Aufgabensammlung zur Differentialgeometrie 2

WS 2007

Andreas Kriegl

[pdftex]graphicx

1. Glatte Normalität.
Sei M eine parakompakte Hausdorff-Mannigfaltigkeit und $A_0, A_1 \subseteq M$ abgeschlossen und disjunkt. Zeige die Existenz einer glatten Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $f|_{A_i} = i$ für $i \in \{0, 1\}$. **Hinweis:** Betrachte die Partition der 1, welche der Überdeckung $\{M \setminus A_0, M \setminus A_1\}$ untergeordnet ist.

2. Dichtheit der glatten Funktionen.
Sei M eine parakompakte Hausdorffmannigfaltigkeit, $g : M \to \mathbb{R}$ und $\varepsilon : M \to (0, +\infty)$ stetig. Zeige die Existenz einer glatten Abbildung $h : M \to \mathbb{R}$ mit $|h(x) - g(x)| < \varepsilon(x)$ für alle $x \in M$. **Hinweis:** Verwende eine Partition $\mathcal{F}$ der 1, welche der Überdeckung mit den Mengen $U_x := \{y : |g(y) - g(x)| < \varepsilon(y)\}$ für $x \in M$ untergeordnet ist und setze $h(x) := \sum_{f\in\mathcal{F}} f(x)\, g(x_f)$, wobei $\operatorname{Trg}(f) \subseteq U_{x_f}$.

3. Spezielle Indizierung der Partition der 1.
Zeige, daß die einer Überdeckung $\mathcal{U}$ untergordnete Partition $\mathcal{F}$ der 1 als $\mathcal{F} = \{f_U : U \in \mathcal{U}\}$ mit $\operatorname{Trg}(f_U) \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ gewählt werden kann. **Hinweis:** Sei $\mathcal{F}$ irgend eine untergordnete Partition der 1, d.h. zu $f \in \mathcal{F}$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\operatorname{Trg}(f) \subseteq U$. Wähle zu jeden f so ein U_f und definiere eine neue Partition der 1 durch $f_U := \sum_{f\in\mathcal{F}:U_f=U} f$.

4. Vererbbarkeit von Parakompaktheit auf den Totalraum eines VB.
Es sei $p : E \to M$ ein C^∞-Vektorbündel. Zeige, daß wenn M eine parakompakte Hausdorff-Mannigfaltigkeit ist, so gilt gleiches für E. **Hinweis:** Betrachte zuerst triviale Vektrobündel.

5. Einbettungssatz.
Es sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ein Atlas einer glatten m-dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine C^∞-Partition der 1 mit $\operatorname{Trg} f_i \subseteq \operatorname{Bild}(\varphi_i)$. Betrachte die Abbildung $\Phi : M \to (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)^n$, $x \mapsto (f_i(x), f_i(x)\, \varphi_i^{-1}(x))_{i=1}^n$. Zeige, daß diese eine glatte Einbettung ist, d.h. eine injektive Immersion, welche ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

Hinweis: Gib lokale Links-Inverse dazu an.

6. Einbettung des projektiven Raums.
Zeige, daß der Raum $\mathbb{P}^n$ der Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ in den $\mathbb{R}^{2n}$ einbettbar ist.

Hinweis: Sei $h : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ gegeben durch

$$(x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_n) \mapsto \Big(\sum_{i+j=0;i,j\le n}^{k} x_i y_j \Big)_{k=0}^{2n} =$$
$$= \Big(x_0y_0, x_0y_1 + x_1y_0, \dots, \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}, \dots, x_{n-1}y_n + x_n y_{n-1}, x_n y_n\Big)$$

und sei $g : S^n \to S^{2n}$ gegeben durch $g(x) = \frac{h(x,x)}{|h(x,x)|}$. Dann gilt $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$ (falls $h(x, x) = \lambda^2 h(y, y)$ so ist $h(x + \lambda y, x - \lambda y) = 0$ und damit $x + \lambda y = 0$ oder $x - \lambda y = 0$) und liefert also eine injektive Abbildung $\mathbb{P}^n \to \{(z_0, \dots, z_{2n}) \in S^{2n} : z_0 \ge 0\}$.

7. Initialität unter Komposition.
Zeige, daß die Zusammensetzung initialer Immersionen eine initiale Immersion ist.
Zeige weiters, daß falls die Zusammensetzung $f \circ g$ zweier glatter Abbildungen eine initiale Immersion ist, so auch g.

8. Universelles Vektorbündel.
Zeige, daß $E(k,n) := \{(\varepsilon, v) \in G(k,n) \times \mathbb{R}^n : v \in \varepsilon\} \to G(k,n)$, $(\varepsilon, v) \mapsto \varepsilon$ ein (das sogenannte universelle) Vektorbündel über der Grassmannmannigfaltigkeit ist. Seine Faser über einen Punkt in $G(k,n)$ also über einer k-Ebene ε im $\mathbb{R}^n$ ist somit gerade diese Ebene. **Hinweis:** Um $E(k,n)$ als Teilvektorbündel von $G(k,s) \times \mathbb{R}^s$ (und damit insbesonders als Mannigfaltigkeit) zu erkennen betrachte die lokal definierte Abbildung $\varphi : G(k,n) \to GL(n)$,

$$\varphi : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, daß $\varphi(\varepsilon)(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \varepsilon$ ist und somit $(\varepsilon, v) \mapsto (\varepsilon, \varphi(\varepsilon) \cdot v)$ ein lokaler Diffeomorphismus von $G(k,n) \times \mathbb{R}^n$ ist, welcher lokal den Teilraum $G(k,n) \times \mathbb{R}^k \times \{0\}$ auf $E(k,n)$ abbildet.

9. Universalität von $E(k,s) \to G(k,s)$.
Es sei $p : E \to M$ ein k-Ebenen Bündel und $f : E \to M \times \mathbb{R}^s$ eine VB-Monomorphismus über id_M. Zeige, daß E isomorph zum Pull-back-Bündel $g^*(E(k,s))$ ist, wobei g die in (26.21) beschriebene klassifizierende Abbildung ist. **Hinweis:** Zeige mittels (26.2), daß die natürliche Abbildung $E \to M \times_{G(k,s)} E(k,s)$ ein VB-Isomorphismus ist

10. Ein nichtintegrables Teilbündel.
Zeige direkt, daß das in (30.3.3) definierte Teilvektorbündel von $T\mathbb{R}^3$ nicht integrabel ist. **Hinweis:** Bestimme die Lieklammer der beiden erzeugenden Vektorfelder.

11. Blätterung durch Niveauflächen.
Zeige (30.12): Es sei $f : M \to N$ glatt und $x \mapsto T_x f$ habe konstanten Rang r. Dann ist $\ker(Tf) := \bigsqcup_{x \in M} \ker(T_x f)$ ein integrables Teilvektorbündel und die Zusammenhangskomponenten der Niveauflächen $f^{-1}(q)$ sind die maximalen Integralmannigfaltigkeiten zu $\ker(Tf)$.

In den folgenden Beispielen (12)-(18) betrachten wir $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ als Riemann-Mannigfaltigkeit mit der von $\mathbb{R}^3$ geerbten Metrik. Als Karten außerhalb der Pole verwenden wir

- die Kugelkoordinaten $(\theta, \varphi) \mapsto (\cos\theta \cos\varphi, \cos\theta \sin\varphi, \sin\theta)$ aus (11.4)
- und die stereographischen Koordinaten $(x,y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, x^2+y^2-1)$ aus (11.5).

12.
Betrachte das Geschwindigkeitsfeld $(x,y,z) \mapsto (-y, x, 0)$ am $\mathbb{R}^3$, welches der Rotation um die z-Achse entspricht. Drücke die Einschränkung ξ dieses Vektorfelds auf S^2 in den beiden genannten Koordinaten aus.

Führe auch für das Vektorfeld $\eta : (x,y,z) \mapsto (xz, yz, -x^2 - y^2)$ die analoge Rechnung aus.

13.
Beschreibe die Riemann-Metrik von S^2 als 2-fach kontravariantes Tensorfeld in obigen Koordinaten.

14.
Beschreibe die vermöge $\sharp$ zu den Vektorfeldern aus Aufgabe (12) gehörenden 1-Formen in obigen Koordinaten.

15.
Beschreibe die Volumsform von S^2 in obigen Koordinaten.

16.
Bestimme das $\wedge$-Produkt der 1-Formen aus Aufgabe (14) und vergleiche es mit der Volumsform aus Aufgabe (15).

17.
Bestimme das Pullback der 1-Formen aus Aufgabe (14) längs der Abbildung $f : \mathbb{R} \to S^2$, $t \mapsto (\sin t, \frac{3}{5}\cos t, \frac{4}{5}\cos t)$.

18.
Bestimme den Hodge-Stern-Operator $\Omega^1(S^2) \to \Omega^1(S^2)$ in obigen Koordinaten.

19.
Verifiziere den Beweis von $d(f\omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$ in 42.7 für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und $\omega \in \Omega^k(M)$.

20.
Es sei M eine orientierte 3-dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit mit Riemann-Metrik g. Zeige daß $\wedge : \Omega^1(M) \times \Omega^2(M) \to \Omega^3(M)$ bis auf die natürlichen Isomorphismen $\Omega^2(M) \cong \Omega^1(M) \cong \mathfrak{X}(M)$ und $\Omega^3(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})$ die Abbildung $(\xi, \eta) \mapsto (x \mapsto g_x(\xi_x, \eta_x))$ ist. Zeige weiters, daß $\xi \times \eta := \flat(*(\sharp\xi \wedge \sharp\eta))$ das punktweise Kreuzprodukt der Vektoren ξ_x und η_x ist.

21.
Verifiziere die Formel $[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta] = \mathcal{L}_{[\xi,\eta]}$ für $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$. **Hinweis:** Siehe den Beweis von (42.7).

22.
Nach (42.8) muß sich die graduierte Derivation d als $d = \mathcal{L}_K + i_L$ mit eindeutigen $K \in \Omega^*(M; TM)$ und $L \in \Omega^{*+1}(M, TM)$ schreiben lassen. Bestimme diese K und L.

23. $H^*(\mathbb{P})$.
Bestimme die Kohomologie der projektiven Ebene.
Hinweis: Wende die Mayer-Vietoris-Sequenz an auf die Überdeckung durch eine Scheibe und ein Möbiusband (nämlich den Bildern einerseits der nördlichen Hemisphäre und andererseits des Äquatorialbereichs unter der Projektion $S^2 \twoheadrightarrow \mathbb{P}^2$.

24. Produktregeln.
Zeige: Für Riemann-Mannigfaltigkeiten M mit $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(f \cdot g) &= f \cdot \operatorname{grad} g + g \cdot \operatorname{grad} f \\
\operatorname{div}(f \cdot \xi) &= f \cdot \operatorname{div} \xi + \xi \cdot f = f \cdot \operatorname{div} \xi + \langle \operatorname{grad} f, \xi \rangle \\
\Delta(f \cdot g) &= \Delta f \cdot g + f \cdot \Delta g + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle
\end{aligned}$$

25. Beispiel (23) revisited.
Bestimme $H^*(\mathbb{P})$ ohne Verwendung von Satz (50.5).
Hinweis: Zeige $\operatorname{incl}^* \neq 0 : H^1(M) \to H^1(M \cap D)$, wobei M das Möbiusband und D die Scheibe bezeichnet. Verwende dazu die Parametrisierung $\varphi : (\theta, t) \mapsto \Big((1+t\cos\theta)\cos(2\theta), (1+t\cos\theta)\sin(2\theta), t\sin\theta\Big)$ aus (23.3.5) um ein $\omega \in \Omega^1(M)$ als $\omega := d\theta$ zu definieren. Zeige, daß $\int_{S^1} \operatorname{incl}^*(\omega) = 2\pi$ wobei S^1 ein glattes Deformationsretrakt von $M \cap D$ ist.

26. Poincaré Lemma.
Es sei ω eine geschlossene k-Form auf einer offenen (bzgl. 0) sternförmigen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Bestimme eine explizie Formel für η mit $d\eta = \omega$.
Hinweis: Nach dem Beweis des Homotopieaxioms ist $\eta = I_0^1(i_\xi(H^*(\omega))$ wobei $H : U \times \mathbb{R} \to U$ die Homotopie $(x, t) \mapsto tx$ und $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ ist.

27. Volumselement der S^n.
Verwende (48.1.2) um das Volumselement der S^n als

$$\mathrm{vol}_{S^n} = \mathrm{incl}^*\Big(\sum_k (-1)^k x^k\, dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^n\Big)$$

zu erkennen. Drücke dieses für $n = 2$ in Kugelkoordinaten aus und bestimme die Oberfläche $\int_{S^2} \mathrm{vol}_{S^2}$.

28.
Es seien M und N zwei orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension m und n. Für $\omega \in \Omega_c^m(M)$ und $\eta \in \Omega_c^n(N)$ sei $\omega \wedge \eta := \mathrm{pr}_1^*(\omega) \wedge \mathrm{pr}_2^*(\eta) \in \Omega_c^{m+n}(M \times N)$. Für $f \in C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$ sei $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ definiert durch $g(x) := \int_N f(x, \_)\, \eta$. Zeige:

$$\int_{M \times N} f \cdot \omega \wedge \eta = \int_M g \cdot \omega$$

Jede $m + n$-Form auf $M \times N$ läßt sich als $f \cdot \omega \wedge \eta$ mit passenden $f \in C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$, $\omega \in \Omega^m(M)$ und $\eta \in \Omega^n(N)$ schreiben.

29.
Für jede Triangulierung einer kompakten 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit gilt:

$$3\alpha_2 = 2\alpha_1, \quad \alpha_1 = 3(\alpha_0 - \chi(M)), \quad \alpha_0(\alpha_0 - 1) \geq 2\alpha_1, \text{ und } \alpha_0 \geq \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\,\chi(M)})$$

Hinweis: Die erste Gleichung haben wir bereits in (59.5) gezeigt.

30.
Zeige, daß $\alpha_0 \geq 4$, $\alpha_1 \geq 6$ und $\alpha_2 \geq 4$ für S^2 und $\alpha_0 \geq 7$, $\alpha_1 \geq 21$ und $\alpha_2 \geq 14$ für $S^1 \times S^1$. Finde weiters Triangulierungen von S^2 und $S^1 \times S^1$ wo diese Ungleichungen Gleichungen sind.

31.
Bestimme $H_c^k(S^j \times \mathbb{R}^n)$ mittels Induktion nach j unter Verwendung der Mayer-Vietoris Sequenz für kompakte Träger.

32.
Zeige, daß im Beweis von (50.26) alle Quadrate für die Anwendung des 5'er Lemmas kommutieren, mit Ausnahme von

$$\begin{tikzcd} H^{k-1}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(U \cup V) \arrow[d] \\ H_c^{l+1}(U \cap V)^* \arrow[r] & H_c^l(U \cup V)^* \end{tikzcd}$$

welches nur bis auf ein Vorzeichen kommutiert. **Hinweis:** Im Beweis von (44.3.4) ist $\varphi_U := h_V \varphi$ und $\varphi_V := -h_U \varphi$ die korrekte Definition.

33.
Es sei $p : E \to M$ ein orientiertes k-Ebenen Bündel über einer orientierten kompakten Mannigfaltigkeit M und U seine Thom-Klasse. Zeige unter Benützung der Poincaré-Dualität Thom's Isomorphie Satz: $H^l(E) \to H_c^{k+l}(E)$, $[\alpha] \mapsto [\alpha] \cup U$ ist ein Isomorphismus für alle l.
Verwende dies weiter um $U = 0$ für ungerade k zu zeigen und damit auch $\chi(M) = 0$ für ungerade $\dim(M)$. **Hinweis:** Setze $l = k$ und zeige $U \cup U = 0$ wegen der Antikommutativität von $\wedge$.

34.
Betrachte die konform äquivalente (nach (62.12)) vollständige Metrik g_f auf der punktierten Ebene

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit Konformitätsfaktor $f(x,y) := 1/\sqrt{x^2+y^2}$. Zeige, daß der Einheitskreis eine Geodäte für diese Metrik ist.

35.
Bestimme die konjugierten Punkte auf dem Äquator des Torus. Kann man für Äquatoren auf Drehflächen analog vorgehen?