anwendbar. \square

Obige Fragestellung ist natürlich ein Variationsproblem und die Methode ist jene von Euler-Lagrange, siehe [57, 9.4.16]–[57, 9.4.18].

57.3 Beispiele

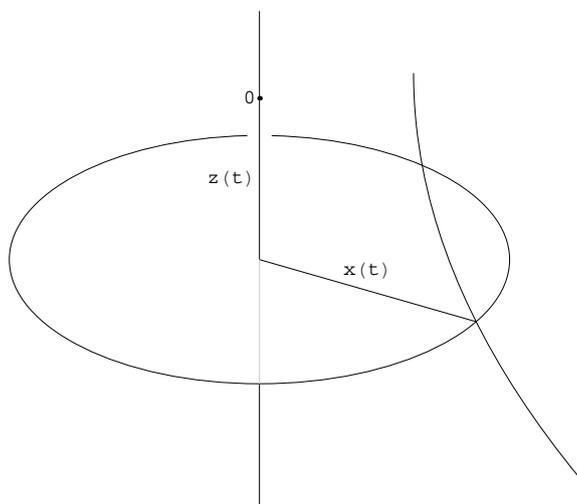
1. In einer Hyperebene sind offensichtlich die Geraden die Geodäten.
2. Allgemeiner: Die Erzeugenden einer Regelfläche sind Geodäten.

3. Jeder Großkreis auf der Sphäre S^m , d.h. Schnitt einer Ebene durch 0 mit S^m , ist eine Geodäte, denn die 2.Ableitung eines Kreises zeigt zum Mittelpunkt, also genau in Richtung des Normalvektors an die Sphäre.
4. Auf einer Drehfläche sind die Meridiane Geodäten. Auch jene Breitenkreise, welche kritische Punkte für den Radius sind, sind Geodäten.
5. Auf einem Zylinder können wir auch leicht Geodäten in andere Richtungen angeben, nämlich: $t \mapsto (\cos \varphi c(t), a \sin \varphi)$, wobei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte der Äquatorialsphäre ist.
6. Allgemeiner: Man kann die Geodäten einer Torse leicht bestimmen, indem man die Torse in der Ebene aufwickelt, denn dort sind sie Geraden.

57.4 Satz von Clairaut.

Auf jeder Drehfläche ist das Produkt aus dem Abstand von der Drehachse mit dem Cosinus des Winkels zwischen einer Geodäte und dem Breitenkreis konstant längs der Geodäte.

$$\cos \angle(\text{Geodäte}, \text{Breitenkreis}) \cdot \text{Radius} = \text{konst}$$



Beweis. Sei $c : t \mapsto (x(t); z(t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte auf M , d.h. $c''(t) \perp T_{c(t)}M$. Es ist $(x(t)^\perp, 0)$ tangential an den Breitenkreis durch $c(t)$ und $|c'(t)| = 1$, folglich gilt

$$\begin{aligned} & \left(\text{Radius} \cdot \cos \angle(\text{Geodäte}, \text{Breitenkreis}) \right)'(t) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(|x(t)| \cdot \cos \angle \left(c'(t), \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \left(|x(t)| \cdot \frac{\left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{|c'(t)| |x(t)^\perp|} \right) = \frac{d}{dt} \left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} x''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \left\langle \begin{pmatrix} x'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x'(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left\langle c''(t), \begin{pmatrix} x(t)^\perp \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle + \langle x'(t), x'(t)^\perp \rangle = 0 + 0, \end{aligned}$$

da $c''(t) \in (T_{c(t)}M)^\perp$ und somit $c''(t) \perp (x(t)^\perp, 0)$ gilt. Folglich ist der behauptete Ausdruck konstant. \square

57.5 Folgerung (Äquator auf Drehflächen).

Unter einem ÄQUATOR einer Drehfläche versteht man einen Breitenkreis der (lokal) maximalen Radius besitzt. Sei c eine Geodäte, welche den Äquator mit Radius ρ_0 zum Zeitpunkt 0 im Winkel $\gamma_0 \neq \pi/2$ schneidet. Dann oszilliert die Geodäte um den Äquator genau dann, wenn sie einen Breitenkreis mit Radius $\rho_0 \cos \gamma_0$ sowohl für ein $t > 0$ als auch ein $t < 0$ trifft.

Beweis. Es sei $\varphi : (s, \theta) \mapsto (r(s) \cos \theta, r(s) \sin \theta, z(s))$ eine Parametrisierung von M wie in [54.1](#). Jeder Breitenkreis, dessen Radius ein kritischer Punkt ist (d.h. es gilt $r' = 0$), ist nach [57.3.4](#) offensichtlich eine Geodäte. Insbesondere gilt das für einen Äquator. Sei nun $c(t) = \varphi(s(t), \theta(t))$ eine Bogenlängen-Parametrisierung einer Geodäte, $\rho(t) := r(s(t))$ der Abstand des Punktes $c(t)$ von der Rotationsachse und $\gamma(t) := \angle(c'(t), \text{Breitenkreis})$ der Schnittwinkel mit den Breitenkreis. Nach [57.4](#) ist $\rho(t) \cos \gamma(t) = \rho_0 \cos \gamma_0 =: k$ konstant. Die Fälle $\cos \gamma_0 = 0$ und $\cos \gamma_0 = 1$ beschreiben Geodäten die den Äquator orthogonal scheiden bzw. berühren, und stimmen somit (wie wir [58.4](#) zeigen werden) mit dem Meridian (der nach [57.3.4](#) eine Geodäte ist) bzw. mit dem Breitenkreis (der eine nach [57.3.4](#) ist) überein.

Sei also im folgenden $1 \neq \cos \gamma_0 \neq 0$ und somit $\langle x'(t), x(t)^\perp \rangle \stackrel{57.4}{=} \rho(t) \cos \gamma(t) = k = \rho_0 \cos \gamma_0 \neq 0$ und o.B.d.A. größer als 0. Andererseits ist

$$\langle x'(t), x(t)^\perp \rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \left(r(s(t)) \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) \\ \sin(\theta(t)) \end{pmatrix} \right), r(s(t)) \begin{pmatrix} -\sin(\theta(t)) \\ \cos(\theta(t)) \end{pmatrix} \right\rangle = r(s(t))^2 \theta'(t).$$

Wenn wir $1 = |c'|^2 = |\varphi_s|^2 (s')^2 + |\varphi_\theta|^2 (\theta')^2 = E(s')^2 + G(\theta')^2 = (s')^2 + (r\theta')^2$ verwenden, so erhalten wir die Differentialgleichung:

$$(s'(t))^2 = 1 - \left(\frac{k}{r(s(t))} \right)^2$$

Unser Ziel ist nun festzustellen, wo $t \mapsto s(t)$ nicht monoton ist. Sei also t_0 ein kritischer Punkt von s , d.h. $s'(t_0) = 0$. Dann ist auch $\rho'(t_0) = (r \circ s)'(t_0) = r'(s(t_0)) s'(t_0) = 0$ und $0 = (s'(t_0))^2 = 1 - (k/\rho(t_0))^2$, also $\rho(t_0) = k = \rho(t_0) \cos(\gamma(t_0))$, d.h. $\gamma(t_0) = 0$.

Es hat dann s ein lokales Minimum bei t_0 , denn $t \mapsto s(t+t_0) - s(t_0)$ muß symmetrisch und $t \mapsto \theta(t+t_0) - \theta(t_0)$ schiefsymmetrisch sein: O.B.d.A. ist nämlich $t_0 = 0$ sowie $\theta(t_0) = 0$ und mit $c : t \mapsto \varphi(s(t), \theta(t))$ ist auch $t \mapsto \varphi(s(-t), -\theta(-t))$ die (gespiegelte umgekehrt durchlaufene) Geodäte mit gleicher Ableitung bei t_0 , da $s'(t_0) = 0$ ist. Nach [58.4](#) stimmen diese beiden Geodäten überein und, da φ lokal injektiv ist, gelten die behaupteten Symmetrien. Die Geodäte berührt also diesen Breitenkreis mit Radius k und bewegt sich dann auf symmetrische Weise zurück zum Äquator.

Beachte, daß dieser Radius kein kritischer Punkt von r sein kann, andernfalls wäre dieser Breitenkreis nach [57.3.4](#) eine Geodäte und würde somit mit c übereinstimmen, d.h. ρ wäre konstant und $\gamma = 0$, im Widerspruch zu $\cos \gamma_0 \neq 1$. So ein Breitenkreis kann also von der Geodäte nicht berührt werden sondern nur transversal geschnitten werden oder sie spiralt hin (im Fall $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho(t) = k$). \square

Beispiel. Geodäten des Torus die am Äquator starten.



Beachte, daß es hier abzählbar unendlich viele Geodäten gibt die zwei fixe Punkte am Äquator miteinander verbinden.

58. Exponentialabbildung

Wir haben gezeigt: c ist Geodäte $\Leftrightarrow \forall t : c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$, also genau dann, wenn folgende Differentialgleichung erfüllt ist:

$$c''(t) = \langle c''(t), \nu_{c(t)} \rangle \nu_{c(t)} = -\langle c'(t), Lc'(t) \rangle \nu_{c(t)}.$$

Diese wollen wir nun in lokalen Koordinaten beschreiben. Dazu entwickeln wir die zweiten partiellen Ableitungen der Parametrisierung φ in der Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_m, \nu)$ von \mathbb{R}^n :

58.2 Ableitungsgleichungen für Flächen.

Die zweiten partiellen Ableitungen $\varphi_{i,j} : u \mapsto \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j} \varphi(u)$ einer lokalen Parametrisierung φ besitzen folgende Entwicklung in der Basis $(\varphi_1, \dots, \varphi_m, \nu)$:

$$\varphi_{i,j}(u) = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k(u) \varphi_k(u) - h_{i,j}(u) \nu_{\varphi(u)},$$

wobei $h_{i,j} := -\langle \varphi_{i,j}, \nu \rangle = \langle \varphi_i, L\varphi_j \rangle$ und $\Gamma_{i,j}^k$ die entsprechend gewählten Koeffizienten sind, diese heißen auch CHRISTOFFELSYMBOLE DER 2-TEN ART.

Die Christoffelsymbole $\Gamma_{i,j}^k$ der 2-ten Art können aus den CHRISTOFFELSYMBOLEN DER 1-TEN ART

$$\Gamma_{i,j,k} := \langle \varphi_{i,j}, \varphi_k \rangle = \frac{1}{2}(\partial_j g_{i,k} + \partial_i g_{k,j} - \partial_k g_{i,j})$$

wie folgt berechnet werden:

$$\Gamma_{i,j}^k = \sum_{l=1}^m \Gamma_{i,j,l} g^{l,k} \quad \text{mit } (g^{l,k}) := (g_{l,k})^{-1} \text{ und } g_{l,k} := \langle \varphi_l, \varphi_k \rangle.$$

Beweis. Um die Koeffizienten der Entwicklung von $\varphi_{i,j}$ zu berechnen, bilden wir zuerst das innere Produkt mit ν und erhalten $\langle \varphi_{i,j}, \nu \rangle = 0 - h_{i,j} \cdot 1$ für den Koeffizienten von ν . Indem wir das innere Produkt mit φ_l berechnen erhalten wir:

$$\Gamma_{i,j,l} := \langle \varphi_{i,j}, \varphi_l \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k(u) \varphi_k(u), \varphi_l(u) \right\rangle + 0 = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_{k,l}.$$

Durch Multiplikation mit der inversen Matrix $(g^{l,p})$ ergibt sich:

$$\sum_{l=1}^m \Gamma_{i,j,l} g^{l,p} = \sum_{l=1}^m \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_{k,l} g^{l,p} = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k \delta_k^p = \Gamma_{i,j}^p.$$

Es gilt:

$$\partial_k g_{i,j} = \partial_k \langle \varphi_i, \varphi_j \rangle = \langle \varphi_{i,k}, \varphi_j \rangle + \langle \varphi_i, \varphi_{j,k} \rangle.$$

Durch zyklisches Vertauschen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \partial_i g_{j,k} &= \langle \varphi_{j,i}, \varphi_k \rangle + \langle \varphi_j, \varphi_{k,i} \rangle \\ \partial_j g_{k,i} &= \langle \varphi_{k,j}, \varphi_i \rangle + \langle \varphi_k, \varphi_{i,j} \rangle. \end{aligned}$$

Die alternierende Summe dieser 3 Gleichungen ist

$$2\Gamma_{k,j,i} = 2\langle \varphi_{k,j}, \varphi_i \rangle = \partial_j g_{k,i} - \partial_i g_{j,k} + \partial_k g_{i,j}. \quad \square$$

58.1 Bemerkung.

Es sei M ein Fläche im \mathbb{R}^3 und E, F, G die Koeffizienten der 1-ten Fundamentalform, d.h.

$$\begin{pmatrix} g_{1,1} & g_{1,2} \\ g_{2,1} & g_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} g^{1,1} & g^{1,2} \\ g^{2,1} & g^{2,2} \end{pmatrix} = \frac{1}{D^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix},$$

wobei $D := \sqrt{EG - F^2}$. Die Christoffelsymbole 1-ter Ordnung haben dann folgende Gestalt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,j,k} &:= \frac{1}{2} \left(\partial_i(g_{j,k}) + \partial_j(g_{i,k}) - \partial_k(g_{i,j}) \right) \\ \Gamma_{1,1,1} &:= \frac{1}{2} E_1 \\ \Gamma_{1,2,1} &:= \frac{1}{2} E_2 \\ \Gamma_{2,2,1} &:= \frac{1}{2} (2F_2 - G_1) \\ \Gamma_{1,1,2} &:= \frac{1}{2} (2F_1 - E_2) \\ \Gamma_{1,2,2} &:= \frac{1}{2} G_1 \\ \Gamma_{2,2,2} &:= \frac{1}{2} G_2 \end{aligned}$$

Und für jene zweiter Ordnung gilt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{i,j}^k &:= \Gamma_{i,j,1} g^{1,k} + \Gamma_{i,j,2} g^{2,k} \\ \Gamma_{1,1}^1 &:= \Gamma_{1,1,1} g^{1,1} + \Gamma_{1,1,2} g^{2,1} \\ &= \frac{E_1}{2} \frac{G}{D^2} + \left(F_1 - \frac{E_2}{2}\right) \frac{-F}{D^2} = \frac{G E_1 - 2 F F_1 + F E_2}{2 D^2} \\ \Gamma_{1,2}^1 &:= \Gamma_{1,2,1} g^{1,1} + \Gamma_{1,2,2} g^{2,1} \\ &= \frac{E_2}{2} \frac{G}{D^2} + \frac{G_1}{2} \frac{-F}{D^2} = \frac{G E_2 - F G_1}{2 D^2} \\ \Gamma_{2,2}^1 &:= \Gamma_{2,2,1} g^{1,1} + \Gamma_{2,2,2} g^{2,1} \\ &= \left(F_2 - \frac{G_1}{2}\right) \frac{G}{D^2} + \frac{G_2}{2} \frac{-F}{D^2} = \frac{2 G F_2 - G G_1 - F G_2}{2 D^2} \\ \Gamma_{1,1}^2 &:= \Gamma_{1,1,1} g^{1,2} + \Gamma_{1,1,2} g^{2,2} \\ &= \frac{E_1}{2} \frac{-F}{D^2} + \left(F_1 - \frac{E_2}{2}\right) \frac{E}{D^2} = \frac{-F E_1 + 2 E F_1 - E E_2}{2 D^2} \\ \Gamma_{1,2}^2 &:= \Gamma_{1,2,1} g^{1,2} + \Gamma_{1,2,2} g^{2,2} \\ &= \frac{E_2}{2} \frac{-F}{D^2} + \frac{G_1}{2} \frac{E}{D^2} = \frac{-F E_2 + E G_1}{2 D^2} \\ \Gamma_{2,2}^2 &:= \Gamma_{2,2,1} g^{1,2} + \Gamma_{2,2,2} g^{2,2} \\ &= \left(F_2 - \frac{G_1}{2}\right) \frac{-F}{D^2} + \frac{G_2}{2} \frac{E}{D^2} = \frac{-2 F F_2 + F G_1 + E G_2}{2 D^2} \end{aligned}$$

58.3 Die Differentialgleichung für Geodäten $c := \varphi \circ u$ mit lokaler Darstellung $u(t) = (u^1(t), \dots, u^m(t))$ sieht in lokalen Koordinaten nun so aus:

$$\begin{aligned} c(t) = (\varphi \circ u)(t) &\Rightarrow c'(t) = \sum_i \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \cdot \frac{du^i}{dt} \\ \Rightarrow c''(t) &= \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{du^i}{dt} \cdot \frac{du^j}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial u^i} \cdot \frac{d^2 u^i}{dt^2} \right) \\ &\in \sum_k \left(\sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} + \frac{d^2 u^k}{dt^2} \right) \varphi_k + \mathbb{R} \cdot \nu. \end{aligned} \quad \boxed{58.2}$$

Also ist c eine Geodäte, d.h. $c''(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ genau dann, wenn

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2}(t) + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^k(u(t)) \cdot \frac{du^i}{dt}(t) \cdot \frac{du^j}{dt}(t) = 0 \quad \text{für } k = 1, \dots, m.$$

oder kurz:

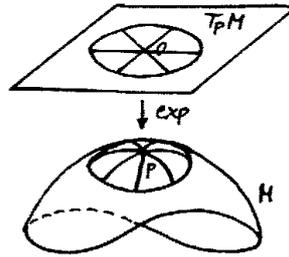
$$\ddot{u}^k + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \dot{u}^i \dot{u}^j = 0,$$

wobei \dot{u} die Ableitung $t \mapsto \frac{du^k}{dt}(t)$ nach der Zeit t bezeichnet. Dieses System gewöhnlicher Differentialgleichungen 2.ter Ordnung hat bei vorgegebenen Anfangsdaten $u^k(0)$ und $\frac{du^k}{dt}(0)$ lokal eine eindeutig bestimmte Lösung.

58.4 Lemma. Die Exponentialabbildung.

Zu jedem $x \in M$ und $\xi \in T_x M$ existiert eine eindeutige Geodäte $c_\xi : I \rightarrow M$ mit maximalen Definitionsintervall $I \subseteq \mathbb{R}$, mit konstanter skalarer Geschwindigkeit und Anfangsbedingung $c_\xi(0) = x$, $c'_\xi(0) = \xi$.

Ordnet man nun $\xi \in TM$ den Wert $c_\xi(1)$ der Geodäte c_ξ mit Anfangsbedingung ξ zu, so nennt man das Ergebnis $\exp(\xi)$. Die Exponentialfunktion \exp ist auf einer offenen Umgebung des Nullschnitts M in TM definiert. Sie ist dort glatt, hat Werte in M und $\exp_x := \exp|_{T_x M} : T_x M \rightarrow M$ erfüllt: $\exp_x(0_x) = x$ und $T_{0_x}(\exp_x) = \text{id}_{T_x M}$. Die Geodäte c_ξ mit Anfangswert ξ ist dann durch $c_\xi(t) = \exp(t\xi)$ gegeben.



Der Grund für die Bezeichnungswise \exp liegt darin, daß für $M := S^1 \subset \mathbb{C}$ mit $TM = \{(x, tx^\perp) : |x| = 1, t \in \mathbb{R}\} \cong S^1 \times \mathbb{R}$ die Exponentialabbildung gegeben ist durch $\exp(x, tx^\perp) = x e^{it}$. Für allgemeine Liegruppen anstelle von S^1 siehe auch [67.6](#).

Beweis. Die lokale Formel aus [58.3](#) für die Geodätengleichung zeigt, daß die Existenz und Eindeutigkeit maximal definierter Geodäten c_ξ , sowie deren glatte Abhängigkeit auch vom Anfangswert ξ , d.h. es gibt eine offenen Umgebung V von 0

in $T_x M$ und ein $\delta > 0$, s.d. $c_\xi(t)$ für $\xi \in V$ und $|t| < \delta$ existiert und $(t, \xi) \mapsto c_\xi(t)$ glatt ist.

Eine andere Möglichkeit dies zu sehen ohne dabei lokale Koordinaten zu verwenden, geht wie folgt:

Falls c eine Geodäte ist, so gilt $c''(t) = \lambda(t) \cdot \nu_{c(t)}$, wobei

$$\lambda(t) = \langle c''(t), \nu_{c(t)} \rangle = \langle c'(t), (\nu \circ c)'(t) \rangle = -\langle c', L \circ c' \rangle(t) = -K(c'(t)),$$

$$\text{d.h.: } c \text{ ist Geodäte} \Leftrightarrow c'' = -\langle c', (\nu \circ c)' \rangle (\nu \circ c).$$

Wählen wir eine lokale Gleichung f für M , dann ist $\nu = \frac{1}{|\text{grad } f|} \text{grad } f$ und macht nicht nur auf M sondern auch lokal im umgebenden \mathbb{R}^n Sinn. Somit ist die obige Geodätengleichung eine gewöhnliche Differentialgleichung 2.ter Ordnung am \mathbb{R}^n , besitzt also bei vorgegebener Anfangsbedingung für $c(0)$ und $c'(0)$ eine eindeutige Lösung $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, welche glatt von den Anfangsdaten abhängt. Insbesondere existiert eine offene Umgebung V von 0_x in TM und ein $\delta > 0$, s.d. $c_\xi(t)$ für $\xi \in V$ und $|t| \leq \delta$ existiert und glatt in (ξ, t) ist.

Es ist noch zu zeigen, daß die Kurve c in M bleibt. Da für eine Lösung $\langle c', \nu \circ c' \rangle = \langle c'', \nu \circ c \rangle + \langle c', (\nu \circ c)' \rangle = 0$ gilt, ist $\langle c', \nu \circ c \rangle$ konstant und zwar gleich $\langle c'(0), \nu_{c(0)} \rangle = \langle \xi, \nu_x \rangle = 0$. Somit gilt:

$$(f \circ c)'(t) = \langle \text{grad}_{c(t)} f, c'(t) \rangle = |\text{grad}_{c(t)} f| \cdot \langle \nu_{c(t)}, c'(t) \rangle = 0,$$

Es ist also $f \circ c$ konstant gleich $f(c(0)) = f(x) = 0$, d.h. $c(t) \in f^{-1}(0) = M$.

Falls c_ξ die Geodäte mit Anfangswert $c'(0) = \xi$ bezeichnet, so ist für $t \in \mathbb{R}$ die Kurve $s \mapsto c_\xi(ts)$ die Geodäte mit Anfangswert $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} c_\xi(ts) = t c'_\xi(0) = t \xi$ also gilt folgende Homogenitätsrelation

$$c_\xi(ts) = c_t \xi(s).$$

Sein nun $U := \delta V$, dann existiert $\exp(\xi) := c_\xi(1) = c_{\delta \eta}(1) = c_\eta(\delta)$ für $x = \delta \eta \in U$ und ist glatt bzgl. ξ . Es ist somit $t \mapsto \exp(t\xi) = c_{t\xi}(1) = c_\xi(t)$ die Geodäte mit Anfangswert ξ , weiters $\exp(0_x) = c_{0_x}(1) = x$ und $T_{0_x} \exp_x \cdot \xi = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp_x(t\xi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 c_\xi(t) = \xi$. \square

58.5 Geodätische Polarkoordinaten

Wir können nun die Existenz lokaler Koordinaten φ mit $E = 1$ und $F = 0$ auf jeder Riemann-Fläche zeigen.

Wegen $T_{0_x} \exp_x = \text{id}_{T_x M}$, ist \exp_x ein lokaler Diffeomorphismus von $T_x M$ nach M und wir somit eine ausgezeichnete bei x zentrierte Karte \exp_x . Um diese in Koordinaten zu beschreiben wählen wir einen Einheitsvektor $v \in T_x M$ und einen (der beiden) Normalvektoren $v^\perp \in T_x M$ und betrachten Polarkoordinaten

$$(r, \vartheta) = r \cdot \underbrace{(\cos(\vartheta) \cdot v + \sin(\vartheta) \cdot v^\perp)}_{=: v(\vartheta)}$$

und erhalten eine Parametrisierung (für $r \neq 0$)

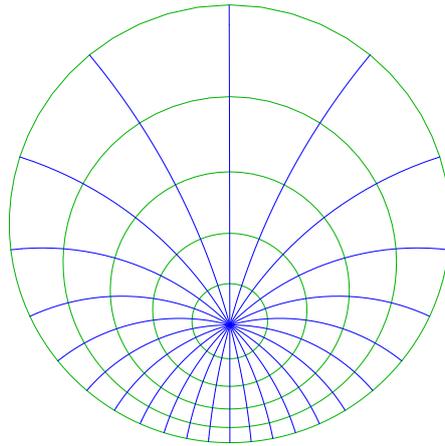
$$\varphi : (r, \theta) \mapsto \exp_x(r v(\vartheta)) \quad \text{mit } \varphi(0, \theta) = x.$$

Somit ist $t \mapsto \varphi(t, \vartheta) = \exp(t v(\vartheta))$ die (wegen $|v(\vartheta)| = 1$) nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte mit Anfangswert $v(\vartheta) \in T_x M$, eine sogenannte RADIALE

GEODÄTE. Also gilt:

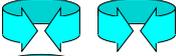
$$\begin{aligned} E = |\varphi_r|^2 = |v_\theta|^2 = 1 &\Rightarrow \langle \varphi_r, \varphi_{r,\theta} \rangle = 0 \\ \varphi_{r,r} \perp TM &\Rightarrow \langle \varphi_{r,r}, \varphi_\theta \rangle = 0 \end{aligned} \Bigg\} \Rightarrow \\ \Rightarrow F_r = \frac{\partial}{\partial r} \langle \varphi_r, \varphi_\theta \rangle = \langle \varphi_{r,r}, \varphi_\theta \rangle + \langle \varphi_r, \varphi_{\theta,r} \rangle = 0.$$

Außerdem ist $\varphi(0, \theta) = x$ und somit $\varphi_\theta(0, \theta) = 0$, also $F = \langle \varphi_r(r, \theta), \varphi_\theta(r, \theta) \rangle = \langle \varphi_r(0, \theta), \varphi_\theta(0, \theta) \rangle = 0$. Schließlich ist $G = \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle \geq 0$.



Die geschlossenen Kurven $\theta \mapsto \varphi(r, \theta)$ nennt man GEODÄTISCHE KREISE mit Radius r . Diese sind natürlich im allgemeinen keine Geodäten!

Beispiele von geodätischen Polarkoordinaten.

-  Sphäre
-  Torus
-  Paraboloid
-  Hyperbolisches Paraboloid
-  Einschaliges Hyperboloid
-  Zweischaliges Hyperboloid
-  Wendel-Fläche
-  Katenoid
-  Enneper
-  Pseudosphäre
-  Möbius-Band
-  Plücker-Kegel



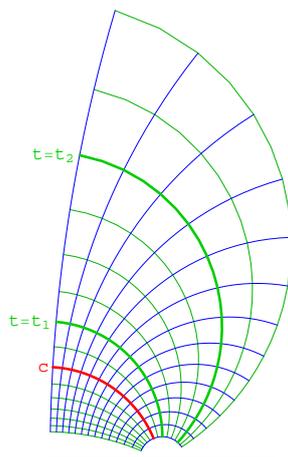
Sherk-Fläche

58.6 Satz. Geodätische Parallelkoordinaten.

Die Koeffizienten einer Riemann-Metrik haben genau dann lokal die Gestalt $E = 1$, $F = 0$ und $G > 0$, wenn $t \mapsto \varphi(t, s)$ nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäten sind, welche die Kurven $s \mapsto \varphi(t, s)$ orthogonal schneiden. Insbesondere ist also die Länge der Segmente dieser Geodäten von $t = t_1$ bis $t = t_2$ gerade $t_2 - t_1$, und somit unabhängig von s .

Zu jeder Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ existieren längs c eindeutig bestimmte lokale Koordinaten φ mit obigen Eigenschaften und $\varphi(0, s) = c(s)$.

Für einen geodätischen Kreis c sind das gerade die geodätischen Polarkoordinaten aus [58.5](#).



Beweis. Zuerst die Existenz: Dafür wählen wir ein Einheitsvektorfeld ξ längs c , welches normal steht auf c' und definieren eine Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ durch $\varphi(t, s) := \exp_{c(s)}(t\xi(s))$. Dann ist $\varphi(0, s) = c(s)$ und $t \mapsto \varphi(t, s)$ ist die bogenlängenparametrisierte Geodäte mit Anfangsvektor $\xi(s)$. Also gilt: $\varphi_s(0, s) = c'(s)$ sowie $\varphi_t(0, s) = \xi(s)$ und somit ist φ ein lokaler Diffeomorphismus.

Da $t \mapsto \varphi(t, s)$ Geodäten sind, ist wie im Beweis von [58.5](#) $E = g_{1,1} = \langle \varphi_t, \varphi_t \rangle = 1$ und $F_1 = 0$. Nach [58.1](#) ist somit

$$\Gamma_{1,1}^1 = \frac{G E_1 - 2 F F_1 + F E_2}{2 D^2} = 0 \quad \text{und} \quad \Gamma_{1,1}^2 = \frac{-F E_1 + 2 E F_1 - E E_2}{2 D^2}.$$

Also wegen $g_{1,1} = 1$ auch

$$\begin{aligned} 0 &= \Gamma_{1,1}^1 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \Gamma_{1,1,i} g^{i,1} = \frac{1}{2} \sum_i \left(\frac{d}{du^1} g_{i,1} + \frac{d}{du^1} g_{1,i} - \frac{d}{du^i} g_{1,1} \right) g^{i,1} \\ &= \frac{dg_{1,2}}{du^1} g^{2,1} = \left(\frac{dg_{1,2}}{du^1} \right) \left(-g_{1,2} \frac{1}{\det(g_{i,j})} \right) = -\frac{1}{2} \frac{1}{\det(g_{i,j})} \frac{d}{du^1} (g_{1,2})^2 \\ &\Rightarrow 0 = \frac{d}{du^1} (g_{1,2})^2 \end{aligned}$$

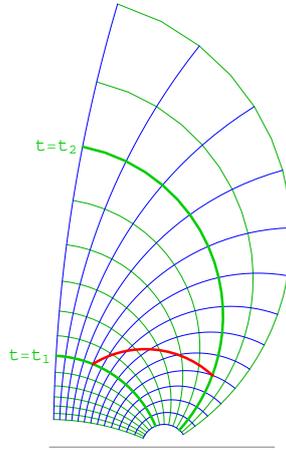
Wegen $g_{1,2}(0, u^1) = 0$ also $F = g_{1,2} = 0$.

Ist umgekehrt $E = 1$ und $F = 0$, so ist nach [58.2](#) (siehe [59.2](#)) $\Gamma_{1,1}^1 = \Gamma_{1,1}^2 = 0$. Damit sind die Kurven mit konstantem u^2 bogenlängenparametrisierte Geodäten, welche die Kurven mit konstantem u^1 orthogonal schneiden. \square

58.7 Lemma.

Sei $\varphi : \mathbb{R}^2 \supseteq U \rightarrow M$ eine Parametrisierung nach geodätischen Koordinaten, dann ist jede Kurve der Form $\varphi \circ u$ mit einer Kurve u in U welche (t_1, s_1) mit (t_2, s_2) verbindet mindestens so lang wie jede Geodäte $t \mapsto \varphi(t, s)$ für $t \in [t_1, t_2]$.

Dieses Resultat liefert also, daß gewisse Geodäten unter allen hinreichend nahen Kurven minimal sind. Global muß das nicht stimmen, wie ein Bogen eines Großkreises auf der Sphäre von Länge größer als π zeigt.



Beweis. Sei s fix gewählt, $c_0(t) := \varphi(t, s)$ und $c_1(r) := \varphi(u(r))$, dann gilt

$$\begin{aligned} L(c_1) &= \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\left(\frac{du^1}{dr}\right)^2 + G\left(\frac{du^2}{dr}\right)^2} dr \geq \\ &\geq \int_{r_1}^{r_2} \left|\frac{du^1}{dr}\right| dr \geq \int_{r_1}^{r_2} \frac{du^1}{dr} dr = u^1(r_2) - u^1(r_1) = t_2 - t_1 = L(c_0) \end{aligned}$$

und Gleichheit gilt genau dann, wenn $\frac{du^2}{dr} = 0$, also u^2 konstant ist. \square

59. Integralsatz von Gauß-Bonnet

Es gelten folgende geometrische Formeln für die Gauß-Krümmung:

59.1 Satz (Gauß-Krümmung als Störung der Maße von Kreisen).

Seien geodätische Polarkoordinaten φ um $x \in M$ gewählt. Mit $L(r)$ bezeichnen wir die Länge bzw. mit $A(r)$ die Fläche des Inneren der geodätischen Kreise $\theta \mapsto \varphi(r, \theta)$ so gilt:

1. $K_x = \frac{3}{\pi} \lim_{r \searrow 0} \frac{2r\pi - L(r)}{r^3}$ Bertrand Puiseux 1848
2. $K_x = \frac{12}{\pi} \lim_{r \searrow 0} \frac{r^2\pi - A(r)}{r^4}$ Diquet 1848

Die Gauß-Krümmung mißt also infinitesimal um wieviel der Umfang, beziehungsweise die Fläche eines geodätischen Kreises im Vergleich zu einem Euklidischen Kreis zu klein ist.

Beweis. Geodätische Polarkoordinaten φ sind nach [58.5](#) gegeben durch $\varphi(r, \vartheta) = \exp_x(r v(\vartheta))$ mit $v(\vartheta) = \cos(\vartheta) v + \sin(\vartheta) v^\perp$. Wir wissen bereits folgendes über die Funktion $\sqrt{G} := |\varphi_\vartheta|$: Die Funktion $G = |\varphi_\vartheta|^2$ ist glatt und verschwindet nur für $r = 0$. Also ist auch \sqrt{G} glatt für $r \neq 0$ aber nicht notwendigerweise für $t = 0$. Wir müssen aber das Verhalten bei 0 studieren. Dazu verwenden wir die Jacobi-Gleichung $K\sqrt{G} + \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G} = 0$ aus [53.9](#). Die Taylorformel der Ordnung 1 mit Integralrestglied (siehe [56, 6.3.11](#))

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \int_0^1 (1-t)f''(tx)(x, x)dt$$

liefert

$$\begin{aligned} \varphi(r, \vartheta) &= \exp_x(r v(\vartheta)) \\ &= \underbrace{\exp_x(0)}_{=x} + \underbrace{\exp'_x(0)}_{=\text{id}}(r v(\vartheta)) + \int_0^1 (1-t) \exp''_x(tr v(\vartheta))(r v(\vartheta), r v(\vartheta)) dt \\ &= x + r v(\vartheta) + r^2 \underbrace{\int_0^1 (1-t) \exp''_x(tr v(\vartheta))(v(\vartheta), v(\vartheta)) dt}_{=:g(r, \vartheta)}, \end{aligned}$$

wobei g eine glatte \mathbb{R}^n -wertige Funktion ist. Durch partielles Differenzieren nach ϑ ergibt sich:

$$\varphi_\vartheta(r, \vartheta) = r \left(v'(\vartheta) + r \frac{\partial}{\partial \vartheta} g(r, \vartheta) \right)$$

und somit ist für $r \geq 0$

$$\sqrt{G(r, \vartheta)} = |\varphi_\vartheta(r, \vartheta)| = r \sqrt{|v'(\vartheta)|^2 + 2r \langle v'(\vartheta) | \frac{\partial}{\partial \vartheta} g(r, \vartheta) \rangle + r^2 \langle \frac{\partial}{\partial \vartheta} g(r, \vartheta) | \frac{\partial}{\partial \vartheta} g(r, \vartheta) \rangle}$$

glatt (wegen $|v'(\vartheta)| = 1$) und insbesondere gilt für die rechtsseitige Ableitung bei 0:

$$\frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \sqrt{G(r, \vartheta)} = 0 + 1.$$

Aus der Jacobi-Gleichung [53.9](#) folgt

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \Big|_{r=0} \sqrt{G(r, \vartheta)} &= -K(x) \sqrt{G(0, \vartheta)} = 0 \quad \text{und durch Differenzieren} \\ \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(r, \vartheta) &= -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} K - \sqrt{G} \frac{\partial K}{\partial r}, \quad \text{also} \\ \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(0, \vartheta) &= -1 K(x) + 0 \end{aligned}$$

Aus der Taylorformel der Ordnung 2 mit Integralrestglied (siehe [56, 6.3.11](#)) ist

$$\sqrt{G}(r, \vartheta) = 0 + r + 0 + \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(tr, \vartheta) r^3 dt$$

also

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0+} \frac{\sqrt{G}(r, \vartheta) - r}{r^3} &= \lim_{r \rightarrow 0+} \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(tr, \vartheta) dt \\ &= \frac{\partial^3 \sqrt{G}}{\partial r^3}(0, \vartheta) \int_0^1 \frac{(1-t)^2}{2!} dt = -K(x) \frac{1}{3!}. \end{aligned}$$

Somit ist wegen $L(r) = \int_0^{2\pi} |\varphi_\vartheta(r, \vartheta)| d\vartheta$

$$\begin{aligned} K(x) &= \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{K(x)}{6} d\vartheta = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{r - \sqrt{G(r, \vartheta)}}{r^3} d\vartheta \\ &= \frac{3}{\pi} \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r\pi - L(r)}{r^3} \end{aligned}$$

Für die Fläche erhalten wir

$$\begin{aligned} A(r) &= \int_0^r \int_0^{2\pi} \sqrt{G(\rho, \vartheta)} d\vartheta d\rho \Rightarrow A'(r) = \int_0^{2\pi} \sqrt{G(r, \vartheta)} d\vartheta = L(r) \Rightarrow \\ \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{r^2\pi - A(r)}{r^4} &= \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{2r\pi - L(r)}{4r^3} = \frac{1}{4} \frac{K(x)\pi}{3} = K(x) \frac{\pi}{12}. \quad \square \end{aligned}$$

59.2 Christoffel-Symbole in geodätischen Koordinaten

Wir wählen eine geodätische Parametrisierung φ auf M , d.h. $E = 1$ und $F = 0$, mit zugehörigen lokalen Koordinaten $(r, \theta) = (u^1, u^2)$. Dann gilt für die Koeffizienten der Riemann-Metrik (siehe auch [58.1](#)):

$$\begin{aligned} g_{1,1} &= E = 1 & g^{1,1} &= 1 \\ g_{1,2} &= g_{2,1} = F = 0 & g^{1,2} &= g^{2,1} = 0 \\ g_{2,2} &= G > 0 & g^{2,2} &= \frac{1}{G}. \end{aligned}$$

Für die Christoffelsymbole erster Art [58.2](#) ergibt sich somit:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,2,2} &= \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial \theta} \\ \Gamma_{1,2,2} &= \Gamma_{2,1,2} = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma_{2,2,1} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma_{i,j,k} &= 0 \quad \text{für alle anderen } i, j, k. \end{aligned}$$

Für jene zweiter Art:

$$\begin{aligned} \Gamma_{2,2}^1 &= -\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma_{1,2}^2 &= \Gamma_{2,1}^2 = \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial r} \\ \Gamma_{2,2}^2 &= \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial \theta} \\ \Gamma_{i,j}^k &= 0 \quad \text{für alle anderen } i, j, k. \end{aligned}$$

Eine Geodäte muß also folgende Gleichungen erfüllen:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^1}{dt^2} + \Gamma_{2,2}^1 \frac{du^2}{dt} \frac{du^2}{dt} &= 0 \\ \frac{d^2 u^2}{dt^2} + 2\Gamma_{1,2}^2 \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \Gamma_{2,2}^2 \frac{du^2}{dt} \frac{du^2}{dt} &= 0. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^1}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 &= 0 \\ \frac{d^2 u^2}{dt^2} + \frac{1}{G} \frac{\partial G}{\partial r} \frac{du^1}{dt} \frac{du^2}{dt} + \frac{1}{2G} \frac{\partial G}{\partial \theta} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 &= 0. \end{aligned}$$

59.3 Geodätische Krümmung, ein Spezialfall

Seien $(u^1, u^2) = (r, \theta)$ lokale geodätische Koordinaten wie in [59.2](#). Für eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte $t \mapsto u(t) = (u^1(t), u^2(t)) = (r(t), \theta(t))$ sei der Winkel zwischen ihr und den radialen Geodäten $u^2 = \text{konstant}$ mit $\Theta(t)$ bezeichnet, i.e.

$$\cos \Theta(t) = \langle u'(t) | \frac{\partial}{\partial r} \rangle = \left\langle \frac{dr(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d\theta(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \theta} \middle| \frac{\partial}{\partial r} \right\rangle = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{d}{dt} u^1.$$

Somit erhalten wir:

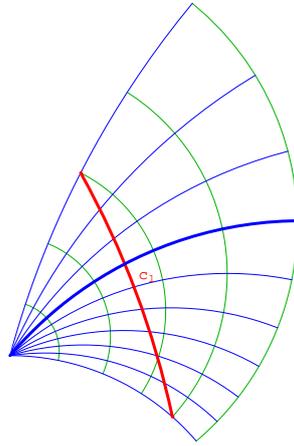
$$\frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \left(\frac{du^2}{dt} \right)^2 \stackrel{\text{59.2}}{=} \frac{d^2 u^1}{dt^2} = \frac{d}{dt} \cos \Theta(t) = -\sin \Theta(t) \frac{d\Theta(t)}{dt}.$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} \sin \Theta(t) &= \text{vol} \left(\frac{\partial}{\partial r}, u'(t) \right) \\ &= \sqrt{G} \left(dr \wedge d\theta \right) \left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{dr(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d\theta(t)}{dt} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) = \sqrt{G} \frac{d\theta}{dt} = \sqrt{G} \frac{du^2}{dt}. \end{aligned}$$

Schlußendlich erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial r} \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= -\sin \Theta(t) \frac{d\Theta}{dt} = -\sqrt{G} \frac{d\theta}{dt} \frac{d\Theta}{dt}, \\ \text{d.h. } \frac{d\Theta}{dt} &= -\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} \frac{d\theta}{dt} \end{aligned}$$

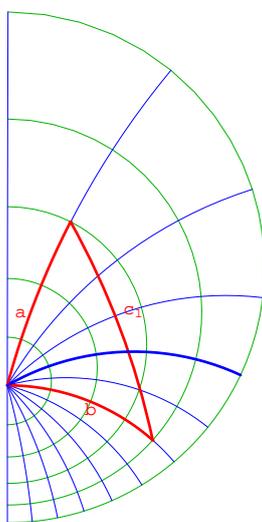


59.4 Theorema elegantissimum von Gauß.

Sei Δ ein geodätisches Dreieck in M mit Innenwinkeln α, β und γ , d.h. ein Dreieck dessen Seiten Geodäten sind, dann gilt:

$$\int_{\Delta} K \text{ vol}_M = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Insbesondere liefert das für die Ebene den Satz, daß die Winkelsumme im Dreieck 180 Grad (d.h. π) ist.

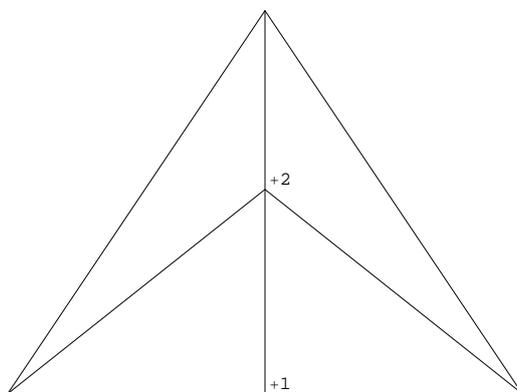


Beweis. Wir setzen vorerst voraus, daß das geodätische Dreieck ganz im Kartenbereich für geodätische Polarkoordinaten φ um die Ecke C enthalten ist.

Die beiden Seiten a und b entsprechen in Polarkoordinaten zwei Geraden durch 0. Und wir können die 0-Richtung so wählen, daß sie die Tangente an die Seite b ist. Die Seite c läßt sich in Polarkoordinaten dann durch eine Gleichung der Form $r = r(\theta)$ mit $\theta \in [0, \gamma]$ beschreiben. Sei $\Theta(\theta)$ der Winkel zwischen $\frac{\partial}{\partial r}$ und der Seite c . Klarerweise ist $\Theta(0) = \pi - \alpha$ und $\Theta(\gamma) = \beta$. Also gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_{\Delta} K \operatorname{vol}_M &= \int_{\varphi^{-1}(\Delta)} \varphi^*(K \operatorname{vol}_M) = && \text{wegen } \boxed{53.9} \\
 &= \int_{\theta^{-1}(\Delta)} -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} \sqrt{G} dr \wedge d\theta \\
 &= \int_0^\gamma \int_0^r -\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2}(r, \theta) dr d\theta = && \text{wegen } \boxed{53.9}, \text{ siehe auch } \boxed{60.1} \\
 &= \int_0^\gamma 1 - \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}(r(\theta), \theta) d\theta = && \text{wegen } \boxed{59.2} \\
 &= \int_0^\gamma 1 + \frac{d\Theta}{d\theta}(\theta) d\theta = \gamma + \Theta(\gamma) - \Theta(0) = \gamma + \beta - (\pi - \alpha).
 \end{aligned}$$

Für ein allgemeines geodätisches Dreieck folgt das Resultat, durch Unterteilen in kleinere geodätische Dreiecke: Denn addiert man die Resultate für die Teildreiecke, so erhält man auf der linken Seite $\int_{\Delta} K \operatorname{vol}_M$. Die Summe aller Winkel ist die Summe der Winkel an den ursprünglichen Ecken plus π mal die Anzahl der übrigen Randecken plus 2π mal die Anzahl der inneren Ecken. Davon muß man noch π mal die Anzahl der Teilungs-Dreiecke abziehen. Da bei jeder Teilung einer inneren Seite die beiden begrenzenden Dreiecke in 4 Dreiecke zerlegt werden und jede Teilung einer Randseite das begrenzende Dreieck in zwei zerlegt, gilt: Die Summe der Ecken am Rand (ohne die ursprünglichen 3 Ecken) plus 2 mal Summe der Ecken im Inneren ist die Anzahl der Dreiecke minus 1. Somit ergibt diese Kombination von π 's gerade $-\pi$ und die Formel gilt auch im allgemeinen Fall.



□

Seien a , b und c die Längen der Seiten eines geodätischen Dreiecks Δ und seien $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ und $\bar{\gamma}$ die Winkel des Euklidischen Dreiecks mit diesen Seitenlängen, so gilt:

$$\alpha - \bar{\alpha} = \frac{\text{vol}(\Delta)}{3} K + o(a^2 + b^2 + c^2)$$

und analog für die anderen Winkel, siehe [6, S.387].

59.5 Folgerung. Globale Version von Gauß-Bonnet.

Sei M eine kompakte orientierte Riemann-Fläche so gilt:

$$\int_M K \text{vol}_M = 2\pi \chi(M) = 4\pi(1-g).$$

Beweis. Wir zerlegen die Fläche in lauter kleine geodätische Dreiecke. Dann gilt für die Euler-Charakteristik nach [44.5.9](#):

$$\chi(M) = \#\text{Ecken} - \#\text{Kanten} + \#\text{Flächen}.$$

Da jede Fläche durch genau 3 Kanten berandet ist und jede Kante aber zu genau zwei Flächen gehört, gilt

$$3 \cdot \#\text{Flächen} = 2 \cdot \#\text{Kanten}$$

und somit ist

$$\chi(M) = \#\text{Ecken} - \frac{1}{2} \cdot \#\text{Flächen}.$$

Auf der anderen Seite gilt:

$$\begin{aligned} \int_M K \text{vol}_M &= \sum_{\Delta} \int_{\Delta} K \text{vol}_M \\ &= \text{Summe aller Innen-Winkel} - \pi \cdot \text{Anzahl der } \Delta \\ &= 2\pi \cdot \text{Anzahl der Ecken} - \pi \cdot \text{Anzahl der Flächen} \\ &= 2\pi \chi(M). \quad \square \end{aligned}$$

Falls K konstant und negativ ist, so gilt $\text{vol}(M) = 4\pi \frac{1}{K^2}(1-g)$, da $\chi(M) = 2(1-g)$ für das Geschlecht g gilt.

59.6 Folgerung.

Sei M eine kompakte Riemann-Fläche, dann gilt:

1. Es gibt Punkte $p \in M$ mit $\text{sgn}(K(p)) = \text{sgn}(\chi(M))$.

2. Ist $K \geq 0$ aber nicht konstant 0, so ist $\chi(M) = 2$, d.h. M ist diffeomorph zur Sphäre S^2 , oder $\chi(M) = 1$, d.h. diffeomorph zur projektiven Ebene \mathbb{P}^2 .
3. Ist $K = 0$, so ist $\chi(M) = 0$, d.h. M ist diffeomorph zum Torus oder zur Kleinschen Flasche.
4. Ist $K \leq 0$ aber nicht konstant 0, so ist $\chi(M) < 0$, d.h. M ist diffeomorph zu einer Sphäre mit mindestens 2 Henkeln oder mindestens 3 Möbiusbändern.

Beweis. Ist M nicht orientiert, so geht man zur Orientierungsüberlagerung über. Die Eulercharakteristik können wir aus [59.5](#) ablesen. Die zweiten Teile der Aussagen folgen dann aus den Klassifizierungssatz für kompakte orientierbare Flächen, als Sphären mit $g \geq 0$ Henkeln (wobei $\chi(M) = 2(1 - g)$ für das Geschlecht g gilt), und aus jenen für nicht orientierbare Flächen, als Sphären an denen $g > 0$ Möbiusbänder geklebt sind (wobei $\chi(M) = 2 - g$ für das Geschlecht g gilt). \square

Wir wollen die Integral-Formel von Gauß-Bonnet nun auf Flächen mit nicht geodätischem Rand verallgemeinern.

59.7 Bemerkung

Wir wählen geodätische Koordinaten φ auf M , d.h. $E = 1$ und $F = 0$. Somit ist $e_1 := \varphi_1$, $e_2 := \frac{1}{\sqrt{G}}\varphi_2$ eine Orthonormalbasis. Sei $t \mapsto u(t)$ die lokale Darstellung einer nach Bogenlänge parametrisierten Kurve c . Sei τ der Einheits-Tangententialvektor und ξ ein Tangentialvektor von M , welcher normal auf τ steht. Sei schließlich $K_g(t)$ die geodätische Krümmung $K_g(t) := \langle c''(t), \xi(t) \rangle$, vgl. [55.3](#). Beachte, daß $K_g = 0$ genau dann gilt, wenn $c''(t) \perp T_{c(t)}M$ ist, d.h. c eine Geodäte ist.

Lemma.

Es existiert eine bis auf $2\pi\mathbb{Z}$ eindeutige Funktion $\Theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\tau(t) = \cos \Theta(t) e_1(u(t)) + \sin \Theta(t) e_2(u(t))$ und es gilt:

$$K_g(t) = \Theta'(t) + \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u^1} \frac{du^2}{dt}.$$

Dies ist eine Verallgemeinerung der entsprechenden Formel $K(s) = \Theta'(s)$ aus [3.6](#) für Kurven in der Ebene und auch von [59.3](#) für Geodäten c .

Beweis. Wie in [3.9](#) ergibt sich die Existenz und Eindeutigkeit der Funktion Θ . Dann gilt

$$\xi(t) = -\sin(\Theta(t))e_1(u(t)) + \cos(\Theta(t))e_2(u(t)).$$

Aus $g(e_i, e_j) = \delta_{i,j}$ folgt: $g(\frac{d}{dt}e_i, e_j) + g(e_i, \frac{d}{dt}e_j) = 0$. Setzen wir nun die Darstellungen für $\tau' = c''$ und für ξ in der Formel für die geodätische Krümmung ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} K_g(t) &= \left\langle \Theta'(t)\xi(t) + \cos \Theta(t) \frac{d}{dt}e_1(u(t)) + \sin \Theta(t) \frac{d}{dt}e_2(u(t)), \xi(t) \right\rangle \\ &= \Theta' \langle \xi, \tau \rangle + \cos^2 \Theta \langle \frac{d}{dt}e_1, e_2 \rangle - \sin^2 \Theta \langle \frac{d}{dt}e_2, e_1 \rangle + \\ &\quad + \sin \Theta \cos \Theta (\langle \frac{d}{dt}e_2, e_2 \rangle - \langle \frac{d}{dt}e_1, e_1 \rangle) \\ &= \Theta'(t) + \left\langle \frac{d}{dt}e_1(u(t)), e_2(u(t)) \right\rangle. \end{aligned}$$

und weiters:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}e_1, e_2 \right\rangle &= \left\langle \varphi_{1,1} \frac{du^1}{dt} + \varphi_{1,2} \frac{du^2}{dt}, \frac{1}{\sqrt{G}}\varphi_2 \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\Gamma_{1,1,2} \frac{du^1}{dt} + \Gamma_{1,2,2} \frac{du^2}{dt} \right) = \frac{1}{2\sqrt{G}} \frac{\partial G}{\partial r} \frac{du^2}{dt} = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} \frac{du^2}{dt} \end{aligned}$$

und damit

$$K_g(t) = \Theta'(t) + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u^1} \frac{du^2}{dt}. \quad \square$$

59.8 Satz. Gauß-Bonnet für Polygone.

Sei $\varphi : U \rightarrow M$ eine Karte von M und sei P ein Polygon in U und α_i die Außenwinkel von $\varphi(P)$. Dann gilt:

$$\int_{\varphi(P)} K \operatorname{vol}_M + \int_{\varphi(\partial P)} K_g + \sum_i \alpha_i = 2\pi.$$

Beweis. Wir nehmen zuerst an, daß sich ganz $\varphi(P)$ durch geodätische Polarkoordinaten parametrisieren läßt. Es gilt dann

$$K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial r^2} = \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial r} (\sqrt{G} \cdot (-\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r})) + \frac{\partial}{\partial \theta} 0 \right) = \operatorname{div} \xi,$$

wobei $\xi := (-\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r}) \frac{\partial}{\partial r} + 0 \frac{\partial}{\partial \theta}$. Also gilt nach dem Greenschen Satz:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi(P)} K \operatorname{vol}_M &= \int_{\varphi(P)} \operatorname{div} \xi \operatorname{vol}_M \\ &= \int_{\varphi(\partial P)} \langle \xi, \nu_{\varphi(\partial P)} \rangle \operatorname{vol}_{\varphi(\partial P)} \\ &= \int_{\varphi(\partial P)} \sqrt{G} \xi^r d\theta - \sqrt{G} \xi^\theta dr \\ &= - \int_{\varphi(\partial P)} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} d\theta. \end{aligned}$$

Verwenden wir nun die Formel aus dem Lemma in [59.7](#) für die geodätische Krümmung der Randkurve, so erhalten wir für jede Seite I des Polygons:

$$- \int_{\varphi(I)} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial r} d\theta = \int_I \Theta'(t) dt - \int_I K_g(t) dt.$$

Wegen des Umlaufsatzes in der Ebene gilt im Falle der Euklidischen Metrik $G = 1$:

$$\sum_i \left(\int_{I_i} \Theta'(t) dt + \alpha_i \right) = 2\pi.$$

Eine allgemeine Riemann-Metrik können wir durch $G^s := s + (1-s)G$ affin mit der Euklidischen Metrik verbinden, und erhalten analog die Funktion Θ^s und die Winkel α_i^s , und diese hängen stetig von s ab. Da aber

$$\sum_i \left(\int_{I_i} (\Theta^s)' + \alpha_i^s \right) = \sum_i \left(\Theta^s(\max I_i) - \Theta^s(\min I_i) + \alpha_i^s \right) \in 2\pi\mathbb{Z}$$

gilt, muß dieser Ausdruck konstant in s sein, und stimmt somit überall mit seinem Wert 2π für $s = 1$ überein.

Liegt das Polygon nicht gänzlich in einer Karte, so unterteilt man es fein genug und wendet das Resultat für die einzelnen Teile an. Die Summe der Integrale über innere Kanten fällt weg, da diese genau zweimal und zwar mit entgegengesetzter Orientierung durchlaufen werden. Die Außenwinkel schreiben wir als π minus Innenwinkel, und erhalten für die Summe der Außenwinkel: Die Summe der Innenwinkel an den Randecken plus 2π mal die Anzahl E^0 der inneren Ecken, vermindert um 2π mal die Anzahl K^0 der inneren Kanten, plus π mal die Anzahl der Randkanten. Da genauso viele Randecken wie Randkanten existieren, d.h. $K - K^0 = E - E^0$ ist,

und die Summe der 2π auf der rechten Seite gerade $2\pi F$ ist, folgt so die allgemeine Formel. \square

60. Flächen konstanter Krümmung

60.1 Satz von Minding.

Zwei Riemann-Flächen gleicher konstanter Gauß-Krümmung sind lokal isometrisch.

Beweis. Wir wählen mittels [58.5](#) geodätische Polarkoordinaten in Punkten $p \in M$ und $\bar{p} \in \bar{M}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} G &= \langle \varphi_\theta, \varphi_\theta \rangle, & \bar{G} &= \langle \bar{\varphi}_\theta, \bar{\varphi}_\theta \rangle, \\ G(0, \theta) &= 0, & \bar{G}(0, \theta) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \sqrt{G}(r, \theta) &= 1, & \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{r=0} \sqrt{\bar{G}}(r, \theta) &= 1. \end{aligned}$$

Sowohl $\sqrt{G}(\cdot, \theta)$ als auch $\sqrt{\bar{G}}(\cdot, \theta)$ sind Lösungen γ der Jacobi-Gleichung [53.9](#)

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \gamma(r) = -K \cdot \gamma(r).$$

Eine solche ist durch Vorgabe von $\gamma(0) = 0$ und $\gamma'(0) = 1$ eindeutig bestimmt. Also haben die Riemann-Metriken in geodätischen Polarkoordinaten die gleichen Koeffizienten, und somit sind die Flächen lokal isometrisch.

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \longleftarrow \mathbb{R}^2 & \longrightarrow T_{\bar{p}} \bar{M} \\ \exp \downarrow \cong & \swarrow \varphi & \searrow \bar{\varphi} \cong \downarrow \exp \\ M & \cdots \cong & \bar{M} \end{array} \quad \square$$

Wir versuchen nun eine globale Version obigen Satzes zu geben. Ganz allgemein kann das aber nicht gelten. Z.B. ist die Ebene und die Kreisscheibe lokal aber nicht global isometrisch.

60.2 Definition (geodätisch vollständig)

Eine Riemann-Mannigfaltigkeit M heißt GEODÄTISCH VOLLSTÄNDIG, falls alle Geodäten unendlichlang sind. Da für die Länge einer nach der Bogenlänge parametrisierten Geodäte $c : [a, b] \rightarrow M$ folgendes gilt: $L(c) = \int_a^b |c'(t)| dt = \int_a^b 1 dt = b - a$, ist die Geodäte genau dann unendlichlang, wenn ihr Parameterintervall ganz \mathbb{R} ist.

60.3 Satz.

Je zwei abstrakte, einfachzusammenhängende, geodätisch vollständige Riemann-Flächen mit gleicher konstanter Gauß-Krümmung sind isometrisch isomorph.

Beweis. Wegen der Einfachzusammenhängendheit folgt dies aus den lokalen Resultat [60.1](#). \square

60.4 Folgerung

Jede einfachzusammenhängende, geodätisch vollständige, abstrakte Riemann-Fläche mit $K = 1$ ist bis auf Isometrien die Sphäre. Jede solche mit $K = -1$ ist bis auf Isometrien die Poincarésche Halbebene (bzw. hyperbolischen Scheibe) und jede derartige mit $K = 0$ ist die Ebene. Vergleiche das mit dem Riemannschen Abbildungssatz [35.1](#) sowie dem Uniformisierungssatz [36.2](#).

Durch Übergang zur universellen Überlagerung folgt wegen des Klassifizierungssatzes, daß jede Riemann-Fläche der Orbitraum einer auf einer einfachzusammenhängenden Riemann-Fläche mit diskret wirkenden Gruppe von konformen Abbildungen ist.

Die einzige nicht triviale, auf der Sphäre diskret wirkende Gruppe, ist die von der Antipodalabbildung erzeugte. Es gibt also nur zwei Flächen mit konstanter Gauß-Krümmung $K > 0$, nämlich die Sphäre und die projektive Ebene. Die Geometrie der projektiven Ebene wird auch elliptisch genannt, in ihr sind alle Geodäten geschlossen.

Es gibt auf der Ebene nur folgende diskret wirkende Gruppen:

1. die von einer Translation erzeugten,
2. die von einer Translation und einer Spiegelung erzeugten,
3. die von zwei Translationen erzeugten,
4. die von zwei Translationen und einer Spiegelung erzeugten.

Im Falle $K = 0$ gibt es also nur auf dem Zylinder, dem Möbiusband, dem Torus und der Kleinschen Flasche eine Metrik mit verschwindender Gauß-Krümmung.

Jede kompakte Fläche vom Geschlecht $g \geq 2$ besitzt eine Metrik mit konstant negativer Krümmung, siehe [\[6, S. 408\]](#).

Nach Cohn Vossen 1927 und [\[39\]](#) (siehe [\[51, S.105\]](#)) können zwei isometrische Flächen im \mathbb{R}^3 von strikt positiver Gauß-Krümmung durch eine Bewegung ineinander übergeführt werden.

Kann man eine Fläche deformieren ohne ihre Metrik zu ändern? Ein Gegenbeispiel dazu wurde von Efimov gegeben: $\varphi(t, s) := t^9 + \lambda t^7 s^2 + s^9$ kann nicht einmal lokal deformiert werden falls λ transzendent ist, siehe [\[6, S.428\]](#).

60.5 Theorem (Flächen konstanter Krümmung).

Sei M eine abgeschlossene, zusammenhängende 2-Fläche im \mathbb{R}^3 mit konstanter Gauß-Krümmung K , dann gilt:

1. Ist $K > 0$, so ist M eine Sphäre [\[64\]](#).
2. Ist $K = 0$, so ist M ein verallgemeinerter Zylinder Massey 1962, Hartman Nirenberg 1959.
3. Ist $K < 0$, so existiert M nicht [\[40\]](#). Dies wurde durch Efimov verallgemeinert zu: Es gibt keine abgeschlossene Fläche mit einer, nach oben durch ein Konstante $k < 0$ beschränkte Gauß-Krümmung.

Ohne Beweis.

60.6 Lemma.

Ist M kompakt, so existiert ein Punkt wo die Gauß-Krümmung positiv ist.

Beweis. Das ist offensichtlich, da die Fläche in jedem Berührungspunkt mit der ‘‘Um-sphäre’’ positive Krümmung hat. \square

60.7 Folgerung.

Es gibt keine kompakte Minimalfläche.

61. Paralleltransport

Als nächstes versuchen wir irgendeine Kurve c auf der Fläche entlangzugehen und dabei einen Vektor möglichst parallel zu bewegen, d.h. seine Richtung so wenig wie möglich zu verändern.

61.1 Definition (Paralleles Vektorfeld)

Ein Vektorfeld längs einer Kurve c heißt PARALLEL, falls seine skalare Geschwindigkeit punktweise minimal ist.

61.2 Lemma (Charakterisierung von parallelen Vektorfeldern).

Ein Vektorfeld w längs einer Kurve c auf M ist genau dann parallel, wenn $w'(t) \in T_{c(t)}M^\perp$ für alle t .

Beweis. Aus $w(t) \in T_{c(t)}M$ folgt $\langle w(t), v(t) \rangle = 0$, mit $v(t) := \nu(c(t))$. Differenzieren wir diese Gleichung nach t , so erhalten wir

$$\langle w'(t), v(t) \rangle + \langle w(t), v'(t) \rangle = 0.$$

Damit $|w'(t)|$ minimal wird muß wegen

$$|w'(t)|^2 = |w'(t) - \langle w'(t), v(t) \rangle v(t)|^2 + |\langle w'(t), v(t) \rangle|^2$$

bei vorgegebenen Normalanteil $\langle w'(t), v(t) \rangle = -\langle w(t), v'(t) \rangle$ der tangentielle Anteil $w'(t) - \langle w'(t), v(t) \rangle v(t)$ möglichst klein, am besten 0 werden, d.h. es ist $w'(t) = \langle w'(t), v(t) \rangle v(t)$, oder mit anderen Worten $w'(t) \in T_{c(t)}M^\perp$. \square

Insbesondere gilt:

61.3 Lemma.

Eine proportional zur Bogenlänge parametrisierte Kurve c ist genau dann eine Geodäte, wenn das Vektorfeld c' parallel längs c ist.

61.4 Parallele Vektorfelder in lokalen Koordinaten

Sei φ eine lokale Parametrisierung von M und $t \mapsto u(t)$ die lokale Darstellung einer Kurve $c = \varphi \circ u$. Die Differentialgleichung für ein längs c paralleles Vektorfeld $t \mapsto w(t)$ bestimmen wir wie folgt:

$$\begin{aligned} w(t) &= \sum_{i=1}^m w^i(t) \cdot (\partial_i \varphi)(u(t)) \Rightarrow \\ \Rightarrow w' &= \sum_i \frac{dw^i}{dt} \cdot \varphi_i + \sum_{i,j} w^i \cdot \varphi_{i,j} \frac{du^j}{dt} \\ &\stackrel{58.2}{=} \sum_i \frac{dw^i}{dt} \cdot \varphi_i + \sum_{i,j,k} \frac{du^j}{dt} w^i \cdot \left(\Gamma_{i,j}^k \cdot \varphi_k + \langle \varphi_{i,j} | \nu \rangle \nu \right) \in \\ &\in \sum_k \left(\frac{dw^k}{dt} + \sum_{i,j} w^i \frac{du^j}{dt} \Gamma_{i,j}^k \right) \varphi_k + \mathbb{R} \cdot \nu. \end{aligned}$$

Also ist w parallel längs c genau dann, wenn

$$\frac{dw^k}{dt}(t) + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^k(u(t)) \cdot w^i(t) \cdot \frac{du^j}{dt}(t) = 0 \text{ für } k = 1, \dots, m.$$

oder kurz:

$$\dot{w}^k + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k w^i \dot{u}^j = 0 \text{ für } k = 1, \dots, m.$$

Dieses System gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen hat bei vorgegebenen Anfangsdaten $w^k(0)$ eine eindeutige globale Lösung.

61.5 Lemma (Existenz paralleler Vektorfelder).

Zu jeder glatten Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ und Anfangsvektor $w_0 \in T_{c(0)}M$ existiert eine eindeutig bestimmte parallele Kurve $w : \mathbb{R} \rightarrow TM$ mit $w(t) \in T_{c(t)}M$ für alle t und $w(0) = w_0$.

Wir bezeichnen mit $\text{ptp}(c, t)(v_0)$ die parallele Kurve v über c mit Anfangswert v_0 zum Zeitpunkt t . Man nennt das auch den PARALLELTRANSPORT längs c . Für diesen gilt:

1. $\text{ptp}(c, t) : T_{c(0)}M \rightarrow T_{c(t)}M$ ist eine Isometrie
2. $\text{ptp}(c, t)^{-1} = \text{ptp}(c, \cdot + t), -t)$
3. $\text{ptp}(c, g(t)) = \text{ptp}(c \circ g, t) \circ \text{ptp}(c, g(0))$ für $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Beweis. Eine zweite Möglichkeit die Existenz und Eindeutigkeit zu zeigen ist die folgende: w ist eine parallele Kurve genau dann, wenn $0 = \nabla w := w' - \langle w', \nu \circ c \rangle \nu \circ c$. Das ist eine gewöhnliche lineare Differentialgleichung 1.ter Ordnung, und somit existiert eine, durch den Anfangswert eindeutig bestimmte, globale Lösung w .

Verbleibt zu zeigen, daß $w(t) \in T_{c(t)}M$:

Da $\langle w, \nu \circ c \rangle' = \langle w', \nu \circ c \rangle + \langle w, (\nu \circ c)' \rangle = 0$ für eine Lösung ist, ist $\langle w, \nu \circ c \rangle$ konstant gleich $\langle w, \nu \circ c \rangle(0) = \langle w_0, \nu_{c(0)} \rangle = 0$. D.h. $w(t) \in \nu_{c(t)}^\perp = T_{c(t)}M$.

(1) Klarerweise ist die Lösung $\text{ptp}(c, \cdot)(v_0)$ einer linearen Differentialgleichung vom Anfangswert v_0 linear abhängig. Es gilt

$$\langle \xi, \eta \rangle' = \langle \xi', \eta \rangle + \langle \xi, \eta' \rangle = 0 + 0,$$

falls ξ und η parallele Vektorfelder längs c sind, d.h. $\xi', \eta' \in TM^\perp$. Also ist $\langle \xi, \eta \rangle$ konstant und $\text{ptp}(c, t)$ eine Isometrie.

(2) und (3) folgen leicht aus der Eindeutigkeit der Lösungen von linearen Differentialgleichungen. \square

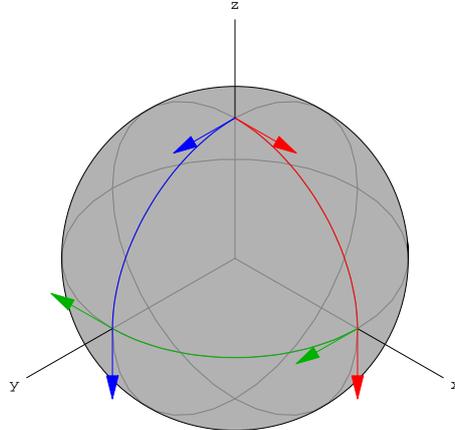
61.6 Beispiel

1. In jeder Hyperebene sind genau die konstanten Vektorfelder die parallelen, da die Ableitung eines Vektorfelds wieder in der Ebene liegt.
2. Folglich sind auf Torsen die parallelen Vektorfelder, gerade die konstanten Vektorfelder in einer Abwicklung der Torse in die Ebene.



3. Parallele Vektorfelder längs geschlossener Kurven können sehr wohl verschiedene Anfangs- und Endwerte besitzen: Man starte auf dem Nordpol der Sphäre und transportiere einen Vektor in Richtung eines Meridians bis zum Äquator. Dann transportiere man diesen auf den Äquator normal stehenden Vektor entlang des Äquators bis zu einem anderen Meridian, und transportiere ihn schließlich längs dieses anderen Meridians wieder zum Nordpol.

Dort schließt der transportierte Vektor mit seiner Ausgangslage genau den Winkel der beiden Meridiane ein.



Eine allgemeine Konstruktionsmöglichkeit für parallele Vektorfelder ist die folgende:

61.7 Satz (Parallelität via Schmiegtorse).

Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine Kurve auf M die eine Schmiegtorse besitzt, dann gilt: Ein Vektorfeld ist parallel längs c in M genau dann, wenn es parallel längs c in der Schmiegtorse ist.



Beweis. Die Schmiegtorse ist nach [55.6](#) lokal durch $\varphi(t, s) = c(s) + t\xi(s)$ gegeben, wobei ξ ein (das) Vektorfeld längs c ist, welches normal auf $L c'$ steht. Klarerweise ist der Tangentialraum in $c(t)$ von M identisch mit jenem der Schmiegtorse und somit ein Vektorfeld η längs c tangential an M genau dann, wenn es tangential an die Schmiegtorse ist. Also sieht die Bedingung "parallel zu sein" für beide Flächen gleich aus. \square

61.8 Definition (Holonomie)

Die Untergruppe

$$\{\text{ptp}(c, 2\pi) : c \text{ ist geschlossene Kurve durch } x\}$$

der Gruppe $O(T_x M)$ heißt HOLONOMIE-GRUPPE von M (bei x). Sie ist eine Lie-Gruppe und für verschiedene x in einem zusammenhängenden M sind diese Untergruppen isomorph. Z.B. ist die Holonomiegruppe der S^2 gerade die $SO(2) \cong S^1$.

Wir werden in [64.12](#) charakterisieren, wann diese Gruppe trivial ist.

62. Kovariante Ableitung

Leider steckt in den obigen Beschreibungen für die Geodäten und die parallelen Vektorfelder noch die Flächen-Normale und damit der umgebende Vektorraum.

Diese Begriffe sollten aber auch für abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeiten Sinn machen.

Anstatt zu sagen, daß ein Vektor wie w' normal auf die Fläche steht, können wir auch sagen, daß seine tangentielle Komponente, d.h. seine Projektion auf den Tangentialraum verschwindet.

62.1 Definition (Kovariante Ableitung)

Sei w ein Vektorfeld längs einer Kurve c in M , d.h. $w(t) \in T_{c(t)}M$ für alle t . Dann wollen wir die Normal-Projektion auf den Tangentialraum der Ableitung des Vektorfelds die KOVARIANTE ABLEITUNG ∇ (sprich "Nabla" oder "Del") nennen und mit

$$\nabla w : t \mapsto w'(t) - \langle w'(t), \nu_{c(t)} \rangle \nu_{c(t)} \in T_{c(t)}M$$

bezeichnen. Diese mißt also die infinitesimale Änderung von w , wie sie in M gesehen wird, und ignoriert jene Komponente, die auf M normal steht.

Die Formel für die kovariante Ableitung ∇ eines Vektorfelds w längs einer Kurve $c = \varphi \circ u$ sieht nach [61.4](#) in lokalen Koordinaten wie folgt aus:

$$\nabla w = \sum_{k=1}^m \left(\frac{dw^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k w^i \frac{du^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^k},$$

wobei $w = \sum_k w^k \frac{\partial}{\partial u^k}$.

Man beachte, daß die Geodäten genau die Lösungen der Gleichung $\nabla c' = 0$ sind (wobei c' als Vektorfeld längs c aufzufassen ist), und die Vektorfelder w , die parallel längs einer Kurve c sind, genau die Lösungen der Gleichung $\nabla w = 0$ sind.

Es gelten folgende Formeln für ∇ :

$$\begin{aligned} \nabla(\xi + \eta) &= \nabla\xi + \nabla\eta \\ \nabla(f \cdot \xi) &= f \cdot \nabla\xi + f' \cdot \xi \\ \langle \xi, \eta \rangle' &= \langle \nabla\xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla\eta \rangle, \end{aligned}$$

denn

$$\begin{aligned} \nabla(f \xi) &= (f' \xi + f \xi') - \langle f' \xi + f \xi', \nu \rangle \nu = f' \xi - 0 + f \nabla\xi, \\ \langle \xi, \eta \rangle' &= \langle \xi', \eta \rangle + \langle \xi, \eta' \rangle = \langle \nabla\xi + \langle \xi', \nu \rangle \nu, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla\eta + \langle \eta', \nu \rangle \nu \rangle \\ &= \langle \nabla\xi, \eta \rangle + \langle \xi, \nabla\eta \rangle \quad \text{da } \langle \nu, \eta \rangle = 0 = \langle \xi, \nu \rangle. \end{aligned}$$

62.2 Gaußgleichung.

Für den Nabla-Operator gilt:

$$\nabla w = w' + \langle Lc', w \rangle \nu \circ c.$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus $\langle w, \nu \circ c \rangle = 0$ durch Differenzieren. \square

62.3 Definition

Seien nun zwei Vektorfelder ξ und η auf M gegeben, dann können wir $\nabla_\eta \xi \in \mathfrak{X}(M)$ als $(\nabla_\eta \xi)(x) = \nabla(\xi \circ c)(0)$ definieren, wobei c eine Integralkurve des Vektorfelds η mit der Anfangsbedingung $c(0) = x$ ist.

Das läßt sich auch wie folgt schreiben:

$$(\nabla_\eta \xi)_x = \xi'(x) \cdot \eta_x - \langle \xi'(x) \cdot \eta_x, \nu_x \rangle \nu_x = \xi'(x) \cdot \eta_x + \langle \xi(x) | L_x \cdot \eta_x \rangle \nu_x.$$

62.4 Lemma (Eigenschaften der kovarianten Ableitung).

Der Operator ∇ geht von $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ nach $\mathfrak{X}(M)$ und hat folgende Eigenschaften.

1. ∇ ist bilinear.
2. $\nabla_\eta \xi$ ist $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear in η .
3. $\nabla_\eta(f\xi) = f\nabla_\eta \xi + \eta(f)\xi$ für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.
4. $\nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta = [\eta, \xi]$.
5. $\eta \langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \nabla_\eta \xi_1, \xi_2 \rangle + \langle \xi_1, \nabla_\eta \xi_2 \rangle$.

Beweis. (1) und (2) sind klar.

Zu (3):

$$\begin{aligned} (\nabla_\eta(f\xi))(x) &= (f\xi)'(x) \cdot \eta_x - \langle (f\xi)'(x) \cdot \eta_x | \nu_x \rangle \nu_x \\ &= f'(x)(\eta_x) \cdot \xi_x + f(x) \cdot \xi'(x) \cdot \eta_x - \left\langle f'(x)(\eta_x) \cdot \xi_x + f(x) \cdot \xi'(x) \cdot \eta_x \mid \nu_x \right\rangle \nu_x \\ &= \eta(f)(x) \cdot \xi_x + f(x) \cdot \xi'(x) \cdot \eta_x - 0 - f(x) \langle \xi'(x) \cdot \eta_x | \nu_x \rangle \nu_x \\ &= (\eta(f) \cdot \xi)(x) + f(x) \cdot (\nabla_\eta \xi)(x) \\ &= \left(\eta(f) \cdot \xi + f \cdot \nabla_\eta \xi \right)(x) \end{aligned}$$

Zu (4): Wegen der Gaußgleichung und der Symmetrie von L gilt:

$$\begin{aligned} (\nabla_\eta \xi - \nabla_\xi \eta)(x) &= (\xi'(x) \cdot \eta_x + \langle L_x \eta_x, \xi_x \rangle \nu_x) - (\eta'(x) \cdot \xi_x + \langle L_x \xi_x, \eta_x \rangle \nu_x) \\ &= [\eta, \xi](x) + 0. \end{aligned}$$

Zu (5):

$$\begin{aligned} \left(\langle \nabla_\eta \xi_1 | \xi_2 \rangle + \langle \nabla_\eta \xi_2 | \xi_1 \rangle \right)(x) &= \left\langle \xi_1'(x)(\eta_x) - \langle \xi_1'(x)(\eta_x) | \nu_x \rangle \nu_x \mid \xi_2(x) \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \xi_2'(x)(\eta_x) - \langle \xi_2'(x)(\eta_x) | \nu_x \rangle \nu_x \mid \xi_1(x) \right\rangle \\ &= \langle \xi_1'(x)(\eta_x) | \xi_2(x) \rangle + \langle \xi_2'(x)(\eta_x) | \xi_1(x) \rangle \\ &= (\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle)'(x) \cdot \eta_x = \eta(\langle \xi_1 | \xi_2 \rangle)(x). \quad \square \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, daß es so einen Differentialoperator auch auf abstrakten Riemann-Mannigfaltigkeiten gibt, und er durch die obigen Eigenschaften eindeutig bestimmt ist.

62.5 Satz (Levi-Civita Ableitung).

Sei M eine (abstrakte) Riemann-Mannigfaltigkeit. Dann gibt es genau eine Abbildung $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$, welche obige Eigenschaften (1)-(5) erfüllt, wobei das innere Produkt in (5) durch die Riemann-Metrik zu ersetzen ist. Diese Abbildung heißt KOVARIANTE ABLEITUNG, oder auch LEVI-CIVITA-ZUSAMMENHANG.

(Koordinatenfreie) Beweis. Wegen (5) gilt:

$$\begin{aligned} \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) &= g(\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3) + g(\xi_2, \nabla_{\xi_1} \xi_3) & (+) \\ \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) &= g(\nabla_{\xi_2} \xi_3, \xi_1) + g(\xi_3, \nabla_{\xi_2} \xi_1) & (+) \\ \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) &= g(\nabla_{\xi_3} \xi_1, \xi_2) + g(\xi_1, \nabla_{\xi_3} \xi_2) & (-). \end{aligned}$$

Daraus folgt durch Addieren der ersten beiden und Subtrahieren der 3.ten Gleichung unter Verwendung von (4):

$$\begin{aligned} \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) &= \\ &= g(\nabla_{\xi_1} \xi_2 + \nabla_{\xi_2} \xi_1, \xi_3) + g(\nabla_{\xi_1} \xi_3 - \nabla_{\xi_3} \xi_1, \xi_2) + g(\nabla_{\xi_2} \xi_3 - \nabla_{\xi_3} \xi_2, \xi_1) \\ &= g(2\nabla_{\xi_1} \xi_2 - [\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) + g([\xi_2, \xi_3], \xi_1). \end{aligned}$$

Und somit

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3) &= \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2). \end{aligned}$$

Da die rechte Seite linear in ξ_3 ist, ist $\nabla_{\xi_1} \xi_2$ durch diese implizite Gleichung wohldefiniert. Da die rechte Seite auch bilinear in (ξ_1, ξ_2) ist, hat ∇ die Eigenschaft (1).

Nun zur Eigenschaft (2):

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{f\xi_1} \xi_2, \xi_3) &= f\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, f\xi_1) - \xi_3 g(f\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g([f\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], f\xi_1) + g([\xi_3, f\xi_1], \xi_2) \\ &= f\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + f\xi_2 g(\xi_3, \xi_1) + \xi_2 (f)g(\xi_3, \xi_1) \\ &\quad - f\xi_3 g(\xi_1, \xi_2) - \xi_3 (f)g(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g(f[\xi_1, \xi_2] - \xi_2 (f)\xi_1, \xi_3) - f g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) \\ &\quad + g(f[\xi_3, \xi_1] + \xi_3 (f)\xi_1, \xi_2) \\ &= f\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + f\xi_2 g(\xi_3, \xi_1) + \xi_2 (f)g(\xi_3, \xi_1) \\ &\quad - f\xi_3 g(\xi_1, \xi_2) - \xi_3 (f)g(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + f g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - \xi_2 (f)g(\xi_1, \xi_3) - f g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) \\ &\quad + f g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) + \xi_3 (f)g(\xi_1, \xi_2) \\ &= f(\xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2)) \\ &= 2f g(\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3). \end{aligned}$$

Eine sehr ähnliche Rechnung zeigt die Eigenschaft (3).

Weiter zu Eigenschaft (4):

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\xi_1} \xi_2 - \nabla_{\xi_2} \xi_1, \xi_3) &= \\ &= \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) \\ &\quad - \xi_2 g(\xi_1, \xi_3) - \xi_1 g(\xi_3, \xi_2) + \xi_3 g(\xi_2, \xi_1) \\ &\quad - g([\xi_2, \xi_1], \xi_3) + g([\xi_1, \xi_3], \xi_2) - g([\xi_3, \xi_2], \xi_1) \\ &= 2g([\xi_1, \xi_2], \xi_3). \end{aligned}$$

Schlußendlich Eigenschaft (5):

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_{\xi_1} \xi_2, \xi_3) + 2g(\xi_2, \nabla_{\xi_1} \xi_3) &= \\ &= \xi_1 g(\xi_2, \xi_3) + \xi_2 g(\xi_3, \xi_1) - \xi_3 g(\xi_1, \xi_2) \\ &\quad + g([\xi_1, \xi_2], \xi_3) - g([\xi_2, \xi_3], \xi_1) + g([\xi_3, \xi_1], \xi_2) \\ &\quad + \xi_1 g(\xi_3, \xi_2) + \xi_3 g(\xi_2, \xi_1) - \xi_2 g(\xi_1, \xi_3) \\ &\quad + g([\xi_1, \xi_3], \xi_2) - g([\xi_3, \xi_2], \xi_1) + g([\xi_2, \xi_1], \xi_3) \\ &= 2\xi_1 g(\xi_2, \xi_3). \quad \square \end{aligned}$$

Koordinatenbeweis. Es ist zu zeigen, daß der lokale Ausdruck für ∇ unabhängig von den gewählten Koordinaten ist.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u^i} &:= \varphi_i \\
\frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} &= \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
g_{i,j} &:= \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle := g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\
\bar{g}_{i,\bar{j}} &= \left\langle \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle = \sum_{i,j} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} g_{i,j} \\
\Gamma_{i,j,k} &:= \frac{1}{2} \left(\partial_i(g_{j,k}) + \partial_j(g_{i,k}) - \partial_k(g_{i,j}) \right) \\
\frac{\partial \bar{g}_{j,\bar{k}}}{\partial \bar{u}^i} &= \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} \left(\sum_{j,k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} g_{j,k} \right) \\
&= \sum_{j,k} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} \left(\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \right) \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} \left(\frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} \right) g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} (g_{j,k}) \right) \\
&= \sum_{j,k} \left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^k} g_{j,k} + \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i} \right) \\
\bar{\Gamma}_{i,\bar{j},\bar{k}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{u}^i} (g_{j,\bar{k}}) + \frac{\partial}{\partial \bar{u}^j} (g_{i,\bar{k}}) - \frac{\partial}{\partial \bar{u}^k} (g_{i,\bar{j}}) \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\sum_{j,k} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} g_{j,k} \right)}_{(1)} + \underbrace{\left(\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^k} g_{j,k} \right)}_{(2)} + \underbrace{\left(\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i} \right)}_{(3)} \right) \\
&\quad + \sum_{i,k} \left(\underbrace{\left(\frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^j \partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} g_{i,k} \right)}_{(1)} + \underbrace{\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial^2 u^k}{\partial \bar{u}^j \partial \bar{u}^k} g_{i,k} \right)}_{(4)} + \underbrace{\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} \sum_j \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial g_{i,k}}{\partial u^j} \right)}_{(3)} \right) \\
&\quad - \sum_{j,i} \left(\underbrace{\left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^k \partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} g_{j,i} \right)}_{(4)} + \underbrace{\left(\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^k \partial \bar{u}^i} g_{j,i} \right)}_{(2)} + \underbrace{\left(\frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \sum_k \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} \frac{\partial g_{j,i}}{\partial u^k} \right)}_{(3)} \right) \\
&= \sum_{j,k} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} g_{j,k} \right)}_{(1)} + \sum_{i,j,k} \underbrace{\left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{j,k}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i,k}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{j,i}}{\partial u^k} \right) \right)}_{(3)} \\
&= \sum_{j,k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^i \partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} g_{j,k} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^j} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^k} \Gamma_{i,j,k} \\
\delta_i^j &= \sum_i \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^i} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^i} \\
\delta_k^i &:= \sum_j g^{i,j} g_{j,k} \\
\bar{g}^{i,\bar{j}} &= \sum_{i,j} \frac{\partial \bar{u}^i}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^j}{\partial u^j} g^{i,j}, \text{ denn}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{\bar{j}} \bar{g}^{\bar{i},\bar{j}} \bar{g}_{\bar{j},\bar{k}} &= \sum_{\bar{j}} \sum_{i,j} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} g^{i,j} \sum_{l,k} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{l,k} \\ &= \underbrace{\sum_{i,k} \sum_{j,l} \underbrace{\sum_{\bar{j}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^j} \frac{\partial u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}}_{\delta_j^l} g^{i,j} g_{l,k}}_{\delta_k^i} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\delta_{\bar{k}}^{\bar{i}}} \end{aligned}$$

$$\Gamma_{i,j}^k := \sum_l \Gamma_{i,j,l} g^{l,k}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j}}^{\bar{l}} &= \sum_{\bar{k}} \bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j},\bar{k}} \bar{g}^{\bar{k},\bar{l}} \\ &= \sum_{\bar{k}} \left(\sum_{j,k} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} g_{j,k} + \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \Gamma_{i,j,k} \right) \sum_{p,q} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q} g^{p,q} \\ &= \sum_{j,q} \frac{\partial^2 u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q} \underbrace{\sum_{k,p} \sum_{\bar{k}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p}}_{=\delta_p^k} g_{j,k} g^{p,q} \\ &\quad + \sum_{i,j,q} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^q} \underbrace{\sum_{p,k} \sum_{\bar{k}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^p}}_{=\delta_p^k} \Gamma_{i,j,k} g^{p,q} \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=\Gamma_{i,j}^q} \end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j,l} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l} \Gamma_{i,j}^l + \sum_l \frac{\partial^2 u^l}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{l}}}{\partial u^l}$$

$$\delta_j^i = \sum_{\bar{i}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j} \Rightarrow$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^k} \delta_j^i$$

$$= \sum_{\bar{i}} \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \right) \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j} + \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \right)$$

$$= \sum_{\bar{i},\bar{k}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \left(\frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \right) \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j} + \sum_{\bar{i}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k}$$

$$= \sum_{\bar{i},\bar{k}} \frac{\partial^2 u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}} \partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^k} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j} + \sum_{\bar{i}} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \Rightarrow$$

$$\bar{\Gamma}_{\bar{i},\bar{j}}^{\bar{k}} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^k} \Gamma_{i,j}^k - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{k}}}{\partial u^i \partial u^j} \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}$$

Sei nun eine Kurve $c: \mathbb{R} \rightarrow M$ gegeben in lokalen Koordinaten durch

$$c(t) = \varphi(u^1(t), \dots, u^m(t)) = \bar{\varphi}(\bar{u}^1(t), \dots, \bar{u}^m(t))$$

und $w : \mathbb{R} \rightarrow TM$ ein Vektorfeld längs c , d.h. $w(t) \in T_{c(t)}M$. In lokalen Koordinaten ist

$$w(t) = \sum_i w^i(t) \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_{\bar{i}} \bar{w}^{\bar{i}}(t) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} = \sum_{\bar{i}, i} \bar{w}^{\bar{i}}(t) \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \frac{\partial}{\partial u^i}$$

und Koeffizientenvergleich liefert

$$w^i(t) = \sum_{\bar{i}} \bar{w}^{\bar{i}}(t) \frac{\partial u^i}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}.$$

Die Normalprojektion der Ableitung von w auf den Tangentialraum ist in den lokalen Koordinaten (u^1, \dots, u^m) durch

$$\sum_i \left(\frac{dw^i(t)}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) w^j(t) \frac{du^k(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^i}$$

gegeben. In den Koordinaten $(\bar{u}^1, \dots, \bar{u}^m)$ ist

$$\begin{aligned} & \sum_{\bar{i}} \left(\frac{d\bar{w}^{\bar{i}}(t)}{dt} + \sum_{\bar{j}, \bar{k}} \Gamma_{\bar{j}, \bar{k}}^{\bar{i}}(u(t)) \bar{w}^{\bar{j}}(t) \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} = \\ &= \sum_{\bar{i}} \left(\frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i}(u(t)) w^i(t) + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\bar{j}, \bar{k}} \left(\sum_{j,k,i} \Gamma_{j,k,i}^{\bar{i}}(u(t)) \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} - \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \right) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \sum_l \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^l} w^l(t) \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \\ &= \sum_{\bar{i}} \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i \partial u^j}(u(t)) \frac{du^j(t)}{dt} w^i(t) + \sum_i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i}(u(t)) \frac{dw^i(t)}{dt} + \right. \\ & \quad \left. + \sum_{\bar{j}, \bar{k}} \left(\sum_{j,k,i} \Gamma_{j,k,i}^{\bar{i}}(u(t)) \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i} - \sum_{j,k} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \right) \cdot \right. \\ & \quad \left. \cdot \sum_l \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^l} w^l(t) \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \\ &= \sum_{\bar{i}} \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i \partial u^j} \frac{du^j}{dt} w^i + \sum_i \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i}(u(t)) \frac{dw^i(t)}{dt} \right. \\ & \quad \left. + \sum_{k,i} \sum_{l,j} \Gamma_{j,k}^i \underbrace{\sum_{\bar{j}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^l}}_{\delta_l^j} w^l \underbrace{\sum_{\bar{k}} \frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}}{dt} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^i}}_{\frac{d\bar{u}^{\bar{k}}}{dt}} \right. \\ & \quad \left. - \sum_k \sum_{\bar{k}} \underbrace{\frac{\partial u^k}{\partial \bar{u}^{\bar{k}}} \frac{d\bar{u}^{\bar{k}}}{dt}}_{\frac{d\bar{u}^{\bar{k}}}{dt}} \sum_{j,l} \frac{\partial^2 \bar{u}^{\bar{i}}}{\partial u^j \partial u^k} \underbrace{\sum_{\bar{j}} \frac{\partial u^j}{\partial \bar{u}^{\bar{j}}} \frac{\partial \bar{u}^{\bar{j}}}{\partial u^l}}_{\delta_l^j} w^l \right) \frac{\partial}{\partial \bar{u}^{\bar{i}}} \\ &= \sum_i \left(\frac{dw^i(t)}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) w^j(t) \frac{du^k(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \end{aligned}$$

also ist dieser Ausdruck auch für eine abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeit wohldefiniert. Wir nennen diesen Ausdruck die kovariante Ableitung ∇w eines Vektorfelds w längs einer Kurve c , d.h.

$$\nabla w(t) := \sum_i \left(\frac{dw^i(t)}{dt} + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i(u(t)) w^j(t) \frac{du^k(t)}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^i}(u(t)).$$

Für Vektorfelder X und Y auf M können wir nun ein Vektorfeld $\nabla_X Y$ durch

$$(\nabla_X Y)_x := \nabla(Y \circ c),$$

wobei c die Integralkurve von X durch x ist. Es ist somit $\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ eine wohldefinierte bilineare Abbildung. In Koordinaten haben wir

$$\nabla_X Y = \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Y^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Y^j X^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i}. \quad \square$$

62.6 Lokale Formeln für ∇

Wählen wir für ξ_1, ξ_2 und ξ_3 Basisvektorfelder $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$, $g_j := \frac{\partial}{\partial u^j}$ und $g_k := \frac{\partial}{\partial u^k}$, so erhalten wir eine lokale Formel für ∇ :

$$2g(\nabla_{g_i} g_j, g_k) = \frac{\partial}{\partial u^i} g_{j,k} + \frac{\partial}{\partial u^j} g_{k,i} - \frac{\partial}{\partial u^k} g_{i,j} + 0 =: 2\Gamma_{i,j,k}$$

Das ist gerade die Formel für die Christoffelsymbole der 1.ten Art.

Bezeichnen wir die Koeffizienten von $\nabla_{g_i} g_j$ bezüglich der Basis (g_l) mit $\Gamma_{i,j}^l$, also

$$\nabla_{g_i} g_j = \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_k,$$

so erhalten wir:

$$\Gamma_{i,j,k} = g(\nabla_{g_i} g_j, g_k) = g \left(\sum_l \Gamma_{i,j}^l g_l, g_k \right) = \sum_l \Gamma_{i,j}^l g_{l,k}.$$

D.h. die $\Gamma_{i,j}^l$ sind die Christoffel-Symbole der 2.ten Art (siehe [58.2](#)).

Man beachte noch, daß aus der Symmetrie von $g_{i,j}$ folgende Umkehrformel für die partiellen Ableitungen der Koeffizienten der Riemann-Metrik folgt:

$$\frac{\partial}{\partial u^i} g_{j,k} = \Gamma_{i,j,k} + \Gamma_{i,k,j}.$$

Wegen Eigenschaft [62.4.2](#) ist $\nabla_X Y$ tensoriell in X , d.h. $(\nabla_X Y)(p)$ hängt nur von X_p und Y ab: Sei nämlich vorerst $X = 0$ lokal um p und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f(p) = 1$ und $f \cdot X = 0$, dann ist

$$0 = (\nabla_{fX} Y)(p) = f(p) \cdot (\nabla_X Y)(p) = (\nabla_X Y)(p)$$

und ist nur $X_p = 0$ so ist somit

$$(\nabla_X Y)(p) = (\nabla_{\sum_i X(u^i) \frac{\partial}{\partial u^i}} Y)(p) = \sum_i X_p(u^i) \cdot (\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} Y)(p) = 0.$$

Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ eine Kurve mit $c'(0) = X_p$. Dann ist also $(\nabla_{c'(0)}Y)(p)$ wohldefiniert und in lokalen Koordinaten gegeben durch

$$\begin{aligned} (\nabla_{c'(0)}Y)(p) &= \nabla_{\sum_j \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \frac{\partial}{\partial u^j}(p)} \left(\sum_{i=1}^m Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \right)(p) = \\ &= \sum_{j,i} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p Y^i \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p + Y^i(p) \cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}(p)} \frac{\partial}{\partial u^i}(p) \right) \\ &= \sum_i \left(\sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_p Y^i \cdot \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) \right) \cdot \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \\ &\quad + \sum_{i,j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(0) Y^i(p) \Gamma_{j,i|p}^k \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_p \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck macht aber sogar für ein Vektorfeld Y längs c Sinn, d.h. $Y(t) \in T_{c(t)}M$ für alle $t \in \mathbb{R}$, denn dann ist nach der Kettenregel

$$\sum_j \frac{\partial}{\partial u^j} \Big|_{c(t)} Y^i \cdot \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) = \frac{dY^i}{dt}(t)$$

und somit ist

$$(\nabla_{c'(t)}Y)(t) = \sum_i \left(\frac{dY^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) Y^k(t) \Gamma_{j,k|c(t)}^i \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_{c(t)}.$$

62.7 Bemerkung

Wenn wir die entsprechenden Differentialgleichungen $0 = \nabla_{c'}X$ für parallele Vektorfelder X längs Kurven c und $0 = \nabla_{c'}c'$ für Geodäten c in lokalen Koordinaten aufschreiben, so erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{dX^i}{dt}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) X^k(t) \Gamma_{j,k|c(t)}^i \\ 0 &= \frac{d^2(u^i \circ c)}{dt^2}(t) + \sum_{j,k} \frac{d(u^j \circ c)}{dt}(t) \frac{d(u^k \circ c)}{dt}(t) \Gamma_{j,k|c(t)}^i. \end{aligned}$$

Das zeigt, daß die Exponentialabbildung $\exp : TM \rightarrow M$ und der Paralleltransport $\text{ptp} : C^\infty(\mathbb{R}, M) \times_M TM \rightarrow TM$ auch für abstrakte Riemann-Mannigfaltigkeiten existieren und die entsprechenden Eigenschaften besitzen.

62.8 Lemma.

Die Abbildung $(\pi, \exp) : TM \rightarrow M \times M$ ist ein Diffeomorphismus einer Umgebung U des Nullschnitts $M \subseteq TM$ auf eine Umgebung der Diagonale $\{(x, x) : x \in M\} \subseteq M \times M$.

Beweis. Man beachte zuerst, daß der Tangentialraum von TM in einem Punkt 0_x des Nullschnitts gerade $T_x M \oplus T_x M$ ist: Dabei ist der erste Faktor durch die Tangentialvektoren an Kurven in $M \subseteq TM$ gegeben und der zweite durch Geschwindigkeitsvektoren von Kurven im Vektorraum $T_x M \subseteq TM$. Diese beiden Teilräume haben trivialen Durchschnitt, und ergeben zusammen die richtige Dimension $\dim(TM) = 2 \dim(M)$.

Nun berechnen wir die partiellen Ableitungen von (π, \exp) . Auf dem Nullschnitt ist $(\pi, \exp) : TM \supseteq M \rightarrow M \times M$ gerade die Diagonal-Abbildung $x \mapsto (x, x)$ und auf

der Faser $T_x M$ ist $(\pi, \exp) : TM \supset T_x M \rightarrow M \times M$ die Abbildung (konst_x, \exp_x) . Also sieht die Tangentialabbildung von (π, \exp) in 0_x wie folgt aus:

$$T_{0_x}(\pi, \exp) = \begin{pmatrix} \text{id} & 0 \\ \text{id} & T_0 \exp_x \end{pmatrix} : T_x M \times T_x M \rightarrow T_x M \times T_x M.$$

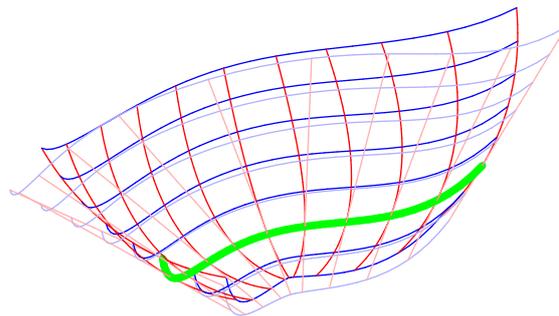
Wegen $T_0 \exp_x = \text{id}_{T_x M}$ ist also (π, \exp) ein lokaler Diffeomorphismus für Punkte nahe dem Nullschnitt.

Wir wählen für jedes $x \in M$ eine offene 0-Umgebung U_x in TM , so daß $(\pi, \exp) : U_x \rightarrow (\pi, \exp)(U_x)$ ein Diffeomorphismus ist, und die Fasern $U_x \cap T_y M$ Kugeln um 0 sind. Die Vereinigung $U := \bigcup_{x \in M} U_x$ ist dann eine offene Umgebung des Nullschnitts in TM . Und $(\pi, \exp) : U \rightarrow V := (\pi, \exp)(U)$ ist ein lokaler Diffeomorphismus.

Bleibt nur noch die Injektivität zu zeigen: Aber falls zwei Tangentialvektoren verschiedene Fußpunkte besitzen, so können wir sie durch die erste Komponente $\pi : TM \rightarrow M$ trennen, und falls sie den gleichen Fußpunkt $x \in M$ haben, so trennt sie die zweite Komponente \exp_x , da sie in einer der Kugeln $U_y \cap T_x M$ enthalten sind. \square

62.9 Tubuläre Umgebung.

Sei $M \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit der Riemann-Mannigfaltigkeit N . Mit TM^\perp bezeichnen wir das Normalbündel von M in N , d.h. jenes Vektorbündel über M , welches als Faser über $x \in M$ das orthogonale Komplement $(T_x M)^\perp$ von $T_x M$ in $T_x N$ bezüglich der Riemann-Metrik von N hat. Dann ist \exp_N ein Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung des Nullschnitts $M \subseteq TM^\perp$ auf eine offene Umgebung von M in N . Die Bilder von Schnitten konstanter Länge schneiden die radialen Geodäten orthogonal.



Beweis. Analog zum Beweis von Satz [62.8](#) können wir den Tangentialraum von TM^\perp in einem Punkt x des Nullschnitts als $T_x M \oplus T_x M^\perp = T_x N$ schreiben. Und

die Tangential-Abbildung von \exp_N hat die Gestalt

$$T_{0_x} \exp_N = \text{id}_{T_x N} = (\text{id}_{T_x M}, T_0 \exp_x |_{(T_x M)^\perp}).$$

Also ist $\exp_N : TM^\perp \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus, und auch die Injektivität kann wie im Beweis von Satz [62.8](#) gezeigt werden.

Sei nun $X : \mathbb{R} \rightarrow TM^\perp$ ein Vektorfeld von konstanter Länge (o.B.d.A. 1) längs einer Kurve $c = \pi \circ X : \mathbb{R} \rightarrow M$, so betrachten wir die Abbildung $\varphi : (t, s) \mapsto \exp_{c(s)}(t X(s))$. Der Beweis von [58.6](#) zeigt, daß sich die Parameterlinien orthogonal schneiden. \square

Wählt man für M einen Punkt und in $T_x M$ eine Orthonormalbasis, dann sind das gerade die Riemannschen-Normalkoordinaten. Ein anderer Spezialfall ist der einer – nach der Bogenlänge parametrisierten – doppelpunktfreien Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow M$.

In [60.2](#) haben wir eine Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) als geodätisch vollständig bezeichnet, wenn jede Geodäte unendliche Länge hat, oder äquivalent, auf ganz \mathbb{R} definiert ist. Der folgende Satz liefert nun den Zusammenhang mit der Vollständigkeit im Sinne der Metrik, wie wir ihm in [33.2](#) verwendet haben.

62.10 Satz von Hopf-Rinow.

Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind folgende Aussagen äquivalent

- 1 M ist geodätisch vollständig.
- 2 M ist als metrischer Raum vollständig, d.h. Cauchyfolgen konvergieren.
- 3 Jede in der Metrik beschränkte und abgeschlossene Menge ist kompakt.

Weiters folgt aus diesen äquivalenten Aussagen

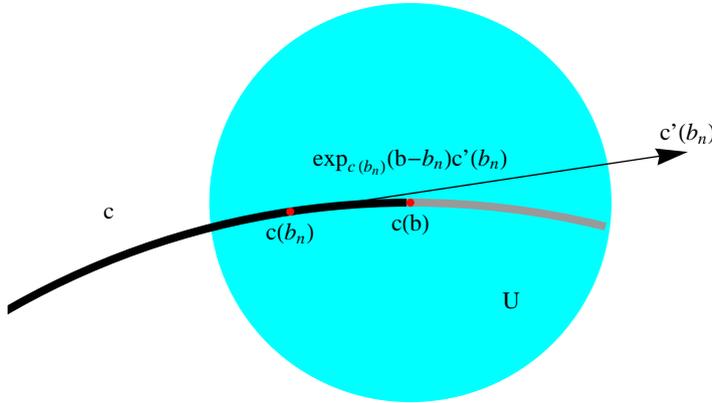
- 4 Je zwei Punkte in der gleichen Zusammenhangskomponente lassen sich durch eine Geodäte minimaler Länge verbinden.

Beweis. (3 \Rightarrow 2) Dies ist ein allgemeiner Satz aus der Topologie, den nach dem Satz von Cantor (siehe [55, 3.1.4](#)) genügt es das Prinzip der Intervallschachtelung zu beweisen: Seien also $A_n \neq \emptyset$ abgeschlossen und monoton fallend mit $d(A_n) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A_n\} \rightarrow 0$. Nach Voraussetzung ist somit A_n kompakt (falls $d(A_n) < \infty$) und somit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

(2 \Rightarrow 1) Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $[a, b[$ ihr maximaler Definitionsbereich. Sei z.B. $b < +\infty$, und betrachten wir eine Folge $b_n \nearrow b$, dann ist $c(b_n)$ eine Cauchyfolge, denn

$$d(c(t_1) - c(t_2)) < L|c|_{[t_1, t_2]} = |t_2 - t_1|.$$

Nach (2) existiert also $\lim_{n \rightarrow \infty} c(b_n) =: c(b)$. Aus [62.8](#) wissen wir, daß eine Umgebung U von $c(b)$ existiert und ein $\rho > 0$, sodaß \exp_x für alle $x \in U$ und alle Vektoren der Länge kleiner als ρ definiert ist. Wählen wir nun n so groß, daß $b - b_n < \rho$ und $c(b_n) \in U$. Dann ist die Geodäte mit Anfangsrichtung $c'(b_n)$ für $|t| < \rho$ definiert, also über b hinaus, Widerspruch.



(1 \Rightarrow 4) Es sei $r := d(x, y) > 0$. Wir wählen ein $0 < \rho < r$, so daß $\exp_x : B_\rho(0) \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Sei $0 < \rho_1 < \rho$ und $S := \exp_x(\partial B_{\rho_1}(0))$. Da S kompakt ist, existiert ein $x_1 \in S$ mit $d(x_1, y)$ minimal. Sei $v \in T_x M$ mit $|v| = 1$ und $x_1 := \exp_x(\rho_1 v)$, Wir behaupten, daß $\exp_x(rv) = y$, also $c(t) := \exp_x(tv)$ eine Geodäte von x nach y mit minimaler Länge r ist.

Es genügt $d(c(t), y) = r - t$ für $\rho_1 \leq t \leq r$ zu zeigen. Offensichtlich stimmt diese Gleichung für $t = \rho_1$, denn da jede Kurve von x nach y die Menge S trifft, gilt:

$$r = d(x, y) = \min_{s \in S} (d(x, s) + d(s, y)) = \rho_1 + d(x_1, y) = \rho_1 + d(c(\rho_1), y).$$

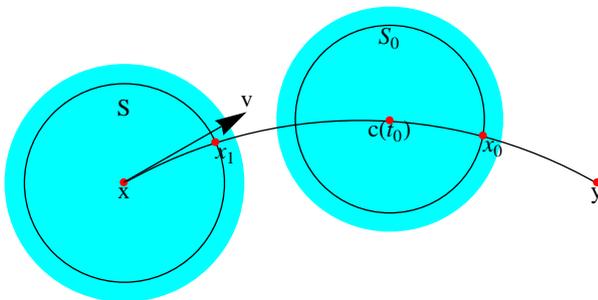
Sei nun t_0 das Infimum jener t , für welche die Gleichung nicht stimmt. Da die Bedingung abgeschlossen ist, gilt für t_0 die Gleichung. Insbesondere ist also $t_0 < r$. Sei S_0 eine geodätische Sphäre um $c(t_0)$ mit Radius $\rho_0 < r - t_0$, sei weiters x_0 ein Punkt auf S_0 mit minimalem Abstand von y , und sei c_0 eine Geodäte minimaler Länge von $c(t_0)$ nach x_0 . Dann gilt:

$$d(c(t_0), y) = \min_{s \in S_0} (d(c(t_0), s) + d(s, y)) = \rho_0 + d(x_0, y)$$

und somit $d(x_0, y) = (r - t_0) - \rho_0$. Weiters ist

$$d(x, x_0) \geq d(x, y) - d(x_0, y) = r - (r - t_0) + \rho_0 = t_0 + \rho_0,$$

und die Kurve $c|_{[0, t_0]}$ gefolgt von c_0 hat die Länge $t_0 + \rho_0$ somit gilt $d(x, x_0) = t_0 + \rho_0$, also die gestückelte Kurve eine Geodäte die $c|_{[0, t_0]}$ verlängert also mit c übereinstimmt. Somit gilt die gewünschte Gleichung auch noch für $t_0 + \rho_0$ für alle kleinen ρ_0 . Das ist ein Widerspruch dazu, daß t_0 das Infimum jener t ist, für die die Gleichung falsch ist.



(1 \Rightarrow 3) Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen und beschränkt, i.e.

$$\sup\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in A\} =: r < \infty.$$

Nach (4) ist $A \subseteq \exp_x\{B_r(0)\} =: B$ für $x \in A$, und B ist als stetiges Bild der kompakten Menge $B_r(0)$ kompakt, also auch A . \square

62.11 Satz.

Sei (M, g) eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit, und sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein bezüglich g beschränktes Vektorfeld. Dann ist X vollständig, d.h. hat einen globalen Fluß.

Beweis. Sei $|X(x)|_g \leq R$ für alle $x \in M$ und sei c eine Lösungskurve von X , dann gilt:

$$L(c|_{[a,b]}) = \int_a^b |c'(t)|_g dt = \int_a^b |X(c(t))|_g dt \leq |b-a| R$$

Also bleibt c auf endlichen Intervallen innerhalb einer beschränkten, und wegen der Vollständigkeit innerhalb einer kompakten Menge. Dies ist ein Widerspruch zu [28.3](#). \square

62.12 Satz von Nomitzu-Ozeki.

Zu jeder Riemann-Metrik gibt es immer eine konform äquivalente, die geodätisch vollständig ist.

Beweis. Sei (M, g) eine Riemann-Mannigfaltigkeit und d die assoziierte Metrik zu g . Sei wieder $B_r(x) := \{y \in M : d(x, y) < r\}$. Dann setzen wir

$$r(x) := \sup\{\rho > 0 : B_\rho(x) \text{ ist kompakt}\} \in (0, +\infty].$$

Aus der Dreiecksungleichung für d folgt sofort $|r(x_1) - r(x_2)| < d(x_1, x_2)$, also ist r stetig. Falls $r(x) = +\infty$ für ein x , so auch für alle anderen $x \in M$, und damit ist jede abgeschlossene beschränkte Menge kompakt, also M nach [62.10](#) vollständig. Wir dürfen folglich annehmen, daß $r : M \rightarrow \mathbb{R}$. Nun wählen wir mittels Partition der 1 eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) > \frac{1}{r(x)}$ für alle $x \in M$. Und betrachten die konform äquivalente Metrik $g_f := f^2 g$.

Bleibt zu zeigen, daß g_f vollständig ist. Dafür genügt es die Inklusion $B_{1/3}^{g_f}(x) \subseteq B_{r(x)/2}^g(x)$ zu beweisen, denn dann hat auf Grund des Beweises von $2 \Rightarrow 1$ in [62.10](#) jede Geodäte mindestens Länge $\frac{1}{3}$, und somit durch Aneinanderstückeln unendliche Länge. D.h. g_f ist vollständig.

Sei also $y \notin B_{r(x)/2}^g(x)$ und $c : [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Kurve von x nach y dann gilt:

$$L^g(c) = \int_a^b |c'(t)|_g dt \geq d(x, y) > \frac{r(x)}{2} \text{ und}$$

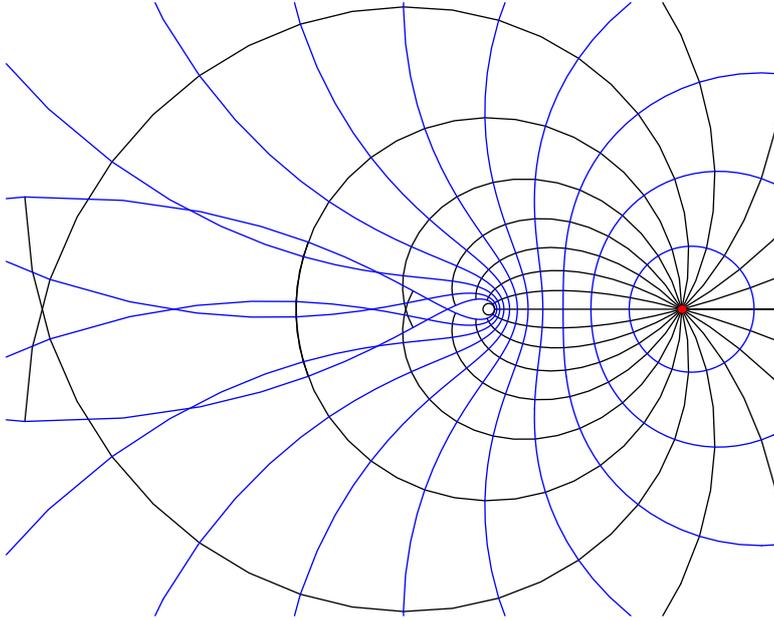
$$\begin{aligned} L^{g_f}(c) &= \int_a^b |c'(t)|_{g_f} dt = \int_a^b f(c(t)) |c'(t)|_g dt = \quad (\text{nach dem Zwischenwertsatz}) \\ &= f(c(\tau)) \int_a^b |c'(t)|_g dt = f(c(\tau)) L^g(c) > \frac{L^g(c)}{r(c(\tau))}. \end{aligned}$$

Wegen $|r(x) - r(c(\tau))| \leq d(x, c(\tau)) \leq L^g(c)$ gilt $r(c(\tau)) \leq r(x) + L^g(c)$ und somit

$$L^{g_f}(c) > \frac{L^g(c)}{r(c(\tau))} \geq \frac{L^g(c)}{r(x) + L^g(c)} > \frac{L^g(c)}{2L^g(c) + L^g(c)} = \frac{1}{3} \quad \square$$

62.12a Beispiel.

Es sei $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann ist M mit der euklidischen Metrik g nicht vollständig (betrachte antipodale Punkte). Die Exponentialabbildung in einem Punkt (z.B. $(1, 0)$) in der konform äquivalenten vollständigen Metrik g_f mit $f(x, y) := 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ sieht dann wie folgt aus:



62.13 Lemma (Divergenz via kovarianter Ableitung).

Sei ξ ein Vektorfeld auf der orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M so gilt:

$$\operatorname{div} \xi = \operatorname{spur}(\eta \mapsto \nabla_{\eta} \xi).$$

Beweis. Für die Divergenz, die wir aus der äußeren Ableitung durch Anwendung des Hodge-Stern-Operators gewonnen haben, und die wir auch mittels Lie-Ableitung der Volumensform beschrieben haben, gilt nach [43.2](#) folgende lokale Formel:

$$\operatorname{div} \xi = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{G} \xi^i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\xi^i \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial u^i} G + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^i \right).$$

Für ∇_{ξ} haben wir die lokale Formel:

$$\begin{aligned} \nabla_{g_i} \xi &\stackrel{\text{62.4.3}}{=} \sum_{j=1}^m \left(\xi^j \nabla_{g_i} g_j + \frac{\partial}{\partial u^i} (\xi^j) g_j \right) \\ &\stackrel{\text{62.6}}{=} \sum_{j=1}^m \left(\xi^j \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_k + \frac{\partial}{\partial u^i} (\xi^j) g_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \xi^k \Gamma_{i,k}^j + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^j \right) g_j. \end{aligned}$$

Für die Spur von $\eta \mapsto \nabla_{\eta} \xi$ erhalten wir also

$$\operatorname{spur}(\eta \mapsto \nabla_{\eta} \xi) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \xi^k \Gamma_{i,k}^i + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^i \right).$$

Wegen $\det'(A)(B) = \det(A) \cdot \operatorname{spur}(A^{-1}B)$ gilt schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial u^k} G &= \frac{1}{2G} G \operatorname{spur}((g^{i,j}) \left(\frac{\partial}{\partial u^k} g_{i,j} \right)) \\ &\stackrel{\text{62.6}}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g^{j,i} (\Gamma_{k,i,j} + \Gamma_{k,j,i}) \stackrel{\text{62.6}}{=} \sum_{i=1}^m \Gamma_{k,i}^i = \sum_{i=1}^m \Gamma_{i,k}^i. \quad \square \end{aligned}$$

63. Jacobi-Felder

63.1 Bemerkung

Sei $c : [0, a] \rightarrow M$ eine Geodäte in einer Riemannschen Fläche. Diese läßt sich als radiale Geodäte der Form $c(t) = \exp_{c(0)}(t c'(0))$ schreiben. Sei dazu $x := c(0)$ und $v := c'(0)$. Wir wollen benachbarte radiale Geodäten diskutieren. Nach [62.8](#) gibt es eine Umgebung um $[0, a] \times \{v\} \subset \mathbb{R} \times T_x M$, auf welcher \exp wohldefiniert ist. Damit existieren auf dem Intervall $[0, a]$ die radialen Geodäten, welche bei x in eine Richtung nahe v starten. Betrachten wir nun die Variation $(t, w) \mapsto \exp_x(t(v+w))$ mit $w \perp v$. Die Richtungsableitung $\xi(t) := (T_{tv} \exp_x)(tw)$ an der Stelle $(t, 0)$ in Richtung $(0, w)$ definiert ein Vektorfeld ξ längs c .

Wir wollen nun zeigen, daß das Vektorfeld ξ die Jacobi-Gleichung

$$\nabla^2 \xi(t) + K(c(t)) \xi(t) = 0$$

mit den Anfangswerten $\xi(0) = 0$ und $\nabla \xi(0) = w$ erfüllt.

Da

$$\varphi : (r, \theta) \mapsto \exp_x(r(\cos \theta v + \sin \theta w)) \text{ für } |w| = 1 = |v|$$

geodätische Parallelkoordinaten sind, also $E = 1$, $F = 0$, $G > 0$ erfüllen, gilt die Jacobi-Gleichung $K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G}$ aus [53.9](#).

$$\begin{aligned} \text{Für } \xi(t) &:= \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \exp_x(t(v+sw)) \\ &= \left. \frac{\partial}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} \exp_x(t \cos \theta v + t \sin \theta w) = \partial_2 \varphi(t, 0) \\ \text{ist } |\xi|^2 &= |\partial_2 \varphi|^2 = G. \end{aligned}$$

Das Vektorfeld ξ steht normal auf c' , da die radialen Geodäten die geodätischen Sphären (wegen $F = 0$) orthogonal schneiden, also läßt sich ξ als $\lambda(t)\nu(t)$ schreiben, wobei ν das Einheitsnormalenfeld zu c' in TM und $\lambda = |\xi| = \sqrt{G}$ ist. Folglich gilt $\lambda'' + (K \circ c)\lambda = \lambda'' - \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial r}\right)^2 \sqrt{G} \lambda = 0$. Da c eine Geodäte ist, ist c' ein paralleles Vektorfeld (siehe [61.1](#)) längs c und ebenso ν . Also gilt für die kovariante Ableitung von ξ :

$$\begin{aligned} \nabla \xi &= \nabla(\lambda \nu) = \lambda \nabla \nu + \lambda' \nu = \lambda' \nu \\ \Rightarrow \nabla^2 \xi &= \nabla(\lambda' \nu) = \lambda' \nabla \nu + \lambda'' \nu = \lambda'' \nu \\ \Rightarrow \nabla^2 \xi + K \xi &= \lambda'' \nu + K \lambda \nu = (\lambda'' + K \lambda) \nu = 0 \end{aligned}$$

63.2 Definition (Jacobi-Felder).

Wir nennen ein Vektorfeld ξ längs einer Geodäte c ein JACOBI-FELD falls es die JACOBI-GLEICHUNG

$$\nabla^2 \xi + (K \circ c) \xi = 0$$

erfüllt und orthonormal auf die Geodäte steht.

63.3 Lemma.

Die Jacobi-Felder ξ längs einer Geodäte c mit Anfangsbedingung $\xi(0) = 0$ sind genau jene Vektorfelder, welche sich als $\xi(t) := (T_{tc'(0)} \exp_{c(0)})(tw)$ mit $w \in c'(0)^\perp \subset T_{c(0)} M$ schreiben lassen.

Beweis. Wir haben gerade gezeigt, daß so darstellbare Vektorfelder Jacobi-Felder sind. Berechnen wir nun noch deren Anfangswerte. Klarerweise ist

$$\xi(0) = (T_{0c'(0)} \exp_{c(0)})(0w) = 0.$$

Bezüglich der Koordinaten $(u^1, u^2) \mapsto \exp_x(u^1 v + u^2 w)$ gilt $u^1(t) = t$, $u^2(t) = 0$, $\xi^1(t) = 0$ und $\xi^2(t) = t$. Nach [62.1](#) ist

$$\begin{aligned} \nabla \xi(0) &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{d\xi^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \xi^i \frac{du^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^2} + \sum_{k=1}^2 \Gamma_{2,1}^k \cdot t \cdot 1 \cdot \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial u^2} = w. \end{aligned}$$

Da die lineare Differentialgleichung 2.ter Ordnung $\lambda'' + (K \circ c)\lambda = 0$ aber zu jedem Anfangswert eine eindeutige Lösung hat, muß diese obige Gestalt besitzen. \square

Sei nun M eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit und c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte in M . Wir haben [58.7](#) gesehen, daß Kurven die in geodätischen Parallelkoordinaten nahe an c liegen, keine kürzere Bogenlänge haben können. Wir untersuchen nun die Frage, wann wir geodätische Polarkoordinaten um $c(0)$ finden können, welche bis zu $c(t)$ reichen. Dazu folgende

63.4 Definition (Konjugierte Punkte)

Es sei $c(t) = \exp_{c(0)}(tc'(0))$ eine Geodäte in M . Ein Punkt $c(t)$ heißt KONJUGIERT zu $c(0)$ falls das Differential $T_{tc'(0)}(\exp_{c(0)})$ der Exponentialabbildung bei $tc'(0) \in T_{c(0)}M$ kein Isomorphismus von $T_{c(0)}M = T_{tc'(0)}T_{c(0)}M$ nach $T_{c(t)}M$ ist.

63.5 Satz (Konjugierte Punkte).

Für eine Geodäte c in einer vollständigen Riemannschen Fläche sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $c(t)$ ist konjugiert zu $c(0)$ längs c .
2. Es existiert ein nicht-verschwindendes Jacobi-Vektorfeld ξ längs c mit

$$\xi(t) = 0 = \xi(0).$$

Beweis. Es sei $x := c(0)$ und $v := c'(0)$. Nach [63.3](#) ist das Jacobi-Feld mit Anfangsbedingung $\xi(0) = 0$ und $\nabla \xi(0) = \xi_0 \perp v$ durch

$$\xi : t \mapsto (T_{tv} \exp_x)(t\xi_0)$$

gegeben. Also ist $\xi(t) = 0$ genau dann, wenn $t\xi_0$ im Kern von $T_{tv} \exp_x$ liegt. Nun brauchen wir nur noch zu beachten, daß $(T_{tv} \exp_x)(v) = c'(t) \neq 0$ und $(T_{tv} \exp_x)(w) \perp c'(t)$ für alle $w \perp v$ gilt. Also ist der Kern von $T_{tv} \exp_x$ die Menge $\{t\nabla \xi(0) : \xi \text{ ist ein Jacobi-Feld längs } c \text{ mit } \xi(t) = 0\}$. Da $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ eine Abbildung zwischen gleichdimensionalen Räumen ist, ist die Aussage $\text{Ker}(T_{tv} \exp_x) = 0$ damit äquivalent, daß $T_{tv} \exp_x$ ein Isomorphismus ist. \square

63.6 Folgerung.

Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Falls c im Inneren eines Parameterintervalls $[t_1, t_2]$ keine konjugierte Punkte enthält, so gilt $L(c_1) \geq L(c)$ für jede nahe c gelegene Kurve c_1 .

Es gilt auch die Umkehrung, siehe [52](#).

Beweis. Wie im Beweis von [63.3](#) betrachten wir eine Abbildung φ nach geodätischen Polarkoordinaten um $c(0)$. Wegen [63.5](#) ist diese Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus in jedem Punkt von $]t_1, t_2[\times \{0\}$. Also haben wir, abgesehen von den

Randpunkten, geodätische Parallelkoordinaten längs c . Nach [58.7](#) ist dann die Länge jeder nahe c gelegenen Kurve mindestens so groß wie jene von c . \square

63.7a Lemma. Vergleichssatz von Sturm.

Es sei u (resp. v) Lösung der Differentialgleichung $u''(t) + a(t)u(t) = 0$ (resp. $v''(t) + b(t)v(t) = 0$) mit Anfangswert $u(0) = 0 = v(0)$ und $u'(0) = 1 = v'(0)$. Weiters sei $a \geq b$ (bzw. $\forall t : a(t) > b(t)$). Sei $t_u := \min\{t > 0 : u(t) = 0\}$ und $t_v := \min\{t > 0 : v(t) = 0\}$. Dann ist $t_u \leq t_v$ und für $0 < t_0 < t_1 < t_u$ ist $v(t_1)u(t_0) \geq u(t_1)v(t_0)$ (bzw. $>$) und $v(t_1) \geq u(t_1)$ (bzw. $>$).

Beweis. Nach Voraussetzung ist $u(t) > 0$ für alle $0 < t < t_u$ und $v(t) > 0$ für alle $0 < t < t_v$. Es sei $a(t) \geq b(t)$ für alle t . Wäre $t_u > t_v$ so wäre

$$0 = \int_0^{t_v} u(v'' + b \cdot v) - v(u'' + a \cdot u) = \underbrace{(u \cdot v' - v \cdot u') \Big|_0^{t_v}}_{=u(t_v)v'(t_v) < 0} + \underbrace{\int_0^{t_v} (b-a) \cdot v \cdot u}_{\leq 0},$$

ein Widerspruch.

Sein nun $0 < t < t_u$. Dann ist

$$0 = \int_0^t u(v'' + b \cdot v) - v(u'' + a \cdot u) = (u \cdot v' - v \cdot u') \Big|_0^t + \underbrace{\int_0^t (b-a) \cdot v \cdot u}_{\leq 0} \leq (u \cdot v' - v \cdot u') \Big|_0^t$$

und somit $(\log \circ v)' \geq (\log \circ u)'$, also $v(t_1)u(t_0) \geq u(t_1)v(t_0)$ für alle $0 < t_0 \leq t_1 < t_u$.

Wegen $\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{v(t_0)}{u(t_0)} = \frac{v'(0)}{u'(0)} = 1$ folgt $v(t_1) \geq u(t_1)$.

Den Fall $a(t) > b(t)$ für alle t behandelt man ganz analog. \square

63.7 Folgerung.

Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte, so daß $K_0 \leq K(c(t)) \leq K_1$. Dann liegt in jedem offenen Intervall der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$ kein konjugierter Punkt. In jedem abgeschlossenen Intervall der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ hingegen liegt ein konjugierter Punkt. Hierbei und im folgenden sei $\frac{\pi}{\sqrt{K_1}} = +\infty$ für $K_1 \leq 0$.

Beweis. Aus $b(t) := K(c(t)) \leq K_1 =: a(t)$ folgt mittels [63.7a](#) für die Lösung $\xi(t) = v(t)\nu(t)$ der Jacobi-Gleichung (siehe [63.1](#)) und jene von $u''(t) + K_1 u(t) = 0$ (also $u(t) = \frac{1}{\sqrt{K_1}} \sin(t\sqrt{K_1})$) die Beziehung $u(t_1) \leq v(t_1)$ und somit $v(t) = 0 \Rightarrow t\sqrt{K} \geq \pi$.

Die zweite Aussage zeigt man ganz analog. \square

63.8 Theorem von Bonnet.

Ist M eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Fläche und $K \geq K_0 > 0$, so ist der geodätische Abstand je zweier Punkte höchstens $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$. Insbesondere ist M kompakt.

Beweis. Nach [62.10.4](#) existiert zu je zwei Punkten eine Geodäte minimaler Länge. Falls diese Länge größer als $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ ist, so enthält sie nach [63.7](#) konjugierte Punkte, und nach der Umkehrung von [63.6](#) ist diese Geodäte dann nicht die kürzeste Verbindung, ein Widerspruch. Damit sind ihre Endpunkte aber höchstens $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ entfernt. Insbesondere ist der Durchmesser

$$d(M) := \inf\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in M\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{K_0}},$$

und somit ist M nach [62.10](#) M kompakt. \square

63.9b Lemma.

Es sei $K(x) \leq K_1$ für alle $x \in M$ und $\rho_1 < \rho := \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$. Sei weiters $c : [0, \rho_1] \rightarrow M$ eine Bogenlängen-parametrisierte Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(\rho_1)$. Sei $v : [s_0, s_1] \rightarrow B_\rho(0) \subseteq T_x M$ eine Kurve mit $\exp_x(v(s_0)) = x$ und $\exp_x(v(s_1)) = y$. Dann ist $L(\exp_x \circ v) \geq L(c)$.

Beweis. Wegen $K(x) \leq K_1$ für alle $x \in M$ ist $\exp_x : B_\rho(0) \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus nach [63.7](#) und [63.4](#). Somit ist $(\exp_x)^*(g)$ eine Riemann-Metrik auf $B_\rho(0)$ und \exp_x bzgl. dieser eine lokale Isometrie. Die Polarkoordinaten auf $B_\rho(0)$ induzieren somit geodätische Polarkoordinaten (siehe [58.5](#)) auf $B_\rho(0)$ bzgl. der Metrik $(\exp_x)^*(g)$ und somit folgt das Resultat aus [58.7](#). \square

63.9a Proposition.

Seien $(c_s)_s$ eine glatte Homotopie relativ $\{0, 1\}$ zwischen zwei verschiedene Geodäten von x nach y mit $L(c_0) \leq L(c_1)$. Falls $K(x) \leq K_1$ für alle $x \in M$ so existiert ein $0 \leq s_0 \leq 1$ mit $L(c_{s_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_1}} - L(c_0)$

Beachte, daß dies für $K_1 \leq 0$ besagt, daß verschiedene Geodäten von x nach y nicht homotop sein können.

Beweis. Es sei $\rho := \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$. Wegen [63.7](#) und [63.4](#) ist $\exp_x : B_\rho(0) \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus und somit auf jedem kleineren offenen Ball eine Überlagerung (denn die Fasern sind endlich). O.B.d.A. ist $L(c_0) < \rho$ (andernfalls ist $\frac{2\pi}{\sqrt{K_1}} - L(c_0) \leq L(c_0)$). Sei $c_0 : t \mapsto \exp_x(tv)$. Falls $c_s(t) \in \exp_x(B_\rho(0))$ für alle s und t , so existiert somit ein Lift $(t, s) \mapsto \tilde{c}_s(t)$. Da aber der Lift der Geodäte c_1 eine Gerade durch 0 sein muß ist das wegen $c_0 \neq c_1$ unmöglich. Somit kommt die Homotopie den Rand von $\exp_x(B_\rho(0))$ beliebig nahe, d.h. für jedes $\rho_1 < \rho$ existiert ein $s \in [0, 1]$ s.d. der Lift \tilde{c}_s existiert und einem Punkt im Abstand ρ_1 von 0 enthält. Nach [63.9b](#) hat dann die Verkettung der beiden Kurven c_s und der verkehrt durchlaufenen c_0 eine Länge $\geq 2\rho_1$, also $L(c_s) \geq 2\rho_1 - L(c_0)$. Da ρ_1 beliebig nahe an ρ war, folgt aus der Stetigkeit von $s \mapsto L(c_s)$ das Resultat. \square

63.9 Theorem [\[36\]](#).

Die Exponential-Abbildung jeder vollständigen zusammenhängenden Riemann-Fläche mit $K \leq 0$ ist für jedes $x \in M$ eine Überlagerung $\exp_x : T_x M \rightarrow M$. Ist also M zusätzlich einfachzusammenhängend, so ist $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus und zu je zwei Punkten gibt es genau eine minimale verbindende Geodäte.

Beweis für einfach zusammenhängendes M . Wegen [63.7](#) existieren für $K \leq 0$ keine konjugierten Punkte und somit ist $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ überall ein lokaler Diffeomorphismus. Nach dem Satz [62.10](#) von Hopf-Rinow ist \exp_x surjektiv. Nun zur Injektivität. Sei $\exp_x(v_0) = \exp_x(v_1) = p \in M$. Dann sind $c_i(t) := \exp_x(tv_i)$ Geodäten die x mit p verbinden. Da M einfach zusammenhängend ist, sind diese homotop. Wegen [63.9a](#) sind sie somit ident, also $v_0 = v_1$.

Nach [58.7](#) ist die radiale verbindende Geodäte von minimaler Länge. \square

Auf allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten sieht die Jacobi-Gleichung wie folgt aus:

$$\nabla^2 \xi + R(\xi, c')c' = 0,$$

wobei R die (in [64.2](#)) noch zu definierende Riemann-Krümmung bezeichnet. Die Lösungen der Jacobi-Gleichung heißen wieder Jacobi-Felder, die genau die Richtungsableitung von 1-Parameter-Variationen der Geodäte c sind. Die Darstellung für Jacobi-Felder ξ mit $\xi(0) = 0$ via der Ableitung von $\exp_{c(0)}$ gilt genau wie im 2-Dimensionalen. Der Randwert dieser Jacobi-Felder beschreibt den Kern der Exponentialabbildung, und somit konjugierte Punkte. Ebenso gilt dann [63.6](#) und [63.8](#) nach Myres 1935 und [63.9](#) nach E. Cartan 1928, wobei K durch die Schnittkrümmung (siehe [64.7](#)) zu ersetzen ist Für Beweise dieser Resultate siehe z.B. [66](#), 6.14, 6.15, 6.16].

64. Riemann-, Ricci- und Schnittkrümmung

Seien 2 Vektorfelder ξ und η im \mathbb{R}^n gegeben. Dann gilt für die übliche Ableitung des Vektorfelds ξ in Richtung η , die wir hier auch mit $D_\eta \xi : x \mapsto \xi'(x)(\eta(x))$ bezeichnen wollen:

$$[D_\xi, D_\eta] := D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi = D_{[\xi, \eta]},$$

denn

$$\begin{aligned} (D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi) \left((\zeta^i)_{i=1}^m \right) &= (\xi(\eta(\zeta^i)) - \eta(\xi(\zeta^i)))_{i=1}^m \\ &= [\xi, \eta](\zeta^i)_{i=1}^m = D_{[\xi, \eta]} \left((\zeta^i)_{i=1}^m \right) \end{aligned}$$

64.1 Satz (Godazzi-Mainardi-Gleichung).

Sei M eine Hyperfläche im \mathbb{R}^n und seien ξ, η, ζ Vektorfelder im \mathbb{R}^n , welche längs M tangential an M sind. Dann ist

1. GAUSS-GLEICHUNG: $\nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi, \eta]} \zeta = \langle L \eta, \zeta \rangle L \xi - \langle L \xi, \zeta \rangle L \eta$,
2. GODAZZI-MAINARDI-GLEICHUNG: $\nabla_\xi L \eta - \nabla_\eta L \xi = L[\xi, \eta]$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} 0 &= D_\xi D_\eta \zeta - D_\eta D_\xi \zeta - D_{[\xi, \eta]} \zeta \\ &\stackrel{\text{62.2}}{=} D_\xi \left(\nabla_\eta \zeta - \langle L \eta, \zeta \rangle \nu \right) - D_\eta \left(\nabla_\xi \zeta - \langle L \xi, \zeta \rangle \nu \right) - D_{[\xi, \eta]} \zeta \\ &= D_\xi \nabla_\eta \zeta - \xi(\langle L \eta, \zeta \rangle) \nu - \langle L \eta, \zeta \rangle D_\xi \nu \\ &\quad - D_\eta \nabla_\xi \zeta + \eta(\langle L \xi, \zeta \rangle) \nu + \langle L \xi, \zeta \rangle D_\eta \nu \\ &\quad - D_{[\xi, \eta]} \zeta \\ &\stackrel{\text{62.2}}{=} \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \langle L \xi, \nabla_\eta \zeta \rangle \nu - \xi(\langle L \eta, \zeta \rangle) \nu - \langle L \eta, \zeta \rangle L \xi \\ &\quad - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta + \langle L \eta, \nabla_\xi \zeta \rangle \nu + \eta(\langle L \xi, \zeta \rangle) \nu + \langle L \xi, \zeta \rangle L \eta \\ &\quad - \nabla_{[\xi, \eta]} \zeta + \langle L[\xi, \eta], \zeta \rangle \nu. \end{aligned}$$

Der Tangentialanteil hiervon ist die Gauß-Gleichung:

$$0 = \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi, \eta]} \zeta - \langle L \eta, \zeta \rangle L \xi + \langle L \xi, \zeta \rangle L \eta$$

Und der Normalanteil ist die Godazzi-Mainardi-Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 &= -\langle \nabla_\eta \zeta, L \xi \rangle - \xi \langle L \eta, \zeta \rangle + \langle \nabla_\xi \zeta, L \eta \rangle + \eta \langle L \xi, \zeta \rangle + \langle L[\xi, \eta], \zeta \rangle \\ &= \left\langle -\nabla_\xi(L \eta) + \nabla_\eta(L \xi) + L[\xi, \eta], \zeta \right\rangle. \quad \square \end{aligned}$$

64.2 Definition (Riemann-Krümmung)

Die RIEMANN-KRÜMMUNG $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow L(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ einer Riemann-Mannigfaltigkeit ist definiert durch die linke Seite der Gauß-Gleichung [64.1.1](#):

$$R(\xi, \eta) := [\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]}.$$

Die Motivation hierfür ist, daß die rechte Seite auf $\zeta := \eta$ angewandt und ins innere Produkt mit ξ genommen für orthonormale Vektoren ξ und η gerade die Gaußkrümmung liefert:

$$\langle \langle L\eta, \eta \rangle L\xi - \langle L\xi, \eta \rangle L\eta, \xi \rangle = \langle L\eta, \eta \rangle \langle L\xi, \xi \rangle - \langle L\xi, \eta \rangle \langle L\eta, \xi \rangle = \det(L) = K.$$

64.3 Lemma (Die Riemann-Krümmung ist ein Tensorfeld).

Die Riemann-Krümmung ist ein 3-fach ko- und 1-fach kontravariantes Tensorfeld auf M , d.h. $R \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$.

(Koordinatenfreier) Beweis. Dazu muß man nur zeigen, daß die Abbildung $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto R(\xi, \eta)(\zeta)$ in allen Variablen $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -homogen ist, vgl. mit dem Beweis von [31.10](#).

$$\begin{aligned} R(f\xi, \eta) &= [\nabla_{f\xi}, \nabla_\eta] - \nabla_{[f\xi, \eta]} \\ &\stackrel{29.2.3}{=} [f\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{f[\xi, \eta] - \eta(f)\xi} \\ &= (f\nabla_\xi)\nabla_\eta - \nabla_\eta(f\nabla_\xi) - f\nabla_{[\xi, \eta]} + \eta(f)\nabla_\xi \\ &\stackrel{62.4.3}{=} f\nabla_\xi\nabla_\eta - f\nabla_\eta\nabla_\xi - \eta(f)\nabla_\xi - f\nabla_{[\xi, \eta]} + \eta(f)\nabla_\xi \\ &= f([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]}) + 0 \\ &= fR(\xi, \eta). \\ R(\xi, \eta)(f\zeta) &= ([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]})(f\zeta) \\ &\stackrel{62.4.3}{=} \nabla_\xi(f\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\zeta) - \nabla_\eta(f\nabla_\xi\zeta + \xi(f)\zeta) \\ &\quad - f\nabla_{[\xi, \eta]}\zeta - [\xi, \eta](f)\zeta \\ &\stackrel{62.4.3}{=} f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta + \xi(f)\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\nabla_\xi\zeta + \xi(\eta(f))\zeta \\ &\quad - f\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \eta(f)\nabla_\xi\zeta - \xi(f)\nabla_\eta\zeta - \eta(\xi(f))\zeta \\ &\quad - f\nabla_{[\xi, \eta]}\zeta - \xi(\eta(f))\zeta + \eta(\xi(f))\zeta \\ &= f(\nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi, \eta]})\zeta \\ &= fR(\xi, \eta)(\zeta). \quad \square \end{aligned}$$

Koordinatenbeweis.

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z \\ &\stackrel{62.5}{=} \nabla_X \left(\sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\ &\quad - \nabla_Y \left(\sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j X^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\ &\quad - \nabla_{\sum_{i, j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}} Z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underline{\underline{62.4.3}} \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \nabla_X \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& + X \left(\sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \nabla_Y \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - Y \left(\sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} Z \\
& \underline{\underline{62.4.2}} \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \sum_l X^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& + \sum_i \left(\sum_k X \left(\frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \right) Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X(Y^k) \right. \\
& + \sum_{j,k} X(\Gamma_{j,k}^i) Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i X(Z^j) Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X(Y^k) \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \sum_l Y^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left(\sum_k Y \left(\frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \right) X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y(X^k) \right. \\
& + \sum_{j,k} Y(\Gamma_{j,k}^i) Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Y(Z^j) X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y(X^k) \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \sum_l \left(Z^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underline{\underline{62.6}} \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \sum_l X^l \sum_p \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& + \sum_i \left(\sum_k \sum_p X^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p} Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \right. \\
& + \sum_{j,k} \sum_p X^p \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i \sum_p X^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} Y^k \\
& \left. + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \sum_l Y^l \sum_p \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& - \sum_i \left(\sum_k \sum_p Y^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p} X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \right. \\
& + \sum_{j,k} \sum_p Y^p \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i \sum_p Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} X^k \\
& \left. + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \sum_l \left(Z^l \sum_p \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
& = \sum_{i,k,l,p} X^l Y^k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,k,l,p} X^l Y^k Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& + \sum_{i,k,p} X^p Y^k \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& + \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& + \sum_{i,j,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_{i,k,l,p} X^k Y^l \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k Y^l Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& - \sum_{i,k,p} X^k Y^p \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i,j,l,p} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& - \sum_{i,j,l} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
= & \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& + \sum_{i,j,k,l,p} X^l Y^k Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k Y^l Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& + \sum_{i,k,l,p} X^l Y^k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& + \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,l,p} X^k Y^l \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& + \sum_{i,j,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l,p} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& - \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& + \sum_{i,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
& - \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
& + \sum_{i,k,p} X^p Y^k \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} X^k Y^p \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
= & \sum_p \sum_{i,j,k} X^i Y^j Z^k \underbrace{\left(\frac{\partial \Gamma_{k,j}^p}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{k,i}^p}{\partial u^j} + \sum_l (\Gamma_{k,j}^l \Gamma_{i,l}^p - \Gamma_{k,i}^l \Gamma_{l,j}^p) \right)}_{=: R_{i,j,k}^p} \frac{\partial}{\partial u^p} \\
= & \sum_p \sum_{i,j,k} X^i Y^j Z^k R_{i,j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \quad \square
\end{aligned}$$

64.4 Bemerkung

In lokalen Koordinaten haben wir

$$\begin{aligned}
(1) \quad R &= \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k}^l du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes \frac{\partial}{\partial u^l} \\
\text{mit } R_{i,j,k}^l &= du^l \left(R \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{j,k}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{i,k}^l + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,p}^l - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,p}^l)
\end{aligned}$$

Beziehungsweise für $R(\xi, \eta, \zeta, \chi) := \langle R(\xi, \eta)\zeta, \chi \rangle$

$$(2) \quad R = \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k,l} du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes du^l$$

mit $R_{i,j,k,l} = \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \frac{\partial}{\partial u^k} \middle| \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle = \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l}$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right)$$

$$+ \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q} (\Gamma_{i,k,q} \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k,q} \Gamma_{i,l,p}).$$

Beweis. Wir rechnen wie folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{l=1}^m R_{i,j,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} &= R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \frac{\partial}{\partial u^k} := \left(\left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \right] - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right]} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \\ &\stackrel{62.6}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \left(\sum_{l=1}^m \Gamma_{j,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \left(\sum_{l=1}^m \Gamma_{i,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) + 0 \\ &\stackrel{62.4.3}{=} \sum_{l=1}^m \left(\Gamma_{j,k}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\ &\quad - \sum_{l=1}^m \left(\Gamma_{i,k}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\ &\stackrel{62.6}{=} \sum_{l=1}^m \left(\Gamma_{j,k}^l \sum_{p=1}^m \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\ &\quad - \sum_{l=1}^m \left(\Gamma_{i,k}^l \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\ &= \sum_{l=1}^m \left(\sum_{p=1}^m (\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l}^p - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l}^p) + \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{j,k}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{i,k}^l \right) \frac{\partial}{\partial u^l}. \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert also:

$$R_{i,j,k}^l = \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^l) - \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^l) + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l}^p - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l}^p).$$

Nun berechnen wir

$$R_{i,j,k,l} := \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle = \left\langle \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^p}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle = \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^p) g_{p,l} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p g_{p,l} \right) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^i} (g_{p,l}) \\ &\stackrel{62.6}{=} \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k,l}) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p (\Gamma_{i,p,l} + \Gamma_{i,l,p}). \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
R_{i,j,k,l} &= \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l} \\
&= \sum_{p=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^p) - \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^p) + \sum_{q=1}^m (\Gamma_{j,k}^q \Gamma_{i,q}^p - \Gamma_{i,k}^q \Gamma_{j,q}^p) \right) g_{p,l} \\
&= \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k,l}) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p \underbrace{(\Gamma_{i,p,l} + \Gamma_{i,l,p})}_{(1)} - \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k,l}) + \sum_{p=1}^m \Gamma_{i,k}^p \underbrace{(\Gamma_{j,p,l} + \Gamma_{j,l,p})}_{(3)} \underbrace{g_{p,l}}_{(4)} \\
&\quad + \sum_{q=1}^m \underbrace{(\Gamma_{j,k}^q \Gamma_{i,q,l} - \Gamma_{i,k}^q \Gamma_{j,q,l})}_{(1)} \underbrace{g_{q,l}}_{(3)} \\
&\stackrel{62.6}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} g_{k,l} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{j,k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} g_{k,l} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{l,i} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{i,k} \right) \\
&\quad + \sum_{p=1}^m \underbrace{(\Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l,p})}_{(4)} \underbrace{g_{p,l}}_{(2)} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) \\
&\quad + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q} (\Gamma_{i,k,q} \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k,q} \Gamma_{i,l,p}). \quad \square
\end{aligned}$$

64.5 Lemma (Symmetrie der Riemann-Krümmung).

Die Riemann-Krümmung erfüllt folgende Identitäten:

1. $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$
2. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle = 0$
3. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$
4. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
5. $(\nabla_Z R)(X, Y, W) + (\nabla_X R)(Y, Z, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, W) = 0$.

Die Gleichungen [4](#) und [5](#) heißen 1.te und 2.te BIANCHI IDENTITÄT.

Beweis.

[1](#) ist klar wegen der Definition $R(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$.

[2](#) ist äquivalent zu $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$ für alle X, Y, Z . Es ist:

$$\begin{aligned}
R(X, Y, Z, Z) &= \underbrace{\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle}_{X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle} - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\
&= X \left(\frac{1}{2} Y(\langle Z, Z \rangle) \right) - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle - Y \left(\frac{1}{2} X(\langle Z, Z \rangle) \right) + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \\
&\quad - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\
&= \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle - 0 - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle = 0
\end{aligned}$$

[4](#) Nach [62.4](#) gilt $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$ und durch Anwenden von ∇_X erhalten wir:

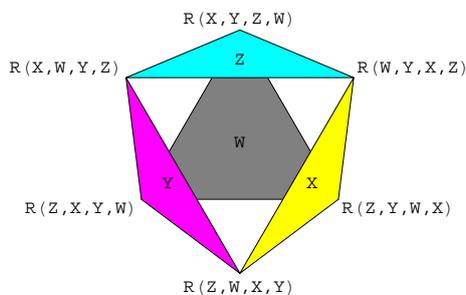
$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Y, Z]} X = \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]} X = [X, [Y, Z]]$$

Der zyklische Ausdruck läßt sich nun wie folgt umformen:

$$\begin{aligned}
 R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \\
 &= \underbrace{\nabla_X \nabla_Y Z}_{(1)} - \underbrace{\nabla_Y \nabla_X Z}_{(2)} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]} Z}_{(3)} \\
 &\quad + \underbrace{\nabla_Y \nabla_Z X}_{(2)} - \underbrace{\nabla_Z \nabla_Y X}_{(3)} - \underbrace{\nabla_{[Y, Z]} X}_{(1)} \\
 &\quad + \underbrace{\nabla_Z \nabla_X Y}_{(3)} - \underbrace{\nabla_X \nabla_Z Y}_{(1)} - \underbrace{\nabla_{[Z, X]} Y}_{(2)} \\
 &= \underbrace{[X, [Y, Z]]}_{(1)} + \underbrace{[Y, [Z, X]]}_{(2)} + \underbrace{[Z, [X, Y]]}_{(3)} \\
 &= 0 \quad (\text{wegen der Jacobi-Identität}).
 \end{aligned}$$

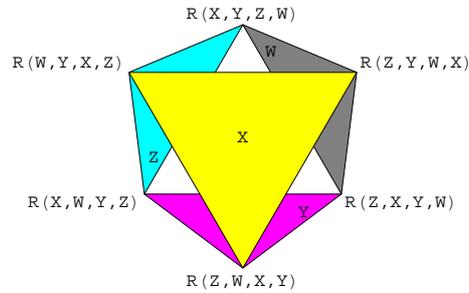
3 folgt rein algebraisch aus **1**, **2** und **4**:

Man setzt $R(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle$. Nun betrachtet man einen Oktaeder und bezeichne 4 der Seitenflächen (die sich nur in Ecken schneiden) mit X, Y, Z, W .

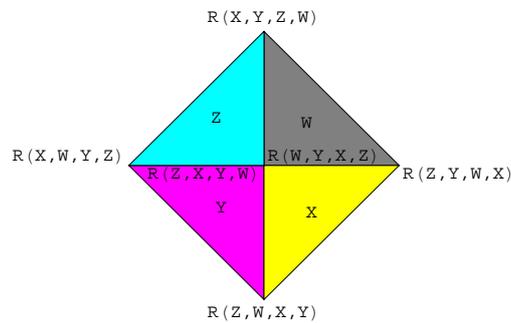


Die Ecken des Oktaeders, welche z.B. der Schnitt der Flächen X und Y ist, wird mit $R(Z, W, X, Y)$ bezeichnet, da von dieser Ecke aus betrachtet die Flächen X, Z, Y, W aufeinander folgen. Wegen **1** und **2** ist es egal, von welcher der beiden angrenzenden Flächen X oder Y aus man zu zählen beginnt.

Nun beachte man, daß die Summen der Ecken der Dreiecke X, Y, Z, W wegen **4** Null sind.



Zählt man diese Summen für die Dreiecke Z und W zusammen und zieht jene für X und Y ab, so erhält man, daß das Doppelte von der Differenz aus der Ecke $W \cap Z$ und der Ecke $X \cap Y$ Null ist, d.h. 3 gilt.



In Detail bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
 (+) \quad & \underbrace{R(X, Y, Z, W)}_{(1)} + \underbrace{R(Y, Z, X, W)}_{(2)} + \underbrace{R(Z, X, Y, W)}_{(3)} = 0 \\
 (-) \quad & \underbrace{R(W, X, Y, Z)}_{(4)} + \underbrace{R(X, Y, W, Z)}_{(1)} + \underbrace{R(Y, W, X, Z)}_{(5)} = 0 \\
 (-) \quad & \underbrace{R(Z, W, X, Y)}_{(6)} + \underbrace{R(W, X, Z, Y)}_{(4)} + \underbrace{R(X, Z, W, Y)}_{(3)} = 0 \\
 (+) \quad & \underbrace{R(Y, Z, W, X)}_{(2)} + \underbrace{R(Z, W, Y, X)}_{(6)} + \underbrace{R(W, Y, Z, X)}_{(5)} = 0 \\
 & \Rightarrow \underbrace{2R(X, Y, Z, W)}_{(1)} - \underbrace{2R(Z, W, X, Y)}_{(6)} = 0
 \end{aligned}$$

5 Um diesem Punkt überhaupt Sinn zu geben, muß man ∇_Z auf Tensorfelder ausdehnen. Das geht mittels Produkt-Regel, i.e.

$$\begin{aligned} (\nabla_Z R)(X, Y, W) &:= \\ &= \nabla_Z(R(X, Y)W) - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W - R(X, Y)\nabla_Z W \\ &= \nabla_Z(R(X, Y)W) + R(Y, \nabla_Z X)W - R(X, \nabla_Y Z + [Z, Y])W - R(X, Y)\nabla_Z W. \end{aligned}$$

Mit $\sum_{\text{zykl.}}$ bezeichnen wir die zyklische Summe bezüglich der Variablen X, Y und Z . Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{\text{zykl.}} (\nabla_Z R)(X, Y, W) &= \\ &= - \sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z(R(X, Y)W) - \sum_{\text{zykl.}} R(X, -[Y, Z])W - \sum_{\text{zykl.}} R(X, Y)\nabla_Z W \\ &= \sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z \left(\underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]}_{(1)} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]}}_{(4)} \right) W \\ &\quad + \sum_{\text{zykl.}} \left(\underbrace{[\nabla_X, \nabla_{[Y, Z]}]}_{(4)} W - \underbrace{\nabla_{[X, [Y, Z]]}}_{(3)} W \right) \\ &\quad - \sum_{\text{zykl.}} \left(\underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]\nabla_Z}_{(2)} W - \underbrace{\nabla_{[X, Y]}\nabla_Z}_{(4)} W \right) \\ &= - \underbrace{\nabla_{\sum_{\text{zykl.}} [X, [Y, Z]]}}_{(3)} W \\ &\quad + \sum_{\text{zykl.}} \left(\underbrace{\nabla_Z[\nabla_X, \nabla_Y]}_{(1)} W - \underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]\nabla_Z}_{(2)} W \right) + \underbrace{0}_{(4)} \\ &= 0 + \left(\sum_{\text{zykl.}} [[\nabla_X, \nabla_Y], \nabla_Z] \right) W \\ &= 0 \quad \text{wegen der Jacobi-Identität.} \quad \square \end{aligned}$$

64.6 Folgerung (Polarisierungsformel).

Für die Riemannkrümmung gilt:

$$\begin{aligned} 4! R(X, Y, Z, W) &= \\ &= -R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) + R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \\ &\quad + R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) - R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \\ &\quad + R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \\ &\quad - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y) \end{aligned}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} (6) \quad R(X, Y+Z, Y+Z, X) - R(X, Y-Z, Y-Z, X) &= \\ &= 2 \left(R(X, Y, Z, X) + R(X, Z, Y, X) \right) \\ &\quad \stackrel{\boxed{64.5.1}, \boxed{64.5.2}}{=} 2 \left(R(X, Y, Z, X) + R(Z, X, X, Y) \right) \\ &\quad \stackrel{\boxed{64.5.3}}{=} 4 R(X, Y, Z, X) \end{aligned}$$

und weiters

$$(7) \quad R(X+W, Y, Z, X+W) - R(X-W, Y, Z, X-W) = \\ = 2 \left(R(X, Y, Z, W) + R(W, Y, Z, X) \right)$$

Also ist

$$(8) \quad R(Y, Z, X, W) = \\ \underline{\underline{64.5.1}}, \underline{\underline{64.5.2}} R(Z, Y, W, X) \\ \underline{\underline{7}} - R(X, Y, W, Z) + \frac{1}{2} \left(R(Z+X, Y, W, Z+X) - R(Z-X, Y, W, Z-X) \right) \\ \underline{\underline{64.5.2}}, \underline{\underline{6}} R(X, Y, Z, W) \\ + \frac{1}{8} \left(R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) - R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \right. \\ \left. - R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) + R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \right)$$

$$(9) \quad R(Z, X, Y, W) = \\ \underline{\underline{64.5.2}} - R(Z, X, W, Y) \\ \underline{\underline{7}} R(Y, X, W, Z) - \frac{1}{2} \left(R(Z+Y, X, W, Z+Y) - R(Z-Y, X, W, Z-Y) \right) \\ \underline{\underline{64.5.1}}, \underline{\underline{64.5.2}}, \underline{\underline{6}} R(X, Y, Z, W) \\ - \frac{1}{8} \left(R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \right. \\ \left. - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y) \right)$$

und damit

$$0 \underline{\underline{64.5.4}} R(X, Y, Z, W) + \overbrace{R(Y, Z, X, W)}^{\underline{\underline{8}}} + \overbrace{R(Z, X, Y, W)}^{\underline{\underline{9}}} \\ = R(X, Y, Z, W) \\ + R(X, Y, Z, W) \\ + \frac{1}{8} \left(R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) - R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \right. \\ \left. - R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) + R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \right) \\ + R(X, Y, Z, W) \\ - \frac{1}{8} \left(R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \right. \\ \left. - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y) \right)$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
 4! R(X, Y, Z, W) &= \\
 &= -R(Z + X, Y + W, Y + W, Z + X) + R(Z + X, Y - W, Y - W, Z + X) \\
 &\quad + R(Z - X, Y + W, Y + W, Z - X) - R(Z - X, Y - W, Y - W, Z - X) \\
 &\quad + R(Z + Y, X + W, X + W, Z + Y) - R(Z + Y, X - W, X - W, Z + Y) \\
 &\quad - R(Z - Y, X + W, X + W, Z - Y) + R(Z - Y, X - W, X - W, Z - Y) \quad \square
 \end{aligned}$$

64.7 Bemerkung.

Wir wollen nun die Ausdrücke der Form $R(X, Y, Y, X)$ in der Polarisierungsformel [64.6](#) weiter untersuchen. Sei dazu

$$\begin{aligned}
 X' &= aX + bY \\
 Y' &= cX + dY
 \end{aligned}
 \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Wegen der Schiefsymmetrie [64.5.1](#) und [64.5.2](#) ist

$$R(X', Y', Y', X') = \det(A) R(X, Y, Y', X') = \det(A)^2 R(X, Y, Y, X).$$

Das gleiche Transformationsverhalten hat auch $|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2$, da dies das Quadrat der Fläche des von X und Y erzeugten Parallelogramms ist, siehe dazu [53.4](#). Folglich ist der Ausdruck

$$\frac{R(X, Y, Y, X)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

unabhängig von der Wahl eines Erzeugendensystems des von X und Y erzeugten 2-dimensionalen Teilraums F von $T_p M$. Diese Zahl heißt die **SCHNITTKRÜMMUNG** von F und bezeichnen sie mit $K(F)$. Die Polarisierungsformel [64.6](#) zeigt, daß die Riemannkrümmung sich aus der Schnittkrümmung berechnen läßt.

64.8 Satz (Gauß-Krümmung versus Schnitt-Krümmung).

Für jede Riemann-Fläche M ist die Gaußkrümmung ident mit der Schnittkrümmung (des ganzen 2-dimensionalen Tangentialraums).

Beweis für Hyperflächen im \mathbb{R}^3 . Sei (ξ_x, η_x) eine Orthonormalbasis von $T_x M$. Dann ist

$$\begin{aligned}
 K(T_x M) &:= \langle R_x(\xi_x, \eta_x)\eta_x, \xi_x \rangle \\
 &\stackrel{\text{64.1}}{=} \langle \langle L_x \eta_x, \eta_x \rangle L_x \xi_x - \langle L_x \xi_x, \eta_x \rangle L_x \eta_x, \xi_x \rangle \\
 &= \langle L_x \eta_x, \eta_x \rangle \langle L_x \xi_x, \xi_x \rangle - \langle L_x \xi_x, \eta_x \rangle \langle L_x \eta_x, \xi_x \rangle \\
 &= \det(L_x) = K_x
 \end{aligned}$$

Beweis für abstrakte Riemann-Flächen.

Es seien (u^1, u^2) lokale Koordinaten auf M . Dann ist

$$\begin{aligned}
D^2 \cdot K(T_x M) &:= D^2 \cdot \frac{R\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^1}\right)}{\left|\frac{\partial}{\partial u^1}\right|^2 \left|\frac{\partial}{\partial u^1}\right|^2 - \left|\left\langle \frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2} \right\rangle\right|^2} =: R_{1,2,2,1} \\
&\stackrel{\boxed{64.4}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1} g_{2,2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2} g_{1,1} \right) \\
&\quad + g^{1,1} (\Gamma_{1,2,1} \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,1} \Gamma_{1,1,1}) \\
&\quad + g^{1,2} (\Gamma_{1,2,2} \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,2} \Gamma_{1,1,1}) \\
&\quad + g^{2,1} (\Gamma_{1,2,1} \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,1} \Gamma_{1,1,2}) \\
&\quad + g^{2,2} (\Gamma_{1,2,2} \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,2} \Gamma_{1,1,2}) \\
&\stackrel{\boxed{58.1}, \boxed{62.6}}{=} \frac{1}{2} (F_{1,2} - G_{1,1} + F_{2,1} - E_{2,2}) \\
&\quad + \frac{G}{D^2} (E_2 E_2 - (2F_2 - G_1) E_1) \\
&\quad - \frac{F}{D^2} (G_1 E_2 - G_2 E_1) \\
&\quad - \frac{F}{D^2} (E_2 G_1 - (2F_2 - G_1)(2F_1 - E_2)) \\
&\quad + \frac{E}{D^2} (G_1 G_1 - G_2(2F_1 - E_2)) \\
&= \frac{E}{4D^2} (E_2 G_2 - 2F_1 G_2 + G_1^2) \\
&\quad + \frac{F}{4D^2} (E_1 G_2 - E_2 G_1 - 2E_2 F_2 + 4F_1 F_2 - 2F_1 G_1) \\
&\quad + \frac{G}{4D^2} (E_1 G_1 - 2E_1 F_2 + E_2^2) \\
&\quad - \frac{1}{2} (E_{2,2} - 2F_{1,2} + G_{1,1}) \\
&\stackrel{\boxed{53.7}}{=} D^2 K
\end{aligned}$$

Oder etwas anders gerechnet:

$$\begin{aligned}
R_{i,j,k,l} &\stackrel{\boxed{64.4}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) \\
&\quad + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l,p}) \\
R_{1,2,2,1} &\stackrel{\boxed{64.4}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1} g_{2,2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2} g_{1,1} \right) \\
&\quad + (\Gamma_{1,2}^1 \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2}^1 \Gamma_{1,1,1}) \\
&\quad + (\Gamma_{1,2}^2 \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2}^2 \Gamma_{1,1,2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{58.1, 62.6}{2} (F_{1,2} - G_{1,1} + F_{2,1} - E_{2,2}) \\
& + \frac{E_2 G - G_1 F}{2D^2} \cdot \frac{E_2}{2} \\
& - \frac{2 F_2 G - G_1 G - G_2 F}{2D^2} \cdot \frac{E_1}{2} \\
& + \frac{-E_2 F + G_1 E}{2D^2} \cdot \frac{G_1}{2} \\
& - \frac{-2 F_2 F + G_1 F + G_2 E}{2D^2} \cdot \frac{2 F_1 - E_2}{2} \\
& = \frac{E}{4D^2} (E_2 G_2 - 2F_1 G_2 + G_1^2) \\
& + \frac{F}{D^2} (E_1 G_2 - E_2 G_1 - 2E_2 F_2 + 4F_1 F_2 - 2F_1 G_1) \\
& + \frac{G}{D^2} (E_1 G_1 - 2E_1 F_2 + E_2^2) \\
& - \frac{1}{2} (E_{2,2} - 2F_{1,2} + G_{1,1}) \\
& \frac{53.7}{D^2} K. \quad \square
\end{aligned}$$

64.9 Definition (Normalkoordinaten)

Unter RIEMANNSCHEN NORMALKOORDINATEN versteht man die Parametrisierung

$$\varphi : (u^1, \dots, u^m) \mapsto \exp_p \left(\sum_{i=1}^m u^i X_i \right)$$

für eine Orthonormalbasis (X_1, \dots, X_m) von $T_p M$.

64.10 Lemma (Christoffelsymbole in Normalkoordinaten).

In Riemannschen Normalkoordinaten verschwinden alle Christoffelsymbole bei p .

Beweis. Offensichtlich gilt

$$g_{i,j}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle(p) = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Die radialen Geodäten $t \mapsto \exp_p(tX)$ erfüllen die Geodäten-Gleichung

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0.$$

Für $u(t) := tX_j$ gilt wegen $u^k(t) = \delta_j^k t$ somit $\Gamma_{j,j}^k(p) = 0$. Für $u(t) := t(X_i + X_j)$ folgt analog $\Gamma_{i,i}^k + \Gamma_{i,j}^k + \Gamma_{j,i}^k + \Gamma_{j,j}^k = 0$ und da $\Gamma_{i,j}^k$ symmetrisch in (i, j) ist, ist $\Gamma_{i,j}^k(p) = 0$ für alle i, j, k . \square

64.11 Lemma.

Sei M eine Riemann-Mannigfaltigkeit und $F \subset T_x M$ ein 2-dimensionaler Teilraum. Dann ist die Schnittkrümmung $K(F)$ genau die Gauß-Krümmung der lokal durch $\exp(F)$ gegebenen Fläche.

Beweis. Wegen [64.8](#) genügt es zu zeigen, daß die Riemann-Krümmung R_N der Fläche $N := \exp(F)$ mit der Riemann-Krümmung R_M auf M übereinstimmt, wobei N durch $(t, s) \mapsto \exp_p(tX_p + sY_p)$ parametrisiert wird und die von M induzierte Metrik trägt.

Dazu wählt man Riemann-Normalkoordinaten, d.h. die Parametrisierung $\varphi : (u^1, \dots, u^m) \mapsto \exp_p(\sum_{i=1}^m u^i X_i)$ für eine Orthonormalbasis (X_1, \dots, X_m) des Tangentialraums $T_p M$.

Dann verschwinden nach [64.10](#) alle Christoffelsymbole bei p . Da die Koeffizientenfunktionen $g_{i,j}$ für M und N übereinstimmen, gilt das auch für

$$R_{i,j,k,l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial^i \partial^l} g_{i,k} + \frac{\partial^2}{\partial^i \partial^k} g_{j,l} - \frac{\partial^2}{\partial^j \partial^k} g_{i,l} - \frac{\partial^2}{\partial^i \partial^l} g_{j,k} \right) + 0. \quad \square$$

64.12 Satz (Ungekrümmte Räume).

Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind äquivalent:

1. $R = 0$.
2. M ist lokal isometrisch zum Euklidischen Raum.
3. Der Paralleltransport (siehe [61](#)) ist lokal wegunabhängig.

Der Punkt (3) ist global nicht allgemein gültig wie das Möbiusband mit flacher Metrik zeigt.

Beweis. ($1 \Rightarrow 3$) Indem wir eine Karte verwenden, können wir annehmen, daß M eine offene Umgebung von 0 in \mathbb{R}^m ist, allerdings mit einer allgemeinen Riemann-Metrik g . Wir müssen zu gegebenem Anfangswert X_0 ein Vektorfeld X finden, welches längs jeder Kurve parallel ist. Dazu genügt es, daß $\nabla_{\partial_i} X = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ ist. Zuerst finden wir ein längs der u^1 -Achse paralleles Vektorfeld $u^1 \mapsto X(u^1, 0, \dots, 0)$. Zu jedem u^1 finden wir längs der Kurve $u^2 \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ ein paralleles Vektorfeld $u^2 \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ mit Anfangswert $X(u^1, 0, \dots, 0)$. Und somit erhalten wir ein Vektorfeld $(u^1, u^2) \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ längs der 2-Fläche $\psi : (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$. Dieses erfüllt: $\nabla_{\partial_2} X = 0$ längs ψ und $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$. Es gilt $\nabla_{\partial_1} \nabla_{\partial_2} X - \nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} X = R(\partial_1, \partial_2)X = 0$, da $[\partial_s, \partial_t] = 0$ ist, weil die Flüsse $t \mapsto (t, s)$ und $s \mapsto (t, s)$ miteinander kommutieren. Somit ist $\nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} X = 0$, d.h. $\nabla_{\partial_1} X$ ist parallel längs $u^2 \mapsto \psi(u^1, u^2)$. Aus $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$ folgt $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs ψ . Es ist also X parallel längs aller Kurven in der 2-Fläche ψ .

Nun kann man obigen Prozeß fortsetzen, um das gewünschte parallele Vektorfeld X zu erhalten. Dies zeigt, daß der Paralleltransport wegunabhängig ist.

($3 \Rightarrow 2$) Wählt man als Anfangswert die Vektoren einer Orthonormal-Basis von $T_0 \mathbb{R}^m$, so erhält man parallele Vektorfelder X_i , welche punktweise eine Basis bilden. Für diese gilt $[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0$. Diese können integriert werden, um eine Karte φ zu erhalten, welche $\varphi_i = X_i$ erfüllt, siehe [29.12](#). In dieser Karte hat die Riemann-Metrik dann aber Koeffizienten $\delta_{i,j}$ nach [61.5.1](#), d.h. φ ist eine lokale Isometrie zwischen dem flachen \mathbb{R}^m und M .

($2 \Rightarrow 1$) Da die kovariante Ableitung und somit die Riemann-Krümmung eine intrinsische Größe ist, also nur von der Riemann-Metrik abhängt, genügt es R für den Euklidischen Raum zu berechnen, dort ist aber $R = 0$ wegen der Vorbemerkung zu [64.1](#). \square

64.13 Definition (Krümmungen)

Unter der RICCI-KRÜMMUNG einer Riemann-Mannigfaltigkeit versteht man

$$\text{Ricci}(X, Y) = \text{spur}(Z \mapsto R(Z, X)(Y)) = -\text{spur}(Z \mapsto R(X, Z)(Y)).$$

In lokalen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned}
\text{Ricci}\left(\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}\right) &= \\
&= \sum_{i,j} X^i Y^j \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\
&= \sum_{i,j} X^i Y^j \sum_k \underbrace{du^k \left(R\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) \frac{\partial}{\partial u^j} \right)}_{R_{k,i,j}^k} \\
&\stackrel{\boxed{64.4.1}}{=} \sum_{i,j} X^i Y^j \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{i,j}^k - \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{k,j}^i + \sum_p (\Gamma_{i,j}^p \Gamma_{k,p}^i - \Gamma_{k,j}^p \Gamma_{i,p}^k) \right)
\end{aligned}$$

Beachte, daß Ricci : $T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrisch ist, denn

$$\begin{aligned}
\text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) &= \sum_k R_{k,i,j}^k \stackrel{\boxed{64.4.2}}{=} \sum_{k,l} R_{k,i,j,l} g^{l,k} \stackrel{\boxed{64.5.3}}{=} \sum_{k,l} R_{j,l,k,i} g^{l,k} \\
&\stackrel{\boxed{64.5.1}, \boxed{64.5.2}}{=} \sum_{l,k} R_{l,j,i,k} g^{k,l} = \sum_l R_{l,j,i}^l = \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right)
\end{aligned}$$

Unter der SKALARKRÜMMUNG versteht man $S := \text{spur}_g(\xi \mapsto (\text{Ricci}(\xi, \cdot))^b)$, also von der Abbildung

$$T_x M \xrightarrow{\text{Ricci}_x^b} (T_x M)^* \xrightarrow{\cong} T_x M.$$

In Koordinaten ist das somit

$$\begin{aligned}
S &:= \sum_{i,j} \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) g^{i,j} \\
&= \sum_{i,j} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{k,j}^k - \frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{i,j}^k + \sum_p (\Gamma_{k,j}^p \Gamma_{i,p}^k - \Gamma_{i,j}^p \Gamma_{k,p}^k) \right) g^{i,j}.
\end{aligned}$$

Beachte, daß dies wegen der Symmetrieeigenschaften [64.6](#) alle nicht trivialen Spuren sind, welche man aus der Riemannkrümmung bilden kann. \square

64.7a Proposition.

Eine Riemann-Mannigfaltigkeit hat genau dann konstante Schnittkrümmung auf $G(2, T_p M)$, wenn für alle $X, Y, Z \in T_p M$ gilt:

$$R(X, Y)Z = K \cdot (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

Beweis. (\Leftarrow) Sei $R(X, Y)Z = K \cdot (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$ mit einer Konstanten $K \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
K(\langle X, Y \rangle) &:= \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \\
&= \frac{g(K \cdot (g(Y, Y)X - g(X, Y)Y), X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} = K
\end{aligned}$$

(\Rightarrow) Sei K die konstante Schnittkrümmung. Der Ausdruck

$$g(K \cdot (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), W) = K \cdot (g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W))$$

hat die Eigenschaften [64.5.1](#)–[64.5.4](#) und stimmt für $Z = Y$ und $W = X$ mit $g(R(X, Y)Y, X)$ überein. Wegen [64.6](#) (wo wir nur diese Eigenschaften) verwendet haben stimmt er überhaupt mit $g(R(X, Y)Z, W)$ überein. \square

64.14 Folgerung.

Eine m -dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit habe konstante Schnittkrümmung K . Dann gilt für die Ricci- und die Skalarkrümmung:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ricci}(X, Y) &= K \cdot (m - 1) \cdot g(X, Y) \\ S &= K \cdot (m - 1) \cdot m\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\operatorname{Ricci}(X, Y) &= \operatorname{spur}\left(Z \mapsto R(Z, X)Y\right) \stackrel{64.7a}{=} \operatorname{spur}\left(Z \mapsto K \cdot (g(X, Y)Z - g(Z, Y)X)\right) \\ &= K \cdot (m \cdot g(X, Y) - g(X, Y)) = K \cdot (m - 1) \cdot g(X, Y) \\ \text{und } S &= \operatorname{spur}\left(X \mapsto (\operatorname{Ricci}(X, -))^b\right) = \operatorname{spur}\left(X \mapsto (K \cdot (m - 1) \cdot g(X, -))^b\right) \\ &= \operatorname{spur}\left(X \mapsto K \cdot (m - 1) \cdot X\right) = K \cdot (m - 1) \cdot m. \quad \square\end{aligned}$$

65. Rückblick auf Krümmungen

Bei ebenen Kurven, haben wir die KRÜMMUNG als die Kraft interpretiert, die notwendig ist, um einen Massenpunkt mit konstanter skalarer Geschwindigkeit auf einer Kurve zu halten.

Bei Hyperflächen im \mathbb{R}^3 haben wir zuerst die NORMALKRÜMMUNG einer Fläche in Richtung ξ als Krümmung der Schnittkurve mit der, von der Flächennormale und ξ aufgespannten Ebene kennengelernt. Dies ist gleichzeitig die Krümmung der Geodäte in Richtung ξ , siehe [52.4](#). Die kritische Punkte der Normalkrümmung sind die HAUPTKRÜMMUNGEN, deren Produkt die GAUSS-KRÜMMUNG ist.

Bei einer allgemeinen Riemann-Mannigfaltigkeit kann die SCHNITTKRÜMMUNG als die Gauß-Krümmung einer 2-dimensionalen Fläche, welche durch die Exponentialabbildung parametrisiert wird, aufgefaßt werden. Die Riemann-Krümmung ist schließlich das zur Schnittkrümmung gehörige Tensorfeld (i.e. 4-lineare Abbildung).

Aufgaben

1. Zusammensetzung von Spiegelungen.

Zeige, daß die Zusammensetzung von zwei Spiegelungen an Geraden im \mathbb{R}^2 eine Drehung um den doppelten des zwischen den Geraden eingeschlossenen Winkels liefert. **Hinweis:** Es genügt (warum?) das Bild eines (geschickt gewählten) Vektors zu bestimmen.

2. Matrixdarstellung einer Spiegelung.

In der VO haben wir die Spiegelung an der Normalebene w^\perp für $w = (w^1, w^2, w^3) \in S^2$ durch $\mathbb{R}^3 \ni v \mapsto v - 2\langle v|w \rangle w \in \mathbb{R}^3$ beschrieben. Wie sieht ihre Matrixdarstellung bzgl. der Standardbasis aus.

3. Fluglage in Koordinaten.

Um einen Körper (also z.B. ein Flugzeug oder einen Hängegleiter) in eine allgemeine Lage im Raum zu bringen, kann man folgendermaßen vorgehen: Zuerst drehen wir es um die Senkrechte in jene Richtung in welche es fliegt (Winkel ψ), dann drehen wir es um seine Querachse um den Winkel (des Anstiegs) ϑ und danach (falls es eine Kurve fliegt) um seine Längsachse um einen Winkel φ und schließlich verschieben wir es noch vom Ursprung in die gewünschte Lage $p \in \mathbb{R}^3$. Wie sieht die Matrixdarstellung des linearen Teils dieser Bewegung aus? **Hinweis:** Verfahre ähnlich wie bei den Eulerwinkeln.

4. Formel für Drehung im \mathbb{R}^3 .

Finde eine Formel für die Drehung um die von $w \in S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ erzeugte Drehachse $\mathbb{R} \cdot w$ um den Winkel φ . **Hinweis:** Betrachte für jedes von w linear unabhängige $v \in \mathbb{R}^3$ die orthogonal-Basis $w, v \times w, v - \langle v|w \rangle w$ und verwende, daß eine Drehung um den Winkel φ in der Ebene bzgl. jeder orthonormal-Basis \mathcal{E} durch $\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$ gegeben ist.

5. Konforme lineare Abbildungen.

Zeige, daß eine bijektive lineare Abbildung $f : E \rightarrow E$ des Euklid'schen Raums E genau dann konform (d.h. winkelerhaltend) ist, wenn ein $\lambda > 0$ existiert, s.d. $\langle f(x)|f(y) \rangle = \lambda \langle x|y \rangle$ für alle $x, y \in E$ gilt, also $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} f$ eine Isometrie ist. **Hinweis:** (\Rightarrow) Für $v \in E$ definiere $\lambda(v) > 0$ durch $\|f(v)\|^2 = \lambda(v) \|v\|^2$. Sei (e_1, \dots, e_n) eine orthonormal-Basis. Dann ist $e_i + e_j \perp e_i - e_j$ und somit auch die Bilder unter f . Schließe daraus $\lambda(e_i) = \lambda(e_j)$. Schließe weiter, daß λ auf ganz E konstant ist und verwende schließlich die Polarisierungsgleichung um die gewünschte Identität zu erhalten.

6. Beispiele von Bogenlängen.

Versuche in mindestens 2 der in [72.3](#)–[72.14](#) gegebenen Kurven die Bogenlängenfunktion zu berechnen und wenn möglich auch die Bogenlängenparametrisierung zu bestimmen.

7. Krümmung in Polarkoordinaten.

Sei $r : \varphi \mapsto r(\varphi)$ die Polarkoordinatendarstellung einer Kurve, d.h. $c(\varphi) := (r(\varphi) \cos(\varphi), r(\varphi) \sin(\varphi))$ ist eine Parametrisierung, und sei $r' := \frac{dr}{d\varphi}$. Zeige, daß die Bogenlänge gegeben ist durch $\int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi$ und die Krümmung durch $\frac{r^2 + 2(r')^2 - rr''}{(r^2 + (r')^2)^{3/2}}$.

8. Krümmung einer Kurve die als Graph gegeben ist.

Es sei eine Kurve durch den Graph einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschrieben. Zeige, daß ihre Krümmung gegeben ist durch:

$$\frac{f''(x)}{\sqrt{1 + f'(x)^2}^3}$$

9. Krümmung für implizit gegebene Kurve.

Es sei eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve $t \mapsto (x(t), y(t))$ durch eine Gleichung $f(x(t), y(t)) = 0$ gegeben. Wähle eine Orientierung der Kurve und zeige, daß mit der Bezeichnungsweise $f_x := \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_{xy} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, etc. ihre Krümmung gegeben ist durch

$$\frac{f_{xx}f_y^2 - 2f_{xy}f_xf_y + f_{yy}f_x^2}{(f_x^2 + f_y^2)^{3/2}}.$$

10. Beispiele zur Krümmung.

Versuche für eine der in 72.3–72.14 gegebenen Kurven die Krümmung und die Krümmungsmittelpunkte zu bestimmen.

11. Beispiele zur Krümmung.

Bestimme die Evolute der Ellipse oder der Parabel.

12. Beispiele zur Krümmung.

Bestimme die Evolute von der logarithmischen Spirale oder der Traktrix.

13. Evolute.

Unter welchen Bedingungen an eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve c definiert die Evolute $e_c(s) := c(s) + \frac{1}{K(s)}\nu(s)$ wieder eine (geometrische) Kurve. Zeige, daß die Krümmung der Evolute gegeben ist durch $\frac{K^3(s)}{|K'(s)|}$.

14. Involute.

Unter welchen Bedingungen an eine Bogenlängen-parametrisierte Kurve c definiert die Involute $i_c(s) := c(s) - s\tau(s)$ wieder eine (geometrische) Kurve. Zeige, daß die Krümmung der Involute gegeben ist durch $\text{sign}(sK(s))\frac{1}{s}$.

15. Charakterisierung von Geraden.

Zeige, eine Kurve im \mathbb{R}^n parametrisiert genau dann eine Gerade, wenn ihre Tangenten einen Punkt gemeinsam haben.

Die folgenden Aufgaben beziehen sich auf Kurven im \mathbb{R}^3 , die hinreichend regulär sind:

16. Krümmung und Torsion als infinitesimale Winkeländerung.

Sei c nach der Bogenlänge parametrisiert.

- (a) Für den Winkel $\varphi(s_1, s_2)$ von $\tau(s_1)$ nach $\tau(s_2)$ gilt: $\frac{\varphi(s_1, s_2)}{s_2 - s_1} \rightarrow K(s)$ für $s_1, s_2 \rightarrow s, s_2 > s_1$. (Hinweis: $\varphi \sim 2 \sin \frac{\varphi}{2} = |\tau(s_1) - \tau(s_2)|$.)
- (b) Für den Winkel $\varphi(s_1, s_2)$ von $\beta(s_1)$ nach $\beta(s_2)$ gilt: $\frac{\varphi(s_1, s_2)}{s_2 - s_1} \rightarrow |T(s)|$ für $s_1, s_2 \rightarrow s, s_2 > s_1$.
- (c) Wogegen konvergiert $\frac{\varphi(s_2, s_1)}{s_1 - s_2}$ für $s_1, s_2 \rightarrow s, s_2 > s_1$, wenn $\varphi(s_1, s_2)$ der Winkel von $\nu(s_1)$ nach $\nu(s_2)$ ist?

17. Berührsphäre.

Zeige, daß die Sphäre welche eine Kurve c bei s am besten approximiert ($c + \frac{1}{K}\nu + \frac{1}{T}(\frac{1}{K})'\beta(s)$ als Mittelpunkt M und $R^2 = (\frac{1}{K^2} + (\frac{1}{T}(\frac{1}{K})')^2)(s)$ als Radius R hat (Hinweis: Versuche möglichst viele Ableitungen von $g : t \mapsto |c(t) - M|^2$ at der Stelle $t = s$ zum Verschwinden zu bringen).

18. Helix.

Zeige, daß folgende Aussagen für eine Kurve äquivalent sind:

1. τ schließt mit einem festen Vektor einen fixen Winkel ein.
2. β schließt mit einem festen Vektor einen fixen Winkel ein.
3. ν liegt immer in einer fixen Ebene durch 0.
4. K und T sind proportional.
5. c läßt sich schreiben als $c(t) = c_0(t) + tw$, wobei $w \neq 0$ ein fixer Vektor und c_0 eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve in der Ebene w^\perp ist.

So eine Kurve c heißt HELIX. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Krümmung und Torsion von c und c_0 .

(Hinweis: $K = T \tan \alpha \Rightarrow \tau \cos \alpha + \beta \sin \alpha$ ist konstant).

19. Charakterisierung von Helixen.

Zeige: Eine nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve ist genau dann eine Helix falls $\det(c'', c''', c'''') = 0$.

20. Konformität der stereographischen Projektion.

Zeige, daß die stereographische Projektion $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ winkelerhaltend ist, d.h. ihre Ableitung an jeder Stelle konform ist. **Hinweis:** Zeige, daß die Umkehrabbildung $h : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$ konform ist.

21. Quadriken.

Es sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear, symmetrisch und $a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Finde hinreichende Bedingungen, unter welchen die Quadrik $M := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x, x) + a(x) = 1\}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$ ist. Identifiziere Paraboloid, Hyperboloid und Ellipsoid als Spezialfall.

22. Flächen von beliebigen Geschlecht.

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} C^\infty$. Unter welchen Bedingungen an $\varepsilon > 0$ wird durch die Gleichung

$$(f(x) + y^2)^2 - \varepsilon (f(x) + y^2) + z^2 = 0$$

eine Mannigfaltigkeit beschrieben. Falls f ein Polynom mit $2g$ einfachen Nullstellen und positiven höchsten Koeffizienten ist und ε geeignet gewählt wird, dann ist

diese Mannigfaltigkeit eine orientierte Fläche vom Geschlecht g . **Hinweis:** Hinweisse betrachte die Schnittkurven mit den zur y - z -Ebene parallelen Ebenen für $f(x) < 0$ und für $f(x) > 0$.

23. Erweiterung der stereographischen Projektion.

In [10.4] haben wir gezeigt und in [15.3] verwendet, daß sich lokale Parametrisierungen zu lokalen Diffeomorphismen erweitern lassen. Finde für die stereographische Projektion mit Pol $p \in S^n$ eine explizite Erweiterung zu einem Diffeomorphismus $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{tp : t \geq 0\} \rightarrow p^\perp \times \mathbb{R}p$.

Hinweis: Wähle Φ so, daß Halbstrahlen durch 0 auf Geraden normal zu p^\perp abgebildet werden.

24. Glattheit der Abbildung Bild.

Zeige, daß $T \mapsto \text{Bild}(T), L_r(m, n) \rightarrow G(r, n) C^\infty$ ist. **Hinweis:** Beschreibe diese Abbildung lokal als Zusammensetzung

$$L_r(m, n) \rightarrow L_r(r, n) \rightarrow V(r, n) \rightarrow G(r, n)$$

wobei die erste (lokale!) Abbildung durch Einschränken auf eine geeignet gewählten r -dimensionalen Teilraum gegeben ist, die zweite Gram-Schmidt-Orthonormalisieren der Spalten der Matrix bedeutet und die letzte das Bild nehmen aus der VO ist.

25. Möbiusband, Teil 1.

Es sei $M := [-1, 1] \times (-1, 1) / \sim$, wobei \sim die von $\forall s : (-1, -s) \sim (1, s)$ erzeugte Äquivalenzrelation ist, und $q : [-1, 1] \times (-1, 1) \rightarrow M$ die Quotientenabbildung $(t, s) \mapsto [(t, s)]$.

Weiters seien $\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1 : (-1, 1) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\bar{\varphi}_0(t, s) := (t, s) \text{ und } \bar{\varphi}_1(t, s) := \begin{cases} (t + 1, s) & \text{für } t < 0 \\ (t - 1, -s) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

und $\varphi_i := q \circ \bar{\varphi}_i$. Zeige, daß $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ ein C^∞ -Atlas für M ist.

26. Möbiusband, Teil 2.

Zeige daß die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, s) \mapsto \left((1 + s \cos(\frac{\pi}{2}t)) \cos(\pi t), (1 + s \cos(\frac{\pi}{2}t)) \sin(\pi t), s \sin(\frac{\pi}{2}t) \right)$$

einen Diffeomorphismus $\tilde{f} : [(t, s)] \mapsto f(t, s)$ von M aus Beispiel [25] mit der Teilmannigfaltigkeit $\text{Möb} := f(\mathbb{R} \times (-1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^3$ induziert.

Hinweis: Verwende, daß f lokal eine Parametrisierung von Möb ist und $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$ für $x, y \in [-1, 1] \times (-1, 1)$ gilt.

27. Kettenregel.

Beweise für abstrakte Mannigfaltigkeiten das Lemma [20.4].

Hinweis: Um $T_p f$ zu bestimmen evaluiere diesen Ausdruck auf $\partial \in \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ und das Ergebnis auf $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, betrachte also $(T_p f)(\partial)(h)$. Für die Produktregel verwende den Isomorphismus $\text{Der}_p(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}, \partial \mapsto \partial(\text{id})$.

28. Tangentialraum der Grassmannmannigfaltigkeit.

Bestimme den Tangentialraum der Grassmannmannigfaltigkeit $G(k, n)$ im Punkte $P : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto (x, 0)$.

29. Tangentialraum der Stiefelmannigfaltigkeit.

Bestimme den Tangentialraum der Stiefelmannigfaltigkeit $V(k, n)$ im Punkte $A : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n, x \mapsto (x, 0)$.

30. Pullback-Bündel.

Es sei $q : Q \rightarrow N$ ein Faserbündel und $f : M \rightarrow N$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten. Definiere $f^*Q := \{(x, z) \in M \times Q : f(x) = q(z)\}$. Zeige, daß

$f^*q := \text{pr}_1 : f^*Q \rightarrow M$ ein Faserbündel ist, das sogenannte Pullback der Bündels q längs f . Falls q eine Vektorbündel ist, so gilt gleiches auch für $f^*q : f^*Q \rightarrow M$. **Hinweis:** Um f^*Q als Mannigfaltigkeit und f^*q als Faserbündel zu erkennen genügt es Bijektionen $\varphi : U \times F \rightarrow f^*Q|_U$ so zu finden, daß die zugehörigen U eine offene Überdeckung von M bilden und die Kartenwechselabbildungen $\psi^{-1} \circ \varphi : (U \cap W) \times F \rightarrow (U \cap W) \times F$ glatt sind, wobei $\psi : W \times F \rightarrow f^*Q|_W$ auch so eine Bijektion bezeichnet. Aus Trivialisierungen $V \times F \rightarrow Q|_V$ von $q : Q \rightarrow N$ konstruiere nun assoziierte Trivialisierungen $f^{-1}(V) \times F \rightarrow f^*(Q)|_{f^{-1}(V)}$.

31. Inhaltserhaltende Parametrisierungen.

Zeige, daß jede Fläche $M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine inhaltbewahrende lokale Parametrisierung besitzt. **Hinweis:** Versuche aus einer gegebenen Parametrisierung eine Reparametrisierung zu erhalten, welche Flächen bewahrt, d.h. für welche $E \cdot G - F^2 = 1$ ist. Zeige dazu, daß sich dieser Ausdruck mit dem Quadrat der Funktionaldeterminante des Parameterwechsels transformiert.

32. Krümmungen der Minimal-Fläche von Enneper.

Bestimme alle Krümmungen der durch $(t, s) \mapsto (t - t^3/3 + ts^2, s - s^3/3 + st^2, t^2 - s^2)$ parametrisierten Fläche von Enneper.

33. Krümmungen am Beispiel eines Graphens.

Bestimme Gauß- und mittlere Krümmung für die Fläche die als Graph von $(t, s) \mapsto ts^2$ gegeben ist.

34. Theorem von Joachimsthal.

Es sei c eine Krümmungslinien einer Fläche die auch in einer zweiten Fläche liegt. Zeige daß diese genau dann Krümmungslinie der zweiten Fläche ist, wenn der Winkel der beiden Flächen(-Normalen) längs c konstant ist.

Hinweis: Es seien ν_1 und ν_2 die Gaußabbildungen der beiden Flächen M_i und $v_i := \nu_i \circ c$. Dann ist c genau dann Krümmungslinie auf der Fläche M_i , wenn $v'_i = \lambda_i \cdot c'$ für eine Funktion λ_i ist. Beachte weiters, daß $c' \in v_1^\perp \cap v_2^\perp$.

35. Tangentialfläche.

Die Parametrisierung $\varphi : (s, \vartheta) \mapsto c(\vartheta) + s c'(\vartheta)$ einer Tangentialfläche erfüllt nicht die Bedingung $c' \perp w$. Wie sieht die nach [55.2](#) existierende Umparametrisierung (mit $|c'| = 1 = |w'|$ und $c' \perp w'$) aus?

36. Hyperbolisches Paraboloid.

Zeige, daß das hyperbolische Paraboloid eine Regelfläche aber keine Torse ist.

Hinweis: Verifiziere die in [55.3.4](#) angegebene Parametrisierung.

37. Einschalige Hyperboloid.

Zeige, daß das einschalige Hyperboloid eine Regelfläche aber keine Torse ist.

Hinweis: Verifiziere die in [55.3.5](#) angegebene Parametrisierung.

38. Geodäten die zu minimalen Breitenkreis spiralen.

Verwende die Parametrisierung einer minimalen Drehfläche aus [54.9](#) (mit $r(s)^2 = s^2 + 1$) und bestimme jenen Winkel mit dem eine Geodäte auf einem fix gegebenen Breitenkreis starten muß, damit sie zum Breitenkreis mit minimalen Durchmesser spiralt. Gibt die Zeit an die benötigt wird um einen anderen Breitenkreis zu erreichen. Kannst Du auch die Änderung der Längengrade bis zu diesen Zeitpunkt bestimmen? **Hinweis:** Versuche mittels der Differentialgleichung aus [57.5](#) t als Funktion von s zu bestimmen.

39. Beispiele für Geodätengleichung.

Bestimme für eine Parametrisierung einer Fläche Deiner Wahl mit $K \neq 0$ die Christoffelsymbole erster und zweiter Art und schreibe die Geodätengleichung in diesen lokalen Koordinaten auf.

Literaturverzeichnis

- [1] J. F. Adams. Vector fields on spheres. *Ann. of Math.*, 75:603–632, 1962. [139](#)
- [2] J.W. Alexander. An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA.*, 10:8–10, 1924.
- [3] C. Bankwitz. über die Fundamentalgruppe des inversen Knotens und des gerichteten Knotens. *Ann.of Math*, 31:129–130, 1930.
- [4] J.L.M. Barosa and A.G. Colares. *Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3* . Springer Lecture Notes 1195, 1986. [207](#)
- [5] A.F. Beardon. *A primer on Riemann Surfaces*. Cambridge Univ.Press, London, 1984.
- [6] M. Berger. *Geometry 1*. Springer, Berlin, 1987. [207](#), [222](#), [226](#)
- [7] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential Geometry, Manifolds, Curves, and Surfaces*. Springer, New York, 1987.
- [8] S. Bernstein. Sur un théorème de Géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique. *Comm.de la Soc.M. Kharkov*, 15:38–45, 1915. [207](#)
- [9] O. Bonnet. Mémoire sur la théorie générale des surfaces. *Journ. de l'Ecole Polytechn.*, 19:1–146, 1848.
- [10] Th. Bröcker and K. Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer, Heidelberg, 1973. [128](#)
- [11] Brown. Smooth n -manifolds immerse in $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$. *Contemp. Math*, 12:73–79, 1982. [129](#)
- [12] Carathéodory. über die gegenseitigen Beziehungen der Ränder bei konformen Abbildungen des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. *Math. Annal.*, 73:305–320, 1913.
- [13] Catalan. *Jornal de Mathém.*, 7:203, 1842. [206](#)
- [14] S.S. Chern. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. AMS.*, 6:771–782, 1955. [161](#)
- [15] S.S. Chern. *Complex manifolds without potential theory*. Van Nostrand, Princeton, 1967.
- [16] Cohen. A proof of the immersion conjecture. *Proced. Math. Acad. Soc.*, 79:3390–3392, 1982. [129](#)
- [17] J.H. Conway and N.J.A. Sloane. Four-dimensional lattices with the same theta series. *Int. Math. Res. Not.*, 4:93–96, 1992.
- [18] M. Dehn. über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, 69:137–168, 1910.
- [19] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960. [77](#), [141](#)
- [20] Beno Eckmann. Systeme von richtungsfeldern in sphären und stetige lösungen komplexer linearer gleichungen. *Comment. Math. Helv.*, 15:1–26, 1943. [139](#)
- [21] R. Engelking. *Outline of General Topology*. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1968.
- [22] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer, Berlin, 1969.
- [23] C. Fefferman. The Bergman kernel of biholomorphic mappings of pseudo convex domains. *Inv. Math.*, 26:1–65, 1974.
- [24] G.M. Fischer. On the group of all homeomorphisms of a manifold. *Trans. AMS*, 97:193–212, 1960.
- [25] Gauß. Disquisitiones generales circa superficies curvas. *Comm. Soc. Regiae Sci. Gotingensis Rec.*, 6, 1828. [181](#)
- [26] Gleason. Groups without small subgroups. *Ann. of Math.*, 56:193–212, 1952.
- [27] Robert E. Gompf. Three exotic \mathbb{R}^4 's and other anomalies. *Journal of Differential Geom.* 18.2, pages 317–328, 1983.
- [28] C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via riemannian orbifolds. *Invent. Math.*, 110:1–22, 1992.
- [29] C. Gordon and E. Wilson. Isospektral deformations of compact solvmanifolds. *J. Diff. Geom.*, 19:241–256, 1984.
- [30] C. McA. Gordon and J. Luecke. Knts are determined by their complements. *J.AMS.*, 2:371, 1989.
- [31] Carolyn Gordon, David L. Webb, and Scott Wolpert. One cannot hear the shape of a drum. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 27:134–138, 1992.
- [32] Werner Greub. *Multilinear Algebra*. Springer,

-
- [33] Werner Greub, Stephen Halperin, and Ray Vanstone. *Connections, Curvature and Cohomology I-III*. Academic Press 773, 76, New York, 1972.
- [34] W. Gröbner. *Matrizenrechnung*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1966.
- [35] H.W. Guggenheimer. *Differential Geometry*. Dover Publ., New York, 1963.
- [36] J. Hadamard. Les surfaces à courbures opposées. *J.Math.Pures Appl.*, 4:27–73, 1889. 246
- [37] Haeflinger and Reeb. Variétés à une dimension et structures feuilletées de plan. *l'Enseignement Math.*, 2:107–125, 1957.
- [38] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Acad. Press, New York, 1978.
- [39] G. Herglotz. über die Starrheit der Eilflächen. *Abh. Math.Sem.Univ.Hamburg*, 15:127–129, 1943. 226
- [40] D. Hilbert. über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung. *Trans.AMS.*, 2:87–99, 1901. 226
- [41] S. Hildebrandt. Boundary behaviour of minimal surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 35:47–82, 1969. 204
- [42] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer, New York, 1976. 43, 48, 129
- [43] H. Hopf and W. Rinow. über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen. *Math. Ann.*, 116:749–766, 1938.
- [44] Chuan-Chih Hsiung. *A First Course in Differential Geometry*. John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [45] I.M. James. Whitehead products and vector fields on spheres. *Proc. Cambridge*, 53:817–820, 1957. 139
- [46] H. Jarchow. *Locally convex spaces*. Teubner, Stuttgart, 1981.
- [47] Joris. Une c^∞ -application non-immersive qui possède la propriété universelle des immersions. *Archiv Math.*, 39:267–277, 1982.
- [48] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer.Math.Monthly*, 73:1–23, 1966.
- [49] M. Kervaire. A manifold which doesn't admit any differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 34:257–270, 1960. 99
- [50] Michel A. Kervaire. A manifold which doesn't admit a differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 35:1–14, 1961.
- [51] W. Klingenberg. *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*. Springer, Heidelberg, 1973. 198, 226
- [52] S. Kobayashi. *On conjugate and cut loci*. The Mathem. Assoc. Am., Englewood Cliffs, N.J., 1967. 244
- [53] S. Kobayashi. *Transformation groups in Differential Geometry*. Springer, Ergebnisse der Math. 70, Berlin, 1972. 156, 157
- [54] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience, New York, 1969.
- [55] A. Kriegl. *Topologie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 1999. 239
- [56] A. Kriegl. *Analysis 2*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004. 11, 14, 15, 49, 114, 218
- [57] A. Kriegl. *Analysis 3*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004/05. 203, 208
- [58] A. Kriegl. *Funktional Analysis*. Vorlesung, Univ. Wien, 2006. 2
- [59] A. Kriegl. *Differentialgeometrie*. Univ. Wien, 2007.
- [60] A. Kriegl. *Differentialgeometrie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 2007.
- [61] Andreas Kriegl and Peter W. Michor. *The Convenient Setting of Global Analysis*. Am. Math. Soc., 1997.
- [62] Lagrange. *Œuvres Vol. 1*. Gauthier-Villars, Paris, 1868.
- [63] S. Lang. *Differentiable Manifolds*. Addison-Wesley, 1962.
- [64] H. Liebmann. Eine neue Eigenschaft der Kugel. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math. Phys.*, pages 44–55, 1899. 226
- [65] Meusnier. Mémoire sur la courbure des surfaces. *Mémoires des savans étrangers*, 10:477–510, 1776. 169, 203, 205
- [66] P. Michor. *Riemannsche Differentialgeometrie*. Vorlesung, Univ. Wien, WS 1988/89. 247
- [67] Peter W. Michor. A generalisation of Hamiltonian mechanics. *J. Geometry and Physics*, 2 (2):67–82, 1985.
- [68] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.*, 64:399–405, 1956. 100
- [69] J. Milnor. Differentiable Structures on Spheres. *Ann. of Math.*, 81:962–972, 1959.
- [70] J. Milnor. Eigenvalues of the Laplace operator on certain mf's. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 51:542, 1964.
- [71] Montgomery and Zippin. Small subgroups of finite dimensional groups. *Ann. of Math.*, 56:213–241, 1952.

- [72] B. Morin and J-P. Petit. Let retournement de la sphère. *CRAS.*, 287:767–770, 791–794, 879–882, 1978.
- [73] S. Mukhopadhyaya. New methods in the geometry of a plane arc. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 1:31–37, 1909.
- [74] Munkres. *Elementary Differential Geometry*.
- [75] Munkres. Obstruction to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphism. *Ann. of Math.*, 72:521–554, 1960. **100**
- [76] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, 63:20–64, 1956. **156**
- [77] Nomitzu and Ozeki. The existence of complete Riemannian metrics. *Proc. AMS.*, 12:889–891, 1961.
- [78] R. Osserman. Global Properties of minimal surfaces in e^3 and e^n . *Ann. of Math.*, 80:340–364, 1964. **207**
- [79] R. Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces*. Van Nostrand, New York, 1969.
- [80] R. Osserman. A proof of regularity everywhere of the classical solution to Plateaus’s problem. *Ann. of Math.*, 91:550–569, 1970. **204**
- [81] P. Painlevé. Sur la theorie de la Représentation conforme. *CRAS.*, 112:653–657, 1891.
- [82] C.D. Papakyriakopoulos. On Dehn’s lemma and the asphericity of knots. *Ann. of Math.*, 66:1–26, 1957.
- [83] E. Peschl. *Funktionentheorie*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1967. **160**
- [84] Mary Ellen Rudin. Two nonmetrizable manifolds. *Topology and its Appl.*, 35:137–152, 1990.
- [85] H.F. Scherk. Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. *Crellés Journal f. reine und angew. Math.*, 13:185–208, 1835. **206**
- [86] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry 1-4*. Publish or Perish, Berkeley, 1979. **161**
- [87] J. Stallings. The piecewise-linear structure of euclidean space. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58:481–488, 1962. **100**
- [88] Toshikazu Sunada. Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Ann. Math. (2)*, 121:1985, 169-186.
- [89] Taubes. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *J. Diffgeom.*, 25:363–430, 1987. **100**
- [90] J. Tits. *Liesche Gruppen und Algebren*. Springer Hochschultext, Berlin, 1983.
- [91] Trotter. Non-inverible knots exist. *Topology*, 2:341–358, 1964.
- [92] V.S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras and their Representation*. Springer Graduate Text, Berlin, 1984.
- [93] L. Vietoris. Ein einfacher Beweis des Vierscheitelsatzes der ebenen Kurven. *Arch. Math.*, 3:304–306, 1952.
- [94] M.F. Vignéras. Variétés Riemanniennes isospektrales et non isométriques. *Ann. Math.*, 112:21–32, 1980.
- [95] R. Walter. *Differentialgeometry*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1978.
- [96] J.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott Foresman and Company, Illinois, 1971.
- [97] S. Warschawski. über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformen Abbildungen. *Math.Z.*, 35:321–456, 1932.
- [98] Weierstrass. *Monatsber. der Berlin. Akad.*, 1866. **206**
- [99] H. Whitney. *Geometric Integration Theory*.
- [100] H. Whitney. The selfintersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space. *Annals of Math.*, 45:220–446, 1944. **129**
- [101] F. Xavier. The Gauss map of a complete, non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere. *Annals of Math.*, 113:211–214, 1981. **207**
- [102] H. Yamabe. On an arcwise connected subgroup of a Liegroup. *Osaka M.J.*, 2:14–15, 1950.
- [103] K. Zindler. über konvexe Gebilde I. *Monatsh. Math. Phys.*, 31:87–102, 1921.

Index

- C^∞ -(Teil-)Mannigfaltigkeit (des \mathbb{R}^n), 52
- C^∞ -Atlas einer Mannigfaltigkeit, 97
- $O(n, k)$, 75
- $SO(n, k)$, 75
- $\Gamma(E)$, 137
- \mathbb{P}^2 , 45
- ∇ = kovariante Ableitung, 230
- k -te Krümmung einer Kurve, 36
- n -Sphäre, 57
- (überall) linear unabhängige Vektorfelder, 139
- (reguläre) Teilmannigfaltigkeit, 128
- Äquator einer Drehfläche, 210
- Überlagerung, 22, 130
- äquivalente Karten, 97
- äquivalente Kurven, 11
- äquivalente orientierte Kurven, 12
- 1-Form am \mathbb{R}^2 , 24
- 1-Parameter-Familie von Kurven, 208
- 1-te Fundamentalform, 167
- 2-te Fundamentalform, 167

- Pseudosphäre, 189

- Ableitungsgleichungen für Flächen, 211
- abstrakte C^∞ -Mannigfaltigkeit, 97
- allgemeine lineare Gruppe, 69
- antiholomorphe Funktion, 158
- Asymptotenlinie, 168
- Asymptotenrichtung, 168
- Atlas einer topologischen Mannigfaltigkeit, 98
- Automorphismengruppe einer Riemannschen Fläche, 161

- Begleitbein einer ebenen Kurve, 16
- Begleitbein einer Kurve, 35
- Begleitbein einer Kurve in einer Regelfläche, 196
- Begleitbein einer Raumkurve, 35
- Berührsphäre, 267
- Bianchi Identität, 253
- Bild einer geometrischen Kurve, 12
- Binormalenvektor einer Raumkurve, 35
- Blätter einer Überlagerung, 22
- Boy's Surface, 46
- Breitenkreis, 186

- Charakterisierung von Diffeomorphismen, 123
- Charakterisierung von Einbettungen, 126
- Charakterisierung von Immersionen, 124
- Charakterisierung von Submersionen, 129
- Christoffelsymbole der 2-ten Art, 211

- Derivation über einem Punkt, 114
- Diffeomorphismus, 11
- Doppelpunkt einer Kurve, 13
- Drehfläche, 185
- Drehflächen konstanter Gauß-Krümmung, 188

- eigentlichen Bewegung, 5
- Einbettung, 126
- einfacher Punkt einer Kurve, 13
- Einhüllende, 32
- Einheitsnormalvektor an eine Kurve, 16
- Einheitstangentenvektor an eine Kurve, 14
- Einparametergruppen-Eigenschaft, 141
- Einpunktkompaktifizierung, 102
- Envelope, 32
- Erzeugende einer Regelfläche, 194
- Evolute, 17, 266
- exakte 1-Form, 24
- Exponentialabbildung, 213

- Faserbündel, 130
- finale Abbildung, 126
- Fläche vom Kehltyp, 190
- Flachpunkt, 168
- Flachpunkt einer Kurve, 26
- Formeln für durch eine Gleichung gegebene Hyperflächen, 182
- Frenet'sche Ableitungsgleichungen einer Raumkurve, 36
- Fußpunktabbildung des Tangentialbündels, 132

- Gauß-Abbildung, 165
- Gauß-Bonnet für Polygone, 224
- Gauß-Gleichung, 247
- Gauß-Krümmung einer Hyperfläche, 168
- Gaußgleichung, 230
- Geodäte, 207
- geodätisch vollständig, 225
- geodätische Krümmung einer Kurve, 196
- geodätische Kreise, 215
- geodätische Parallelkoordinaten, 216
- geodätische Polarkoordinaten, 214
- geometrische Kurve, 11
- glatte Abbildung, 94, 99
- glatte Partition der Eins, 106
- global triviales Faserbündel, 131
- globale Version von Gauß-Bonnet, 222
- Godazzi-Mainardi-Gleichung, 247
- Gram-Schmidt'schen Orthogonalisierungsverfahren, 35

- Hauptkrümmungsrichtungen, 168
 Hauptkrümmungen, 168
 Hauptnormalenvektor einer Raumkurve, 35
 Hausdorff, 97
 Helix, 267
 Holonomie-Gruppe, 229
 Hopffaserung, 59
 hyperbolische Scheibe, 163
 Hyperfläche, 165

 immersive Abbildung, 122
 immersive Teilmannigfaltigkeit, 126
 impliziter Funktionensatz, 49
 initiale Abbildung, 126
 Integralkurve eines Vektorfelds, 140
 intrinsische Größen, 180
 inverser Funktionensatz, 49
 Involute, 266
 Isometrie, 4
 Isometrie Riemannscher Mannigfaltigkeiten, 155
 isothermale Koordinaten, 161
 isotrope Teilmenge, 75

 Jacobi-Feld, 243
 Jacobi-Gleichung, 182, 243

 Karte einer Mannigfaltigkeit, 96
 Karten einer topologischen Mannigfaltigkeit, 98
 Kartendarstellung einer Abbildung, 99
 Kartenwechsel, 96
 Kartesische Koordinaten, 119
 kartesischen Koordinaten, 20
 Kategorie, 100
 Kegel, 54
 Klein'sche Flasche, 44
 komplexe Mannigfaltigkeit, 161
 konforme Abbildung, 157
 konforme glatte Abbildung, 159
 konjugierte Punkte, 244
 konjugierte Vektoren, 168
 kovariante Ableitung, 230, 231
 Krümmung einer Kurve, 17
 Krümmung einer Raumkurve, 35, 37
 Krümmungskreis einer Kurve, 17
 Krümmungslinie, 168
 Kreuzhaube, 45
 Kugelkoordinaten, 119

 Länge, 1, 2
 Länge einer glatten Kurve, 154
 Länge einer Kurve, 14
 Lagrange Teilräume, 75
 Levi-Civita-Zusammenhang, 231
 lichtartige Vektoren, 75
 Lie-Ableitung, 149
 Lie-Algebra, 145
 Lie-Klammer, 145
 Lift einer Kurve, 22
 Lindelöf, 106
 lokale Gleichung, 50
 lokale Parametrisierung, 49

 lokale Parametrisierung einer Mannigfaltigkeit, 96
 lokale Trivialisierung, 50
 lokaler Graph, 50
 Lorenzgruppe, 75

 Möbiustransformation, 162
 Meridian, 186
 minimale Drehfläche, 193
 Minimalfläche, 203
 mittlere Krümmung einer Hyperfläche, 168

 Nabelpunkt, 168
 Nephroide, 35
 Nierenkurve, 35
 Normalebene an eine Raumkurve, 37
 Normalkrümmung einer Hyperfläche, 166
 Normalkrümmung einer Kurve, 196
 Normalvektor, 6

 orientierte geometrische Kurve, 12
 orientierte Mannigfaltigkeit, 161
 Orientierung eines Vektorraums, 5
 orientierungserhaltende Abbildung, 5
 orthogonale Gruppe, 73
 orthogonale Komplement, 75

 paralleles Vektorfeld, 227
 parallelisierbare Mannigfaltigkeit, 139
 Parallelogramm-Gleichung, 1
 Paralleltransport, 228
 parametrisierte Kurve, 11
 Parametrisierung einer Kurve, 12
 Parametrisierung nach der Bogenlänge, 15
 Plateausches Problem, 204
 Poincaré'sche Halbebene, 190
 Polarisierungsformel, 2
 Polarkoordinaten, 20
 projektive Ebene, 45
 Pseudo-Riemann-Mannigfaltigkeiten, 154
 Pseudo-Riemann-Metrik, 154
 pseudoeuclidisches Produkt, 75
 Punkt einer geometrischen Kurve, 13

 quaternionischen Gruppen, 87

 radiale Geodäte, 215
 Rangsatz, 122
 Raum der glatten Schnitte eines Bündels, 137
 Raum der glatten Vektorfelder, 137
 raumartige Vektoren, 75
 reelle symplektische Gruppe, 76
 Regelfläche, 194
 reguläre Abbildung, 48, 122
 rektifizierende Ebene an eine Raumkurve, 37
 relative Torsion einer Kurve, 196
 Ricci-Krümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 261
 Riemann'sche Zahlenkugel, 161
 Riemann-Fläche, 161
 Riemann-Krümmung, 248
 Riemann-Mannigfaltigkeit, 154
 Riemann-Metrik, 154
 Riemannschen Normalkoordinaten, 260

- Satz von Dupin, 170
- Satz von Hopf-Rinow, 239
- Satz von Korn-Lichtenstein, 161
- Satz von Liouville, 173, 174
- Satz von Nash, 156
- Satz von Nomitsu-Ozeki, 241
- Satz von Rodriguez, 167
- Scheitel einer Kurve, 26
- Schmiegeebene an eine Raumkurve, 37
- Schmiegtorse, 199
- Schnittkrümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 258
- Skalarkrümmung einer Riemann-Mannigfaltigkeit, 262
- spezielle lineare Gruppe, 73
- Sphäre, 3, 55
- Spindelfläche, 189
- Spiralbogen, 26
- standard hermitesche Form, 80
- standard hermitesche Form mit Signatur, 81
- standard symplektische Form am \mathbb{R}^{2k} , 76
- Stiefelmannigfaltigkeit, 74
- submersive Abbildung, 122
- symplektische Form, 75

- Tangente an eine parametrisierte Kurve, 14
- Tangentialabbildung einer Abbildung, 112, 117, 132
- Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit, 116
- Tangentialraum einer Mannigfaltigkeit, 112, 132
- Tangentialvektor an eine Mannigfaltigkeit, 112
- Teilvektorbündel, 137
- Theorem von Bonnet, 245
- Theorema Egregium, 181
- Theorema elegantissimum von Gauß, 220
- Topologie einer Mannigfaltigkeit, 97
- topologische Mannigfaltigkeit, 98
- Torse, 194
- Torsion einer Raumkurve, 37
- Torus, 57
- Transitionsfunktion eines Vektorbündels, 135
- trivialisierenden Mengen einer Überlagerung, 22
- Trivialisierung, 130
- tubuläre Umgebung, 238
- typische Faser eines Faserbündels, 130

- unitäre Gruppe, 80
- Ursprung, 1

- VB = Vektorbündel, 134
- Vektor, 1
- Vektorbündel, 134
- Vektorbündelhomomorphismus, 136
- Vektorbündelkarte, 134
- Vektorfeld, 137
- Vektorraum, 1
- verwandte Vektorfelder, 147
- VF, 137
- Vielfachheit eines Punktes einer Kurve, 13
- vollständiges Vektorfeld, 143

- Weingarten-Abbildung, 166
- Wendepunkt einer Kurve, 26
- Winkel, 2
- winkelerhaltende Abbildung, 157
- Wulstfläche, 189

- zeitartige Vektoren, 75
- zentrale Punkt, 201
- Zentrum einer Gruppe, 8
- Zylinder, 53
- Zylinderkoordinaten, 119