

Differentialgeometrie 2

Andreas Kriegl

email:andreas.kriegl@univie.ac.at

250203, WS 2007/2008, Mo.–Mi. 10¹⁵-11⁰⁰, D 1.03 im UZA 4

II. Mannigfaltigkeiten

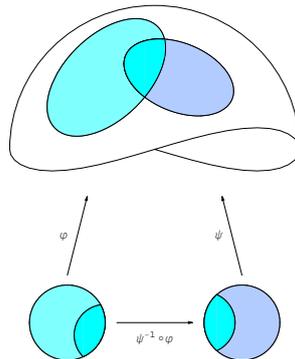
16.2 Definition (Abstrakte Mannigfaltigkeit)

Sei X eine beliebige Menge. Eine KARTE (oder auch LOKALE PARAMETRISIERUNG) von X ist eine injektive Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow X$, definiert auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$.

Zwei Karten φ_1, φ_2 heißen C^∞ -KOMPATIBEL oder VERTRÄGLICH, falls der KARTENWECHSEL

$$\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1 : \varphi_1^{-1}(\varphi_2(U_2)) \rightarrow \varphi_2^{-1}(\varphi_1(U_1))$$

ein Diffeomorphismus offener Mengen ist. Die Idee dahinter ist, daß jede Karte φ_1 glatt sein soll, und nach [60, 15.4] sollte dazu $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ dort wo es definiert ist glatt sein.



Ein C^∞ -ATLAS einer Menge X ist eine Familie C^∞ -kompatibler Karten, deren Bilder ganz X überdecken. Zwei C^∞ -Atlanten heißen ÄQUIVALENT, wenn alle ihre Karten miteinander C^∞ -kompatibel sind.

Eine ABSTRAKTE C^∞ -MANNIGFALTIGKEIT ist eine Menge zusammen mit einer Äquivalenzklasse glatter Atlanten.

16.3 Definition (Topologie einer Mannigfaltigkeit)

Auf einer abstrakten Mannigfaltigkeit erhält man eine TOPOLOGIE, indem man definiert:

$U \subseteq X$ heißt offen $:\Leftrightarrow \varphi^{-1}(U)$ ist offen im \mathbb{R}^m für jede Karte des Atlas.

Die Karten $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subset M$ werden dann zu Homöomorphismen. Denn stetig sind sie nach Konstruktion der Topologie auf M und falls $U_1 \subset U$ offen ist, so ist es auch $\varphi(U_1) \subset M$ denn $\psi^{-1}(\varphi(U_1)) = (\varphi^{-1} \circ \psi)^{-1}(U_1)$ ist das Bild unter dem Homöomorphismus $\varphi^{-1} \circ \psi$.

Man verlangt üblicherweise auch noch, daß diese Topologie HAUSDORFF ist, d.h.: je zwei disjunkte Punkte lassen sich durch disjunkte offene Umgebungen trennen.

19. Topologisches über Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt wollen wir die topologischen Eigenschaften von abstrakten Mannigfaltigkeiten besprechen. Insbesondere interessiert uns die Reichhaltigkeit der glatten Funktionen auf ihnen. Das betrifft einerseits Trennungseigenschaften wie Hausdorff oder vollständige Regularität aber auch Begriffe wie Lokalkompaktheit, Separabilität und Parakompaktheit und somit Partitionen der Eins, die wir bereits in [60, 18] kennengelernt haben. Wir werden auch die Existenz endlicher Atlanten skizzieren und damit erhalten, daß jede hinreichend reguläre abstrakte Mannigfaltigkeit sich als konkrete Mannigfaltigkeit in einem Euklidischen Raum realisieren läßt. Dies zeigt zwar, daß der Verzicht auf den umgebenden Raum nicht wirklich nötig war, aber dennoch hilft er klarer zu erkennen, welches die intrinsischen (d.h. nicht vom umgebenden Raum abhängigen) Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten sind.

19.1 Lemma (Topologie von Mannigfaltigkeiten).

Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit, dann hat M folgende Eigenschaften:

1. M ist T_1 , d.h. $x \neq y \Rightarrow \exists U$ offen mit $x \in U$ und $y \notin U$.
2. Jedes $x \in M$ hat eine abzählbare Umgebungsbasis.
3. M ist lokal wegzusammenhängend (d.h. $x \in M \Rightarrow \exists U_x$, sodaß $\forall y \in U_x$ gilt: es gibt eine glatte Kurve, die x und y verbindet).

Beweis. (1) Sei $x \neq y$ und $x \in \text{Bild } \varphi$. Dann ist entweder $y \notin \text{Bild } \varphi$ und $\text{Bild } \varphi$ ist die gesuchte Menge. Oder es ist $y \in \text{Bild } \varphi$, dann sind $\varphi^{-1}(x)$ und $\varphi^{-1}(y)$ verschiedene Punkte im \mathbb{R}^m . Der \mathbb{R}^m ist aber klarerweise T_1 . Also gibt es eine Teilmenge $O \subseteq \mathbb{R}^m$ mit $\varphi^{-1}(x) \in O$ und $\varphi^{-1}(y) \notin O$. Wenn wir nun $U = \varphi(O)$ wählen, dann ist $y \notin U$.

(2) und (3) ergeben sich unmittelbar aus der lokalen Isomorphie von M und \mathbb{R}^m . (In (3) wähle im \mathbb{R}^m ein Geradensegment von $\varphi^{-1}(x)$ nach $\varphi^{-1}(y)$.) \square

19.2 Folgerungen (Zusammenhangskomponenten).

Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und M_i die Wegzusammenhangskomponenten von M . Dann sind die M_i offen in M und also selbst (wegzusammenhängende) C^∞ -Mannigfaltigkeiten und $M = \bigsqcup M_i$ (siehe [60, 17.3]).

Beweis. Die Offenheit der Wezusammenhangskomponenten folgt sofort aus lokal wegzusammenhängend. Die Atlanten für M_i ergeben sich somit als

$$\mathcal{A}_i = \{\varphi|_{\varphi^{-1}(M_i)} : \varphi \in \mathcal{A}\}.$$

Diese Karten liegen in \mathcal{A}_{max} , also liegt der kanonische Atlas von $(\bigsqcup M_i, \bigcup \mathcal{A}_i)$, in \mathcal{A}_{max} . Da die Atlanten verträglich sind, ist insbesondere der von ihnen erzeugte maximale Atlas gleich. \square

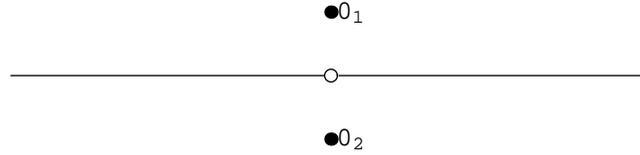
19.3 Definition (Dimension)

Bei wegzusammenhängenden glatten Mannigfaltigkeiten kann für jede Karte derselbe Vektorraum verwendet werden, denn die Ableitung des Kartenwechsels ist ein linearer Isomorphismus, also ist die Dimension der modellierenden Vektorräume gleich. Damit ist die DIMENSION DER MANNIGFALTIGKEIT wohldefiniert.

Für topologische Mannigfaltigkeiten ist es sehr viel schwieriger ein analoges Resultat zu erhalten!

19.4 Beispiel einer nicht-Hausdorff Mannigfaltigkeit

Die Menge $M := (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup \{0_1, 0_2\}$ mit folgendem Atlas ist eine Mannigfaltigkeit, die nicht HAUSDORFF (kurz T_2 , d.h. $x \neq y \Rightarrow \exists U_x, \exists U_y$, sodaß $U_x \cap U_y = \emptyset$) ist.



Der Atlas bestehe aus folgenden zwei Karten φ_i für $i = 1, 2$:

$$\varphi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{0_i\}, \quad \varphi_i(0) = 0_i, \quad \varphi_i(t) = t \text{ für } t \neq 0$$

Der Kartenwechsel $\varphi_2^{-1} \circ \varphi_1$ ist die Identität auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und damit auch glatt, d.h. M ist eine C^∞ -Mannigfaltigkeit. Aber M ist nicht Hausdorff: Eine Umgebungsbasis des Punktes 0_i ist

$$\left\{]-\varepsilon, 0[\cup \{0_i\} \cup]0, \varepsilon[: \varepsilon > 0 \right\}.$$

Somit enthält der Durchschnitt beliebiger Umgebungen von 0_1 und 0_2 ein punktiertes Intervall $]-\varepsilon, \varepsilon[\setminus \{0\}$.

So eine Situation kann klarerweise nur dann auftreten, wenn es keine gemeinsame Karte für die in Rede stehenden Punkte gibt. (Sonst verwende man die gemeinsame Karte und die T_2 -Eigenschaft des \mathbb{R}^n .) In [37] findet sich ein Beispiel für eine nicht Hausdorff Mannigfaltigkeit, auf der jede glatte Funktion konstant ist.

19.5 Lemma (Topologie von Hausdorff Mannigfaltigkeiten).

Sei M eine Hausdorff C^∞ -Mannigfaltigkeit, dann gilt:

1. M ist lokalkompakt (d.h. $\forall x \in M \exists U_x$, sodaß $\overline{U_x}$ kompakt ist; anders gesagt: es gibt relativ-kompakte Umgebungen).
2. Die C^∞ -Funktionen $M \rightarrow \mathbb{R}$ trennen Punkte. Sie trennen sogar Punkte von abgeschlossenen Mengen (d.h. für $x \notin A$, wo A abgeschlossen ist, existiert ein glattes $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, sodaß $f(x) = 1$ und $f(y) = 0$ für alle $y \in A$). Insbesondere ist M also vollständig regulär.

Beweis. (1) Sei $x \in M$ und φ ein Karte um x mit $\text{Dom } \varphi \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. O.B.d.A. gelte $\varphi(0) = x$. Sei $W_x \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Kugel um 0, wobei $\overline{W_x} \subseteq \text{Dom } \varphi$ kompakt ist. Dann ist $\varphi(W_x)$ eine offene Umgebung von x , und $\varphi(\overline{W_x})$ ist kompakt in M , da φ stetig ist. Also ist $\overline{\varphi(W_x)} = \varphi(\overline{W_x})$ und somit kompakt.

(2) Sei $x \notin A$ und A abgeschlossen, dann existiert eine relativ-kompakte Umgebung W_x von x , deren Abschluß ganz in einer Karte φ liegt. Somit ist

$$\varphi^{-1}(x) \in \varphi^{-1}(W_x) \subseteq \varphi^{-1}(\overline{W_x})$$

wobei $\varphi^{-1}(W_x)$ offen und $\varphi^{-1}(\overline{W_x})$ kompakt sind. Da $\varphi^{-1}(x) \notin \varphi^{-1}(A)$ ist, gibt es ein r , sodaß

$$\begin{aligned} \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, \varphi^{-1}(x)) \leq r\} &\subseteq \varphi^{-1}(W_x) \text{ und} \\ \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, \varphi^{-1}(x)) \leq r\} \cap \varphi^{-1}(A) &= \emptyset. \end{aligned}$$

Aus Satz [60, 18.7] wissen wir, daß es eine glatte Abbildung $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodaß

$$f(\varphi^{-1}(x)) = 1 \text{ und } \text{Trg } f \subseteq \{y \in \mathbb{R}^m : d(y, \varphi^{-1}(x)) \leq r\}.$$

Setzen wir nun $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(z) = \begin{cases} f(\varphi^{-1}(z)) & \text{falls } z \in \text{Bild } \varphi \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann ist $g(x) = 1$ und $A \subseteq (M \setminus \text{Trg } g)$, also $g = 0$ auf A . Da f und φ beide glatt sind und $g|_{M \setminus \overline{W_x}} = 0$ ist, ist auch g glatt. Das war die Behauptung. \square

18.1 Definition (Partition der Eins)

Sei M eine C^∞ -Mannigfaltigkeit und \mathcal{U} eine offene Überdeckung von M . Eine \mathcal{U} unterordnete GLATTE PARTITION DER EINS ist eine Menge \mathcal{F} von glatten Abbildungen $M \rightarrow \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$ mit den Eigenschaften:

1. $\forall f \in \mathcal{F} \exists U_f \in \mathcal{U} : \text{Trg}(f) \subseteq U_f$
2. Die Familie $\{\text{Trg}(f) : f \in \mathcal{F}\}$ ist lokal endlich, d.h. $\forall p \in U \exists U(p)$ sodaß $\{f \in \mathcal{F} : \text{Trg}(f) \cap U(p) \neq \emptyset\}$ endlich ist. Dabei ist $\text{Trg}(f)$ der Abschluß von $\{x : f(x) \neq 0\}$.
3. $\sum_{f \in \mathcal{F}} f = 1$

18.3 Definition (Parakompaktheit)

Ein topologischer Raum X heißt PARAKOMPAKT, falls es für jede offene Überdeckung \mathcal{U} von X eine lokal-endliche Verfeinerung \mathcal{V} gibt. D.h. \mathcal{V} ist eine offene Überdeckung von X mit den Eigenschaften:

1. Für alle $V \in \mathcal{V}$ gibt es ein $U \in \mathcal{U}$ mit $V \subseteq U$ ("Verfeinerung").
2. Für alle $x \in X$ gibt es ein U_x , sodaß höchstens für endlichviele $V \in \mathcal{V}$ gilt: $U_x \cap V \neq \emptyset$ (d.h. ist lokal-endlich).

Eine große Klasse von Beispielen für parakompakte Räume liefert uns das

18.4 Lemma.

Sei X ein topologischer Raum mit $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n$, wobei K_n kompakt ist in X und $K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$. Dann gilt ist X parakompakt und Lindelöf.

Beweis. Wir definieren zuerst $A_n := K_{n+1} \setminus K_n^\circ$. Diese Mengen bilden eine kompakte Überdeckung von X und wir blasen diese zu einer offenen Überdeckung der Form $(K_{n+2}^\circ \setminus K_{n-1})_{n \in \mathbb{N}}$ auf. Die Menge

$$\mathcal{U}_n := \left\{ U \cap (K_{n+2}^\circ \setminus K_{n-1}) : U \in \mathcal{U} \right\}$$

ist eine offene Überdeckung von A_n . Sei \mathcal{U}'_n eine endliche Teilüberdeckung, dann ist $\mathcal{V} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}'_n$ eine offene Überdeckung von X und eine Verfeinerung von \mathcal{U} . Es ist zu zeigen, daß \mathcal{V} lokal-endlich ist. Für $x \in X$ gibt es ein n , sodaß $x \in A_n$. Nach Konstruktion von \mathcal{V} können nur Mengen aus $\mathcal{U}'_{n-2} \cup \mathcal{U}'_{n-1} \cup \mathcal{U}'_n \cup \mathcal{U}'_{n+1} \cup \mathcal{U}'_{n+2}$ mit der offenen Umgebung $\bigcup \mathcal{U}'_n = K_{n+2}^\circ \setminus K_{n-1}$ von A_n nicht leeren Durchschnitt haben. Dies sind aber nur endlich viele, damit ist X parakompakt. Aus der abzählbaren offenen Überdeckung \mathcal{V} gewinnt man auch leicht eine abzählbare Teilüberdeckung von \mathcal{U} , und somit ist X Lindelöf. \square

19.6 Satz (Parakompakte Mannigfaltigkeiten).

Sei M eine Hausdorff C^∞ -Mannigfaltigkeit, so ist äquivalent:

1. M besitzt C^∞ -Partitionen der Eins.

2. M ist parakompakt, d.h. zu jeder offenen Überdeckung existiert eine lokal-endliche offene Verfeinerung die M überdeckt.
3. Jede Zusammenhangskomponente ist σ -KOMPAKT, d.h. sie ist Vereinigung abzählbar vieler kompakter Teilmengen.
4. Jede Zusammenhangskomponente ist LINDELÖF, d.h. zu jeder offenen Überdeckung existiert eine abzählbare Teilüberdeckung.
5. M ist METRISIERBAR, d.h. es existiert eine Metrik, die die Topologie erzeugt.

Die Äquivalenz mit (5) soll hier nur erwähnt, später bewiesen werden. Für $(5 \Rightarrow 2)$ siehe [55, 1.3.8] und für $(3 \Rightarrow 5)$ siehe [55, 3.3.10] bzw. für $(1 \Rightarrow 5)$ siehe [60, 33.3].

Es wird auch oft Separabilität vorausgesetzt, allerdings wurde in [84] gezeigt, daß es nicht-metrisierbare separable normale Mannigfaltigkeiten gibt.

Bemerkung

Es besitzt nicht jede Hausdorff C^∞ -Mannigfaltigkeit die oben genannten Eigenschaften, als Beispiel dient die "Lange Linie": Sei Ω die Menge der abzählbaren Ordinalzahlen,

$$\Omega = \{1, 2, 3, \dots, \omega, \omega + 1, \dots, 2\omega, 2\omega + 1, \dots, \omega^2, \omega^2 + 1, \dots, \omega^3, \dots, \dots, \omega^\omega, \dots, \omega^{\omega^\omega}, \dots\}.$$

Betrachtet man $\Omega \times [0, 1) \setminus \{(0, 0)\}$, versehen mit der lexikographischen Ordnung, d.h. $((\alpha, t) \leq (\beta, s)) \Leftrightarrow (\alpha < \beta \text{ oder } (\alpha = \beta \text{ und } t \leq s))$. Diese "Linie" kann mit der Ordnungstopologie zu einer C^∞ -Mannigfaltigkeit gemacht werden, die zwar Hausdorff, aber nicht parakompakt ist. Siehe [86, Vol.I, Appendix A]

Beweis. (des Satzes [19.6](#))

$(1 \Rightarrow 2)$ Sei \mathcal{U} offene Überdeckung und \mathcal{F} zugehörige Partition der Eins. Dann existiert für jedes $x \in M$ eine Umgebung U_x sodaß $I := \{f \in \mathcal{F} : \text{Trg } f \cap U_x \neq \emptyset\}$ endlich ist (dies entspricht der 2. Bedingung für eine Partition der Eins). Somit ist $(\{x : f(x) > 0\})_{f \in \mathcal{F}}$ eine lokalendliche Verfeinerung von \mathcal{U} .

$(2 \Rightarrow 3)$ Sei M_0 eine Zusammenhangskomponente von M . Es existiert eine Überdeckung mit relativ-kompakten Mengen (vgl. Lemma [19.5](#)). Diese kann, da M_0 parakompakt ist, als lokal-endlich angenommen werden. Sei \mathcal{U} so eine Überdeckung, dann gilt sogar:

$$\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\} \text{ ist endlich für jedes } W \in \mathcal{U},$$

denn zu jedem $x \in \overline{W}$ existiert ein V_x , sodaß V_x nur endlich viele $U \in \mathcal{U}$ trifft. Da \overline{W} kompakt ist, existiert eine endliche Teilüberdeckung $\{V_{x_1}, \dots, V_{x_n}\}$ von \overline{W} . Sei $U \in \mathcal{U}$ mit $U \cap W \neq \emptyset$. Somit existiert ein i , sodaß $U \cap V_{x_i} \neq \emptyset$. Für die endlich vielen i tritt dieser Fall jeweils nur für endlich viele $U \in \mathcal{U}$ ein, also ist auch

$$\{U \in \mathcal{U} : U \cap W \neq \emptyset\}$$

endlich.

Wir wählen nun ein $W_1 \in \mathcal{U}$. Sei W_2 die Vereinigung über jene endlich vielen $U \in \mathcal{U}$, deren Schnitt mit $W_1 \neq \emptyset$ ist.

Induktiv sei nun W_n die Vereinigung über jene $U \in \mathcal{U}$, deren Schnitt mit $W_{n-1} \neq \emptyset$ ist. Jedes W_i ist Vereinigung endlich vieler relativ-kompakter Mengen, also selbst relativ-kompakt. Ist $W := \bigcup_n W_n$, so ist W offen. Wir wollen zeigen, daß $W = M_0$. Dafür genügt es zu zeigen, daß $M_0 \setminus W$ offen ist. Sei also $x \notin W$, dann existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $x \in U$. Klarerweise gilt $U \cap W = \emptyset$, sonst gäbe es ein n , sodaß $U \cap W_n \neq \emptyset$, also $x \in U \subseteq W_{n+1} \subseteq W$. Dies ist ein Widerspruch.

Nun ist also $M_0 = W \cup (M_0 \setminus W)$, und sowohl W als auch $M_0 \setminus W$ sind beide offen. Da M_0 zusammenhängend ist, muß W oder $M_0 \setminus W$ leer sein. Aber $W \neq \emptyset$, also $M_0 \setminus W = \emptyset$, und somit ist $M_0 = W$. Die Gleichung $M_0 = \bigcup_n \overline{W}_n$ zeigt die σ -Kompaktheit von M_0 .

(3 \Rightarrow 4) Dies folgt aus [18.4](#) (und rekursives Aufblasen einer kompakten abzählbaren Überdeckung zu kompakten Umgebungen mittels [19.5](#)).

(4 \Rightarrow 1) In [\[60, 18.2\]](#) wurde ein Beweis für die Existenz von C^∞ -Partitionen der Eins gegeben, der als Voraussetzung Lindelöf und die Existenz von C^∞ -Funktionen mit beliebig kleinen Trägern verwendet. Beides ist hier erfüllt. \square

Zum Abschluß dieses Exkurses in die Topologie noch einige Bemerkungen zur Dimensionstheorie (Für detailliertere Ausführungen siehe [\[21\]](#)):

19.7 Definition (Überdeckungsdimension)

Sei X ein parakompakter Hausdorff-Raum. Man sagt die ÜBERDECKUNGSDIMENSION von X ist höchstens n (kurz: $\ddot{U}D\text{-dim } X \leq n$), falls es zu jeder offenen Überdeckung von X eine offene Verfeinerung der Ordnung $n + 1$ gibt. (\mathcal{U} heißt VON ORDNUNG $n + 1$, wenn der Durchschnitt über $n + 2$ verschiedene Mengen aus \mathcal{U} immer leer ist.) Per Definition ist $\ddot{U}D\text{-dim } X = n \Leftrightarrow \ddot{U}D\text{-dim } X \leq n$, aber nicht $\ddot{U}D\text{-dim } \leq n - 1$.

19.8 Satz (Eigenschaften der Überdeckungsdimension).

Es gilt:

1. $\ddot{U}D\text{-dim } [0, 1]^n = n$.
2. Wenn A abgeschlossen in X ist, dann gilt

$$\ddot{U}D\text{-dim } A \leq \ddot{U}D\text{-dim } X.$$

3. Für eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung \mathcal{A} von X gilt:

$$\ddot{U}D\text{-dim } X \leq \sup\{\ddot{U}D\text{-dim } A : A \in \mathcal{A}\}.$$

Ohne Beweis, siehe [\[21, S.295,268,278\]](#)

19.9 Folgerung.

Für jede m -dimensionale, parakompakte, Hausdorff Mannigfaltigkeit M ist $\ddot{U}D\text{-dim } M = m$.

Beweis. M besitzt eine offene Überdeckung durch Mengen $\varphi((0, 1)^m)$, wobei φ eine Karte für M ist welche auf einer Umgebung von $[0, 1]^m$ definiert ist. Da M parakompakt ist, existiert eine lokal-endliche Verfeinerung \mathcal{U} . Sei $\mathcal{U}^- := \{\overline{V} : V \in \mathcal{U}\}$, so ist \mathcal{U}^- eine lokal-endliche abgeschlossene Überdeckung. $\varphi^{-1}(\overline{V}) \subseteq [0, 1]^m$. Da φ Homöomorphismus ist und somit die $\ddot{U}D\text{-dim}$ bewahrt, gilt unter Verwendung von [19.8](#):

$$\begin{aligned} \ddot{U}D\text{-dim } \overline{V} &= \ddot{U}D\text{-dim } \varphi^{-1}(\overline{V}) \stackrel{(2)}{\leq} \ddot{U}D\text{-dim } [0, 1]^m \stackrel{(1)}{=} m, \\ \ddot{U}D\text{-dim } M &\stackrel{(3)}{\leq} \sup\{\ddot{U}D\text{-dim } \overline{V} : \overline{V} \in \mathcal{V}\}, \end{aligned}$$

also $\ddot{U}D\text{-dim } M \leq m$. Umgekehrt gilt: Ist $\varphi : [0, 1]^m \rightarrow M$ Karte, so ist $\varphi([0, 1]^m)$ abgeschlossen in M , also ist nach [19.8](#):

$$\ddot{U}D\text{-dim } M \stackrel{(2)}{\geq} \ddot{U}D\text{-dim } \varphi([0, 1]^m) = \ddot{U}D\text{-dim } [0, 1]^m \stackrel{(1)}{=} m.$$

Zusammen folgt die Behauptung: $\text{ÜD-dim } M = m$. □

19.10 Folgerung.

Sei M eine parakompakte und zusammenhängende Hausdorff-Mannigfaltigkeit. Sei \mathcal{O} eine offene Überdeckung von M , dann existiert ein $p \leq \dim(M) + 1$ und eine Verfeinerung von \mathcal{O} folgender Gestalt:

$$\mathcal{V} = \{V_i^n : i \leq p, n \in \mathbb{N}\},$$

sodaß $V_i^n \cap V_i^m = \emptyset, \forall n \neq m$.

Beweis. Nach 19.9 ist die Überdeckungsdimension von M gleich $\dim M$, also existiert zur offenen Überdeckung \mathcal{O} eine Verfeinerung \mathcal{O}' der Ordnung $p \leq \text{ÜD-dim } M + 1$. Da M parakompakt ist, existiert eine lokal endliche Verfeinerung \mathcal{O}'' und da M nach 19.6 Lindelöf ist, können wir annehmen, daß diese Überdeckung \mathcal{O}'' abzählbar ist. O.B.d.A. ist also \mathcal{O} eine abzählbare lokal endliche Überdeckung der Ordnung p .

Wir zeigen nun mittels Induktion nach p , daß jede solche Überdeckung eine Verfeinerung der gewünschten Form besitzt.

Dazu schrumpfen wir die Mengen in \mathcal{O} zu einer kleineren Überdeckung \mathcal{U} . Das soll heißen, wir konstruieren für jedes $O \in \mathcal{O}$ ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\bar{U} \subseteq O$ derart, daß die U noch immer eine Überdeckung bilden.

Dies kann induktiv geschehen: Sei $\mathcal{O} := \{O_n : n \in \mathbb{N}\}$. Zwischen $M \setminus \bigcup_{n>2} O_n$ und O_1 (erstere ist abgeschlossen, zweitere offen) schalten wir U_1 und \bar{U}_1 und erhalten eine Überdeckung $\{U_1\} \cup \{O_n : n > 1\}$. (Dies kann geschehen, da nach 60, 18.7 eine C^∞ -Funktion f existiert mit Träger in \bar{O}_1 , die auf $M \setminus \bigcup_{n \geq 1} O_n$ identisch 1 ist. Nun erhält man U_1 etwa durch $U_1 := \{x : f(x) > 1/2\}$.) Im zweiten Schritt finden wir genauso ein U_2 zwischen $M \setminus U_1 \cup \bigcup_{n>2} O_n$ und O_2 ; und so weiter.

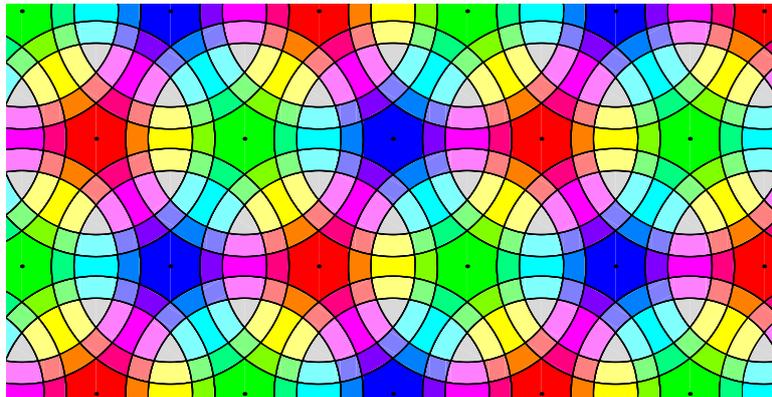
Nun betrachten wir die beiden Familien:

$\mathcal{V}_p :=$ die Menge der Durchschnitte von je p der $O \in \mathcal{O}$,

$\mathcal{A}_p :=$ die Menge der Durchschnitte von je p der \bar{U} für $U \in \mathcal{U}$

und bezeichnen ihre Vereinigungen mit $V_p := \bigcup \mathcal{V}_p$ und $A_p := \bigcup \mathcal{A}_p$.

Im folgenden Bild sind die großen Scheiben die Mengen in \mathcal{O} , die kleinen Scheiben jene in \mathcal{U} , die dunklen (rot/grün/blau färbigen) "6-Ecke" sind die Punkte die in genau einem $O \in \mathcal{O}$ liegen, die Punkte in den nächst helleren Streifen liegen in genau 2 der O 's, die größeren "3-Ecke" liegen in genau 3 der O 's (sind also die Elemente von \mathcal{V}_p) und die weißen kleinen "Dreiecke" sind die Elemente von \mathcal{A}_p .



Es ist \mathcal{V}_p eine Familie offener disjunkter Mengen, denn angenommen zwei verschiedene Mitglieder von \mathcal{V}_p hätten nichtleeren Durchschnitt, so hätten zumindest $p+1$ der $O \in \mathcal{O}$ nichtleeren Durchschnitt, und das ist ein Widerspruch. Folglich ist $V_p \subseteq M$ offen.

Die Familie \mathcal{A}_p besteht aus abgeschlossenen Mengen und ist lokal endlich, da die entsprechenden Elemente von \mathcal{V}_p disjunkt sind. Somit ist A_p als lokal endliche Vereinigung abgeschlossener Mengen selbst abgeschlossen und es gilt $A_p \subseteq V_p$.

Wir behaupten nun, daß \mathcal{U} eine abzählbare lokal endliche Überdeckung von $M \setminus A_p$ der Ordnung kleiner als p ist.

Angenommen, es gibt p Mengen in \mathcal{U} , deren Durchschnitt – eingeschränkt auf $M \setminus A_p$ – nicht-leer ist, so ist ebendieser Durchschnitt auch im Durchschnitt der nicht eingeschränkten Abschlüsse enthalten und liegt also nach Konstruktion in A_p . Das ist ein Widerspruch.

Nach Induktionsvoraussetzung existiert also eine Verfeinerung der Gestalt $\{V_i^n : i < p, n \in \mathbb{N}\}$ von \mathcal{U} , welche $M \setminus A_p$ überdeckt und sodaß $V_i^n \cap V_i^m = \emptyset \forall i < p \forall n \neq m$.

Zusammen mit der disjunkten Familie $\mathcal{V}_p =: \{V_p^n : n \in \mathbb{N}\}$ bilden diese Mengen dann die gewünschte Verfeinerung von \mathcal{O} . \square

19.11 Folgerung (Endlicher Atlas).

Jede zusammenhängende, parakompakte, m -dimensionale, glatte Hausdorff Mannigfaltigkeit von Dimension m besitzt einen Atlas mit höchstens $m+1$ Karten.

Beweis. Sei \mathcal{O} eine offene Überdeckung einer solchen Mannigfaltigkeit M mit Bildern $\varphi(U)$ von Karten $\varphi : U \rightarrow M$ mit offenen U im \mathbb{R}^m . O.B.d.A. sei \mathcal{O} abzählbar (M ist Lindelöf), d.h.

$$\mathcal{O} = \{\varphi_i(U_i) : i \in \mathbb{N}\},$$

wobei wir die U_i als disjunkt annehmen können. Es gibt nach [19.10](#) eine Verfeinerung der Gestalt:

$$\{O_i^n : i \leq p, n \in \mathbb{N}\}$$

mit $m \neq n : O_i^n \cap O_i^m = \emptyset$, wobei $p \leq \dim M + 1$. Zu O_i^n gibt es ein diffeomorphes $U_i^n \subseteq \mathbb{R}^m$, vermittelt einer gewissen Karte φ_i^n . Wir definieren nun

$$\varphi_i : \begin{cases} \bigcup_n U_i^n \rightarrow \bigcup_n O_i^n \\ x \mapsto \varphi_i^n(x) \in O_i^n \text{ für } x \in U_i^n. \end{cases}$$

So sind die φ_i Diffeomorphismen, deren Bilder M überdecken, d.h.: $\{\varphi_i : 1 \leq i \leq p\}$ ist ein C^∞ -Atlas. \square

Als einfache Folgerung werden wir in [21.13](#) zeigen, daß jede solche Mannigfaltigkeit bis auf einen Diffeomorphismus als Teilmannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^n realisiert werden kann.

III. Tangentialraum

20.7 Definition (Tangentialraum einer abstrakten Mannigfaltigkeit)

Unter dem TANGENTIALRAUM einer abstrakten Mannigfaltigkeit M bei p versteht man den Vektorraum

$$T_p M := \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R}).$$

Beachte, daß wir damit für Teilmannigfaltigkeiten $M \subseteq \mathbb{R}^n$ und insbesondere für offene Teilmengen den in [60, 20.2] definierten Tangentialraum $T_p M \subseteq \mathbb{R}^n$ durch einen nicht identen aber kanonisch isomorphen Vektorraum $T_p M \subseteq L(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$ ersetzt haben.

Ist $f \in C^\infty(M, N)$ und $p \in M$, dann heißt die durch

$$\partial \mapsto ((T_p f)(\partial) : g \mapsto \partial(g \circ f)) \text{ für } \partial \in T_p M \text{ und } g \in C^\infty(N, \mathbb{R})$$

definierte Abbildung $T_p f = (f^*)^* : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, die TANGENTIALABBILDUNG von M bei p .

21. Immersionen

Wir wollen in den verbleibenden Abschnitten dieses Kapitels die Tangentialabbildung verwenden, um spezielle Eigenschaften von glatten Abbildungen zu studieren. Insbesondere interessieren wir uns für den richtigen Begriff von “Unterobjekten” sowie “Quotientenobjekten” von Mannigfaltigkeiten.

21.1 Definition (Immersionen und Submersionen)

Es sei $f \in C^\infty(M, N)$, wo M, N Mannigfaltigkeiten sind. Dann heißt:

f REGULÄR $:\Leftrightarrow \text{rang}(T_x f)$ ist maximal (= $\max\{\dim T_x M, \dim T_{f(x)} N\}$) $\forall x \in M$;

f IMMERSIV $:\Leftrightarrow T_x f$ ist injektiv $\forall x \in M$;

f SUBMERSIV $:\Leftrightarrow T_x f$ ist surjektiv $\forall x \in M$.

Man beachte, daß eine Abbildung genau dann immersiv ist, wenn sie regulär ist und $\dim M \leq \dim N$ gilt. Ebenso ist sie genau dann submersiv, wenn sie regulär ist und $\dim M \geq \dim N$ gilt.

21.2 Rangsatz.

Es sei $f \in C^\infty(M, N)$ und $r \in \mathbb{N}$. Dann ist $\text{rang}(T_x f) = r \forall x \in M$ genau dann, wenn für jedes $x \in M$ eine Karte φ zentriert bei x und eine Karte ψ zentriert bei $f(x)$ existiert, sodaß die lokal definierte Abbildung:

$$\psi^{-1} \circ f \circ \varphi : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{m-r} \rightarrow \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

die Gestalt $(x, y) \mapsto (x, 0)$ hat.

Beachte, daß wir (durch Einschränken von φ auf $\varphi^{-1}(f^{-1}(\text{Bild } \psi))$) o.B.d.A. voraussetzen können, daß $f(\text{Bild } \varphi) \subseteq \text{Bild } \psi$ ist und somit folgendes Diagramm kommutiert:

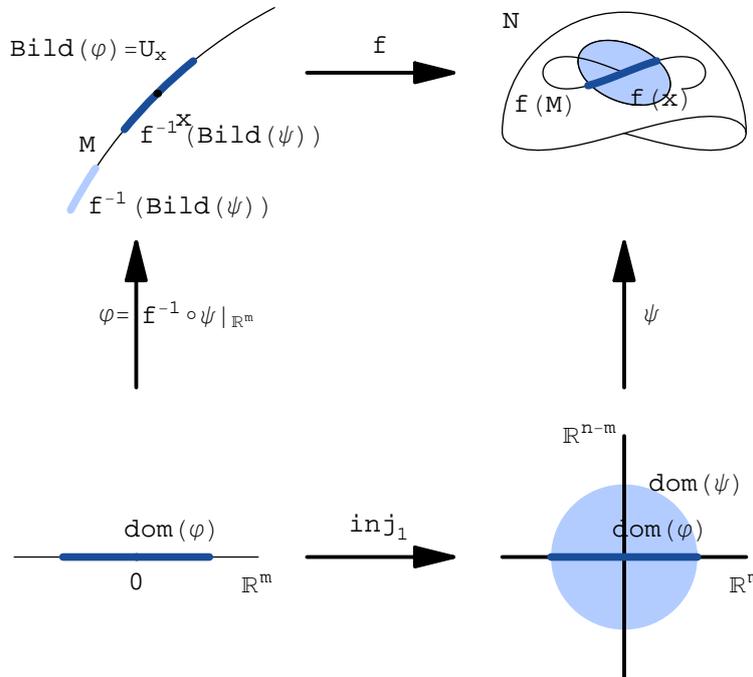
$$\begin{array}{ccc}
 M \supseteq \text{Bild } \varphi & \xrightarrow{f|_{\text{Bild } \varphi}} & \text{Bild } \psi \subseteq N \\
 \uparrow \cong \varphi & & \cong \uparrow \psi \\
 \mathbb{R}^m \supseteq \text{Dom } \varphi & \xrightarrow{\psi^{-1} \circ f \circ \varphi} & \text{Dom } \psi \subseteq \mathbb{R}^n
 \end{array}$$

Durch weiteres Verkleinern können wir die Gestalt $\text{Dom } \varphi = W_1 \times W_2 \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$ und $\text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^r = W_1$ (oder mittels Kompaktheitsargument sogar die Gestalt $\text{Dom } \psi = W_1 \times W_3 \subseteq \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^{n-r}$) erreichen.

Proposition. Charakterisierung von Immersionen.

Für $f \in C^\infty(M, N)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist immersiv;
2. $\forall x \in M \exists U_x$ offene Umgebung von x in M und eine Karte ψ zentriert bei $f(x)$ in N , sodaß $f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow U_x$ ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte von M) ist;
3. f besitzt lokale Linksinverse, d.h. $\forall x \in M \exists U_x$ offene Umgebung von x in N und $\exists h : N \supseteq V_{f(x)} \rightarrow M$ glatt mit $V_{f(x)} \supseteq f(U_x)$ offen, $h(f(x)) = x$ und $h \circ f = \text{id}_{U_x}$.



Beachte dabei, daß die Bedingung 3 äquivalent zur Existenz zweier Karten φ zentriert bei x und ψ zentriert bei $f(x)$ ist, sodaß die Kartendarstellung $\psi^{-1} \circ f \circ \varphi$ die Inklusion $\text{incl} : \mathbb{R}^m \hookrightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} = \mathbb{R}^n$ ist: In der Tat hat $\varphi := f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}$ diese Eigenschaft und umgekehrt folgt aus $f \circ \varphi = \psi \circ \text{incl}$, daß $\varphi := f|_{U_x}^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m}$ am Definitionsbereich von φ gilt.

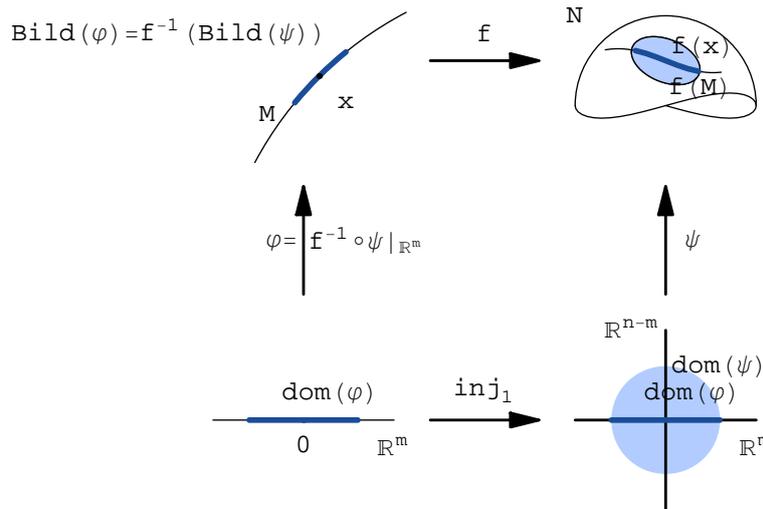
21.10 Definition (Einbettung)

Es sei $f : M \rightarrow N$ glatt, dann heißt f EINBETTUNG $:\Leftrightarrow f$ ist injektive Immersion und $f : M \rightarrow f(M)$ ist ein Homöomorphismus, dabei trage $f(M)$ die Spurtopologie von N .

21.11 Satz (Charakterisierung von Einbettungen).

Für f in $C^\infty(M, N)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist eine Einbettung;
2. für jedes $x \in M$ gibt es eine Karte ψ von N zentriert bei $f(x)$, sodaß $f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow f^{-1}(\text{Bild } \psi)$ ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte) ist;
3. f besitzt lokale Linksinverse im folgenden Sinn: $\forall x \in M \exists h : V_{f(x)} \rightarrow M$ glatt mit einer offenen Umgebung $V_{f(x)}$ von $f(x)$ in N und $h(f(x)) = x$ sowie $h \circ f = \text{id}$ auf $f^{-1}(V_{f(x)})$.



Beachte, daß der Unterschied zur Formulierung von Immersionen in [60, 21.4] nur darin besteht, daß das Bild der konstruierten Karten nun ganz $f^{-1}(\text{Bild } \psi)$ und nicht nur eine offene Umgebung U_x von x ist, d.h. $\text{Bild } \psi \cap \text{Bild } f$ nur einen wie $\mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^n$ aussehenden Teil enthalten darf.

21.12 Definition (Teilmannigfaltigkeit)

Eine Teilmenge M einer Mannigfaltigkeit N , die selbst Mannigfaltigkeit ist und die obige Eigenschaft bezüglich der Inklusion $\text{incl} : M \hookrightarrow N$ besitzt, heißt (REGULÄRE) TEILMANNIGFALTIGKEIT von N .

Jede Teilmenge $M \subseteq N$, die für jeden Punkt $x \in M$ eine Karte ψ von N zentriert bei x besitzt für welche $M \cap \text{Bild } \psi = \psi(\mathbb{R}^m)$ gilt, ist selbst eine Mannigfaltigkeit

mit dem Atlas gebildet durch diese Einschränkungen $\psi|_{\mathbb{R}^m}$ und die Inklusion $\text{incl} : M \hookrightarrow N$ ist dann nach Konstruktion und [21.11] eine Einbettung, also M eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von N .

Diese zeigt, daß die Definition für reguläre Teilmannigfaltigkeiten von $N = \mathbb{R}^n$ mit der in [60, 10.4] gegebenen übereinstimmt, denn Karten ψ von $N = \mathbb{R}^n$ wie in [21.11] (also mit $M \cap \text{Bild } \psi = \psi(\mathbb{R}^m)$) sind gerade lokale Trivialisierungen im Sinn von [60, 10.4.4].

Das Bild $f(M)$ jeder Einbettung $f : M \rightarrow N$ ist offensichtlich eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von N und die Einbettung induziert einen Diffeomorphismus $f : M \rightarrow f(M)$ aufs Bild, denn sowohl f als auch $\text{incl} : f(M) \hookrightarrow N$ sind initial, also $f : M \rightarrow f(M)$ ein Diffeomorphismus. Bis auf Diffeomorphismen sind also Einbettungen nichts anders als die Inklusion von regulären Teilmannigfaltigkeiten.

21.13 Whitney'scher Einbettungssatz.

Es sei M eine zusammenhängende σ -kompakte (und somit parakompakte) C^∞ -Mannigfaltigkeit der Dimension m , dann existiert eine Einbettung von M in einen endlichdimensionalen Vektorraum. "Jede" abstrakte Mannigfaltigkeit läßt sich also als Teilmannigfaltigkeit eines \mathbb{R}^n realisieren.

Beweis. Sei $\{\psi_i : 0 \leq i \leq m\}$ ein endlicher Atlas nach [19.11] (für einen elementaren Beweis von [21.13] ohne Verwendung von Dimensionstheorie siehe z.B. [10, S.73]). Sei weiters f_i eine zu $\{\text{Bild } \psi_i\}$ gehörige Partition der Eins und sei $f : M \rightarrow \prod_{i=0}^m (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ die glatte Abbildung

$$x \mapsto (f_i(x), f_i(x)\psi_i^{-1}(x))_{i=0}^m.$$

Um [21.11] anzuwenden zeigen wir die Existenz lokaler linksinverser Abbildungen $g_i : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)^m \supseteq V_i \rightarrow M$ für eine offene Überdeckung $\{V_i : 0 \leq i \leq m\}$ von $f(M)$.

Sei dazu

$$\begin{aligned} V_i &:= \left\{ (t, y) : t > 0, \frac{1}{t}y_i \in \text{Dom } \psi_i \right\}, \\ g_i : V_i &\rightarrow M, \quad (t, y) \mapsto \psi_i(t_i^{-1} \cdot y_i) \\ U_i &:= f^{-1}(V_i) = \{x \in M : f_i(x) > 0\}. \end{aligned}$$

Dann ist $g_i \circ f = \text{id}$ auf U_i , denn

$$U_i \ni x \mapsto (g_i \circ f)(x) = \psi_i \left(\frac{f_i(x)\psi_i^{-1}(x)}{f_i(x)} \right) = \psi_i(\psi_i^{-1}(x)) = x$$

□

21.14 Bemerkungen

- Nach dem Beweis von [21.13] lassen sich m -dimensionale Mannigfaltigkeiten in dem $\mathbb{R}^{m(m+1)}$ einbetten. Es geht aber auch in niederen Dimensionen. Und zwar läßt sich M in den \mathbb{R}^n einbetten, wobei
 - für $n = 2m + 1$ der Beweis relativ einfach ist, siehe [42, S.55];
 - für $n = 2m$ stammt er von [100].
 Vermutung: Das minimale $n = 2m - \alpha(m) + 1$, wobei $\alpha(m)$ die Anzahl der Einsen in der Dualentwicklung von m ist.

Welches n ist nötig für Immersion?

(i) für $n = 2m$ ist der Beweis relativ einfach, siehe [42, S.24]

(ii) für $n = 2m - 1$ stammt er von [100] Vermutung: Das minimale $n = 2m - \alpha(m)$ um Immersionen zu erhalten. Diese Vermutung konnte schließlich bewiesen werden! Auf kompakten Mannigfaltigkeiten von [16] und allgemein von [11].

2. Der Rang-Satz liefert uns auf einfachste Weise weitere reguläre Teilmannigfaltigkeiten:

Sei $f \in C^\infty(M, N)$. Dann gilt $\text{rang}(T_x f) = r \ \forall x \in M \Rightarrow f^{-1}(y)$ ist reguläre Teilmannigfaltigkeit von M .

Beweis. Dies ist lokale Eigenschaft, wir können also o.B.d.A. annehmen, daß $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $N \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, dann folgt aus [21.2], daß f lokal wie $(x, y) \mapsto (x, 0)$ aussieht und das Urbild $f^{-1}(0)$ somit wie $\{0\} \times \mathbb{R}^{m-r}$. \square

21.15 Folgerung (Retrakte sind Mannigfaltigkeiten).

Sei $f \in C^\infty(M, M)$, sodaß $f \circ f = f$. Dann ist $A := f(M)$ reguläre Teilmannigfaltigkeit. D.h. glatte Retrakte von Mannigfaltigkeiten sind wieder Mannigfaltigkeiten.

Beweis. Man beachte, daß $x \in A := f(M)$ genau dann wenn $f(x) = x$ gilt: Denn $x = f(y) \Rightarrow f(x) = f(f(y)) = f(y) = x$, und umgekehrt $x = f(x) \in f(M)$.

Sei $x_0 \in M$ und $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$ eine um x_0 zentrierte Karte. Für alle y in der Umgebung $V := f^{-1}(\varphi(U)) \cap \varphi(U)$ gilt:

$$\begin{aligned} y \in f(M) &\Leftrightarrow f(y) = y \\ &\Leftrightarrow (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(\varphi^{-1}(y)) = (\varphi^{-1} \circ f)(y) = \varphi^{-1}(y) \\ &\Leftrightarrow (\text{id} - \tilde{f})(\varphi^{-1}(y)) = 0, \end{aligned}$$

wobei $\tilde{f} := \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi : U \supseteq \varphi^{-1}(V) \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$.

Für z nahe 0 gilt:

$$\begin{aligned} (\tilde{f} \circ \tilde{f})(z) &= (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi \circ \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(z) = \\ &= (\varphi^{-1} \circ f^2 \circ \varphi)(z) = (\varphi^{-1} \circ f \circ \varphi)(z) = \tilde{f}(z), \end{aligned}$$

d.h. o.B.d.A. sei $0 \in U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen und $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ erfülle $f(0) = 0$ und $f \circ f = f$ lokal um 0, und wir haben zu zeigen, daß $\text{id} - f$ eine reguläre Gleichung lokal um 0 liefert.

Es ist $\text{rang } T_z(\text{id} - f) \geq \text{rang } T_0(\text{id} - f) =: r$. Aus $f \circ (\text{id} - f) = 0$ folgt $T_{(\text{id} - f)(z)} f \circ (\text{id} - T_z f) = 0$ und somit $\text{Bild}(\text{id} - T_z f) \subseteq \text{Ker}(T_{(\text{id} - f)(z)} f)$. Also ist lokal

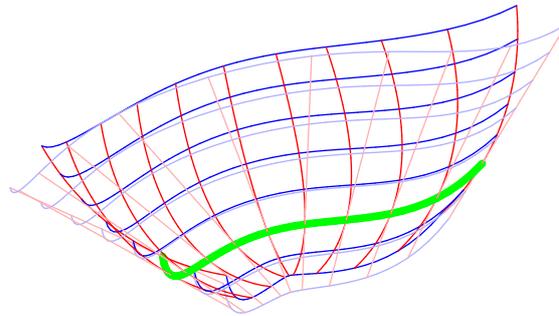
$$\begin{aligned} \text{rang}(T_z(\text{id} - f)) &\leq \dim \text{Ker}(T_{(\text{id} - f)(z)} f) = m - \dim \text{Bild}(T_{(\text{id} - f)(z)} f) \leq \\ &\leq m - \dim \text{Bild}(T_0 f) = \dim \text{Bild}(\text{id} - T_0 f) = r, \end{aligned}$$

wobei wir für die lineare Projektion $T_0 f$ die offensichtliche Gleichung $T_0 \mathbb{R}^m = \text{Bild}(T_0 f) \oplus \text{Bild}(\text{id} - T_0 f)$ verwendet haben.

Nun verwende [21.14.2]. \square

62.9 Tubuläre Umgebung.

Sei $M \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit der Riemann-Mannigfaltigkeit N . Mit TM^\perp bezeichnen wir das Normalbündel von M in N , d.h. jenes Vektorbündel über M , welches als Faser über $x \in M$ das orthogonale Komplement $(T_x M)^\perp$ von $T_x M$ in $T_x N$ bezüglich der Riemann-Metrik von N hat. Dann ist \exp_N ein Diffeomorphismus von einer offenen Umgebung des Nullschnitts $M \subseteq TM^\perp$ auf eine offene Umgebung von M in N . Die Bilder von Schnitten konstanter Länge schneiden die radialen Geodäten orthogonal.



Beweis. Analog zum Beweis von Satz [60, 62.8] können wir den Tangentialraum von TM^\perp in einem Punkt x des Nullschnitts als $T_x M \oplus T_x M^\perp = T_x N$ schreiben. Und die Tangential-Abbildung von \exp_N hat die Gestalt

$$T_{0_x} \exp_N = \text{id}_{T_x N} = (\text{id}_{T_x M}, T_0 \exp_x |_{(T_x M)^\perp}).$$

Also ist $\exp_N : TM^\perp \rightarrow N$ ein lokaler Diffeomorphismus, und auch die Injektivität kann wie im Beweis von Satz [60, 62.8] gezeigt werden.

Sei nun $X : \mathbb{R} \rightarrow TM^\perp$ ein Vektorfeld von konstanter Länge (o.B.d.A. 1) längs einer Kurve $c = \pi \circ X : \mathbb{R} \rightarrow M$, so betrachten wir die Abbildung $\varphi : (t, s) \mapsto \exp_{c(s)}(tX(s))$. Der Beweis von [60, 58.6] zeigt, daß sich die Parameterlinien orthogonal schneiden. \square

21.16 Bemerkung

Man kann umgekehrt zeigen, daß jede Teilmannigfaltigkeit M einer Mannigfaltigkeit N das Retrakt einer offenen Menge in N ist, siehe [62.9] oder [42, S.110]. Zusammen mit dem Einbettungssatz [21.13] besagt das, daß zusammenhängende σ -kompakte Mannigfaltigkeiten - bis auf Diffeomorphismen - genau die Retrakte offener Teilmengen endlichdimensionaler Vektorräume sind.

21.5 Folgerung.

Es sei $f \in C^\infty(M, N)$ eine Immersion und $g : P \rightarrow M$ eine stetige Abbildung mit $f \circ g \in C^\infty(P, N)$. Dann ist g ist glatt.

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ \uparrow \scriptstyle C^\infty g & \nearrow \scriptstyle f \circ g \in C^\infty & \\ P & & \end{array}$$

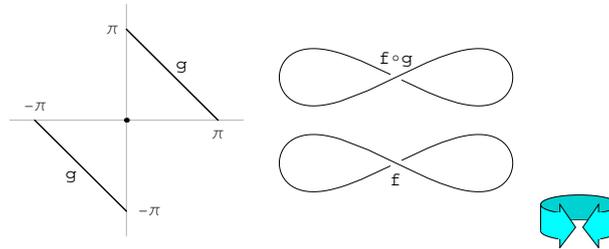
Beweis. Sei $z \in P$ und $x := g(z)$. Es existieren U_x und $h : V_{f(x)} \rightarrow M$ wie in [60, 21.4.3]. Da g stetig ist, ist $g^{-1}(U_x)$ eine offene Umgebung von z und darauf ist $g = (h \circ f) \circ g = h \circ (f \circ g)$ glatt. \square

21.6 Bemerkungen

1. Dabei ist die Stetigkeit von g wesentlich: Sei nämlich $g :]-\pi, \pi[\rightarrow]-\pi, \pi[$, definiert durch

$$g : t \mapsto \begin{cases} \pi - t & \text{für } t > 0 \\ 0 & \text{für } t = 0 \\ -\pi - t & \text{für } t < 0 \end{cases}$$

und $f : (-\pi, \pi) \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(t) := (\sin t, -\sin 2t)$



Dann ist $f \circ g$ glatt, aber g ist nicht stetig, ergo auch nicht glatt.

2. Eine Mannigfaltigkeit M , die Teilmenge einer Mannigfaltigkeit N ist, heißt IMMERSIVE TEILMANNIGFALTIGKEIT, falls die Inklusion $\text{incl} : M \rightarrow N$ eine Immersion ist. Eine immersive Teilmannigfaltigkeit ist im allgemeinen keine Teilmannigfaltigkeit im Sinn von [60, 10.4] oder allgemeiner von [21.12]: $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ aus [21.6.1] ist eine injektive Immersion, aber $f(\mathbb{R})$ ist keine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 .

3. Die Mannigfaltigkeitsstruktur einer immersiven Teilmannigfaltigkeit ist im allgemeinen nicht durch die von N festgelegt wie [1] zeigt: f und $f \circ g$ erzeugen zwei verschiedene Mannigfaltigkeitsstrukturen auf $M = \text{Bild}(f) \cong]-\pi, \pi[$.

21.7 Definition (Initiale und finale Abbildungen)

Sei $f \in C^\infty(M, N)$. Die Abbildung f heißt INITIAL $:\Leftrightarrow$ für jede Abbildung $g : P \rightarrow M$ mit der Eigenschaft, daß $f \circ g$ glatt ist, g selbst glatt ist.

Die Abbildung f heißt FINAL $:\Leftrightarrow$ für jedes $g : N \rightarrow P$ mit der Eigenschaft, daß $g \circ f$ glatt ist, g selbst glatt ist.

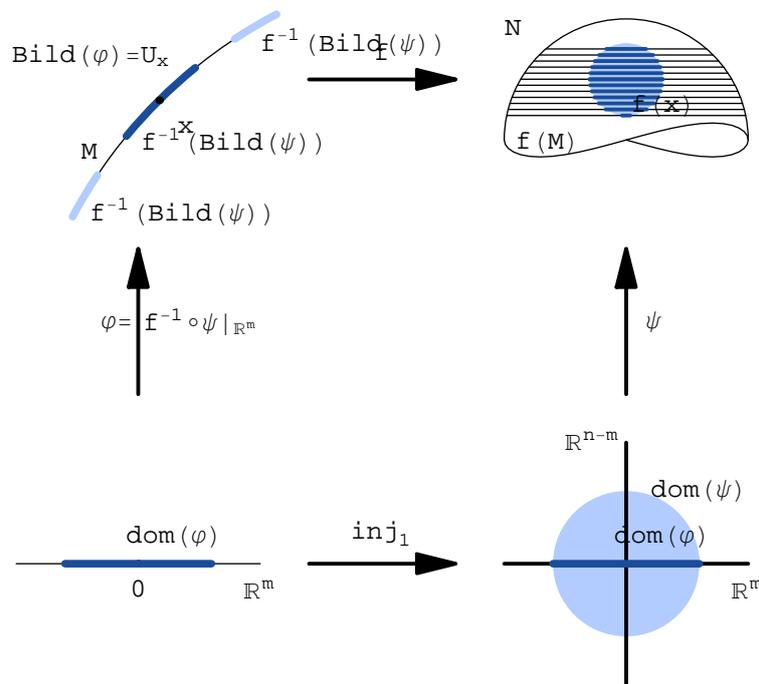
21.8 Satz (Charakterisierung initialer Immersionen).

Für f in $C^\infty(M, N)$ sind folgende Aussagen äquivalent:

1. f ist eine initiale Immersion;
2. für jedes $x \in M$ gibt es eine Karte ψ von N zentriert bei $f(x)$, sodaß $f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi))$ ein wohldefinierter Diffeomorphismus (und somit eine Karte) ist;
3. f besitzt lokale Linksinverse im folgenden Sinn: $\forall x \in M \exists h : V_{f(x)} \rightarrow M$ glatt mit einer offenen Umgebung $V_{f(x)}$ von $f(x)$ in N und $h(f(x)) = x$ sowie $h \circ f = \text{id}$ auf $f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap V_{f(x)}))$.

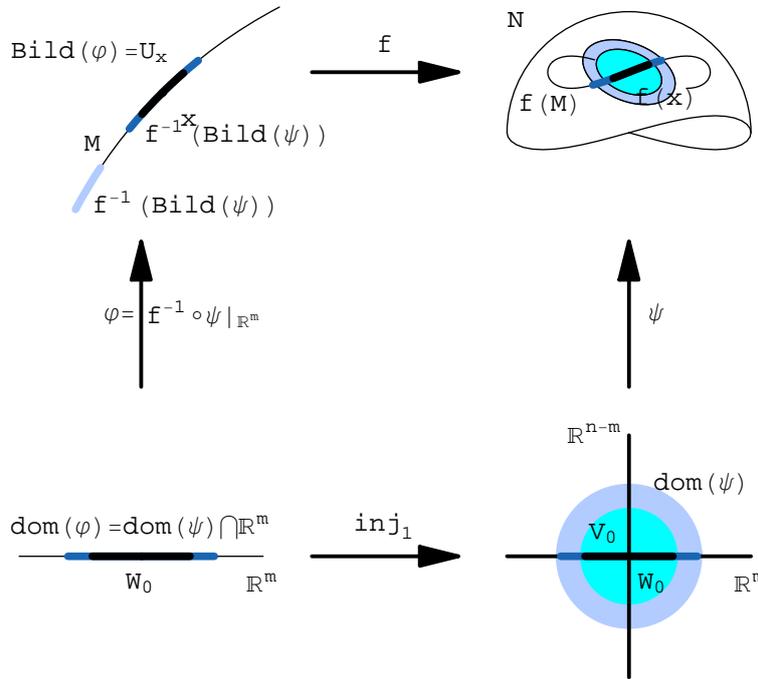
Dabei sei C^∞ -Wegkomp $_x(A) := \{c(1) : c \in C^\infty(\mathbb{R}, A) \text{ mit } c(0) = x\}$ für $A \subseteq N$.

Es ist $U_x := f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap V))$ für offenes $V \subseteq N$ in M offen ist, denn für $z \in U_x$ ist die offene Umgebung C^∞ -Wegkomp $_z(f^{-1}(V))$ in U_x enthalten: Sei dazu $y \in C^\infty\text{-Wegkomp}_z(f^{-1}(V))$, d.h. eine glatte Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow f^{-1}(V)$ existiert mit $c(0) = z$ und $c(1) = y$. Für die glatte Kurve $f \circ c : \mathbb{R} \rightarrow \text{Bild } f \cap V$ gilt dann $(f \circ c)(0) = f(z) \in C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap V)$, also auch $f(y) = (f \circ c)(1)$, d.h. $y \in U_x$.



Beweis.

(1) \Rightarrow (2) Sei f eine Immersion. Dann existiert nach [60, 21.4] ein $U_x \subseteq M$ offen und eine Karte ψ um $f(x)$ s.d. $(f|_{U_x})^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m} : \text{Dom } \psi \cap \mathbb{R}^m \rightarrow U_x$ ein Diffeomorphismus ist. Wir wollen U_x und Bild ψ so verkleinern, daß $U_x = f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi))$ wird.



Wir wählen dazu eine offene C^∞ -wegzusammenhängende Umgebung U_0 von x in M , welche $U_0^- \subseteq U_x$ erfüllt.

Sei $W_0 := (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U_0) \subseteq \mathbb{R}^m$. Dann ist W_0 offen und sei $V_0 \subseteq \text{Dom } \psi$ so gewählt, daß $W_0 = V_0 \cap \mathbb{R}^m$. Weil f injektiv ist, genügt es zu zeigen, daß

$$f(U_0) = C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap \psi(V_0)).$$

(\subseteq) Folgt unmittelbar aus $f(U_0) \subseteq \text{Bild } f$ und $f(U_0) = \psi(W_0) \subseteq \psi(V_0)$, weil $f(U_0)$ C^∞ -wegzusammenhängend ist.

(\supseteq) Sei $c : \mathbb{R} \rightarrow \text{Bild } f \cap \psi(V_0)$ und $c(0) = f(x)$; dann ist zu zeigen:

$$c(1) \in f(U_0).$$

Wir definieren $\bar{c} := (f|_{U_x})^{-1} \circ c : \mathbb{R} \rightarrow M$. Da f eine initiale Immersion ist folgt, daß \bar{c} glatt ist. Es genügt zu zeigen: $\bar{c}([0, 1]) \subseteq U_0$. Angenommen: $\bar{c}([0, 1]) \not\subseteq U_0$. Wegen $\bar{c}(0) = x$ kann $t_0 > 0$ minimal gewählt werden, sodaß $\bar{c}(t_0) \notin U_0$, d.h. für $t < t_0$ ist $\bar{c}(t) \in U_0$ und damit $\bar{c}(t_0) \in U_0^- \subseteq U_x$. Somit ist $((f|_{U_x})^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} \circ \bar{c}(t) \in (f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(U_0) = W_0$ für $t < t_0$ aber nicht für $t = t_0$.

Andererseits gilt $((f|_{U_x})^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1}(\bar{c}(t)) = \psi^{-1}(c(t)) \in V_0$ für alle $t \leq t_0$ und damit ist $((f^{-1} \circ \psi|_{\mathbb{R}^m})^{-1} \circ \bar{c})(t_0) \in V_0 \cap \mathbb{R}^m = W_0$, ein Widerspruch.

($2 \Rightarrow 3$) Die selbe Definition von h wie im entsprechenden Beweisteil von [60, 21.4] liefert nun ein Linksinverses auf $U_x = f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap \text{Bild } \psi))$.

($3 \Rightarrow 1$) Da $U_x := f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(x)}(\text{Bild } f \cap V_{f(x)}))$ offen ist folgt die Immersivität von f aus [60, 21.4].

Wir zeigen nun, daß f initial ist. Sei dazu $g : P \rightarrow M$ sodaß $f \circ g$ glatt ist. Wir müssen nur zeigen, daß g lokal um $p \in P$ Werte in U_x für $x = g(p)$ hat. Wir wählen dazu eine C^∞ -wegzusammenhängende Umgebung U_p um p mit $U_p \subseteq$

$$\begin{aligned}
& (f \circ g)^{-1}(V_{f(x)}). \\
& \Rightarrow (f \circ g)(U_p) \subseteq \text{Bild } f \cap V_{f(x)}, \text{ } C^\infty\text{-wegzusammenhängend} \\
& \Rightarrow (f \circ g)(U_p) \subseteq C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(g(p))}(\text{Bild } f \cap V_{f(x)}) \\
& \Rightarrow g(U_p) \subseteq f^{-1}(C^\infty\text{-Wegkomp}_{f(g(p))}(\text{Bild } f \cap V_{f(x)})) = U_x \quad \square
\end{aligned}$$

21.9 Bemerkungen

1. In dieser Situation (d.h. falls es eine initiale Immersion $f : M \rightarrow N$ gibt) ist die Mannigfaltigkeitsstruktur auf M eindeutig durch jene auf N bestimmt: In der Tat seien zwei Mannigfaltigkeitsstrukturen auf der Menge M gegeben, s.d. eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ initial bzgl. beider Strukturen ist. Zwecks Unterscheidung bezeichnen wir mit M_1 und M_2 die Menge M mit der jeweiligen Mannigfaltigkeitsstruktur und betrachten die Identität $\text{id} : M_1 \rightarrow M_2$. Dann ist $\text{id} \in C^\infty$, denn $f \circ \text{id} = f : M_1 \rightarrow N$ ist glatt und $f : M_2 \rightarrow N$ initial. Genauso folgt auch $\text{id}^{-1} : M_2 \rightarrow M_1$ ist glatt, also $\text{id} : M_1 \rightarrow M_2$ ein Diffeomorphismus.
2. Eine Teilmenge M von N mit obiger Eigenschaft, d.h. $\forall x \in M \exists \psi : C^\infty\text{-Wegkomp}_x(M \cap \text{Bild } \psi) = \psi(\mathbb{R}^m)$, trägt eine eindeutige Mannigfaltigkeitsstruktur, sodaß $\text{incl} : M \rightarrow N$ eine initiale Immersion wird, nämlich jene die als Atlas die Einschränkungen $\psi|_{\mathbb{R}^m}$ dieser Karten hat. So eine Teilmenge mit dieser Mannigfaltigkeitsstruktur heißt INITIALE TEILMANNIGFALTIGKEIT.
3. Jede initiale C^∞ -Abbildung ist injektiv. Sei f initial, $f(x) = f(y)$, $x \neq y$; $g(t) = x$ für $t > 0$, $g(t) = y$ sonst, so ist g nicht stetig, aber $f \circ g$ ist konstant, also $C^\infty \Rightarrow g$ ist C^∞ (Widerspruch)!
4. In [47] wurde bewiesen, daß $f : t \rightarrow (t^2, t^3)$, $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine initiale C^∞ -Abbildung ist. Sie ist aber klarerweise nicht immersiv, da $f'(0) = (0, 0)$.
5. Ein wichtiges Beispiel einer initialen Teilmannigfaltigkeit ist eine nichtperiodische Spirallinie auf dem Torus $S^1 \times S^1$ gegeben durch

$$f : t \mapsto (\exp(2\pi it), \exp(2\pi i\alpha t))$$

mit irrationalem Anstieg α .

Hier zeigt sich, daß eine initiale Teilmannigfaltigkeit nicht die Spurtopologie tragen muß. Denn kein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ gibt es ein offenes $U \subseteq S^1 \times S^1$, sodaß $I = f^{-1}(U)$ (äquivalent $f(I) = U \cap \text{Bild}(f)$), da $f(t)$ immer wieder in U liegt für $t \rightarrow \pm\infty$.

21.17 Satz von Sard.

Die Menge der kritischen Werte einer glatten Abbildung zwischen σ -kompakten Mannigfaltigkeiten hat Lebesgue-Maß 0.

Siehe auch [10, S.58] und [42, p.68].

Dieses Resultat gilt auch noch, wenn $f \in C^r(M, N)$ mit $r > \dim M - \dim N$ ist. In [100, A function not constant on a connected set of critical points, Duke Math. J. 1(1935) 514-517] wurde eine C^1 -Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ konstruiert, die auf einem Bogen I kritisch, aber nicht konstant ist. Der Graph von f ist also eine Fläche $S \subseteq \mathbb{R}^3$, auf welcher ein Bogen $f(I)$ liegt, sodaß die Tangentialebene an S in jeden Punkt horizontal ist, aber dennoch hat $f(I)$ nicht konstante Höhe.

Definition.

Dabei heißt für eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ ein Punkt $x \in M$ KRITISCH, falls

$T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$ nicht maximalen Rang hat. Ein Punkt $y \in N$ heißt KRITISCHER WERT, falls ein kritischer Punkt $x \in f^{-1}(y)$ existiert. Manchmal wir für kritische Punkte nur verlangt, daß $T_x f$ nicht surjektiv ist. Zumindestens für den Satz von Sard macht das aber keinen Unterschied, denn nur im Fall $\dim M < \dim N$ erhalten wir mehr kritische Werte (nämlich alle im Bild). Diese bilden aber nach der Folgerung in [21.18](#) ebenfalls eine Lebesgue-Null-Menge.

Eine Menge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt LEBESGUE-NULL-MENGE, falls für jedes $\varepsilon > 0$ eine Folge von Würfeln (oder Quadern oder Kugeln) $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ existiert mit $N \subseteq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Q_k$ und $\sum_{k \in \mathbb{N}} |Q_k| < \varepsilon$.

Eine Teilmenge $N \subseteq M$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit M heißt LEBESGUE-NULL-MENGE, wenn daß Urbild unter jeder Karte eine Lebesgue-Null-Menge ist.

21.18 Lemma.

Es sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ und $N \subseteq U$ eine Lebesgue-Null-Menge. Weiters sei $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ eine C^1 -Abbildung. Dann ist auch $f(N)$ eine Lebesgue-Null-Menge.

Beweis. Da U die Vereinigung abzählbar vieler kompakter konvexer Mengen ist (z.B. der Kugeln mit rationalen Mittelpunkts-Koordinaten und rationalem Radius, die in U enthalten sind), und weil die abzählbare Vereinigung von Lebesgue-Null-Mengen wieder eine Lebesgue-Null-Menge ist, dürfen wir annehmen, daß N in einer kompakten konvexen Teilmenge von U enthalten ist. Weiters können wir auch annehmen, daß die Würfel einer Überdeckung von N ebenfalls in einer (etwas größeren) kompakten konvexen Teilmenge $K \subseteq U$ enthalten sind.

Da $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^1 ist, ist $\kappa := \sup\{\|f'(x)\| : x \in K\} := \|f'\|_K < \infty$. Sei Q ein Quader in K mit Seitenlänge a . Dann ist nach dem Hauptsatz

$$|f(x_1) - f(x_0)| = \left| \int_0^1 f'(x_0 + t(x_1 - x_0))(x_1 - x_0) dt \right| \leq \kappa \cdot |x_1 - x_0| \leq \kappa a \sqrt{m}.$$

für alle $x_1, x_0 \in Q$. Also ist $f(Q)$ enthalten in einem Quader mit Seitenlänge $2\kappa a \sqrt{m}$ und Volumen $(2\kappa a \sqrt{m})^m = (2\kappa \sqrt{m})^m |Q|$. Das Bild einer abzählbaren Überdeckung mit Quadern von Gesamt-Volumen kleiner als $\delta := \varepsilon / (2\kappa \sqrt{m})^m > 0$ ist also in einer Überdeckung mit Quadern von Gesamt-Volumen kleiner als $(2\kappa \sqrt{m})^m \cdot \delta = \varepsilon$ enthalten. \square

Es ist also eine Teilmenge $N \subseteq M$ einer Mannigfaltigkeit genau dann eine Lebesgue-Null-Menge, wenn die Urbilder unter den Karten eines festen Atlases Lebesgue-Null-Mengen sind.

Folgerung.

Es sei $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ C^1 und $n < m$, dann ist $f(\mathbb{R}^n)$ eine Lebesgue-Null-Menge.

Beweis. Man wende [21.18](#) auf $\tilde{f} := f \circ \text{pr} : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ und die Lebesgue-Nullmenge $N := \mathbb{R}^m \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^m$ an. \square

Wir benötigen noch den

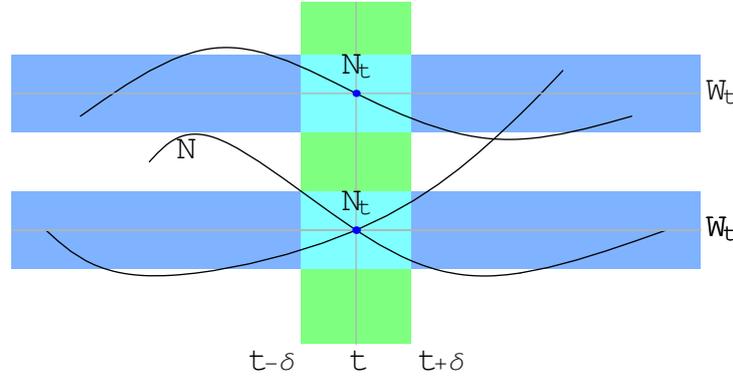
21.19 Satz von Fubini.

Es sei $N \subseteq \mathbb{R}^m$ kompakt und $N \cap (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1})$ eine Lebesgue-Null-Menge für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann ist N eine Lebesgue-Null-Menge in \mathbb{R}^n .

Für einen Beweis siehe [\[10, S.59\]](#) oder [\[57, 7.6.9\]](#).

Beweis. Es sei $\varepsilon > 0$. Dann existieren für jedes $t \in \mathbb{R}$ abzählbar viele offene Quader $W_t^i \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ mit $i \in \mathbb{N}$, s.d. $W_t := \bigcup_{i \in \mathbb{N}} W_t^i \supseteq N_t := \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (t, x) \in N\} \subseteq$

\mathbb{R}^{n-1} und $\sum_i |W_t^i| < \varepsilon$. Die Funktion $(t', x) \mapsto |t' - t|$ ist stetig auf N , positiv auf $N \setminus (\{t\} \times \mathbb{R}^{n-1}) = N \setminus (\{t\} \times N_t)$ und besitzt somit ein Minimum δ_t auf der kompakten Menge $N \setminus (\mathbb{R} \times W_t) \subseteq N \setminus (\{t\} \times N_t)$; d.h. $(t', x) \in N$, $|t' - t| < \delta_t \Rightarrow x \in W_t$. Es sei $I_t := (t - \delta_t, t + \delta_t)$, dann ist $N \cap (I_t \times \mathbb{R}^{n-1}) \subseteq I_t \times W_t$.



O.B.d.A. sei $N \subseteq [a, b] \times \mathbb{R}^{n-1}$. Wir wählen nun eine endliche minimale Teilüberdeckung $\{I_i := I_{t_i} : i\}$ von $\{I_t : t \in [a, b]\}$. O.B.d.A. seien die $I_i = (a_i, b_i)$ mit a_i aufsteigend geordnet. Dann sind auch die b_i monoton wachsend, denn andernfalls folgt aus $b_{i+1} \leq b_i$, daß $I_{i+1} \subseteq I_i$, also ein Widerspruch zur Minimalität. $a_i \leq a_{i+1} \leq b_i \leq a_{i+2}$ (wegen der Minimalität, denn $b_i < a_{i+1} \Rightarrow I_i, I_{i+1}$ nicht überlappend; $b_i > a_{i+2} \Rightarrow I_{i+1} \subseteq I_i \cup I_{i+2}$). Also ist

$$\sum_i |I_i| = \sum_i (b_i - a_i) = \sum_i (a_{i+1} - a_i) + (b_i - a_{i+1}) \leq \sum_i (a_{i+1} - a_i) + (a_{i+2} - a_{i+1}) \leq 2(b - a)$$

und somit ist $\{I_{t_i} \times W_{t_i}^j : i, j\}$ eine offene Überdeckung von N durch abzählbar viele Intervalle mit Gesamtvolumen

$$\sum_{i,j} |I_{t_i} \times W_{t_i}^j| = \sum_i |I_{t_i}| \sum_j |W_{t_i}^j| \leq \varepsilon \sum_i |I_{t_i}| \leq 2\varepsilon |b - a|. \quad \square$$

Beweis des Satzes von Sard [21.17](#). Beachte, daß falls für jeden Punkt x einer Menge $X \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Umgebung U_x existiert, s.d. $f(U_x \cap X)$ eine L-Nullmenge ist, so ist $f(X) = \bigcup_{x \in X} f(U_x \cap X)$ ebenfalls eine L-Nullmenge, denn abzählbar viele der U_x überdecken bereits X , da X nach dem Beweis von [\[60, 18.2\]](#) Lindelöf ist.

Es genügt somit den Fall $f : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu betrachten. Sei D die Menge der kritischen Punkte. Wir machen Induktion nach m . Für $m = 0$ ist der Satz trivial.

Im Induktionsschritt wollen wir [21.19](#) anwenden, jedoch ist die Menge der kritischen Werte nicht kompakt, aber die kritischen Punkte sind eine abzählbare Vereinigung kompakter Mengen, denn die Menge der Punkte x , wo eine fixe $r \times r$ -Teildeterminante von $f'(x)$ verschwindet ist abgeschlossen, also die abzählbare Vereinigung ihrer Durchschnitte mit den kompakten Bällen $B_n(x)$ für $n \in \mathbb{N}$, und die kritischen Werte somit eine abzählbare Vereinigung der kompakten Bilder all dieser kompakten Mengen (und damit [21.19](#) anwendbar).

Sei

$$D_k := \{x \in U : \frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} f(x) = 0 \text{ für alle } |\alpha| \leq k\}.$$

Die D_k sind abgeschlossen und erfüllen $D \supseteq D_1 \supseteq D_2 \supseteq \dots$

Es ist $f(D \setminus D_1)$ eine Lebesgue-Null-Menge:

Sei dazu $x \in D \setminus D_1$. O.B.d.A. ist $\frac{\partial}{\partial x^1} f_1(x) \neq 0$. Dann ist $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x^1, \dots, x^m) \mapsto$

$(f_1(x), x^2, \dots, x^m)$ ein lokaler Diffeomorphismus und $g := f \circ h^{-1}$ hat die Gestalt

$$\begin{aligned} g : (f_1(x), x^2, \dots) &\mapsto (x^1, \dots, x^n) \mapsto (f_1(x), \dots, f_n(x)) \\ g : (t; x^2, \dots, x^m) &\mapsto (t, g^2(t, x), \dots, g^n(t, x)). \end{aligned}$$

Die Hyperebene $H_t := \{t\} \times \mathbb{R}^{n-1} \cong \mathbb{R}^{n-1}$ bleibt invariant unter g , und die Einschränkung $g_t(x) := (g^2(t, x), \dots, g^n(t, x))$ von g auf sie hat x als kritischen Punkt genau dann, wenn (t, x) ein kritischer Punkt von g ist. Nach Induktionsvoraussetzung, sind die kritischen Werte von g_t eine Lebesgue-Null-Menge, und nach dem Satz [21.19](#) von Fubini auch jene von g , dies sind aber auch jene von $f = g \circ h$, da h ein Diffeomorphismus ist.

Es ist auch $f(D_k \setminus D_{k+1})$ eine Lebesgue-Null-Menge:

Sei $x \in D_k \setminus D_{k+1}$. OBdA. ist $\frac{\partial^{k+1} f_1}{\partial x^1 \partial x^{m_1} \dots \partial x^{m_k}}(x) \neq 0$ und sei $w := \frac{\partial^k f_1}{\partial x^{m_1} \dots \partial x^{m_k}}$. Dann ist $w|_{D_k} = 0$ und $\frac{\partial w}{\partial x_1}(x) \neq 0$. Es sei $h(x) := (w(x), x_2, \dots, x_m)$. Dann ist $h : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ein lokaler Diffeomorphismus und $h(D_k \cap U) \subseteq \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \subseteq \mathbb{R}^m$. Wir betrachten die Abbildung $g := f \circ h^{-1}$ und ihre Einschränkung $g_0 : \{0\} \times \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Die kritischen Werte von g_0 sind nach Induktions-Voraussetzung eine Lebesgue-Null-Menge und jeder Punkt aus $h(D_k \cap U)$ ist kritisch für g_0 , weil alle partiellen Ableitungen von g der Ordnung $\leq k$ und insbesondere die der Ordnung 1 von g_0 verschwinden. Also ist $f(D_k \cap U) = g_0(h(D_k \cap U))$ eine Lebesgue-Null-Menge.

Für $k > \frac{m}{n} - 1$ ist $f(D_k)$ eine Lebesgue-Null-Menge:

Es sei Q ein Würfel der Seitenlänge a . Aus der Taylor-Formel erhalten wir

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x)| &= \left| \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(x+th)(h, \dots, h) dt \right| \\ &\leq \underbrace{\sup \left\{ \|f^{(k+1)}(x)\| : x \in Q \right\}}_{=: \tau} \int_0^1 \frac{(1-t)^k}{k!} dt |h|^{k+1} \leq \tau |h|^{k+1} \end{aligned}$$

für alle $x \in D_k \cap Q$. Wir zerlegen Q in r^m Würfel der Seitenlänge $\frac{a}{r}$. Sei Q' solch ein Würfel, der einen Punkt $x \in D_k$ enthält. Dann ist jeder Punkt in Q' von der Form $x+h$ mit $|h| \leq \frac{a}{r}$ und somit ist $f(Q')$ enthalten in einem Würfel der Kantenlänge $2\tau \left(\frac{a}{r}\right)^{k+1}$. Alle Würfel zusammen haben Gesamtvolumen höchstens $r^m \frac{(2\tau a^{k+1})^n}{r^{n(k+1)}}$ und für $n(k+1) > m$ konvergiert dieser Ausdruck gegen Null für $r \rightarrow \infty$. \square

21.25 Retraktionssatz.

Es gibt keine stetige Retraktion $\mathbb{D}^n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\} \rightarrow S^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$.

Unter einer RETRAKTION f auf eine Teilmenge $Y \subseteq X$ versteht man eine Abbildung $f : X \rightarrow Y$ welche $f|_Y = \text{id}$ erfüllt. Mehr der Anschauung entsprechend ist eine DEFORMATION von Y auf X , d.h. eine stetige Abbildung $F : [0, 1] \times X \rightarrow X$, mit folgenden Eigenschaften:

- $\forall t \in [0, 1] \quad \forall y \in Y: F(t, y) = y.$
- $\forall x \in X: F(0, x) = x.$
- $\forall x \in X: F(1, x) \in Y.$

Wenn wir mit $F_t : X \rightarrow X$ die Abbildung $F_t(x) := F(t, x)$ bezeichnen, so ist also $F_t|_Y = \text{id}_Y$, $F_0 = \text{id}_X$ und $F_1 : X \rightarrow Y$ eine Retraktion.

Umgekehrt können wir aus einer Retraktion $f : \mathbb{D}^n \rightarrow S^{n-1} \subseteq \mathbb{D}^n$ eine Deformation $F(t, x) := (1-t)x + tf(x)$ machen.

Beweis. Angenommen f wäre eine Retraktion. Wir wollen zuerst zeigen, daß f o.B.d.A. C^∞ ist.

Sicher existiert eine Retraktion $f_1 : \mathbb{D}^n \rightarrow S^{n-1}$, die in einer Umgebung von S^{n-1} C^∞ ist, z.B.

$$f_1(x) := \begin{cases} f(x/|x|) = x/|x| & \text{für } 1/2 \leq |x| \leq 1 \\ f(2x) & \text{für } |x| \leq 1/2. \end{cases}$$

Nach der Aufgabe [2](#) (oder dem Satz von Stone-Weierstraß) existiert eine glatte Funktion $f_2 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\|f_2 - f_1\|_\infty < 1$. Sei nun $h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, 1]$ C^∞ mit $h(x) = 1$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$ und $h(x) = 0$ für $|x| \geq 1$ und $f_3(x) := (1 - h(x))f_1(x) + h(x)f_2(x)$. Dann ist $|f_3(x) - f_1(x)| = h(x) \cdot |f_2(x) - f_1(x)| \leq |f_2(x) - f_1(x)| < 1$, d.h. $f_3(x) \neq 0$ und für $|x| \geq 1$ ist $f_3(x) = f_1(x) = x/|x|$. Schließlich ist $f_4(x) := f_3(x)/|f_3(x)|$ die gesuchte C^∞ -Retraktion. Wir nennen diese wieder f .

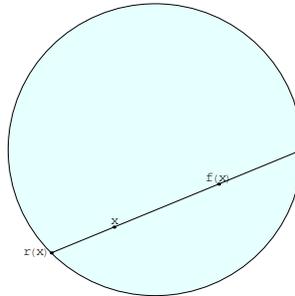
Nach dem Satz [21.17](#) von Sard existiert ein regulärer Wert $y \in S^{n-1}$ von f und somit ist $M := f^{-1}(y)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^n und $y \in M \cap S^{n-1}$. Es sei $z \in M$ ein weiterer Schnittpunkt der Zusammenhangskomponente von y in M mit S^{n-1} (Ein solcher existiert kläerweise, falls die Zusammenhangskomponente diffeomorph zu S^1 ist, und andernfalls ist sie diffeomorph zu \mathbb{R} muß also \mathbb{D}^n wieder verlassen, denn $f^{-1}(y) \cap \mathbb{D}^n$ ist kompakt). Dann ist $f(z) = z \neq y$ ein Widerspruch zu $z \in f^{-1}(y)$. \square

21.26 Brouwer's Fixpunktsatz.

Jedes stetige $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ hat mindestens einen Fixpunkt.

Beweis.

Angenommen $f : \mathbb{D}^n \rightarrow \mathbb{D}^n$ hat keinen Fixpunkt. Dann ist $r : \mathbb{D}^n \rightarrow S^{n-1}$ definiert dadurch, daß $x \in \mathbb{D}^n$ auf dem Schnittpunkt der Geraden von $f(x)$ nach x mit S^{n-1} der x näher liegt abgebildet wird eine stetige Retraktion, im Widerspruch zu [21.25](#). \square



Explizit ist r gegeben durch:

$$r(x) := x - \lambda(f(x) - x), \text{ wobei } \lambda \geq 0 \text{ und}$$

$$0 = |r(x)|^2 - 1 = \lambda^2|f(x) - x|^2 - 2\lambda\langle x|f(x) - x \rangle + |x|^2 - 1,$$

$$\text{d.h. } \lambda = \frac{\langle x|f(x) - x \rangle + \sqrt{\langle x|f(x) - x \rangle^2 + |f(x) - x|^2(1 - |x|^2)}}{|f(x) - x|^2}.$$

21.20 Definition (Transversale Abbildungen)

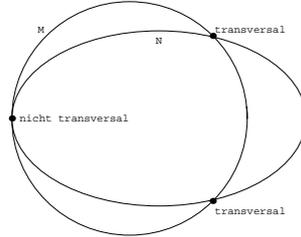
Es seien M, N Mannigfaltigkeiten, $A \subseteq N$ eine Teilmannigfaltigkeit. Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt TRANSVERSAL zu A , falls

$$T_x f(T_x M) + T_{f(x)} A = T_{f(x)} N \quad \forall x \in M \text{ mit } f(x) \in A$$

gilt.

21.21 Beispiel

Sei $A := S^1$ in $N := \mathbb{R}^2$ und $M := \mathbb{R}$ sowie $f : M \rightarrow N$ wie im folgenden Bild.



Es ist aber nicht gefordert, daß die Summe “direkt” ist; Z.B. ist die Identität $f : M := N \rightarrow N$ transversal zu jeder Teilmannigfaltigkeit $A \subseteq N$ aber im allgemeinen ist $\text{Bild}(T_x f) \cap T_{f(x)} A \neq \{0\}$.

21.22 Satz (Urbilder von Teilmannigfaltigkeiten).

Es sei $f \in C^\infty(M, N)$ und K eine reguläre Teilmannigfaltigkeit N . Ist f transversal zu K , so ist $f^{-1}(K)$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von M .

Insbesondere wenn f die Inklusion einer zweiten Teilmannigfaltigkeit M von N ist, dann ist unter der Transversalitätsbedingung $T_x M + T_x K = T_x N$ für $x \in K \cap M$ der Durchschnitt $K \cap M$ selbst eine Teilmannigfaltigkeit.

Beweis. Sei $x \in f^{-1}(K)$ und ψ eine Karte zentriert bei $f(x)$, die K trivialisiert. Dann gilt für x' nahe x :

$$x' \in f^{-1}(K) \Leftrightarrow f(x') \in K \Leftrightarrow \psi^{-1}(f(x')) \in \mathbb{R}^k \Leftrightarrow (\text{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f)(x') = 0.$$

Wir können somit [60, 10.4] anwenden, um $f^{-1}(K)$ als Teilmannigfaltigkeit von M zu erkennen, wenn wir zeigen, daß die lokale Gleichung $\text{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f$ regulär ist. Es ist $T_x(\text{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f) = \text{pr}_{n-k} \circ (T_0 \psi)^{-1} \circ T_x f$, und da wegen der Transversalität $T_{f(x)} N = \text{Bild}(T_x f) + T_{f(x)} K = \text{Bild}(T_x f) + \text{Bild}(T_0 \psi)(\mathbb{R}^k)$ ist, ist $T_x(\text{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f)$ surjektiv, denn für $w \in \mathbb{R}^{n-k}$ sei $T_0 \psi(w) = T_x f(v) + k$ mit $v \in T_x M$ und $k \in T_{f(x)}(K)$ und somit ist

$$\begin{aligned} T_x(\text{pr}_{n-k} \circ \psi^{-1} \circ f)(v) &= \text{pr}_{n-k}((T_0 \psi)^{-1}(T_x f(v))) \\ &= \text{pr}_{n-k}(w - (T_0 \psi)^{-1}(k)) = w, \end{aligned}$$

da $(T_0 \psi)^{-1}(T_{f(x)} K) = \mathbb{R}^k$. □

In [59, 24.46] wird ein Beispiel gegeben, das zeigt, daß dieser Satz “stärker” ist als (2) in [21.14].

21.23 Folgerung (Pull-back von Mannigfaltigkeiten).

Sei $f_i \in C^\infty(M_i, N)$, ($i = 1, 2$); und f_1 transversal zu f_2 , (d.h. $f_1(x_1) = f_2(x_2) \Rightarrow \text{Bild } T_{x_1} f_1 + \text{Bild } T_{x_2} f_2 = T_y N$). Dann ist das PULL-BACK

$$\{(x_1, x_2) : f_1(x_1) = f_2(x_2)\}$$

eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von $M_1 \times M_2$.

Beweis. Die Abbildung $f_1 \times f_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow N \times N$ ist glatt. $K := \{(x, x) : x \in N\}$ ist reguläre Teilmannigfaltigkeit von $N \times N$, da K etwa als Graph von $\text{id} : N \rightarrow N$

aufgefaßt werden kann. Gelingt es uns zu zeigen, daß $f_1 \times f_2$ transversal zu K ist,

$$\begin{aligned} \text{d.h. } (f_1(x_1), f_2(x_2)) = (y, y) \in K &\Rightarrow \\ &\Rightarrow \text{Bild } T_{(x_1, x_2)}(f_1, f_2) + T_{(y, y)}K = T_{(y, y)}(N \times N), \end{aligned}$$

so sind wir nach dem vorigen Satz fertig. Die zweite Bedingung wollen wir zur besseren Handhabung erst noch etwas umformen:

$$\text{Bild } T_{x_1}f_1 \times \text{Bild } T_{x_2}f_2 + T_{(y, y)}K = T_yN \times T_yN.$$

Sei $(w_1, w_2) \in T_yN \times T_yN$, dann ist $(w_1 - w_2) \in T_yN$, und da f_1 transversal zu f_2 ist, existieren v_1, v_2 mit $w_1 - w_2 = T_{x_1}f_1(v_1) + T_{x_2}f_2(v_2)$. Nun geben wir einfach an, wie das Paar (w_1, w_2) in der gewünschten Weise dargestellt wird:

$$(T_{x_1}f_1, T_{x_2}f_2)(v_1, -v_2) + (T_{x_2}f_2(v_2) + w_2, T_{x_2}f_2(v_2) + w_2) = (w_1, w_2). \quad \square$$

Um die Bedeutung des Begriffs “transversal” zu unterstreichen, sei noch folgendes Theorem ohne Beweis angegeben:

21.24 Transversalitätssatz.

Sei $f : M \rightarrow N$ glatt und $K \subseteq N$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit. Dann existiert “beliebig nahe” an f eine Abbildung $g : M \rightarrow N$, die transversal zu K ist.

(“Beliebig nahe” heißt dabei “in jeder Umgebung von f ”. Wobei die Umgebungen der zugrundeliegenden Topologie wie folgt beschrieben werden können: Sei $\{\varphi_i\}$ ein Atlas von M , $\{K_i\}$ eine Überdeckung mit kompakten Mengen $K_i \subseteq \text{Bild}(\varphi_i)$, ψ_i eine Familie von Karten auf N mit $f(K_i) \subseteq \text{Bild}(\psi_i)$, zuletzt seien noch $\delta_i > 0$ und $r \in \mathbb{N}$ gegeben. Eine Umgebung von f hat dann die Gestalt:

$$\begin{aligned} \{g : g(K_i) \subseteq \text{Bild}(\psi_i) \text{ und } |(\psi_i^{-1} \circ g \circ \varphi_i)^{(k)}(x) - (\psi_i^{-1} \circ f \circ \varphi_i)^{(k)}(x)| < \delta_i \\ \text{für } k \leq r \text{ und } x \in K_i\}. \end{aligned}$$

Für einen Beweis siehe [42, S.74] oder [10, S.158].

26. Teilvektorbündel

Man rufe sich die Begriffe Vektorbündel (siehe [60, 25.5]), Vektorbündel-Homomorphismus (siehe [60, 25.9]) und Teilvektorbündel (siehe [60, 26.1]) in Erinnerung.

26.2 Proposition (Bild eines Vektorbündelmonomorphismuses).

Seien $q : F \rightarrow M$, $p : E \rightarrow M$ zwei VB, $f : F \rightarrow E$ ein VB-Monomorphismus (d.h. ein faserweise injektiver VB-Homomorphismus) über id_M , d.h. folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{f} & E \\ & \searrow q & \swarrow p \\ & & M \end{array}$$

Dann gilt: $f(F)$ ist ein Teilvektorbündel von E und ist isomorph via f zu $F \rightarrow M$:

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow[\cong]{f} & f(F) \\ q \downarrow & & \downarrow p|_{f(F)} \\ M & \xlongequal{\quad} & M \end{array}$$

Beweis. Da lokal beide VB trivial sind, nehmen wir o.B.d.A. an, daß $F = M \times \mathbb{R}^n$ und $E = M \times \mathbb{R}^k$ ist, sodaß

$$f : M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M \times \mathbb{R}^k \text{ mit } f(x, v) = (x, f_x(v)).$$

Da $f_{x_0} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ injektiv und linear ist, können wir o.B.d.A. annehmen, daß: $f_{x_0} = \text{incl} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$. Sei pr eine Projektion $\mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ zu incl , dann ist $\text{pr} \circ \text{incl} = \text{id} \in GL(n)$. Die Abbildung $x \mapsto \text{pr} \circ f_x$ ist eine Abbildung von M nach $L(k, n)$, die somit lokal um x_0 Werte in der offenen Teilmenge $GL(n) \subseteq L(n, n)$ hat. O.B.d.A. sei M diese Umgebung von x_0 . Es gilt:

$$\begin{array}{ccc} M \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{k-n} & \xrightarrow{\psi} & M \times \mathbb{R}^k = E \\ \text{incl} \uparrow & & \uparrow \text{incl} \\ M \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi|(M \times \mathbb{R}^n)} & f(F) \\ \text{id} \uparrow & & \uparrow f \\ M \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\text{id}} & M \times \mathbb{R}^n = F, \end{array}$$

wobei $\psi : (x; v, w) \mapsto (x; f_x(v) + (0, w))$ dann eine VB-Karte mit Umkehrabbildung

$$\psi^{-1} : (x, z) \mapsto \left(x, \left((\text{pr} \circ f_x)^{-1} \circ \text{pr} \right) (z), z - f_x \left(\left((\text{pr} \circ f_x)^{-1} \circ \text{pr} \right) (z) \right) \right)$$

ist und $f(F)$ entspricht $M \times \mathbb{R}^n$. Es ist also f bezüglich dieser Karte die Inklusion $M \times \mathbb{R}^n \rightarrow M \times \mathbb{R}^n \times \{0\}^{k-n}$. \square

26.3 Folgerung (Tangentialbündel einer Teilmannigfaltigkeit).

Sei $\text{incl} : A \subseteq M$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit. Dann ist $TA \cong T \text{incl}(TA)$ ein Teilbündel vom $TM|_A$.

Beweis.

$$\begin{array}{ccc} TA & \xrightarrow{T \text{incl}} & TM|_A \\ p_A \searrow & & \swarrow p_M \\ & A & \end{array}$$

Man wende 26.2 auf den VB-Monomorphismus $T \text{incl}$ an. \square

26.4 Folgerung (Tangentialbündel von Summen und Produkten).

Die folgenden Diagramme beschreiben Vektorbündel-Isomorphismen:

$$\begin{array}{ccc} T(\prod M_i) & \xrightarrow{(T \text{pr}_i)_i} & \prod TM_i \\ \pi_{\prod M_i} \downarrow & & \downarrow \prod \pi_{M_i} \\ \prod M_i & \xlongequal{\quad} & \prod M_i \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} T(\sqcup M_i) & \xleftarrow{\sqcup T \text{incl}_i} & \sqcup TM_i \\ \pi_{\sqcup M_i} \downarrow & & \downarrow \sqcup \pi_{M_i} \\ \sqcup M_i & \xlongequal{\quad} & \sqcup M_i \end{array} \qquad \square$$

26.5 Lemma (Pull-back Bündel).

Sei $p : E \rightarrow M$ ein VB, $f : N \rightarrow M$ glatt. Dann existiert eine natürliche VB-Struktur auf dem ZURÜCKGEZOGENEN VEKTORBÜNDEL $f^*p : f^*E \rightarrow N$ mit $f^*p : E_{f_x} \ni v \mapsto x$, wobei $f^*E := \bigsqcup_{x \in N} E_{f_x}$ ist. Außerdem existiert ein VB-Homomorphismus $p^*f : f^*E \rightarrow E$ mit $p^*f : E_{f_x} \ni v \mapsto v \in E$.

Diese Zuordnung hat folgende universelle Eigenschaft: Für jedes andere VB $q : F \rightarrow N$ und VB-Homomorphismus $\bar{f} : F \rightarrow E$ über f existiert ein eindeutiger VB-Homomorphismus $f^+ : F \rightarrow f^*E$ über id_N , der das folgende Diagramm kommutativ macht:

$$\begin{array}{ccccc}
 F & & & & \\
 \downarrow q & \searrow \bar{f} & & & \\
 & f^+ & \searrow & & \\
 & & f^*E & \xrightarrow{p^*f} & E \\
 & & \downarrow f^*p & & \downarrow p \\
 & & N & \xrightarrow{f} & M
 \end{array}$$

Beweis. Wir können f^*E folgendermaßen als Teilmenge von $N \times E$ auffassen:

$$f^*E \cong N \times_M E := \{(x, v) : f(x) = p(v)\} \subseteq N \times E.$$

Da $p : E \rightarrow M$ Submersion ist, folgt aus [21.23](#) (f und p sind transversal zueinander), daß $N \times_M E$ eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von $N \times E$ ist und $f^*(p) = \text{pr}_1|_{N \times_M E}$, sowie $p^*f := \text{pr}_2|_{N \times_M E}$ glatt sind. Die Regularität von $N \times_M E$ bewirkt dann die gewünschte universelle Eigenschaft:

$$\begin{array}{ccccc}
 F & & & & \\
 \downarrow q & \searrow \bar{f} & & & \\
 & ! & \searrow & & \\
 & & N \times_M E & \xrightarrow{\text{pr}_2} & E \\
 & & \downarrow \text{pr}_1 & & \downarrow p \\
 & & N & \xrightarrow{f} & M
 \end{array}$$

Der gesuchte, eindeutig bestimmte VB-Homomorphismus f^+ ist durch $f^+ = (q, \bar{f})$ gegeben.

Noch zu zeigen ist, daß: $N \times_M E \rightarrow N$ ein VB ist und p^*f sowie f^+ VB-Homomorphismen für jeden VB-Homomorphismus \bar{f} sind. Dazu brauchen wir die lokale Trivialität von $N \times_M E \rightarrow N$, die aber aus jener von $E \rightarrow M$ folgt, da Einschränken mit Zurückziehen vertauscht.

Für $U \subseteq M$ gilt:

$$\begin{aligned}
 (f|_{f^{-1}(U)})^*(E|_U) &= \{(x, v) : x \in f^{-1}(U), v \in E|_U, p(v) = f(x)\} \\
 &= \{(x, v) : x \in f^{-1}(U), v \in E, p(v) = f(x)\} \\
 &= f^*E|_{f^{-1}(U)} \text{ weil } p(E|_U) \supseteq f(f^{-1}(U)),
 \end{aligned}$$

und weil das Pull-back eines trivial Bündels trivial ist, also für trivialisierende Umgebungen U folgendes gilt:

$$f^*E|_{f^{-1}(U)} \cong (f|_{f^{-1}(U)})^*(U \times \mathbb{R}^n) = f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^n$$

Das Zurückziehen von VB-Isomorphismen liefert VB-Isomorphismen. Da $E|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$ ist, folgt, daß $(f^*E)|_{f^{-1}(U)} \cong f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^k$ ist. Die VB-Operationen

ergeben sich aus der universellen Eigenschaft, ebenso auch die Faserlinearität von f^+ und p^*f . \square

26.6 Lemma (Einschränkung als Pull-back).

Ist $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel und A eine reguläre Teilmannigfaltigkeit von M , dann gilt $E|_A \cong \text{incl}^* E$.

Beweis. Klarerweise hat $p|_{p^{-1}(A)} : E|_A = p^{-1}(A) \rightarrow A$ die universelle Eigenschaft von Lemma 26.5, da $p^{-1}(A)$ reguläre Teilmannigfaltigkeit von E ist (p ist Submersion). Somit ist $E|_A$ zu $\text{incl}^*(E)$ isomorph. \square

26.7 Lemma (Exakte Vektorbündelsequenzen splitten).

Sei $E^0 \xrightarrow{i} E^1 \xrightarrow{p} E^2$ eine kurze exakte Sequenz von VB über einer parakompakten Mannigfaltigkeit M . (d.h. i und p sind VB-Homomorphismen über id_M , i faserweise injektiv, p faserweise surjektiv und faserweise gelte: $\text{Bild}(i_x) = \text{Ker}(p_x)$). Dann gilt: $E^1 \cong E^0 \oplus E^2$.

Beweis. Nach 26.2 induziert $i : E^0 \rightarrow E^1$ einen Isomorphismus auf ein Teilvektorbündel von E^1 und somit können wir o.B.d.A. annehmen, daß i die Inklusion eines Teilbündels ist.

Wir konstruieren nun einen rechtsinversen Vektorbündelhomomorphismus $j : E^2 \rightarrow E^1$ zu $p : E^1 \rightarrow E^2$. Lokal ist $E^1|_U \cong U \times \mathbb{R}^m$ und $E^2|_U \cong U \times \mathbb{R}^k$ für geeignete $m, k \in \mathbb{N}$. Unter dem ersten Isomorphismus entspricht E^0 den Teilbündel $U \times \mathbb{R}^n \times \{0\}$ für ein $n \leq m$. Damit induziert die lokale Darstellung von p einen Isomorphismus $U \times \{0\} \times \mathbb{R}^{m-n} \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ und dessen Inverse ist ein lokales Rechtsinverses zu p . Mittels einer Partition der 1, welche der Überdeckung mit diesen trivialisierenden Umgebungen U untergeordnet ist können wir diese lokalen Rechtsinverse verkleben und erhalten klarerweise ein Rechtsinverses $j : E^2 \rightarrow E^1$ zu p . Der Isomorphismus $E^0 \times_M E^2 \cong E^1$ ist dann durch $(z^0, z^2) \mapsto i(z^0) + j(z^2)$ gegeben und hat als Inverses $z \mapsto (i^{-1}(z - j(p(z))), p(z))$, denn $z - j(p(z)) \in \text{Ker}(p) = \text{Bild}(i)$. \square

Wir wollen nun das Tangentialbündel $\pi_E : TE \rightarrow E$ (des Totalraums eines) Vektorbündels $p : E \rightarrow M$ genauer bestimmen. Das Interesse daran ist insbesondere in Hinblick auf $T^2M = T(TM)$ gegeben. Lokal ist E durch $M \times \mathbb{R}^k$ und damit TE durch $T(M \times \mathbb{R}^k) = TM \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ gegeben. Andererseits ist das Pull-back-Bündel $p^*(TM) = E \times_M TM$ lokal durch $TM \times \mathbb{R}^k$ und $p^*(E) = E \times_M E$ lokal durch $M \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ gegeben. Somit ist TE lokal isomorph zu $p^*(TM) \times_E p^*(E)$. Um diese lokalen Isomorphismen zu globalen zu machen werden wir eine natürliche kurze exakte Sequenz $p^*(E) \rightarrow TE \rightarrow p^*(TM)$ von Vektorbündeln über E konstruieren und darauf dann 26.7 anwenden.

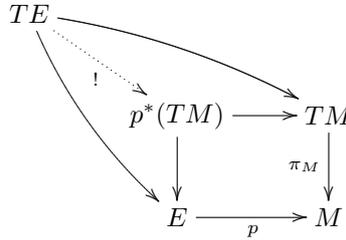
26.8 Lemma (Tangentialbündel eines Vektorbündels).

Sei $p : E \rightarrow M$ ein VB. Dann existiert eine kurze exakte Sequenz von VB über E :

$$E \times_M E = p^*(E) \xrightarrow{i} TE \xrightarrow{Tp^+} p^*(TM) = E \times_M TM.$$

Nach 26.7 ist somit $TE \cong (E \times_M E) \times_E (E \times_M TM) = E \times_M E \times_M TM$, allerdings ist kein natürlicher Isomorphismus vorhanden.

Beweis. Am einfachsten ist es einen Vektorbündelhomomorphismus $Tp^+ : TE \rightarrow p^*(TM)$ in das Pull-back durch folgendes Diagramm anzugeben:



Lokal ist TE durch $TM \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ und $p^*(TM)$ durch $TM \times \mathbb{R}^k$ sowie $Tp : TE \rightarrow TM$ durch $(\xi, v, w) \mapsto \xi$ gegeben. Somit ist Tp^+ lokal durch $(\xi, v, w) \mapsto (\xi, v)$ beschrieben. Insbesondere ist Tp^+ faserweise surjektiv. Der faserweise Kern von Tp^+ sind jene Vektoren, die durch Tp auf 0-Vektoren abgebildet werden, sollten also die Tangentialvektoren an Kurven in den Faser von E sein.

Deshalb definieren wir einen VB-Homomorphismus $i : p^*(E) = E \times_M E \rightarrow TE$ durch $p^*(E) = E \times_M E \ni (v, w) \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0} v + tw \in TE$. Bezüglich der lokalen Beschreibungen $M \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ von $p^*(E)$ und $TM \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ von TE ist er durch $(x, v, w) \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0}(x, v + tw) = (0_x, v, w)$ gegeben. Faserweise ist er somit injektiv und es gilt

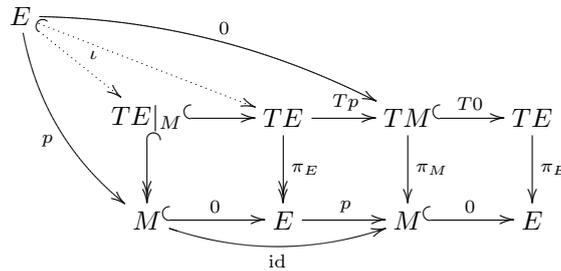
$$\begin{aligned}
 \text{Bild}(i_{(x,v)}) &= \{(0_x, v; w) : w \in \mathbb{R}^k\} \\
 &= \{(\xi_x, v, w) : (\xi_x, v) = 0_{(x,v)} = (0_x, v)\} = \text{Ker}((Tp^+)_{(x,v)}),
 \end{aligned}$$

also ist die Sequenz exakt. □

26.9 Proposition.

Es sei $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Dann ist $TE|_M := 0^*(TE) \cong E \oplus TM$ (kanonisch) als Vektorbündel über M , wobei $0 : M \hookrightarrow E$ den Nullschnitt bezeichnet.

Beweis. Wir betrachten folgendes Diagramm:



Die obere punktierte Abbildung ist durch $v \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0} t \cdot v$ gegeben und die diagonale Abbildung existiert wegen der Eigenschaft des Pullbacks. Nach Konstruktion ist $Tp \circ \iota = 0$. Offensichtlich ist ι ein Vektorbündelmonomorphismus und $Tp|_{TE|_M}$ ein Vektorbündelepimorphismus, denn $Tp \circ T0 = T(p \circ 0) = T \text{id}_M = \text{id}_{TM}$ und somit ist $T0 : TM \rightarrow TE|_M \hookrightarrow TE$ ein kanonisches Rechtsinverses. Exaktheit von

$$0 \rightarrow E \rightarrow TE|_M \rightarrow TM \rightarrow 0$$

folgt, denn lokal wird E durch $M \times \mathbb{R}^k$, weiters TE durch $TM \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$ und $TE|_M$ durch $TM \times \{0\} \times \mathbb{R}^k$ beschrieben. Weiters ist ι lokal durch $(x, v) \mapsto \frac{d}{dt}|_{t=0}(x, tv) =$

$(0_x, 0, v)$ und Tp auf $TE|_M$ durch $(\xi, 0, v) \mapsto \xi$ gegeben.

$$\begin{array}{ccccc}
 E \hookrightarrow & \xrightarrow{\iota} & TE|_M & \xrightarrow{Tp} & TM \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 M \times \mathbb{R}^k & & TM \times \{0\} \times \mathbb{R}^k & & TM
 \end{array} \quad \square$$

26.10 Proposition.

Jedes Vektorbündel $p : E \rightarrow M$ ist isomorph zu einem Teilvektorbündels eines trivialen Bündels $M \times \mathbb{R}^s \rightarrow M$.

Beweis.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & M \times \mathbb{R}^s & & \\
 & & & & \nearrow & & \\
 E \hookrightarrow & E \oplus TM & \xrightarrow{\cong} & TE|_M \hookrightarrow & TE & \xrightarrow{Tf} & \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s \\
 \downarrow p & \searrow & \downarrow & \downarrow \cong & \downarrow \pi_E & & \downarrow \text{pr}_1 \\
 M & \xrightarrow{\cong} & M & \xrightarrow{0} & E & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^s
 \end{array}$$

Es sei $f : E \rightarrow \mathbb{R}^s$ eine Einbettung (oder auch nur eine Immersion) der Mannigfaltigkeit E in einen \mathbb{R}^s . Dann ist $Tf : TE \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ ein Vektorbündelmonomorphismus über $f : E \rightarrow \mathbb{R}^s$ und somit $Tf \circ \iota : E \hookrightarrow TE|_M \hookrightarrow TE \rightarrow \mathbb{R}^s \times \mathbb{R}^s$ ein Vektorbündelmonomorphismus über $M \rightarrow E \rightarrow \mathbb{R}^s$, also $(p, \text{pr}_2 \circ Tf \circ \iota) : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$ ein Vektorbündelmonomorphismus über id_M . \square

Man kann zeigen (siehe [?, 26.22]), daß so ein Vektorbündelmonomorphismus bereits für $s = \dim(E)$ existiert.

26.21 Definition.

Es sei $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit Faserdimension k (ein sogenanntes k -Ebenenbündel über M) und $f : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$ ein Vektorbündel-Monomorphismus über id_M . Daraus erhalten wir eine Abbildung $g : M \rightarrow G(k, s)$ mit Werten in der Graßmannmannigfaltigkeit der k -Ebenen im \mathbb{R}^s indem wir x auf das Bild von $f_x : \mathbb{R}^k \cong E_x \rightarrow \mathbb{R}^s$ abbilden. Nun betrachten wir das universelle Vektorbündel $E(k, s) \rightarrow G(k, s)$, wobei $E(k, s) := \{(\varepsilon, v) \in G(k, s) \times \mathbb{R}^s : v \in \varepsilon\}$ und den Vektorbündelhomomorphismus $\gamma : E \rightarrow E(k, s), v \mapsto (g(p(v)), v)$. Damit ist $E \cong g^*(E(k, s))$ und g heißt klassifizierende Abbildung des Vektorbündels $p : E \rightarrow M$.

30. Integralmannigfaltigkeiten

Wir rufen uns die Begriffe Vektorfeld (siehe [60, 27.1]), lokale Fluß eines Vektorfelds (siehe [60, 28.3]), Lieklammer (siehe [60, 29.1], [60, 29.2] und [60, 29.11]) sowie Verwandtschaft von Vektorfeldern (siehe [60, 29.3], [60, 29.5] und [60, 29.7]) in Erinnerung.

30.1 Bemerkung

Wir haben in [60, 28.6] gesehen, daß Integralkurven von Vektorfeldern nicht immer global definiert sind. Anschaulich gesprochen sind sie nicht für alle $t \in \mathbb{R}$ definiert, weil sie bereits in endlicher Zeit nach “unendlich” entweichen. Es sind also die

Lösungskurven “zu schnell”, d.h. die Geschwindigkeitsvektoren zu groß. Wir können aber den Fluß global machen, indem wir seine Geschwindigkeit verkleinern.

Abstrakter:

i) An Stelle von Vektorfeldern betrachten wir eindimensionale Teilräume $E_p \subseteq T_p M \forall p \in M$, also Teilvektorbündel.

ii) An Stelle von Lösungskurven betrachten wir Integralmannigfaltigkeiten, das sind 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeiten N von M , für die $T_p N = E_p$ gilt. Wir können diese Begriffe auch im mehrdimensionalen Fall formulieren:

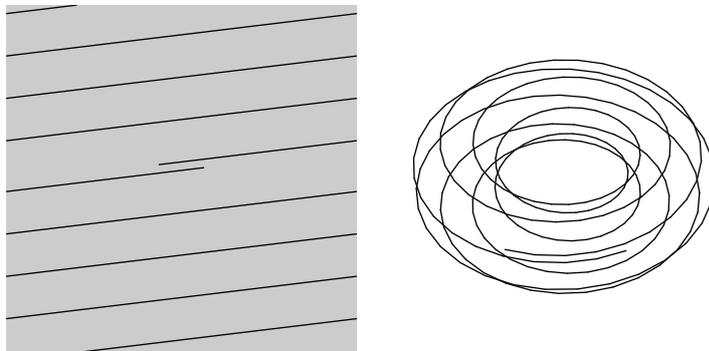
30.2 Definition (Integralmannigfaltigkeit)

Es sei E ein Teilvektorbündel von $\pi: TM \rightarrow M$ (in der (älteren) Literatur auch als DISTRIBUTION bezeichnet). Dann versteht man unter einer INTEGRALMANNIGFALTIGKEIT N zu E eine zusammenhängende Mannigfaltigkeitsstruktur auf einer Teilmenge $N \subseteq M$, sodaß $\text{incl}: N \rightarrow M$ eine Immersion ist und $T \text{incl}: T_p N \rightarrow E_p$ für alle $p \in N$ eine Bijektion ist.

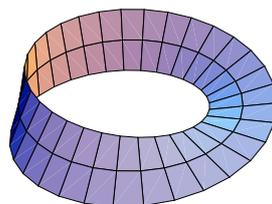
30.3 Beispiele

- 1) Für eindimensionale Teilvektorbündel, die ja lokal von einem Vektorfeld aufgespannt werden, existieren immer Integralkurven zu diesem Vektorfeld, und damit auch Integralmannigfaltigkeiten des Bündels.

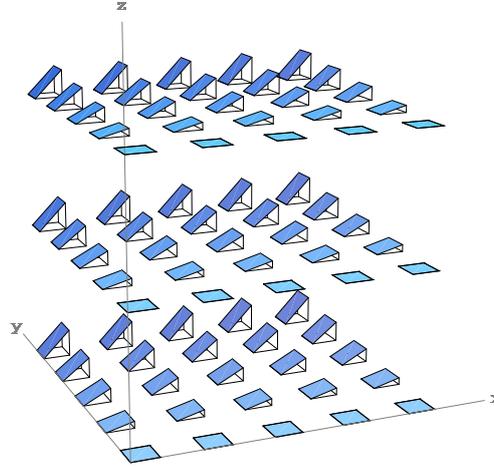
Z.B.: Hat ein “konstantes” Vektorfeld am Torus irrationalen Anstieg, dann liegt jede ihrer Integralmannigfaltigkeiten dicht.



- 2) Man bemerke allerdings, daß das Teilvektorbündel E im allgemeinen nicht global durch ein VF aufgespannt wird. Ein Beispiel ist das Möbiusband, wo E alle Vektoren sind, die von Kurven in der Faser herrühren.



- 3) Im mehrdimensionalen Fall gilt im allgemeinen nicht, daß jedes Teilvektorbündel eine Integralmannigfaltigkeit erzeugt. Betrachte das folgende Beispiel: $M = \mathbb{R}^3$ mit $E_{xyz} = \langle \{ \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y} \} \rangle \subseteq T_{(x,y,z)} \mathbb{R}^3$.



Sei N eine Integralmannigfaltigkeit durch $(0, 0, 0)$. Wir betrachten vorerst den Schnitt $N \cap \{(0, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\}$. Wegen $T_0 N = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ ist dieser Schnitt lokal eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit mit Tangentialraum $\langle (0, 1, 0) \rangle$ in jedem Punkt, also Teil der y -Achse. Für ein fixes y_0 betrachten wir nun den Schnitt $N \cap \{(x, y_0, z) : x, z \in \mathbb{R}\}$. Wie zuvor ist dieser Schnitt lokal eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit nun mit Tangentialraum $\langle (1, 0, y_0) \rangle$ in jedem Punkt, also Teil der Geraden $(0, y_0, 0) + \mathbb{R} \cdot (1, 0, y_0) = \{(x, y_0, xy_0) : x \in \mathbb{R}\}$. Somit ist N lokal durch $\{(x, y, xy) : x, y \in \mathbb{R}\}$ gegeben. Betrachtet man aber den Tangentialraum in $(1, 0, 0)$, so enthält dieser Vektoren, deren 2. und 3. Komponente $\neq 0$ ist: $T_{(x,y,xy)} N = \langle (1, 0, y), (0, 1, x) \rangle$. Dies stimmt aber mit $E_{(x,y,z)}$ nur dort überein, wo $x = 0$. Eine Integralmannigfaltigkeit durch 0 existiert also nicht.

30.4 Bemerkung

Angenommen E ist ein Teilbündel von TM , das durch jeden Punkt eine Integralmannigfaltigkeit besitzt. Sei $p \in M$ und N die Integralmannigfaltigkeit durch p und seien ξ, η Vektorfelder auf M mit $\xi_x, \eta_x \in E_x$ für alle x . Wegen Lemma [60, 29.5] existieren Vektorfelder ξ_1, η_1 auf N , sodaß ξ_1, η_1 bezüglich incl verwandt sind mit ξ, η . Dann ist $[\xi_1, \eta_1]$ ein Vektorfeld auf N und $[\xi_1, \eta_1]$ ist incl -verwandt mit $[\xi, \eta]$. Wir erhalten $[\xi, \eta]_p = T \text{incl} [\xi_1, \eta_1]_p \in E_p$.

30.5 Definition (Integrable Teilbündel)

Ein Teilvektorbündel E von TM heißt INTEGRABEL $:\Leftrightarrow$ für je zwei glatte Vektorfelder ξ, η auf M mit $\xi_p, \eta_p \in E_p \forall p$ folgt: $[\xi, \eta]_p \in E_p \forall p$.

Übung: Man zeige, daß das Teilbündel von [30.3.3] nicht integrabel ist. Hinweis betrachte die beiden erzeugenden Vektorfelder.

30.6 Lokales Integrabilitätstheorem von Frobenius.

Es sei E ein Teilvektorbündel von $\pi: TM \rightarrow M$. Dann ist E genau dann integrabel, wenn zu jedem p eine Integralmannigfaltigkeit durch p existiert (genauer: es existiert eine Karte φ mit $\varphi(0) = p$, sodaß $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ eine Integralmannigfaltigkeit für jedes a ist).

Die Bilder $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ heißen auf englisch PLAQUES, also frei übersetzt Blättchen.

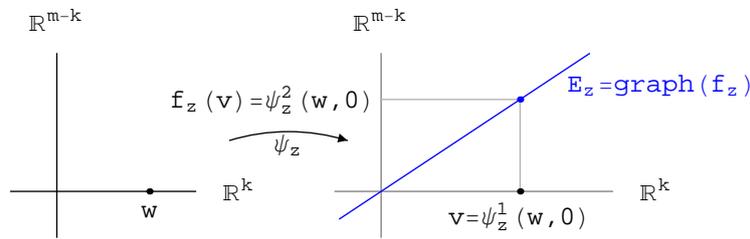
Beweis. (\Leftarrow) Das haben wir bereits in [30.4](#) gezeigt.

(\Rightarrow) O.B.d.A. sei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $\psi : M \times \mathbb{R}^m \rightarrow M \times \mathbb{R}^m$ sei eine VB-Karte, die E trivialisiert, d.h. $\psi_z := \psi(z, \cdot) : \mathbb{R}^k \times \{0\} \rightarrow E_z$ ist ein Isomorphismus für jedes z . Sei o.B.d.A. $E_0 = \mathbb{R}^k \subseteq \mathbb{R}^m$ und $\psi_0 = \text{id}$, also $\text{pr}_k \circ \psi_0 \circ \text{incl}_k = \text{id} \in GL(k)$. Damit ist auch $\text{pr}_k \circ \psi_z \circ \text{incl}_k \in GL(k)$ für alle z nahe 0.

Wir wollen nun jeden der Teilräume E_z als Graph einer linearen Abbildung $f_z : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^{m-k}$ darstellen. Wegen $\text{Graph}(f_z) := \{(v, f(z)v) : v \in \mathbb{R}^k\}$ und $E_z = \{(\psi_z^1(w, 0), \psi_z^2(w, 0)) : w \in \mathbb{R}^k\}$ muß $f_z(v) = \psi_z^2(w, 0)$ mit $\psi_z^1(w, 0) = v$ für ein (eindeutig bestimmtes) $v \in \mathbb{R}^k$ sein, also f_z gegeben sein durch:

$$f : M \rightarrow L(k, m - k) \text{ mit}$$

$$f : z \mapsto \psi_z^2 \circ (\psi_z^1|_{\mathbb{R}^k})^{-1} = \text{pr}_{m-k} \circ \psi_z \circ (\text{pr}_k \circ \psi_z \circ \text{incl}_k)^{-1}$$



Was sagt nun in diesem Zusammenhang die Integrität aus?

Es gilt für $\xi \in \mathfrak{X}(M)$: $\xi_p \in E_p \Leftrightarrow \xi_p \in \text{Graph } f(p) \Leftrightarrow \xi_p = (\xi_1|_p, \xi_2|_p)$, mit $f(p)(\xi_1|_p) = (\xi_2|_p)$. Seien $\xi, \eta : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m-k} \times \mathbb{R}^k$ mit $\xi_p, \eta_p \in E_p$. Nach Voraussetzung ist $[\xi, \eta]_p \in E_p$ also

$$[\xi, \eta](p) = ([\xi, \eta]_1(p), f(p)([\xi, \eta]_1(p))) \text{ und andererseits}$$

$$[\xi, \eta](p) = \eta'(p)(\xi(p)) - \xi'(p)(\eta(p))$$

$$= \left(\eta'_1(p)(\xi(p)) - \xi'_1(p)(\eta(p)), \eta'_2(p)(\xi(p)) - \xi'_2(p)(\eta(p)) \right)$$

$$= \left(\eta'_1(p)(\xi(p)) - \xi'_1(p)(\eta(p)), f'(p)(\xi(p))(\eta_1(p)) + f(p)\left(\eta'_1(p)(\xi(p))\right) - f'(p)(\eta(p))(\xi_1(p)) - f(p)\left(\xi'_1(p)(\eta(p))\right) \right)$$

$$= \left([\xi, \eta]_1(p), f(p)([\xi, \eta]_1(p)) + f'(p)(\xi(p))(\eta_1(p)) - f'(p)(\eta(p))(\xi_1(p)) \right)$$

Daraus folgt für $v_1 := \xi_1(p)$ und $v_2 := \eta_1(p)$ mit $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^k$:

$$f'(p)(v_1, f(p)v_1)v_2 = f'(p)(v_2, f(p)v_2)v_1.$$

Wir wollen ein $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ finden, sodaß $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ (für alle a) eine Integralmannigfaltigkeit ist. D.h. $(\partial_1 \varphi)(z) : \mathbb{R}^k \rightarrow E_{\varphi(z)}$ soll ein Isomorphismus sein. O.B.d.A. (wie sich zeigen wird) schränken wir das Aussehen von φ durch folgende Bedingung noch weiter ein:

$$\varphi(0, y) = (0, y), \quad (\partial_1 \varphi)(z) \cdot v = (v, f(\varphi(z))v).$$

Ist $\varphi(x, y) =: (\varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y)) =: (\varphi_1(x, y), g_y(x))$, so gilt:

$$(\partial_1 \varphi_1(z) \cdot v, \partial_1 \varphi_2(z) \cdot v) = \partial_1 \varphi(z) \cdot v = (v, f(\varphi(z)) \cdot v)$$

$$\Rightarrow \varphi_1(x, y) = x, \text{ also } \varphi(x, y) = (x, g_y(x)),$$

wobei $g_y(0) = y$ und $g'_y(x) = f(x, g_y(x))$ gelten muß.

Es folgt nun alles aus dem folgenden Satz [30.7](#). □

30.7 Satz von Frobenius für totale Differentialgleichungen.

Es sei $f : \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n \rightarrow L(k, n)$ eine lokale C^∞ -Abbildung. Dann gilt: Es existiert zu $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^m$ genau dann eine lokale C^∞ -Abbildung $g_{x_0, y_0} : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $g'_{x_0, y_0}(x)v = f(x, g_{x_0, y_0}(x))v$ und $g_{x_0, y_0}(x_0) = y_0$ wenn $f'(z)(v_1, f(z)v_1)v_2$ symmetrisch in v_1, v_2 ist.

Weiters ist die Abbildung $(x_0, y_0, x) \mapsto g_{x_0, y_0}(x)$ C^∞ .

Bemerkung

Sei $\{e_1, \dots, e_m\}$ eine Basis für \mathbb{R}^m , $f_i(z) := f(z)e_i$. Dann ist $f(z)v = \sum_{i=1}^k f_i(z)v^i$ und $\partial_i g(x) = f_i(x, g(x))$ mit $1 \leq i \leq k$ ist ein System von partiellen Differentialgleichungen. Wir werden den Beweis von [30.7](#) in basisfreier Darstellung führen. (Einen Beweis in Koordinatenschreibweise findet man z.B. in [\[86, Vol.I, S.254\]](#).)

Beweis von [30.7](#). Siehe [\[56, 6.5.1\]](#)

(\Rightarrow) Für $z_0 = (x_0, y_0) \in E \times F$ sei g eine lokale Lösung obiger Differentialgleichung mit Anfangsbedingung $g(x_0) = y_0$. Dann ist $g' = f \circ (\text{id}, g)$ und nach der Kettenregel ist

$$\begin{aligned} g''(x_0)(v_1, v_2) &= (g')'(x_0)(v_1)(v_2) = \text{ev}_{v_2} \left((g')'(x_0)(v_1) \right) = \text{ev}_{v_2} \left((f \circ (\text{id}, g))'(x_0)(v_1) \right) \\ &= \text{ev}_{v_2} \left(f'(x_0, g(x_0)) \left(v_1, g'(x_0)(v_1) \right) \right) = f'(z_0) \left(v_1, f(z_0)(v_1) \right) (v_2) \end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist also symmetrisch in v_1 und v_2 , weil $g''(x_0)$ es nach dem Satz von Schwarz ist.

(\Leftarrow) Es sei $(x_0, y_0) \in E \times F$ fix. Wir versuchen die totale Differentialgleichung auf eine gewöhnliche zurückzuführen indem wir zuerst nur untersuchen was bei x_0 in Richtung $v \in E$ passiert.

Dazu nehmen wir vorerst an, daß eine lokale Lösung g der totalen Differentialgleichung mit Anfangswert $g(x_0) = y_0$ existiert und setzen $\bar{g}(t, v) := g(x_0 + tv)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, v) &= g'(x_0 + tv) \cdot v = f(x_0 + tv, g(x_0 + tv)) \cdot v = f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v)) \cdot v, \\ \bar{g}(0, v) &= g(x_0) = y_0. \end{aligned}$$

Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung für \bar{g} welche somit lokal (d.h. für $|t| \leq \varepsilon$, $\|v\| \leq \varepsilon$ mit einem gewissen $\varepsilon > 0$) eine eindeutig bestimmte Lösung \bar{g} besitzt, welche von (t, v, x_0, y_0) C^∞ abhängt. Daraus sollten wir eine Lösung g der totalen Differentialgleichung vermöge $g(x) := \bar{g}(t, v)$ erhalten, wenn wir $tv := x - x_0$ setzen. Naheliegender wäre $t = 1$ zu wählen, aber solange existiert womöglich die Lösung \bar{g} nicht, darum wählen wir $t := \varepsilon$ und somit $v := \frac{x - x_0}{\varepsilon}$, also setzen wir $g(x) := \bar{g}(\varepsilon, \frac{x - x_0}{\varepsilon})$ für $\|x - x_0\| \leq \varepsilon^2$ und müssen nun $g'(x)(w)$ und dazu insbesondere $\partial_2 \bar{g}$ berechnen. Die Idee dabei ist, daß

$$\begin{aligned} \partial_2 \bar{g}(t, v)(w) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \bar{g}(t, v + sw) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} g(x_0 + t(v + sw)) \\ &= g'(x_0 + tv)(tw) = f(x_0 + tv, g(x_0 + tv))(tw) \\ &= f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v))(tw) \end{aligned}$$

gelten sollte. Also definieren wir $k : \mathbb{R} \rightarrow F$ durch

$$k(t) := \partial_2 \bar{g}(t, v)(w) - f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v))(tw).$$

Dann ist $k(0) = \partial_2 \bar{g}(0, v)(w) - f(x_0 + 0v, \bar{g}(0, v))(0w) = 0$ und somit ergibt sich – wobei wir der Übersichtlichkeit halber nach Anwendung der Kettenregel das Argument (t, v) bei \bar{g} und bei deren Ableitungen sowie das Argument $(x_0 + tv, \bar{g}(t, v))$ bei f und bei seinen Ableitungen weglassen –

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}k(t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\partial_2 \bar{g}(t, v)(w) - f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v))(tw) \right) \\ &= \partial_2 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \bar{g}(t, v)(w)}_{f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v)) \cdot v} - \left(\partial_1 f \cdot v \cdot tw + \partial_2 f \cdot \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \bar{g}}_{f \cdot v} \cdot tw + f \cdot w \right) \\ &= \left(\partial_1 f \cdot tw \cdot v + \partial_2 f \cdot (\partial_2 \bar{g} \cdot w) \cdot v + f \cdot w \right) - \left(f' \cdot (v, f \cdot v) \cdot tw + f \cdot w \right) \\ &\stackrel{\text{Int. Bed.}}{=} \partial_1 f \cdot tw \cdot v + \partial_2 f \cdot (\partial_2 \bar{g} \cdot w) \cdot v - f' \cdot (tw, f \cdot tw) \cdot v \\ &= \partial_2 f \cdot (\partial_2 \bar{g} \cdot w - f \cdot tw) \cdot v = \partial_2 f \cdot k(t) \cdot v. \end{aligned}$$

Da letzteres eine lineare Differentialgleichung (mit nicht konstanten Koeffizienten) und $k(0) = 0$ ist, folgt $k = 0$. Folglich ist für $t := \varepsilon$ und $v := \frac{x-x_0}{\varepsilon}$

$$\begin{aligned} g'(x)(w) &= \partial_2 \bar{g}(\varepsilon, \frac{x-x_0}{\varepsilon})(\frac{1}{\varepsilon}w) = \partial_2 \bar{g}(t, v)(\frac{1}{\varepsilon}w) = f(x_0 + tv, \bar{g}(t, v)) \left(t \frac{1}{\varepsilon}w \right) \\ &= f \left(x, \bar{g}(\varepsilon, \frac{x-x_0}{\varepsilon}) \right) (w) = f(x, g(x))(w). \quad \square \end{aligned}$$

30.8 Spezialfälle

Insbesondere erhalten wir (falls $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow L(m, n)$ nur von einem Faktor abhängt):

1. Für $f : \mathbb{R}^m \rightarrow L(m, n)$ gilt: $f'(x) \cdot v_1 \cdot v_2 = f'(x) \cdot v_2 \cdot v_1 \Leftrightarrow$ es existiert lokal ein $g : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $g(0) = 0$ und $g'(x)v = f(x)v$, d.h. $g' = f$.
2. Für $f : \mathbb{R}^n \rightarrow L(m, n)$ gilt: $f'(y)(f(y)v_1)v_2 = f'(y)(f(y)v_2)v_1 \Leftrightarrow$ es existiert lokal ein $g : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $g_y(0) = y$ und $g'_y(x) = f(g_y(x))$.

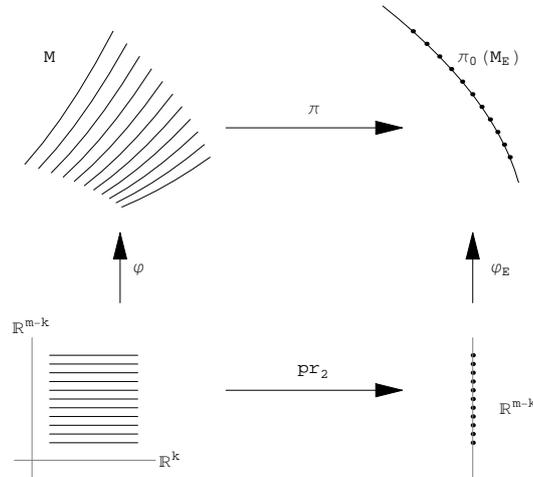
30.11 Integritätstheorem von Frobenius, globale Version.

Es sei E ein integribles Teilbündel von TM , dann gilt

1. Es existiert eine Mannigfaltigkeitsstruktur M_E auf M , sodaß die Inklusion $\text{incl} : M_E \rightarrow M$ eine Immersion ist und $T \text{incl}(TM_E) = E$ gilt, d.h. $T \text{incl} : TM_E \rightarrow E \subseteq TM$ ist bijektiv
2. Sei $f : N \rightarrow M$ glatt und $Tf(TN) \subseteq E$. Dann ist $f : N \rightarrow M_E$ glatt, d.h. M_E ist feiner als M .
3. Jede Zusammenhangskomponente von M_E (diese heißen MAXIMALE INTEGRALMANNIGFALTIGKEITEN) ist eine initiale Teilmannigfaltigkeit von M und ist parakompakt falls M es ist.
4. Ist N eine zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit, dann ist N eine offene Teilmannigfaltigkeit einer Zusammenhangskomponente von M_E .

In dieser Situation spricht man von der BLÄTTERUNG (engl.: FOLIATION) M_E von E . Die maximalen Integralmannigfaltigkeiten heißen BLÄTTER (engl.: leaves) der Blätterung (Achtung: Dies ist etwas anderes als die Blätter einer Überlagerung).

Beweis. Nach Voraussetzung existieren trivialisierende Karten φ , sodaß $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ eine Integralmannigfaltigkeit für jedes a ist.



Sei $f : N \rightarrow M$ glatt, $\text{Bild}(Tf) \subseteq E$, $f(p) = q$ und φ eine E trivialisierende Karte um q wie in [30.6](#). Dann liegt f lokal in einer ‘‘Schicht’’ $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$, denn für $\bar{f} := \varphi^{-1} \circ f$ ist

$$\left. \begin{aligned} \text{Bild}(T_p \bar{f}) &\subseteq \mathbb{R}^k \times \{0\} \\ \exists a : \bar{f}(p) &\in \mathbb{R}^k \times \{a\} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{Bild } \bar{f} \subseteq \mathbb{R}^k \times \{a\}.$$

(1) Auf der Menge M ist $\left\{ \varphi|_{(\mathbb{R}^k \times \{a\})}, \varphi \text{ trivialisiert } E \text{ wie in } \text{30.6}, a \in \mathbb{R}^{m-k} \right\}$ ein Atlas. Dazu ist zu zeigen, daß der Kartenwechsel auf offenen Mengen definiert ist:

Betrachte $\varphi_1, \varphi_2; a_1, a_2$ und $p \in \varphi_1(\mathbb{R}^k \times \{a_1\}) \cap \varphi_2(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})$. Da $\varphi_1|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})} : \mathbb{R}^k \times \{a_1\} \rightarrow M$ eine Integralmannigfaltigkeit ist, liegt nach dem eben gezeigten $\text{Bild}(\varphi_1|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})})$ lokal in $\varphi_2(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})$. Es ist also

$$\left(\varphi_2|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_2\})} \right)^{-1} \circ \left(\varphi_1|_{(\mathbb{R}^k \times \{a_1\})} \right)$$

lokal wohldefiniert und als Einschränkung glatt.

Wir bezeichnen die so erhaltene Mannigfaltigkeit mit M_E . Die Inklusion $M_E \hookrightarrow M$ ist eine Immersion, denn $TM_E = E$ da $T(\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})) = E|_{\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})}$ ist.

(2) Sei $f : N \rightarrow M$ glatt und $\text{Bild}(Tf) \subseteq E$. Dann liegt f lokal in einer Schicht $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ und somit ist $(\varphi|_{(\mathbb{R}^k \times \{a\})})^{-1} \circ f$ lokal wohldefiniert und glatt, also $f : N \rightarrow M_E$ glatt.

(3) Mit M ist auch M_E ist parakompakt: o.B.d.A. sei M zusammenhängend, C sei eine Zusammenhangskomponente von M_E . Dazu genügt es z.z., daß C durch abzählbar viele Kartenumgebungen $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ überdeckt wird.

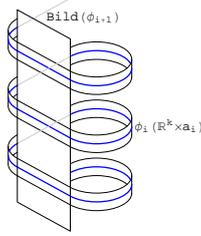
Seien \mathcal{A} eine Menge abzählbar vieler E trivialisierende Karten, die M überdecken; $p_0 \in C$ fix und $p \in C$ beliebig: Es existiert also eine Kurve c in C , die p_0 und p verbindet. Somit existieren endlich viele Karten $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in \mathcal{A}$ und a_1, \dots, a_n , sodaß:

$$\begin{aligned} p_0 &\in \varphi_1(\mathbb{R}^k \times \{a_1\}), \quad p \in \varphi_n(\mathbb{R}^k \times \{a_n\}) \text{ und} \\ \varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Zu vorgegebenen $\varphi_i, \varphi_{i+1}, a_i$ gibt es höchstens abzählbar viele a_{i+1} , sodaß

$$\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset,$$

denn andernfalls gäbe es eine Überdeckung von $\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \text{Bild } \varphi_{i+1}$ durch überabzählbar viele disjunkte (in der von $(\varphi_i|_{\mathbb{R}^k \times \{a_i\}})^{-1}(\text{Bild } \varphi_{i+1}) \subseteq \mathbb{R}^k$ induzierten Topologie) offene Mengen $\varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a\})$, welches ein Widerspruch zur Lindelöf-Eigenschaft wäre.



Also gibt es nur abzählbar viele endliche Folgen $(\varphi_i, a_i)_i$, die der Bedingung $\varphi_i(\mathbb{R}^k \times \{a_i\}) \cap \varphi_{i+1}(\mathbb{R}^k \times \{a_{i+1}\}) \neq \emptyset$ genügen. Jedes $p \in C$ wird durch eine geeignete Folge erreicht. Also wird C durch abzählbar viele Mengen der Form $\varphi(\mathbb{R}^k \times \{a\})$ überdeckt.

Die Zusammenhangskomponente C ist eine initiale Teilmannigfaltigkeit: Sei $f : N \rightarrow C \subseteq M$ glatt. Lokal liegt f in Bild φ , außerdem liegt f in C . Da C (als abzählbare Vereinigung von Schichten) aber (nach dem eben gezeigten) höchstens abzählbar viele Schichten von φ trifft, liegt f lokal in einer Schicht (verschiedene Schichten hängen nicht zusammen). Somit ist $f : N \rightarrow M_E$ stetig und damit auch glatt.

(4) Sei $N \rightarrow M$ zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit, dann ist $\text{incl} : N \rightarrow M_E$ glatt nach (2). Weiters ist $\text{incl} : N \rightarrow M_E$ injektiv und immersiv (da $\text{incl} : N \rightarrow M$ es ist) und submersiv (da $T \text{incl} : T_p N \rightarrow E_p$ bijektiv ist), also ein lokaler Diffeomorphismus. Somit ist $\text{incl}(N) \subseteq M_E$ offen und $N \cong \text{incl}(N)$. \square

30.12 Proposition (Urbilder von Punkten).

Es sei $f : M \rightarrow N$ glatt und $x \mapsto T_x f$ habe konstanten Rang r . Dann ist $\text{Ker}(Tf) := \bigsqcup_{x \in M} \text{Ker}(T_x f)$ ein integrables Teilvektorbündel von TM und die Zusammenhangskomponenten der Niveauflächen $f^{-1}(q)$ sind die maximalen Integralmannigfaltigkeiten zu $\text{Ker}(Tf)$.

Beweis. Nach dem Rangsatz [21.2](#) existieren Karten φ und ψ , sodaß f bezüglich dieser Karten die kanonische Projektion ist. Bezüglich dieser Karten ist $\text{Ker}(T_x f) \cong \{0\} \times \mathbb{R}^{m-r}$. Die Integralmannigfaltigkeiten sind lokal durch $\{x\} \times \mathbb{R}^{m-r}$ gegeben. Da $f^{-1}(q)$ lokal $\{x\} \times \mathbb{R}^{m-r}$ ist für ein gewisses x , sind die Zusammenhangskomponenten von $f^{-1}(q)$ Integralmannigfaltigkeiten. \square

30.13 Definition (Reguläres Teilbündel)

Man nennt ein integrables Teilvektorbündel genau dann REGULÄR (bzw. die zugehörige Blätterung regulär), wenn trivialisierende Karten existieren, die jede (maximale) Integralmannigfaltigkeit höchstens einmal treffen. Diese heißen reguläre Karten. Die Blätterung des Torus mit irrationalen Anstieg ist klarerweise nicht regulär. Hingegen sind die Blätterungen aus [30.12](#) offensichtlich regulär.

Wir zeigen nun, daß die regulären Blätterungen genau jene aus 30.12 sind.

30.14 Satz (Raum der maximalen Integralmannigfaltigkeiten).

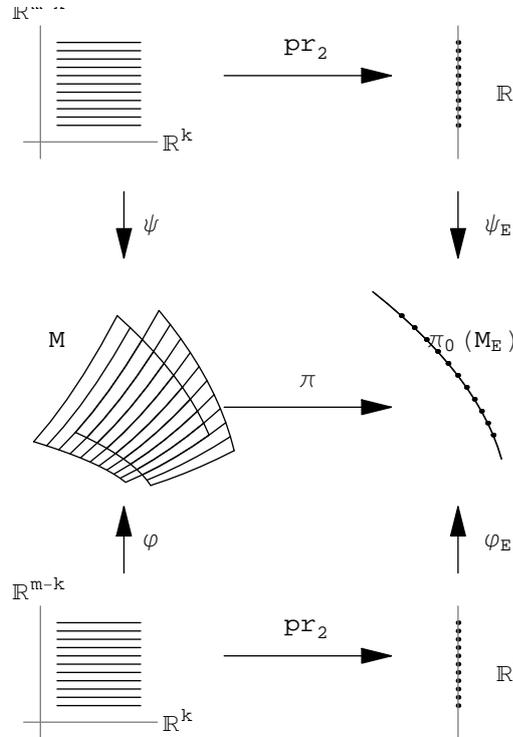
Es sei E ein reguläres integrables Teilvektorbündel. Dann existiert am Raum aller maximalen Integralmannigfaltigkeiten (also dem Raum $\pi_0(M_E)$ der Zusammenhangskomponenten von M_E) eine (nicht notwendig Hausdorff'sche) Mannigfaltigkeitsstruktur, sodaß $\pi : M \rightarrow \pi_0(M_E)$ mit $p \mapsto (\text{max. Integralmannigfaltigkeit durch } p)$ eine Submersion mit $\text{Ker}(T\pi) = E$ ist.

Beweis. Es sei $\varphi : \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow M$ eine reguläre Karte von M für E . Man definiert dann eine Karte φ_E für $\pi_0(M_E)$ wie folgt:

$$\begin{array}{ccc}
 M & \xrightarrow{\pi} & \pi_0(M_E) \\
 \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi_E \\
 \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} & \xrightarrow{\text{pr}_2} & \mathbb{R}^{n-k}
 \end{array}$$

Offensichtlich ist $\varphi_E : \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow \pi_0(M_E)$ wohldefiniert und injektiv, also φ_E bijektiv auf das Bild. Es bleibt z.z., daß der Kartenwechsel glatt ist. Seien φ und ψ reguläre Karten und C ein Punkt (d.h. eine maximale Integralmannigfaltigkeit) im Bild von φ_E und ψ_E , d.h. $C \cap \text{Bild } \varphi \neq \emptyset \neq C \cap \text{Bild } \psi$.

Wir betrachten zuerst den Spezialfall, wo $\text{Bild } \varphi \cap \text{Bild } \psi \cap C$ nicht leer ist. Sei p ein Punkt in diesem Durchschnitt.



Wegen $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E \circ \text{pr}_2 = \psi_E^{-1} \circ \pi \circ \varphi = \text{pr}_2 \circ \psi^{-1} \circ \varphi$ ist $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$ als Einschränkung eines Diffeomorphismuses lokal um $\text{pr}_2(\varphi^{-1}(p))$ ein Diffeomorphismus.

Nun zum allgemeinen Kartenwechsel $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$: Wir definieren eine Äquivalenzrelation auf der Menge der regulärer Karten φ die C treffen:

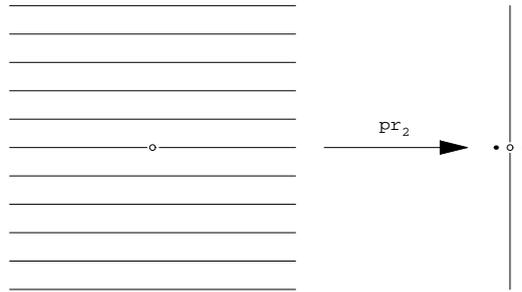
$$\varphi \sim \psi \Leftrightarrow \psi_E^{-1} \circ \varphi_E \text{ ist Diffeomorphismus offener Umgebungen von } \varphi_E^{-1}(C).$$

Seien A, B Äquivalenzklassen, dann gilt: $R(A) := \bigcup_{\varphi \in A} \text{Bild } \varphi \cap C$ ist offen in C . Falls $R(A) \cap R(B)$ nicht leer ist, so gilt $A = B$, denn wenn $\varphi \in A$ und $\psi \in B$ ist mit $p \in \text{Bild } \varphi \cap \text{Bild } \psi \cap C$, dann ist $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$ ein Diffeomorphismus lokal um $\text{pr}_2(\psi^{-1}(p)) = \varphi_E^{-1}(C)$ nach dem zuvor gezeigten, d.h. $\varphi \sim \psi$ also $A = B$. Die Vereinigung $\bigcup_A R(A)$ ist somit eine disjunkte Überdeckung von C mit offenen Mengen. Daraus und weil C zusammenhängend ist, folgt, es gibt genau eine Äquivalenzklasse A . Somit ist $\psi_E^{-1} \circ \varphi_E$ für je zwei Karten φ und ψ mit $C \in \text{Bild } \varphi_E \cap \text{Bild } \psi_E$ lokal um $\varphi_E^{-1}(C)$ glatt also $\pi_0(M_E)$ eine C^∞ -Mannigfaltigkeit.

Die Behauptung $\text{Ker}(T\pi) = E$ folgt daraus, daß die Kartendarstellung von π bzgl. der Karten φ und φ_E durch pr_2 gegeben ist und somit $\text{Ker}(T\pi)$ via $T\varphi$ faserweise durch $\mathbb{R}^k \times \{0\}$, also gleich E ist. \square

30.15 Gegenbeispiel

Nicht jede $\pi_0(M_E)$ ist Hausdorff, wie das Beispiel $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\xi_{(x,y)} := (x^2 + y^2) \frac{\partial}{\partial x}$ und $E_{(x,y)} := \mathbb{R} \cdot \xi_{(x,y)}$ zeigt.



VI. Differentialformen

In diesem Kapitel werden wir 1-Formen, wie wir sie in vorhergehenden Kapitel behandelt haben, zu Differentialformen höheren Grades (kurz: n -Formen) verallgemeinern. Nach einem der Motivation dienenden Abschnitt stellen wir die nötige multilineare Algebra zusammen, und verkleben die damit aus den Tangential- und Kotangential-Räumen konstruierten Tensorräume zu Tensorbündel. Als Schnitte der Bündel alternierender Tensoren erhalten wir die Differentialformen. Wir behandeln die wichtigsten Operationen auf ihnen: Die äußere Ableitung, die Lieableitung und den Einsetzungshomomorphismus. Insbesondere schauen wir uns das für Riemann-Mannigfaltigkeiten genauer an. Als Anwendung reißen wir die De Rham Kohomologie an.

31. Konstruktion und 1-Formen

31.1 Motivation

Für Kurvenintegrale im \mathbb{R}^m ist der Begriff der 1-Form wichtig, da dies längs Kurven integrierbare Objekte sind (siehe [60, 3.10]). Wir wollen diesen Begriff nun auf Mannigfaltigkeiten ausdehnen. Wir erinnern uns daran, daß eine 1-Form auf einer offenen Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^m$ eine Abbildung $\omega : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ ist. Das Kurvenintegral von ω längs einer Kurve $c : \mathbb{R} \rightarrow M$ ist dann als gewöhnliches Riemannintegral von $t \mapsto \omega(c(t))(c'(t))$ definiert. Auf einer allgemeinen Mannigfaltigkeit M ist $c'(t) \in T_{c(t)}M$ und somit muß $\omega(x) \in L(T_xM, \mathbb{R}) = (T_xM)^*$ für jedes $x \in M$ sein.

31.2 Definition (1-Formen)

Unter einer 1-FORM auf einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir eine Abbildung ω , die jedem Punkt $x \in M$ ein lineares Funktional $\omega(x) \in (T_xM)^*$ zuordnet.

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Dann erhalten wir eine 1-Form, das TOTALE DIFFERENTIAL df von f , durch $df(x)(v) := v(f) \in \mathbb{R}$ für alle $v \in T_xM \cong \text{Der}_x(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$.

Wir wollen nun 1-Formen in lokalen Koordinaten beschreiben. Dazu benötigen wir Koordinaten in $(T_xM)^*$. Ist E ein m -dimensionaler Vektorraum und $(g_i)_{i=1}^m$ eine Basis in E , so erhält man eine Basis $(g^i)_{i=1}^m$ von E^* , die sogenannte DUALE BASIS indem man die Funktionale g^i auf der Basis $(g_j)_{j=1}^m$ durch $g^i(g_j) := \delta_j^i$ festlegt, wobei δ_j^i das Kronecker-Deltasymbol ist, d.h. $\delta_i^i := 1$ und $\delta_j^i := 0$ für $i \neq j$.

Seien nun (u^1, \dots, u^m) lokale Koordinaten auf M . Dann ist $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$ eine Basis von T_xM . Berechnen wir nun das totale Differential du^i der i -ten Koordinatenfunktionen u^i , so erhalten wir:

$$du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) = \frac{\partial}{\partial u^j}(u^i) = \partial_j(u^i \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \partial_j(\text{pr}_i) \circ \varphi^{-1} = \delta_j^i.$$

Also ist $(du^i)_{i=1}^m$ gerade die duale Basis zur Basis $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$ von $T_x M$ und für $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ ist $du^i(\xi) = \xi^i$. Für das totale Differential df einer Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ erhalten wir somit

$$df = \sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot du^i,$$

denn $df(x)(\xi_x) = \xi_x(f) = \left(\sum_i \xi_x^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(f) = \sum_i du^i(\xi_x) \frac{\partial f}{\partial u^i} = \left(\sum_i \frac{\partial f}{\partial u^i} \cdot du^i\right)(\xi_x)$.

31.3 Transformationsverhalten von Vektoren

(Vgl. mit [60, 1.1] und [60, 20.9]) Sei im Folgenden E ein Euklidischer Vektorraum, $\mathcal{G} := (g_i)_{i=1}^m$ eine Basis in E und x^i die Komponenten (Koordinaten) eines Punktes x in E bezüglich $\{g_i\}$, also $x = \sum_{i=1}^m x^i g_i$. Sei $\bar{\mathcal{G}} := (\bar{g}_j)_j$ eine weitere Basis und \bar{x}^j die Koordinaten von x bezüglich $\{\bar{g}_j\}$. Und sei A jener Isomorphismus von E , welcher g_i auf \bar{g}_i abbildet. Stellt man die Vektoren \bar{g}_j bezüglich der Basis $\{g_i\}$ dar, d.h. $\bar{g}_j = \sum_{i=1}^m a_j^i g_i$, so ist $[A] := (a_j^i)_{i,j}$ die Matrixdarstellung $[A]_{\mathcal{G}, \mathcal{G}}$ von A bezüglich der Basis $\{g_i\}$ für $\text{Dom}(A) = E$ und für $\text{Bild}(A) = E$, sowie die Matrixdarstellung $[\text{id}]_{\bar{\mathcal{G}}, \mathcal{G}}$ der Identität bezüglich der Basis $\{\bar{g}_i\}$ für $\text{Dom}(\text{id}) = E$ und der Basis $\{g_i\}$ für $\text{Bild}(\text{id}) = E$, und ebenso $[A]_{\bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{G}}}$ bezüglich der Basis $\{\bar{g}_j\}$ für $\text{Dom}(A) = E$ und für $\text{Bild}(A) = E$. Dabei zählt der obere Index i die Zeile und der untere die Spalte der Matrix. Die ersten beiden Matrixdarstellungen folgen aus [60, 1.1] wonach die j -te Spalte der Matrixdarstellung einer linearen Abbildung die Koeffizienten des Bildes des j -ten Basisvektors bzgl. der Basis im Bildraum sind. Hingegen ist $[A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}} = 1$, denn $A(g_i) = \bar{g}_i$ also $[A(g_i)]_{\bar{\mathcal{G}}} = (\delta_i^j)_j$, und somit ist

$$[A]_{\bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{G}}} = [A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}} \cdot [\text{id}]_{\bar{\mathcal{G}}, \mathcal{G}} = 1 \cdot [A]_{\mathcal{G}, \mathcal{G}} = [A].$$

Zusammengefaßt: $[A] = [A]_{\mathcal{G}, \mathcal{G}} = [A]_{\bar{\mathcal{G}}, \bar{\mathcal{G}}} = [\text{id}]_{\bar{\mathcal{G}}, \mathcal{G}}$ und $[A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}} = 1$.

Für das Transformationsverhalten der Komponenten erhalten wir somit:

$$[x]_{\mathcal{G}} = 1 \cdot [x]_{\mathcal{G}} = [A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}} \cdot [x]_{\bar{\mathcal{G}}} = [A(x)]_{\bar{\mathcal{G}}} = [A] \cdot [x]_{\bar{\mathcal{G}}}$$

Umgekehrt ist $A^{-1} : E \rightarrow E$ gegeben durch $A^{-1} : \bar{g}_j \mapsto g_j$ mit Matrixdarstellung $[A^{-1}] = [A]^{-1} =: (b_j^i)_{i,j}$.

Es bezeichne $E^* := L(E, \mathbb{R})$ den zu E dualen Raum, $\mathcal{G}^* := \{g^i\}$ die duale Basis zu $\mathcal{G} = \{g_i\}$ definiert durch $g^i(g_j) := \delta_j^i$. Jeder Vektor $x^* \in E^*$ kann dann in der Form $x^* = \sum_{i=1}^m x_i g^i$ geschrieben werden, mit $x_i = x^*(g_i) \in \mathbb{R}$.

Wie transformieren jetzt diese Koordinaten?

Die Matrixdarstellung $[T^*]_{\bar{\mathcal{G}}^*, \mathcal{G}^*}$ der Adjungierten einer linearen Abbildung T ist die Transponierte der Matrixdarstellung $(t_k^i)_{k,i} := [T]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}}$ von T , d.h. $[T^*]_{\bar{\mathcal{G}}^*, \mathcal{G}^*} = [T]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}}^t$, denn

$$T^*(\bar{g}^i)(g_j) = \bar{g}^i(T(g_j)) = \bar{g}^i\left(\sum_k b_j^k \bar{g}_k\right) = \sum_k t_j^k \bar{g}^i(\bar{g}_k) = t_j^i = \sum_k t_k^i g^k(g_j).$$

Indem wir dies auf die Basiswechselabbildung $A : g_i \mapsto \bar{g}_i$ anwenden erhalten wir

$$[A^*]_{\bar{\mathcal{G}}^*, \mathcal{G}^*} = [A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}}^t = 1^t = 1, \text{ also } A^*(\bar{g}^j) = g^j$$

und weiters $g^j = A^*(\bar{g}^j) = \sum_{i=1}^m a_i^j \bar{g}^i$, denn $[A^*]_{\bar{\mathcal{G}}^*, \mathcal{G}^*} = [A]_{\mathcal{G}, \bar{\mathcal{G}}}^t = [A]^t$, und damit das Transformationsverhalten für die Koordinaten von dualen Vektoren:

$$\sum_i \bar{x}_i \bar{g}^i = x^* = \sum_j x_j g^j = \sum_{i,j} \bar{x}_j a_i^j \bar{g}^i \Rightarrow \bar{x}_i = \sum_j a_i^j x_j.$$

Vergleicht man nun die Transformationsformeln, so zeigt sich, daß die Komponenten x_i der dualen Vektoren wie die Basisvektoren g_i des Grundraumes transformieren:

$$x_i = \sum b_i^j \bar{x}_j, \quad g_i = \sum b_i^j \bar{g}_j; \quad \bar{x}_j = \sum a_j^i x_i, \quad \bar{g}_j = \sum a_j^i g_i.$$

Hingegen transformieren die Komponenten x^i eines Vektors wie die Vektoren der dualen Basis g^i :

$$x^i = \sum a_j^i \bar{x}^j, \quad g^i = \sum a_j^i \bar{g}^j; \quad \bar{x}^j = \sum b_i^j x^i, \quad \bar{g}^i = \sum b_j^i g^j.$$

Dieser Sachverhalt motiviert auch die Verwendung von “oberen” und “unteren” Indizes: Die Komponentenvektoren dualer Vektoren transformieren wie die Basis im Grundraum (sie transformieren kovariant), die duale Basis und die Komponentenvektoren im Grundraum transformieren kontravariant.

Vergleiche das aber mit folgender

31.4 Definition (Funktorkontravariant)

Unter einem FUNKTOR \mathcal{F} auf einer Kategorie versteht man eine Zuordnung, die jedem Raum M einen anderen Raum $\mathcal{F}(M)$ zuordnet und jedem Morphismus $f : M \rightarrow N$ einen entsprechenden Morphismus $\mathcal{F}(f)$ zwischen $\mathcal{F}(M)$ und $\mathcal{F}(N)$ zuordnet, sodaß $\mathcal{F}(\text{id}_M) = \text{id}_{\mathcal{F}(M)}$ und \mathcal{F} von der Zusammensetzung je zweier Morphismen die Zusammensetzung der zugeordneten Morphismen ist.

Man nennt einen Funktor \mathcal{F} KOVARIANT, falls $\mathcal{F}(f)$ in die gleiche Richtung läuft wie f , d.h. für $f : M \rightarrow N$ ist $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(M) \rightarrow \mathcal{F}(N)$. Er heißt KONTRAVARIANT, falls $\mathcal{F}(f)$ in die entgegengesetzte Richtung läuft, d.h. für $f : M \rightarrow N$ ist $\mathcal{F}(f) : \mathcal{F}(N) \rightarrow \mathcal{F}(M)$. Insbesondere ist der Dualraum-Funktor $(f : E \rightarrow F) \mapsto (f^* : F^* \rightarrow E^*)$ **kontravariant**.

31.5 Transformationsverhalten von 1-Formen

Es sei $\varphi^{-1} = (u^1, \dots, u^m)$ bzw. $\psi^{-1} = (v^1, \dots, v^m)$ eine Karte einer Mannigfaltigkeit M und $\partial_i^\varphi = \frac{\partial}{\partial u^i}$ bzw. $\partial_j^\psi = \frac{\partial}{\partial v^j}$ seien die (lokalen) Basisvektorfelder des Tangentialbündels. Diese hängen nach [60, 20.9] wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned} \partial_j^\psi|_x &= \sum_{i=1}^m \partial_j^\psi|_x (\varphi^{-1})^i \partial_i^\varphi|_x \text{ oder intuitiver } \frac{\partial}{\partial v^j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial u^i} \\ \partial_j^\varphi|_x &= \sum_{i=1}^m \partial_j^\varphi|_x (\psi^{-1})^i \partial_i^\psi|_x \text{ oder intuitiver } \frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial v^i}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial v^i} \end{aligned}$$

Seien $a_j^i := \frac{\partial u^i}{\partial v^j}$ bzw. $b_i^j := \frac{\partial v^j}{\partial u^i}$ die Koeffizienten der Jakobimatrix des Kartenwechsels und das Vektorfeld ξ habe die Darstellungen $\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum \eta^j \frac{\partial}{\partial v^j}$, dann gilt auch

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_j \eta^j \sum_i \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial u^i} = \sum_i \left(\sum_j \eta^j \left(\frac{\partial u^i}{\partial v^j} \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\ \Rightarrow \xi^i &= \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j} \eta^j = \sum_j a_j^i \eta^j \end{aligned}$$

und analog $\eta^j = \sum_i b_i^j \xi^i$.

Für Kotangentialvektoren erhalten wir wegen 31.3 die folgenden Transformationsformeln:

$$du^i = \sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j} dv^j = \sum_j a_j^i dv^j$$

$$dv^j = \sum_i \frac{\partial v^j}{\partial u^i} du^i = \sum_i b_i^j du^i.$$

Die Komponenten der Kotangentialvektoren, transformieren also kovariant, daher heißen Schnitte im Kotangentialbündel (d.h. 1-Formen) auch KOVARIANTE VEKTORFELDER.

31.6 Konstruktion des dualen Bündels

Um über Glattheit von 1-Formen sprechen zu können, müssen wir nun die disjunkte Vereinigung $T^*M := (TM)^* := \bigsqcup_{x \in M} (T_x M)^*$ zu einer glatten Mannigfaltigkeit, oder besser noch einem Vektorbündel machen. Noch allgemeiner wollen wir für ein allgemeines Vektorbündel $E \xrightarrow{p} M$ die disjunkte Vereinigung $E^* := \bigsqcup_{x \in M} (E_x)^*$ wieder zu einem solchen machen. Seien dazu Trivialisierungen $\varphi : U \times \mathbb{R}^k \xrightarrow{\cong} E|_U$ von E über offenen Mengen $U \subset M$ gegeben. Wir brauchen eine Trivialisierung

$$\varphi^* : \bigsqcup_{x \in U} (\mathbb{R}^k)^* = U \times (\mathbb{R}^k)^* \xrightarrow{\cong} E^*|_U = \bigsqcup_{x \in U} (E_x)^*$$

Faserweise können wir φ^* als $(\varphi^*)_x := ((\varphi_x)^*)^{-1} = ((\varphi_x)^{-1})^* : (\mathbb{R}^k)^* \rightarrow (E_x)^*$ definieren, wobei $(\varphi_x)^* : (E_x)^* \rightarrow (\mathbb{R}^k)^*$ die adjungierte Abbildung zum Isomorphismus $\varphi_x : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ bezeichnet.

Sei $\psi : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$ die Transitionsfunktion für zwei Vektorbündelkarten von E . Die zu den Trivialisierungen φ^* gehörenden Transitionsfunktionen ψ^* sind dann durch

$$\psi^*(x) = (\psi(x)^*)^{-1} \in GL((\mathbb{R}^k)^*) \cong GL(\mathbb{R}^k)$$

gegeben, wobei $\psi(x)^*$ die adjungierte Abbildung zum linearen Isomorphismus $\psi(x) : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ bezeichnet. Da $A \mapsto A^*$ linear ist von $L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^l) \rightarrow L((\mathbb{R}^l)^*, (\mathbb{R}^k)^*)$, die Inversion $A \mapsto A^{-1}$ von $GL(\mathbb{R}^k) \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$ glatt ist und $\psi : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$ als Transitionsfunktion des Vektorbündels E ebenfalls glatt ist, gilt gleiches auch für die Zusammensetzung ψ^*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & GL(\mathbb{R}^k) & & \\
 & \nearrow^{(-)^*} & & \searrow^{\text{inv}} & \\
 U \cap V & \xrightarrow{\psi} & GL(\mathbb{R}^k) & & GL(\mathbb{R}^k) \\
 & \searrow^{\text{inv}} & & \nearrow^{(-)^*} & \\
 & & GL(\mathbb{R}^k) & &
 \end{array}$$

Also bilden die ψ^* einen Kozykel von Transitionsfunktionen für ein glattes Vektorbündel $E^* \rightarrow M$ und die φ^* sind die zugehörigen Vektorbündelkarten. Diese Vektorbündel $E^* \rightarrow M$ heißt das **DUALE VEKTORBÜNDEL** zu $E \rightarrow M$.

Im Spezialfall, wo $E \rightarrow M$ gerade das Tangentialbündel $TM \rightarrow M$ ist, heißt $T^*M := (TM)^* \rightarrow M$ **KOTANGENTIALBÜNDEL** von M .

Der Raum $\Gamma(T^*M \rightarrow M)$ der glatten Schnitte des Kotangentialbündels wird auch mit $\Omega^1(M)$ bezeichnet.

31.7 Glatte 1-Formen

Wie erkennt man, ob eine 1-Form ω wirklich glatt ist? Nun, das ist lokal um einen Punkt $x \in M$ genau dann der Fall, wenn ihre Darstellung bezüglich einer Trivialisierung $TM^*|_U \cong U \times \mathbb{R}^m$ mit $x \in U \subset M$ glatt ist. Nach [31.6] werden die Trivialisierungen von $(TM)^*$ durch Dualisieren aus jenen von TM gewonnen. Zu einer Karte $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$ mit zugehörigen lokalen Koordinaten $(u^1, \dots, u^m) = \varphi^{-1}$, war die entsprechende lokale Trivialisierung von $TM \rightarrow M$ in [60, 25.4] durch

$$TM \supseteq T(\varphi(U)) \xleftarrow{T\varphi} TU \cong U \times \mathbb{R}^m \xleftarrow{\varphi^{-1} \times \mathbb{R}^m} \varphi(U) \times \mathbb{R}^m$$

gegeben. Wobei der standard-Basis (e_i) in $\{x\} \times \mathbb{R}^m$ die Basis $(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_x) \in T_x M$ der Richtungsableitungen entspricht. Die duale Abbildung zu $T_{\varphi^{-1}(x)}\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow T_x M$ bildet somit die duale Basis (du^i) von $(T_x M)^*$ auf die duale Basis (e^i) von $(\mathbb{R}^m)^* \cong \mathbb{R}^m$. Die lokale Trivialisierung von T^*M bildet somit e^i auf du^i ab, und eine 1-Form ω genau dann glatt, wenn alle ihre lokalen Koordinaten ω_i – gegeben durch $\omega = \sum_i \omega_i du^i$ – glatt sind.

31.8 Lemma (Schnitte des dualen Bündels).

Sei $p : E \rightarrow M$ ein Vektorbündel, dann gibt es folgende Beschreibungen für die glatten Schnitte des dualen Bündels $E^* := \bigsqcup_x (E_x)^* \rightarrow M$:

$$\begin{aligned} \Gamma(E^* \rightarrow M) &:= \{\sigma \in C^\infty(M, E^*) : \forall x : \sigma(x) \in E_x^*\} \\ &\cong \{s \in C^\infty(E, \mathbb{R}) : \forall x : s|_{E_x} \in L(E_x, \mathbb{R})\} \\ &\cong \text{dem Raum der Vektorbündelhomomorphismen} \\ &\quad \text{von } E \text{ nach } M \times \mathbb{R} \text{ über } \text{id}_M. \end{aligned}$$

Beweis. Wir müssen nur zeigen, daß die Schnitte $\sigma \in \Gamma(E^* \rightarrow M)$ genau den faserweise linearen glatten Abbildungen $s : E \rightarrow \mathbb{R}$ entsprechen.

Definiert man $\sigma \mapsto s$ durch $s|_{E_x} := \sigma(x)$, so ist klar, daß sich diese Abbildungen in eindeutiger Weise entsprechen. Verbleibt zu zeigen, daß σ genau dann glatt ist, wenn s es ist. Dies ist eine lokale Eigenschaft. Lokal ist σ durch ein $\bar{\sigma} : U \rightarrow (\mathbb{R}^k)^* = L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ und s durch ein $\bar{s} : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Sei σ (und also auch $\bar{\sigma}$) glatt, dann ist $(x, v) \mapsto \bar{s}(x, v) = \text{eval}(\bar{\sigma}(x), v) = \text{eval} \circ (\bar{\sigma} \times \text{id}_{\mathbb{R}^k})(x, v)$ ebenfalls glatt. Umgekehrt: Ist s glatt, so auch \bar{s} und damit auch $\text{eval}_v \circ \bar{\sigma} = \bar{s}(\cdot, v)$. Somit ist aber $\bar{\sigma} : U \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ glatt, und damit auch σ selbst. \square

31.9 Bemerkung

Wir wollen nun wie für glatte Vektorfelder in [60, 29.1] auch für glatte 1-Formen eine algebraische Beschreibung. Wir können eine 1-Form ω auf ein Vektorfeld ξ punktweise anwenden, da $\omega_x \in (T_x M)^* = L(T_x M, \mathbb{R})$ und $\xi_x \in T_x M$, und erhalten eine Funktion $\omega(\xi) : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \omega_x(\xi_x)$. In lokalen Koordinaten sieht das wie folgt aus:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_i \omega_i du^i ; \quad \xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\ \omega(\xi) &= \left(\sum_i \omega_i du^i \right) \left(\sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_{i,j} \omega_i \xi^j du^i \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_i \omega_i \xi^i. \end{aligned}$$

Also ist die resultierende Funktion $\omega(\xi)$ glatt, falls ω und ξ glatt sind. Und klarerweise ist die Zuordnung $(\omega, \xi) \mapsto \omega(\xi)$ bilinear als Abbildung von $\Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$.

31.10 Lemma (Raum der 1-Formen als $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineare Abbildungen).

Die bilineare Abbildung $\Omega^1(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ induziert einen $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linearen Isomorphismus

$$\Omega^1(M) \cong \text{Hom}_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R})),$$

wobei der rechte Raum aus allen $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linearen Abbildungen von $\mathfrak{X}(M)$ nach $C^\infty(M, \mathbb{R})$ besteht.

Beweis. Klarerweise induziert obige bilineare Abbildung eine lineare Abbildung von $\Omega^1(M)$ in den Raum $L(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$ der linearen Abbildungen.

Jedes $\omega \in \Omega^1(M)$ wirkt aber auch $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -linear auf $\xi \in \mathfrak{X}(M)$, denn

$$\omega(f \cdot \xi)|_x = \omega_x((f \cdot \xi)_x) = \omega_x(f(x) \cdot \xi_x) = f(x) \cdot \omega_x(\xi_x) = (f \cdot \omega(\xi))_x$$

Sei umgekehrt ein $\omega \in \text{Hom}_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\mathfrak{X}(M), C^\infty(M, \mathbb{R}))$ gegeben.

Dann wirkt ω lokal, d.h. $\xi = 0$ auf $U \subset M$ impliziert $\omega(\xi) = 0$ auf U : Zu $p \in U$ wählen wir ein $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f(p) = 1$ und $\text{Trg}(f) \subset U$. Dann ist $f \cdot \xi = 0$ und somit

$$0 = \omega(0) = \omega(f \cdot \xi) = f \cdot \omega(\xi) \quad \Rightarrow \quad 0 = \underbrace{f(p)}_{=1} \cdot \omega(\xi)(p) = \omega(\xi)(p).$$

Es wirkt ω sogar punktal, d.h. $\xi(p) = 0$ impliziert $\omega(\xi)(p) = 0$, denn

$$\omega(\xi)(p) = \omega\left(\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}\right)(p) = \sum_i \underbrace{\xi^i(p)}_{=0} \cdot \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right)(p) = 0.$$

Folglich können wir eine 1-Form ω durch $\omega(x)(\xi_x) := \omega(\xi)(x)$ definieren, wobei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ so gewählt ist, daß $\xi(x) = \xi_x$ ist. Die 1-Form ω ist dann glatt, denn lokal gilt:

$$\omega = \sum_i \omega_i du^i \quad \text{mit} \quad \omega_i = \omega\left(\frac{\partial}{\partial u^i}\right).$$

Daß diese beiden Zuordnungen invers zueinander sind, ist offensichtlich. \square

31.11 Lemma (Pull-back von Schnitten dualer Bündel).

Seien $p : E \rightarrow M, q : F \rightarrow N$ Vektorbündel und f ein Vektorbündelhomomorphismus.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ p \downarrow & & \downarrow q \\ M & \xrightarrow{f_0} & N \end{array}$$

Dann ist $f^* : \Gamma(F^* \rightarrow N) \rightarrow \Gamma(E^* \rightarrow M)$ durch die Formel

$$f^*(s)_x \cdot v_x := s_{f_0(x)} \cdot f(v_x) \quad \text{für} \quad s \in \Gamma(F^* \rightarrow N), \quad x \in M, \quad \text{und} \quad v_x \in E_x$$

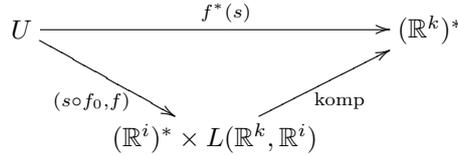
wohldefiniert.

Beweis. Z.z. ist nur, daß $f^*(s)$ glatt ist. Via lokaler Trivialisierungen reduziert man das Problem auf triviale Bündel. Betrachten wir also die Bündel $p : U \times \mathbb{R}^k \rightarrow U$,

$q : V \times \mathbb{R}^i \rightarrow V$, und die Abbildungen $s : V \rightarrow (\mathbb{R}^i)^*$, $f_0 : U \rightarrow V$ und $f : U \rightarrow L(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^i)$. Dann ist

$$f^*(s)_x \cdot v_x := s_{f_0(x)} \cdot f(v_x) = (s \circ f_0)(x) \cdot f_x(v_x) = \text{komp}((s \circ f_0)(x), f_x) \cdot v_x$$

also kommutiert



und $f^*(s)$ ist als Zusammensetzung zweier C^∞ -Funktionen selbst glatt. □

31.12 Pull-back von 1-Formen in lokalen Koordinaten

Sei $f : M \rightarrow N$ glatt, (u^1, \dots, u^i) lokale Koordinaten um $p \in M$, (v^1, \dots, v^j) lokale Koordinaten um $q := f(p) \in N$, und $\omega \in \Omega^1(N)$. Wir wollen $f^*\omega \in \Omega^1(M)$ in den lokalen Koordinaten bestimmen. Für Tangentialvektoren $\xi \in T_p M$ ist $(f^*\omega)(p)$ nach [31.11](#) definiert durch

$$(f^*\omega)_p(\xi) := \omega_{f(p)}(T_p f \cdot \xi).$$

Es sei $\omega = \sum_j \omega_j dv^j$ die Koordinatendarstellung von ω um q und $f^*\omega = \sum_i \eta_i du^i$ jene von $f^*\omega$ um p . Setzen wir nun $\xi := \frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p$ so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 (f^*\omega)_p(\xi) &= \left(\sum_k \eta_k du^k \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Big|_p \right) \stackrel{\text{31.9}}{=} \eta_i \\
 \omega_{f(p)}(T_p f \cdot \xi) &\stackrel{\text{60, 20.9}}{=} \left(\sum_j \omega_j dv^j \right)_{f(p)} \left(\sum_l \frac{\partial f^l}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^l} \Big|_q \right) \stackrel{\text{31.9}}{=} \sum_j (\omega_j \circ f) \frac{\partial f^j}{\partial u^i}
 \end{aligned}$$

Also gilt

$$f^* \left(\sum_j \omega_j dv^j \right) = \sum_i \left(\sum_j (\omega_j \circ f) \frac{\partial f^j}{\partial u^i} \right) du^i.$$

Man beachte, daß das Kurvenintegral aus [60, 3.10](#) einer 1-Form $\omega \in \Omega^1(U)$ auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ längs einer Kurve $c : I \rightarrow U$ gerade durch

$$\int_c \omega = \int_c \sum_i \omega_i(x) dx^i = \int_0^1 \sum_i \omega_i(c(t)) \frac{dc^i}{dt} dt = \int_0^1 c^*(\omega)$$

gegeben ist. Für eine abstrakte Mannigfaltigkeit M können wir genauso das Kurvenintegral $\int_c \omega$ einer 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ längs einer Kurve $c : I \rightarrow M$ durch

$$\int_c \omega := \int_0^1 c^*(\omega)$$

definieren. Wir werden diese Definition im Abschnitt [47](#) weiter verallgemeinern.

37. Motivation

37.1 Die Riemann-Metrik als Tensorfeld

In [60, 32.2] hatte wir die Riemann-Metrik als eine Abbildung definiert, die jedem $x \in M$ eine Bilinearform $g_x : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ zuordnet, und zwar so, daß $x \mapsto g_x(\xi_x, \eta_x)$, $M \rightarrow \mathbb{R}$ glatt ist für je zwei glatte Vektorfelder $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$. Schreiben wir die beiden Vektorfelder mittels lokaler Koordinaten (u^1, \dots, u^m) als $\xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ und $\eta = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, so erhalten wir

$$g_x(\xi_x, \eta_x) = \sum_{i,j} \xi_x^i \eta_x^j g_x \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) = \sum_{i,j} du^i(\xi) du^j(\eta) g_{i,j}(x),$$

wobei wir $g_{i,j}(x) := g_x \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right)$ gesetzt haben. Die Abbildung $(\xi_x, \eta_x) \mapsto du^i(\xi) \cdot du^j(\eta)$ ist eine bilineare Abbildung $T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$, die wir mit $du^i \otimes du^j$ bezeichnen. Also gilt lokal

$$g = \sum_{i,j} g_{i,j} du^i \otimes du^j$$

37.2 Hessische Form

Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit lokalem Extremum bei x , dann ist $T_x f : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \mathbb{R} = \mathbb{R}$ die Nullabbildung. Um umgekehrt schließen zu können benötigen wir die 2.Ableitung: Sei M eine offene Teilmenge des \mathbb{R}^m , (oder M eine Teilmannigfaltigkeit die wir durch eine offene Umgebung und f durch eine Erweiterung darauf ersetzen).

$$M \times \mathbb{R}^m = TM \xrightarrow{Tf} T\mathbb{R} = \mathbb{R}^2$$

$$Tf(x, v) = (f(x), f'(x)(v))$$

$$M \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m = T^2 M := T(TM) \xrightarrow{T^2 f} T^2 \mathbb{R} = \mathbb{R}^4$$

$$T^2 f(x, v; y, w) = \left(f(x), f'(x)(v), f'(x)(y), f''(x)(v, y) + f'(x)(w) \right)$$

Im \mathbb{R}^m ist $\text{pr}_4(T^2 f(x, v; y, 0)) = f''(x)(v, y)$, falls $(x, v; y, 0)$ im 2. Tangentialraum der Mannigfaltigkeit liegt.

37.3 Beispiel

$$S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\} :$$

$$TS^1 = \{(x, v) \in (\mathbb{R}^2)^2 : |x| = 1, \langle x, v \rangle = 0\}$$

$$T^2 S^1 = \{(x, v; y, w) \in (\mathbb{R}^2)^4 : |x| = 1, \langle x, v \rangle = \langle x, y \rangle = 0, \\ \langle y, v \rangle + \langle x, w \rangle = 0\}$$

Somit ist $(x, v; y, 0) \in T^2 S^1$ genau dann, wenn $|x| = 1$, $v \perp x$, $y \perp x$ und $v \perp y$, also nur dann wenn $v = 0$ oder $y = 0$ ist. D.h. auf einer allgemeine Mannigfaltigkeit läßt sich $f''(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ nicht sinnvoll definieren.

Falls $T_x f = 0$, so ist dies doch möglich. Sei $\xi_x, \eta_x \in T_x M$, dann definieren wir $f''(x)(\xi_x, \eta_x) := \eta_x(\xi(f))$, wobei ξ ein Vektorfeld mit $\xi(x) = \xi_x$ sei. Schreiben wir

ξ_x und η_x in lokalen Koordinaten, d.h. $\xi_x = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i}$ bzw. $\eta_x = \sum_i \eta^i \frac{\partial}{\partial u^i}$, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}\xi(f) &= \sum_i \xi^i \frac{\partial f}{\partial u^i} \\ \eta_x(\xi(f)) &= \left(\sum_j \eta^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \left(\left(\sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) (f) \right) \\ &= \sum_j \eta^j \sum_i \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\left(\xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \right) (f) \right) = \sum_j \eta^j \sum_i \left(\frac{\partial \xi^i}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i} + \xi^i \frac{\partial}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) \\ &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i}, \quad \text{da } \frac{\partial f}{\partial u^i} = 0.\end{aligned}$$

Wir haben also gezeigt, daß obige Definition von der Fortsetzung unabhängig ist und in lokalen Koordinaten die übliche 2. Ableitung liefert, falls $f'(x) = 0$.

Es ist also $f''(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\begin{aligned}f''(x)(\xi, \eta) &= \sum_{i,j} \xi^i \eta^j \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} = \sum_{i,j} du^i(\xi) du^j(\eta) \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} \\ &= \left(\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} du^i \otimes du^j \right) (\xi, \eta).\end{aligned}$$

Demnach ist $f''(x) = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^j \partial u^i} du^i \otimes du^j$. Wie transformiert sich dieser Ausdruck beim Wechsel von Koordinaten u^i zu neuen Koordinaten v^j ? Wir haben $dv^i = \sum_j \frac{\partial v^i}{\partial u^j} du^j$ und $\frac{\partial}{\partial u^j} = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial v^k}$. Also ist $\frac{\partial}{\partial u^j}(f) = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial v^k}$ und

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^j}(f) &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial}{\partial u^j}(f) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_k \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \frac{\partial f}{\partial v^k} \right) \\ &= \sum_k \left(\frac{\partial f}{\partial v^k} \cdot \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j} + \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \cdot \left(\sum_l \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \frac{\partial}{\partial v^l} \right) \frac{\partial f}{\partial v^k} \right) \\ &= \sum_k \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j} \cdot \frac{\partial f}{\partial v^k} + \sum_{k,l} \frac{\partial v^l}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial v^k}{\partial u^j} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial v^l \partial v^k}.\end{aligned}$$

Somit ist

$$\sum_{i,j} \frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} du^i \otimes du^j = \sum_{l,k} \frac{\partial^2 f}{\partial v^l \partial v^k} dv^l \otimes dv^k + \sum_{i,j} \left(\sum_k \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^i \partial u^j} \right) \frac{\partial f}{\partial v^k} du^i \otimes du^j,$$

und der zweite Summand verschwindet im Punkt x , da $\frac{\partial f}{\partial v^k}|_x = 0$.

37.4 Exakte 1-Formen

Für eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, wobei $M \subseteq \mathbb{R}^m$ offen sei, ist $f' : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ glatt. Natürlich interessiert man sich dafür, wann die Umkehrung gilt, also wann zu einer 1-Form $\omega : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ eine Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, sodaß $\omega = f'$, ein solches ω nennt man EXAKTE 1-FORM. Der Satz von Frobenius liefert eine Bedingung:

Lokal existiert so ein f genau dann wenn $d\omega(x)(v_1, v_2) = 0 \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^m$, wobei $2d\omega(x)(v_1, v_2) := \omega'(x)(v_1) \cdot v_2 - \omega'(x)(v_2) \cdot v_1$. Das so definierte $d\omega : M \rightarrow L(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ ist für festes $x \in M$ alternierend (= schiefsymmetrisch) und bilinear. Kürzer schreibt man $d\omega : M \rightarrow L_{Alt}^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ und sagt: $d\omega$ ist eine 2-FORM.

Allgemein bezeichnet man eine Abbildung $\omega : M \rightarrow L_{Alt}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ als k -FORM, $L_{Alt}^k(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ ist der Raum der alternierenden k -linearen Funktionale. Ist $M = \mathbb{R}^m$, so genügt $d\omega = 0$ um ein global gegebenes f mit $\omega = f'$ zu finden. Ist $M \subseteq \mathbb{R}^m$, so genügt es i.a. nicht. Dazu ein Beispiel:

37.5 Beispiel

Wir betrachten die 1-Form

$$\omega(x, y)(v, w) := \frac{-yv + xw}{x^2 + y^2} \quad \text{also} \quad \omega(x, y) := -\frac{y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy$$

auf $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ aus [60, 3.10]. Wegen $\frac{\partial}{\partial y}(\frac{-y}{x^2+y^2}) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{x}{x^2+y^2})$ ist $d\omega = 0$. Angenommen, es gibt ein f mit $\omega = f'$, so muß gelten:

$$f'(x, y) = (\partial_1 f(x, y), \partial_2 f(x, y)) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Ist $(x_0, y_0) \in S^1$ ein Punkt, in dem f eingeschränkt auf S^1 ein Minimum annimmt, so gilt

$$\begin{aligned} 0 &= f'(x_0, y_0)(-y_0, x_0) = -y_0 \cdot \frac{1}{x_0^2 + y_0^2}(-y_0) + x_0 \cdot \frac{1}{x_0^2 + y_0^2}(x_0) \\ &= 1, \text{ das ist ein Widerspruch.} \end{aligned}$$

Für die eben betrachtete Form gilt also: $d\omega = 0$, aber es gibt keine Stammfunktion zu ω . Diese Diskrepanz zwischen Formen ω mit $d\omega = 0$ und solchen der Gestalt $\omega = f' = df$ kann verwendet werden, um etwas über die topologischen Eigenschaften von M auszusagen (In unserem Beispiel war M nicht einfach zusammenhängend).

Wie sieht das nun für beliebige Mannigfaltigkeiten M aus?

Sei allgemeiner $\omega : x \mapsto \omega(x)$ eine 1-Form, dann müßte $d\omega$ eine, auf M gegebene Abbildung $d\omega : x \mapsto d\omega(x)$ mit Werten $d\omega(x) : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ sein, die bilinear und alternierend sind (solche $d\omega$ heißen 2-FORM). Also ist $(d\omega)_x \in L_{Alt}^2(T_x M, \mathbb{R})$. Analog werden wir k -Formen definieren. Dazu wollen wir jetzt die grundlegenden Tatsachen aus der multilinearen Algebra zusammenfassen.

38. Multilineare Algebra, Tensoren

38.1 Definition

Wir stellen zuerst die (multi)linear Theorie zusammen, für ein vertiefendes Studium vgl. etwa [32] und [86, Vol.I, Cap.7]. Im folgenden bezeichnen E, F , etc. endlichdimensionale Vektorräume über \mathbb{R} . Wir bezeichnen mit $L^k(E_1, \dots, E_k; F)$ (oder kurz $L(E_1, \dots, E_k; F)$) den RAUM DER k -LINEAREN ABBILDUNGEN $E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$. Dieser ist ein Vektorraum der endlicher Dimension $\dim(E_1) \cdots \dim(E_k) \cdot \dim(F)$.

Die Abbildung $T : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow \mathbb{R}$ sei k -linear und $S : E_{k+1} \times \dots \times E_{k+i} \rightarrow \mathbb{R}$ sei i -linear.

Das TENSORPRODUKT von T mit S ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} T \otimes S &: E_1 \times \dots \times E_{k+i} \rightarrow \mathbb{R} \quad (k+i)\text{-linear} \\ (T \otimes S)(v_1, \dots, v_{k+i}) &:= T(v_1, \dots, v_k) S(v_{k+1}, \dots, v_{k+i}) \end{aligned}$$

Völlig analog kann man auch das Tensorprodukt $T_1 \otimes \dots \otimes T_k$ mehrerer multilinearer Funktionale T_i definieren.

38.2 Das Tensorprodukt von Vektorräumen.

Für endlichdimensionale Vektorräume E_1, \dots, E_k ist das Tensorprodukt durch $E_1 \otimes \dots \otimes E_k := L^k(E_1^*, \dots, E_k^*; \mathbb{R})$ definiert. Gemeinsam mit der k -linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \otimes &: E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow E_1 \otimes \dots \otimes E_k, \\ \otimes &: (x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_k, \text{ wobei} \\ (x_1 \otimes \dots \otimes x_k)(y_1^*, \dots, y_k^*) &:= y_1^*(x_1) \cdot \dots \cdot y_k^*(x_k), \end{aligned}$$

löst es folgendes universelles Problem:

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_k & \xrightarrow{\otimes} & E_1 \otimes \dots \otimes E_k \\ & \searrow \text{\textit{k-linear}} & \swarrow \text{\textit{linear}} \\ & & F \end{array} \quad \begin{array}{c} \exists ! \\ \text{\textit{linear}} \end{array}$$

Ist $\{e_i^j : 1 \leq i \leq \dim E_j\}$ eine Basis von E_j , dann ist eine Basis von $E_1 \otimes \dots \otimes E_k$ gegeben durch:

$$\{e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k : 1 \leq i_1 \leq \dim E_1, \dots, 1 \leq i_k \leq \dim E_k\}.$$

Beweis. Wir zeigen zuerst die Aussage über die Basis. Die Menge $\{e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k : i_1, \dots, i_k\}$ ist linear unabhängig, denn aus $\sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k = 0$ folgt durch Anwenden auf $(e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k})$ die Gleichung

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k \right) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} \left(e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k \right) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} \underbrace{e_1^{j_1}(e_{i_1}^1)}_{\delta_{i_1}^{j_1}} \cdot \dots \cdot \underbrace{e_k^{j_k}(e_{i_k}^k)}_{\delta_{i_k}^{j_k}} = \mu^{j_1, \dots, j_k} \end{aligned}$$

Dies ist auch ein Erzeugendensystem für $E_1 \otimes \dots \otimes E_k := L(E_1^*, \dots, E_k^*; \mathbb{R})$, denn jedes k -lineare $\mu : E_1^* \times \dots \times E_k^* \rightarrow \mathbb{R}$ läßt sich auf $(x^1, \dots, x^k) \in E_1^* \times \dots \times E_k^*$ wie folgt beschreiben

$$\begin{aligned} \mu(x^1, \dots, x^k) &= \mu \left(\sum_{i_1} x_{i_1}^1 e_{i_1}^{i_1}, \dots, \sum_{i_k} x_{i_k}^k e_{i_k}^{i_k} \right) \\ &= \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} x_{i_1}^1 \dots x_{i_k}^k \cdot \mu(e_{i_1}^{i_1}, \dots, e_{i_k}^{i_k}) \\ &= \sum_{i_1} \dots \sum_{i_k} e_{i_1}^1(x^1) \dots e_{i_k}^k(x^k) \cdot \mu(e_{i_1}^{i_1}, \dots, e_{i_k}^{i_k}) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} (e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k)(x^1, \dots, x^k) \end{aligned}$$

wobei $\mu^{i_1, \dots, i_k} := \mu(e_{i_1}^{i_1}, \dots, e_{i_k}^{i_k}) \in \mathbb{R}$.

Folglich läßt sich jede multilineare Abbildung $\mu : E_1 \times \dots \times E_k \rightarrow F$ auf eine eindeutige Weise zu einer lineare Abbildung $\tilde{\mu} : E_1 \otimes \dots \otimes E_k \rightarrow F$ durch

$$\tilde{\mu}(e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k) := \mu(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_k}^k)$$

fortsetzen, sodaß das angegebene Dreieck kommutiert. \square

38.3 Bemerkungen

1. Wir erhalten folgende Identitäten (die erste mittels vollständiger Induktion):

$$\begin{aligned} (\dots (E_1 \otimes E_2) \otimes \dots \otimes E_k) &\cong L((E_1 \otimes \dots \otimes E_{k-1})^*, E_k^*; \mathbb{R}) \\ &\cong L((E_1 \otimes \dots \otimes E_{k-1})^*, L(E_k^*, \mathbb{R})) \\ &\cong L(E_1^*, \dots, E_{k-1}^*, L(E_k^*, \mathbb{R})) \\ &\cong L(E_1^*, \dots, E_{k-1}^*, E_k^*; \mathbb{R}) \\ &\cong E_1 \otimes \dots \otimes E_k \end{aligned}$$

$$E_1 \otimes E_2 = L(E_1^*, E_2^*; \mathbb{R}) \cong L(E_2^*, E_1^*; \mathbb{R}) = E_2 \otimes E_1$$

$$E_1 \otimes \mathbb{R} = L(E_1^*, \mathbb{R}^*; \mathbb{R}) \cong L(E_1^*, \mathbb{R}^{**}) \cong L(E_1^*, \mathbb{R}) = E_1^{**} \cong E_1$$

$$\begin{aligned} (E_1 \otimes \dots \otimes E_k)^* &\cong L(E_1, \dots, E_k; \mathbb{R}) \cong L(E_1^*, \dots, E_k^*; \mathbb{R}) \cong \\ &= E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(E, F) &\cong L(E, F^{**}) = L(E, L(F^*, \mathbb{R})) \cong L(E, F^*; \mathbb{R}) \cong \\ &\cong L(E^{**}, F^*; \mathbb{R}) = E^* \otimes F. \end{aligned}$$

2. Zu linearen Abbildungen $T_i : E_i \rightarrow F_i$ existiert eine durch folgendes Diagramm eindeutig bestimmte lineare Abbildung $T_1 \otimes \dots \otimes T_k : E_1 \otimes \dots \otimes E_k \rightarrow F_1 \otimes \dots \otimes F_k$:

$$\begin{array}{ccc} E_1 \times \dots \times E_k & \xrightarrow[k\text{-linear}]{\otimes} & E_1 \otimes \dots \otimes E_k \\ T_1 \times \dots \times T_k \downarrow \text{linear} & & \text{linear} \downarrow T_1 \otimes \dots \otimes T_k \\ F_1 \times \dots \times F_k & \xrightarrow[k\text{-linear}]{\otimes} & F_1 \otimes \dots \otimes F_k. \end{array}$$

Dabei ist $T_1 \otimes \dots \otimes T_k$ auf der Basis $(e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k)$ wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned} (T_1 \otimes \dots \otimes T_k)(e_{i_1}^1 \otimes \dots \otimes e_{i_k}^k) &= T_1(e_{i_1}^1) \otimes \dots \otimes T_k(e_{i_k}^k) \\ &= \sum_{j_1} (T_1)_{i_1}^{j_1} f_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes \sum_{j_k} (T_k)_{i_k}^{j_k} f_{j_k}^k \\ &= \sum_{j_1, \dots, j_k} (T_1)_{i_1}^{j_1} \dots (T_k)_{i_k}^{j_k} f_{j_1}^1 \otimes \dots \otimes f_{j_k}^k \end{aligned}$$

3. Zwischen den verschiedensten soeben definierten Tensorprodukten besteht der folgende Zusammenhang: Für $T_i \in E_i^*$ stimmen die Tensorprodukte

1 $T_1 \otimes \dots \otimes T_k \in (E_1 \otimes \dots \otimes E_k)^*$ von [38.1](#);

2 $T_1 \otimes \dots \otimes T_k \in E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^*$ von [38.2](#);

3 $T_1 \otimes \dots \otimes T_k : E_1 \otimes \dots \otimes E_k \rightarrow \mathbb{R} \otimes \dots \otimes \mathbb{R}$ von [38.3.2](#)

vermöge der Isomorphismen $(E_1 \otimes \dots \otimes E_k)^* \cong E_1^* \otimes \dots \otimes E_k^*$ und $\mathbb{R} \otimes \dots \otimes \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ aus [38.3.1](#) überein.

4. $\otimes E := \bigoplus_{m=0}^{\infty} (\otimes_{i=1}^m E)$ ist eine graduierte, assoziative Algebra mit 1 und heißt die TENSORALGEBRA über E mit $1 \in \mathbb{R} = \otimes^0 E$. Dabei heißt eine Algebra GRADUIERT, falls $A = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} A_k$ und die Multiplikation $A^k \times A^l$ in A^{k+l} abbildet. Die Elemente $\omega \in A_k$ heißen HOMOGEN VOM GRAD k .

Dabei setzt man $\otimes^0 E := \mathbb{R}$, denn $\prod_{i \in \emptyset} E^* = \{0\}$ und jedes $f : \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist 0-linear.

5. Die Tensoralgebra hat folgende universelle Eigenschaft: Zu jeder linearen Abbildung $f : E \rightarrow A$, wo A eine assoziative Algebra mit 1 ist, existiert ein eindeutiger Algebramorphismus $\tilde{f} : \otimes E \rightarrow A$, welcher auf $\otimes^1 E = E$ mit f übereinstimmt.

38.4 Definition

Mit $L_{Alt}^k(E, F)$ bezeichnen wir den durch die alternierenden k -linearen Abbildungen gebildeten Teilraum von $L(\underbrace{E, \dots, E}_{k \text{ mal}}; F) =: L^k(E, F)$. Bekanntlich heißt eine

Abbildung $T : E \times \dots \times E \rightarrow F$ alternierend, wenn $\pi^{**} \circ T = \text{sgn}(\pi) \cdot T$ für alle Permutationen $\pi \in S_k := \{\pi : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} : \pi \text{ ist bijektiv}\}$ gilt, d.h.

$$\begin{aligned} T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) &= T(\pi^*(v)_1, \dots, \pi^*(v)_k) = \pi^{**}(T)(v_1, \dots, v_k) \\ &= \text{sgn}(\pi)T(v_1, \dots, v_k) \quad \forall v_1, \dots, v_k \in E. \end{aligned}$$

Eine Projektion $\text{alt} : L^k(E, F) \rightarrow L_{Alt}^k(E, F)$, genannt ALTERNATOR ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{alt}(T)(v_1, \dots, v_k) &:= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \text{sign}(\pi) T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \\ \text{alt}(T) &= \frac{1}{k!} \sum_{\pi \in S_k} \text{sign}(\pi) T \circ \pi^*. \end{aligned}$$

Für alternierende multilineare Funktionale T und S definiert man das ÄUSSERE oder "HACK"-PRODUKT (englisch: wedge-product) durch:

$$\begin{aligned} (T \wedge S)(v_1, \dots, v_{k+i}) &:= \frac{(k+i)!}{k! i!} \text{alt}(T \otimes S)(v_1, \dots, v_{k+i}) = \\ &= \frac{1}{k! i!} \sum_{\pi} \text{sgn} \pi \cdot T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot S(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+i)}) \\ &= \frac{1}{k! i!} \sum_{\pi_1, \pi_2} \sum_{\sigma \text{ stkw. } \nearrow} \text{sgn} \sigma \text{sgn} \pi_1 \text{sgn} \pi_2 \cdot \\ &\quad \cdot T(v_{\sigma(\pi_1(1))}, \dots, v_{\sigma(\pi_1(k))}) \cdot S(v_{\sigma(\pi_2(k+1))}, \dots, v_{\sigma(\pi_2(k+i))}) \\ &= \sum_{\sigma(1) < \dots < \sigma(k)} (-1)^{\sum_{j \leq k} (\sigma(j) - j)} \cdot \\ &\quad \cdot T(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot S(v_1, \dots, \overbrace{v_{\sigma(1)}}, \dots, \overbrace{v_{\sigma(k)}}, \dots, v_{k+i}). \end{aligned}$$

In dieser Rechnung haben wir die Permutation π von $\{1, \dots, k+i\}$ in eindeutiger Weise als $\sigma \circ (\pi_1 \sqcup \pi_2)$ geschrieben, wobei π_1 eine beliebige Permutation von $\{1, \dots, k\}$, π_2 eine solche von $\{k+1, \dots, k+i\}$ ist und σ eine von $\{1, \dots, k+i\}$ welche auf $\{1, \dots, k\}$ und $\{k+1, \dots, k+i\}$ streng monoton wachsend ist. Es ist also $\sigma(1) < \dots < \sigma(k)$ die monotone Anordnung von $\{\pi(1), \dots, \pi(k)\}$ und $\sigma(k+1) < \dots < \sigma(k+i)$ jene von $\{\pi(k+1), \dots, \pi(k+i)\}$. Damit ist $\pi_1 = \sigma^{-1} \circ \pi|_{\{1, \dots, k\}}$ und $\pi_2 = \sigma^{-1} \circ \pi|_{\{k+1, \dots, k+i\}}$. Es ist $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^{\sum_{j \leq k} (\sigma(j) - j)}$, denn um die natürliche Ordnung von $\sigma(1), \dots, \sigma(k+i)$ wiederherzustellen müssen für alle $1 \leq j \leq k$ die $\sigma(j) - j$ vielen kleineren Zahlen aus $\{\sigma(k+1), \dots\}$ mit $\sigma(j)$ vertauscht werden.

Falls T , S und R linear sind, dann ist

$$(T \wedge S)(w, v) = T(w)S(v) - T(v)S(w) = \det \begin{pmatrix} T(w) & S(w) \\ T(v) & S(v) \end{pmatrix}$$

und somit

$$\begin{aligned} 2((T \wedge S) \wedge R)(w, v, u) &= \\ &= (T \wedge S)(w, v)R(u) - (T \wedge S)(v, w)R(u) \\ &+ (T \wedge S)(v, u)R(w) - (T \wedge S)(w, u)R(v) \\ &+ (T \wedge S)(u, w)R(v) - (T \wedge S)(u, v)R(w) \\ &= (T(w)S(v) - T(v)S(w))R(u) - (T(v)S(w) - T(w)S(v))R(u) \\ &+ (T(v)S(u) - T(u)S(v))R(w) - (T(w)S(u) - T(u)S(w))R(v) \\ &+ (T(u)S(w) - T(w)S(u))R(v) - (T(u)S(v) - T(v)S(u))R(w) \\ &= 2T(w)S(v)R(u) + 2T(v)S(u)R(w) + 2T(u)S(w)R(v) \\ &- 2T(v)S(w)R(u) - 2T(w)S(u)R(v) - 2T(u)S(v)R(w) \\ &= 2 \det \begin{pmatrix} T(w) & S(w) & R(w) \\ T(v) & S(v) & R(v) \\ T(u) & S(u) & R(u) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

und folglich verschwinden auch im 3-fachen Produkt von 1-Formen alle Faktoren. Dies ist der Grund für die Wahl des Faktors $\frac{(k+i)!}{k!i!}$ bzw. $\frac{1}{k!i!}$, siehe auch [38.6.2](#). Analog zu obiger Formel für $T \wedge S$ können wir auch direkt ein Hackprodukt mehrerer multilinearer alternierender Funktionale definieren. Beachte noch, daß

$$T \wedge S = (-1)^{ki} S \wedge T,$$

denn

$$\begin{aligned} (T \wedge S)(v_1, \dots, v_{k+i}) &= \\ &= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot T(v_{\pi(1)}, \dots, v_{\pi(k)}) \cdot S(v_{\pi(k+1)}, \dots, v_{\pi(k+i)}) \\ &= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi'} \operatorname{sgn}(\pi' \circ \sigma) \cdot T(v_{\pi'(\sigma(1))}, \dots, v_{\pi'(\sigma(k))}) \cdot S(v_{\pi'(\sigma(k+1))}, \dots, v_{\pi'(\sigma(k+i))}) \\ &= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi'} \operatorname{sgn}(\pi' \circ \sigma) \cdot S(v_{\pi'(1)}, \dots, v_{\pi'(i)}) \cdot T(v_{\pi'(i+1)}, \dots, v_{\pi'(i+k)}) \\ &= (-1)^{ki} (S \wedge T)(v_1, \dots, v_{k+i}) \end{aligned}$$

wobei $\pi = \pi' \circ \sigma$ und σ jene Permutation ist, welche den Block $(1, \dots, k)$ mit $(k+1, \dots, k+i)$ vertauscht und Vorzeichen $(-1)^{ik}$ hat.

38.5 Lemma (Das äußere Produkt eines Vektorraums).

Es sei das k -fache äußere Produkt der Vektorräume E definiert durch $\bigwedge^k E := L_{\text{Alt}}^k(E^*, \mathbb{R})$ und $E \times \dots \times E \rightarrow \bigwedge^k E \subseteq \bigotimes^k E = L^k(E^*, \mathbb{R})$ sei die folgende alternierende, k -lineare Abbildung:

$$\begin{aligned} \wedge : (v_1, \dots, v_k) &\mapsto v_1 \wedge \dots \wedge v_k \quad \text{mit} \\ (v_1 \wedge \dots \wedge v_k)(w^1, \dots, w^k) &:= \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) w^{\pi(1)}(v_1) \dots w^{\pi(k)}(v_k) \\ &= k! \operatorname{alt}(v_1 \otimes \dots \otimes v_k)(w^1, \dots, w^k). \end{aligned}$$

Das äußere Produkt löst folgendes universelles Problem:

$$\begin{array}{ccc}
 E \times \dots \times E & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^k E \\
 \searrow^{k\text{-linear, alt.}} & & \swarrow^{\text{linear}} \\
 & & F
 \end{array}$$

Ist $\{e_i\}_{i=1}^m$ eine Basis von E (also $m = \dim E$), dann ist $\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m\}$ eine Basis von $\bigwedge^k E$ (also ist $\dim \bigwedge^k E = \binom{m}{k}$). Ist $k = \dim E$, so erzeugt $e_1 \wedge \dots \wedge e_k$ ganz $\bigwedge^k E$ und

$$(e_1 \wedge \dots \wedge e_k)(w^1, \dots, w^k) = \sum_{\pi} \text{sgn } \pi w_1^{\pi(1)} \dots w_k^{\pi(k)} = \det(w^1, \dots, w^k).$$

Beweis. Es ist $\wedge : E \times \dots \times E \rightarrow \bigwedge^k E$ durch $E \times \dots \times E \xrightarrow{\otimes} \bigotimes^k E \xrightarrow{k!\text{alt}} \bigwedge^k E$ gegeben, folglich bildet $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})_{i_1 < \dots < i_k}$ ein Erzeugendensystem von $\bigwedge^k E = L_{Alt}^k(E; \mathbb{R})$.

Es ist auch linear unabhängig, denn für aus $\sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k = 0$ folgt durch Anwenden auf $(e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k})$ mit $j_1 < \dots < j_k$ die Gleichung

$$\begin{aligned}
 0 &= \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k \right) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\
 &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \mu^{i_1, \dots, i_k} (e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k) (e_1^{j_1}, \dots, e_k^{j_k}) \\
 &= \mu^{j_1, \dots, j_k}
 \end{aligned}$$

Folglich läßt sich jede alternierende multilineare Abbildung $\mu : E \times \dots \times E \rightarrow F$ auf eine eindeutige Weise zu einer lineare Abbildung $\tilde{\mu} : \bigwedge^k E \rightarrow F$ durch

$$\tilde{\mu}(e_{i_1}^1 \wedge \dots \wedge e_{i_k}^k) := \mu(e_{i_1}^1, \dots, e_{i_k}^k)$$

fortsetzen, sodaß das angegebene Dreieck kommutiert. □

38.6 Bemerkungen

1. Es gelten die folgenden Identitäten:

$$L_{Alt}^k(E, F) \cong L\left(\bigwedge^k E, F\right); \quad \left(\bigwedge^k E\right)^* \cong L_{Alt}^k(E, \mathbb{R}) \cong L_{Alt}^k(E^{**}, \mathbb{R}) = \bigwedge^k E^*;$$

2. Zu jeder linearen Abbildung $T : E \rightarrow F$ existiert eine durch folgendes Diagramm eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\bigwedge^k T : \bigwedge^k E \rightarrow \bigwedge^k F$:

$$\begin{array}{ccc}
 E \times \dots \times E & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^k E \\
 \downarrow^{T \times \dots \times T} & & \downarrow^{\bigwedge^k T} \\
 F \times \dots \times F & \xrightarrow{\wedge} & \bigwedge^k F
 \end{array}$$

Damit wird \bigwedge^k zu einem Funktor. In der Tat ist $\bigwedge^k T$ auf der Basis $(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k})$ wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}
\bigwedge^k T(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) &= T(e_{i_1}) \wedge \cdots \wedge T(e_{i_k}) \\
&= \sum_{j_1} T_{i_1}^{j_1} f_{j_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{j_k} T_{i_k}^{j_k} f_{j_k} \\
&= \sum_{j_1, \dots, j_k} T_{i_1}^{j_1} \cdots T_{i_k}^{j_k} f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k} \\
&= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{\pi} T_{i_1}^{j_{\pi(1)}} \cdots T_{i_k}^{j_{\pi(k)}} f_{j_{\pi(1)}} \wedge \cdots \wedge f_{j_{\pi(k)}} \\
&= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{\pi} T_{i_1}^{j_{\pi(1)}} \cdots T_{i_k}^{j_{\pi(k)}} \operatorname{sign} \pi f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k} \\
&= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \det(T_{i_s}^{j_r})_{r,s} f_{j_1} \wedge \cdots \wedge f_{j_k}.
\end{aligned}$$

3. Für $m = \dim(E)$ ist der Raum $\bigwedge E := \bigoplus_{i=0}^m \bigwedge^i E$ eine graduiert-kommutative assoziative Algebra mit $1 \in \bigwedge^0 E := \mathbb{R}$, die sogenannte ÄUSSERE ALGEBRA über E . Dabei heißt eine graduierte Algebra $A = \bigoplus_k A_k (k \in \mathbb{N}_0)$ KOMMUTATIV, falls: $a \in A_k, b \in A_i \Rightarrow a \cdot b = (-1)^{ki} b \cdot a$. Es ist $\dim(\bigwedge E) = \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} = 2^m$.

39. Vektorbündel-Konstruktionen

39.1 Definition (Tensorfelder und Differentialformen)

Sei M eine m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $x \in M$. Als Vektorraum E verwenden wir nun den Tangentialraum $T_x M$ von M bei x . Dann ist $E^* = (T_x M)^*$, und wir bilden das Tensorprodukt

$$\underbrace{T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \cdots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}} = L^{p+q}(T_x^* M, \dots, T_x M; \mathbb{R}).$$

Die Elemente dieses Vektorraums bezeichnet man als p -FACH KONTRAVARIANTE, q -FACH KOVARIANTE VEKTOREN oder TENSOREN. Eine Basis von $T_x M$ ist gegeben durch $(\frac{\partial}{\partial u^i})_{i=1}^m$, wobei (u^1, \dots, u^m) lokale Koordinaten um x von M sind. Die duale Basis von $(T_x M)^*$ haben wir mit $(du^i)_{i=1}^m$ bezeichnet. Nach [38.3](#) erhalten wir als Basis des Tensorprodukts:

$$\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \cdots \otimes du^{j_q} \right)_{i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = 1, \dots, m}$$

Analog bilden wir $\bigwedge^k (T_x M)^* \cong L_{alt}^k(T_x M, \mathbb{R})$. Die Elemente dieses äußeren Produktes nennt man k -FORMEN und eine Basis bildet

$$(du^{i_1} \wedge \cdots \wedge du^{i_k})_{i_1 < \cdots < i_k}.$$

Lassen wir nun noch den Punkt $x \in M$ variieren, so können wir die Abbildungen

$$\omega : M \ni x \mapsto \omega(x) \in \underbrace{T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \cdots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}}$$

betrachten. Diese heißen p -FACH KONTRAVARIANTE UND q -FACH KOVARIANTE TENSORFELDER.

Eine Abbildung

$$\omega : M \ni x \mapsto \omega(x) \in \Lambda^k(T_x M)^*$$

heißt DIFFERENTIALFORM VOM GRAD k .

Um von der Glattheit eines Tensorfelds (oder einer Differentialform) sprechen zu können sollten wir die Familie der Vektorräume

$$\left(\underbrace{T_x M \otimes \cdots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \cdots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}} \right)_{x \in M}$$

zu einer Mannigfaltigkeit oder besser gleich zu einem Vektorbündel über M machen.

Wir gehen dabei wie beim Tangentialbündel und den daraus konstruierten Kotangentenbündel vor:

39.2 Direkte Summe von Vektorbündel

Seien $E \xrightarrow{p} M$ und $F \xrightarrow{q} M$ zwei Vektorbündel über M sowie φ^E eine Trivialisierung von E über $U \subset M$ und φ^F eine solche von F über dem o.B.d.A. gleichen U . Mit $\psi^E : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^k)$ und $\psi^F : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^l)$ bezeichnen wir die Transitionsfunktionen zu je zwei solcher Vektorbündelkarten über U und V . Wir wollen nun die disjunkte Vereinigung $E \oplus F := \bigsqcup_{x \in M} (E_x \oplus F_x)$ zu einem Vektorbündel machen. Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{E \oplus F} := \varphi_x^E \oplus \varphi_x^F : \mathbb{R}^{k+l} \cong \mathbb{R}^k \oplus \mathbb{R}^l \rightarrow E_x \oplus F_x.$$

Die Transitionsfunktionen $\psi^{E \oplus F} : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{k+l})$ sind dann durch

$$\psi^{E \oplus F}(x) := \psi^E(x) \oplus \psi^F(x) \in GL(\mathbb{R}^k) \times GL(\mathbb{R}^l)$$

gegeben. Als Matrix ist $\psi^{E \oplus F}(x)$ gerade $\begin{pmatrix} \psi^E(x) & 0 \\ 0 & \psi^F(x) \end{pmatrix}$. Also hat $\psi^{E \oplus F}$ wirklich

Werte in $GL(\mathbb{R}^{k+l})$ und ist glatt. Somit ist $E \oplus F \rightarrow M$ ein Vektorbündel, die sogenannte WHITNEY-SUMME von E und F .

39.3 Tensorprodukt von Vektorbündel

Analog zur direkten Summe machen wir nun die disjunkte Vereinigung $E \otimes F := \bigsqcup_{x \in M} (E_x \otimes F_x)$ zu einem Vektorbündel, dem sogenannten TENSORPRODUKT von E und F . Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{E \otimes F} := \varphi_x^E \otimes \varphi_x^F : \mathbb{R}^{kl} \cong \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l \rightarrow E_x \otimes F_x.$$

Die Transitionsfunktionen $\psi^{E \otimes F} : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{kl})$ sind dann durch

$$\psi^{E \otimes F}(x) := \psi^E(x) \otimes \psi^F(x) \in GL(\mathbb{R}^{kl}) \subset L(\mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l)$$

gegeben. Als Matrix ist $\psi^{E \otimes F}(x)$ gerade $(a_i^r b_j^s)_{(i,j),(r,s)}$, wobei (a_i^r) die Matrix von $\psi^E(x)$ und (b_j^s) die Matrix von $\psi^F(x)$ sei. Sind nämlich $(e_i)_{i=1}^k$ und $(f_j)_{j=1}^l$ die Standardbasen im \mathbb{R}^k und \mathbb{R}^l und (a_i^r) sowie (b_j^s) die Matrixdarstellungen von $A \in L(\mathbb{R}^k)$ und $B \in L(\mathbb{R}^l)$, so ist $A \otimes B : \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l \rightarrow \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^l$ gegeben durch $(A \otimes B)(v \otimes w) = A(v) \otimes B(w)$. Auf die Standardbasis $(e_i \otimes f_j)_{i,j}$ angewandt erhalten wir also:

$$A(e_i) \otimes B(f_j) = \left(\sum_r a_i^r e_r \right) \otimes \left(\sum_s b_j^s f_s \right) = \sum_{r,s} a_i^r b_j^s e_r \otimes f_s.$$

Also hat $\psi^{E \otimes F}$ wirklich Werte in $GL(\mathbb{R}^{kl})$ und ist glatt.

39.4 Äußeres Produkt eines Vektorbündels

Schließlich machen wir die disjunkte Vereinigung $\bigwedge^p E := \bigsqcup_{x \in M} \bigwedge^p E_x$ zu einem Vektorbündel, dem sogenannten p -FACHEN ÄUSSEREN PRODUKT von E . Als Vektorbündelkarten verwenden wir faserweise

$$\varphi_x^{\bigwedge^p E} := \bigwedge^p (\varphi_x^E) : \mathbb{R}^{\binom{k}{p}} \cong \bigwedge^p \mathbb{R}^k \rightarrow \bigwedge^p E_x.$$

Die Transitionsfunktionen $\psi^{\bigwedge^p E} : U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}})$ sind dann durch

$$\psi^{\bigwedge^p E}(x) := \bigwedge^p (\psi^E(x)) \in GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}}) \subset L\left(\bigwedge^p \mathbb{R}^k, \bigwedge^p \mathbb{R}^k\right)$$

gegeben. Wie zuvor zeigt man wieder, daß die Transitionsfunktionen wirklich Werte in $GL(\mathbb{R}^{\binom{k}{p}})$ haben und glatt sind.

Allgemeiner hat man folgende Konstruktion:

39.5 Theorem (Funktorielle Vektorbündel Konstruktionen).

Es sei \mathcal{F} eine Zuordnung, die jeder Familie von $(k+i)$ endlichdimensionalen Vektorräumen einen endlichdimensionalen Vektorraum zuweist und die FUNKTORIELL ist.

Funktoriell bedeutet, daß jedem $(k+i)$ -Tupel linearer Abbildungen $T_j : E_j \rightarrow E_j$ für $j \leq k$ "kontravariant in den vorderen Variablen"
 $T_j : E_j \rightarrow F_j$ für $k < j$ "kovariant in den hinteren Variablen"
 eine lineare Abbildung

$$\mathcal{F}(T_1, \dots, T_{k+i}) : \mathcal{F}(E_1, \dots, E_{k+i}) \rightarrow \mathcal{F}(F_1, \dots, F_{k+i})$$

zugeordnet wird, die mit Komposition und Identität verträglich ist und glatt von T_1, \dots, T_{k+i} abhängt.

Dann ist für $(k+i)$ Vektorbündel $p_j : E_j \rightarrow M$ eine natürliche Vektorbündel-Struktur auf $\mathcal{F}(E_1, \dots, E_{k+i}) := \bigsqcup_x \mathcal{F}(E_1|_x, \dots, E_{k+i}|_x)$ gegeben.

Ein Beispiel eines solchen Funktors ist die direkte Summe \oplus ; der auf Vektorbündel angewandt die Whitney-Summe liefert.

Ein weiteres ist der Dualraum-Funktor, der auf das Tangentenbündel $\pi : TM \rightarrow M$ angewandt das Kotangentenbündel $T^*M = \bigsqcup_x (T_x M)^* \rightarrow M$ liefert.

Andere Beispiele sind das Tensorprodukt und das äußere Produkt sowie Kombinationen von ihnen, wie $\bigwedge^k T^*M = L_{Alt}^k(TM, \mathbb{R}) = \left(\bigwedge^k TM\right)^*$.

Beweis. Die Vektorbündelkarten $\mathcal{F}(\psi_1, \dots, \psi_{k+i})$ werden aus jenen für E_i durch folgende Formel gewonnen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\psi_1, \dots, \psi_{k+i})|_x &= \\ &= \mathcal{F}\left((\psi_1)_x^{-1}, \dots, (\psi_k)_x^{-1}, (\psi_{k+1})_x, \dots, (\psi_{k+i})_x\right) \\ &= \mathcal{F}(\psi_1, \dots, \psi_{k+i})|_x : \mathcal{F}(\mathbb{R}^{N_1}, \dots, \mathbb{R}^{N_{k+i}}) \rightarrow \mathcal{F}(E_1|_x, \dots, E_{k+i}|_x) \end{aligned}$$

Die Transitionsfunktionen werden durch Zusammensetzen folgender Abbildungen gegeben:

$$\begin{aligned}
 (\psi_1|_x, \dots, \psi_{k+i}|_x) &: U \cap V \rightarrow GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \\
 (\text{inv}, \dots; \text{id}, \dots) &: GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \rightarrow \\
 &\rightarrow GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \\
 \mathcal{F} &: GL(\mathbb{R}^{N_1}) \times \dots \times GL(\mathbb{R}^{N_{k+i}}) \rightarrow \\
 &\rightarrow GL(\mathcal{F}(\mathbb{R}^{N_1}, \dots, \mathbb{R}^{N_{k+i}})) \quad \square
 \end{aligned}$$

40. Differentialformen

40.1 Definition (glatte Tensorfelder und Differentialformen)

Der VEKTORRAUM DER GLATTEN p -FACH KONTRAVARIANT UND q -FACH KOVARIANTEN TENSORFELDER oder kurz p - q -TENSORFELDER, d.h. der glatten Schnitte des Vektorbündels

$$\underbrace{TM \otimes \dots \otimes TM}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(TM)^* \otimes \dots \otimes (TM)^*}_{q\text{-mal}}$$

wird auch mit $\mathcal{T}_p^q(M)$ bezeichnet.

Lokal läßt sich jedes Tensorfeld Φ als

$$\Phi = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q}$$

schreiben. Und wir wissen, daß Φ genau dann glatt ist, wenn alle Komponenten $\Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p}$ glatte reell-wertige Funktionen sind. Insbesondere sind die 0-0-Tensorfelder gerade die reell-wertigen Funktionen, die 1-0-Tensorfelder die Vektorfelder und die 0-1-Tensorfelder die 1-Formen.

Der VEKTORRAUM DER GLATTEN DIFFERENTIALFORMEN VOM GRAD p , d.h. glatten Schnitte des Vektorbündels $\bigwedge^p (TM)^*$ wird mit $\Omega^p(M)$ bezeichnet. Diesen Raum können wir auch anders beschreiben:

$$\begin{aligned}
 \Omega^p(M) &:= \Gamma(\bigwedge^p (TM)^* \rightarrow M) \\
 &\cong \Gamma((\bigwedge^p TM)^* \rightarrow M) \\
 &\cong \left\{ \omega : \bigwedge^p TM \rightarrow \mathbb{R} : \omega_x \in L\left(\bigwedge^p T_x M, \mathbb{R}\right) \forall x \right\} \\
 &\cong \left\{ \omega : \oplus^p TM \rightarrow \mathbb{R} : \omega_x \in L_{Alt}^p(T_x M, \mathbb{R}) \forall x \right\}
 \end{aligned}$$

Wegen $\bigwedge^0 (TM)^* = M \times \mathbb{R}$ stimmt der Raum $\Omega^0(M)$ der 0-Formen mit $C^\infty(M, \mathbb{R})$ überein. Jede Differentialform ω vom Grad k läßt sich lokal als

$$\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$$

schreiben. Wieder gilt, daß ω glatt ist, wenn alle seine Koordinatenfunktionen ω_{i_1, \dots, i_k} glatt sind.

Für die Koeffizienten ω_{i_1, \dots, i_k} ergibt sich aus

$$\begin{aligned} & (du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}) \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \right) = \\ &= \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \, du^{i_1} \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_{\pi(1)}}} \right) \dots du^{i_k} \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_{\pi(k)}}} \right) \\ &= \begin{cases} \operatorname{sgn} \pi & \text{falls eine Permutation } \pi \text{ existiert mit } j_{\pi(k)} = i_k \forall k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

folgende Formel für $j_1 < \dots < j_k$:

$$\begin{aligned} & \omega \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \right) = \\ &= \left(\sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1 \dots i_k} \cdot du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k} \right) \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}} \right) = \omega_{j_1 \dots j_k}. \end{aligned}$$

40.2 Bemerkung

Wegen

$$\begin{aligned} & \underbrace{T_x M \otimes \dots \otimes T_x M}_{p\text{-mal}} \otimes \underbrace{(T_x M)^* \otimes \dots \otimes (T_x M)^*}_{q\text{-mal}} \cong \\ & \cong L \left(\underbrace{(T_x M)^*, \dots, (T_x M)^*}_{p\text{-mal}}, \underbrace{T_x M, \dots, T_x M}_{q\text{-mal}}; \mathbb{R} \right) \end{aligned}$$

können wir ein p - q -Tensorfeld

$$\Phi = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial u^{i_p}} \otimes du^{j_1} \otimes \dots \otimes du^{j_q}$$

punktweise auf q Tangentialvektoren $\xi_1, \dots, \xi_q \in T_x M$ und p Kotangentialvektoren $\omega^1, \dots, \omega^p$ anwenden:

$$\begin{aligned} & \Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) = \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \otimes \dots \otimes du^{j_q} \right) \left(\sum_{r_1} \omega_{r_1}^1 du^{r_1}, \dots, \sum_{s_q} \xi_{s_q}^{s_q} \frac{\partial}{\partial u^{s_q}} \right) \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q \\ r_1, \dots, r_p \\ s_1, \dots, s_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{r_1}^1 \delta_{i_1}^{r_1} \dots \xi_{s_q}^{s_q} \delta_{s_q}^{j_q} \\ &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1}^1 \dots \omega_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \dots \xi_q^{j_q}. \end{aligned}$$

Satz (Tensorfelder als $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineare Abbildungen).

Obige Abbildung liefert einen linearen Isomorphismus des Raums T_p^q der glatten p - q -Tensorfelder mit dem Raum $L_{C^\infty(M, \mathbb{R})}^k(\Omega^1(M), \dots, \mathfrak{X}(M); C^\infty(M, \mathbb{R}))$ der $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilinearen Abbildungen.

Beweis. Wir gehen analog zum Beweis von [31.11](#) vor:

Offensichtlich wirkt jedes Tensorfeld Φ auf 1-Formen $\omega^1, \dots, \omega^p \in \Omega^1(M)$ und auf Vektorfelder $\xi_1, \dots, \xi_q \in \mathfrak{X}(M)$ als $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -lineare Abbildung, durch

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x) := \Phi_x(\omega^1(x), \dots, \omega^p(x), \xi_1(x), \dots, \xi_q(x))$$

und wegen der obigen lokalen Formel

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1}^1 \cdot \dots \cdot \omega_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_q^{j_q}$$

liegt $\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Umgekehrt sei $\Phi : \Omega^1(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ eine $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineare Abbildung. Falls eines der Vektorfelder oder 1-Formen σ lokal um $x \in M$ verschwindet, so auch $\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)$, denn sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ so gewählt, daß $f = 1$ auf dem Träger jenes Schnittes σ und $f(x) = 0$ gilt. Dann ist $f \cdot \sigma = \sigma$ und wegen der $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Linearität ist

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x) = f(x) \cdot \Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x) = 0.$$

Folglich erhalten wir die lokale Formel

$$\Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q) = \sum_{\substack{i_1, \dots, i_p \\ j_1, \dots, j_q}} \Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} \cdot \omega_{i_1}^1 \cdot \dots \cdot \omega_{i_p}^p \cdot \xi_1^{j_1} \cdot \dots \cdot \xi_q^{j_q},$$

mit $\Phi_{j_1, \dots, j_q}^{i_1, \dots, i_p} := \Phi\left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{i_p}}, du^{j_1}, \dots, du^{j_q}\right)$, deren rechte Seite an der Stelle x nur von Wert der 1-Formen und Vektorfelder an dieser Stelle abhängt. Also definiert

$$\Phi_x(\omega^1|_x, \dots, \xi_q|_x) := \Phi(\omega^1, \dots, \omega^p, \xi_1, \dots, \xi_q)(x)$$

ein glattes Tensorfeld, das gesuchte inverse Bild zu Φ . \square

40.3 Satz (Differentialformen als $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -multilineare Abbildungen).

Es existiert ein linearer Isomorphismus von $\Omega^k(M)$ mit $\left\{ \omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) : \omega \text{ ist } k\text{-linear alternierend und } C^\infty(M, \mathbb{R})\text{-homogen} \right\}$.

Beweis. (\Rightarrow) Offensichtlich ist $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = \omega_p(\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p)$ k -linear und alternierend.

Die Abbildung ω ist aber auch $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -homogen:

$$\begin{aligned} \omega(f \xi_1, \dots, \xi_k)|_p &= \omega_p(f_p \xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) = f(p) \omega_p(\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) \\ &= f \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p \end{aligned}$$

Weiters ist $M \xrightarrow{(\xi_1, \dots, \xi_k)} TM \oplus \dots \oplus TM \xrightarrow{\omega} \mathbb{R}$ glatt, also $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

(\Leftarrow) Sei $\omega : \mathfrak{X}(M) \times \dots \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit obigen Eigenschaften. Es ist z.z., daß $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p$ nur von $\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p$ abhängt, denn dann können wir definieren: $\omega_p(\xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) := \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p$.

Sei $\xi_1 = 0$ lokal um p , sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f(p) = 0$ und $f = 1$ dort wo $\xi_1 \neq 0$. Dann gilt $f \cdot \xi_1 = \xi_1$ und somit wie zuvor

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = \omega(f \xi_1, \dots, \xi_k)|_p = f(p) \omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = 0.$$

Sei weiters $\xi_1 = \sum_{i=1}^m \xi_1^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ lokal. Dann gilt

$$\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \omega\left(\sum_i \xi_1^i \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), \dots, \xi_k\right) = \sum_i \xi_1^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \dots, \xi_k\right)$$

und da $\xi_1|_p = 0$ gilt $\xi_1^i|_p = 0 \forall i$ und somit $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)|_p = 0$.

Sei $\omega = \sum \omega_I dx^I$ eine lokale Darstellung von ω , dabei ist $dx^I := dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_k}$ für $I = \{i_1 < \dots < i_k\}$. Es ist $\omega_I(p) = \omega(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}})|_p$ glatt bei p , also ist $\omega \in \Omega^k(M)$. \square

41. Differentialformen auf Riemann MF

32.1 Bemerkung zur Dualität

Für $M = U \subset \mathbb{R}^m$ können wir das Tangentialbündel und das Kotangentialbündel identifizieren, denn $TM = M \times \mathbb{R}^m$ und $T^*M = M \times (\mathbb{R}^m)^*$. Es sind also sowohl die Vektorfelder als auch die 1-Formen auf M mit Abbildungen $M \rightarrow \mathbb{R}^m$ ident. Im allgemeinen gibt es aber keinen solchen kanonischen Isomorphismus zwischen $T_x M$ und $(T_x M)^*$. Wir wollen nun Mannigfaltigkeiten beschreiben, für welche es einen solchen dennoch gibt. Inwiefern ist denn ein endlich dimensionaler Vektorraum E und sein Dualraum E^* isomorph? Da sie die gleiche Dimension haben sind sie isomorph. Aber um einen solchen Isomorphismus angeben zu können, verwendet man üblicherweise eine Basis von E und als Bildvektoren die duale Basis von E^* . Wählt man eine andere Basis, so ändert sich auch der Isomorphismus. So können wir auf einer Mannigfaltigkeit nicht vorgehen, denn in $T_x M$ haben wir keine ausgezeichnete Basis zur Verfügung.

Eine zweite Möglichkeit so einen Isomorphismus zu erhalten ist die Verwendung eines inneren Produkts $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf E . Dann induziert diese bilineare Form eine lineare Abbildung $\sharp : E \rightarrow L(E, \mathbb{R}) = E^*$ durch $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$. Diese ist injektiv, denn: $\forall w \langle v, w \rangle = 0 \Rightarrow v = 0$. Aus Dimensionsgründen ist sie somit ein Isomorphismus. Ihre Umkehrabbildung bezeichnen wir mit $\flat := \sharp^{-1} : E^* \rightarrow E$. Wegen $\sharp(\xi)(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle$ ist $\langle \flat \omega, \eta \rangle = \langle \xi, \eta \rangle = \sharp(\xi)(\eta) = \omega(\eta)$, wobei wir $\xi := \flat \omega$ gesetzt haben und somit $\omega = \sharp \xi$ ist.

Wie sieht \sharp in Koordinaten aus? Sei (e_i) eine Orthonormalbasis von E und (e^i) die dazugehörige duale Basis. Dann ist $\sharp(e_i)(e_j) := \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j} = e^i(e_j)$, also bildet \sharp die Basis (e_i) auf die duale Basis (e^i) ab.

Falls (g_i) eine beliebige Basis von E ist und (g^i) die dazugehörige duale Basis von E^* , so gilt:

$$\begin{aligned} \sharp(g_i)(g_k) &= \langle g_i, g_k \rangle =: g_{i,k} = \sum_j g_{i,j} g^j(g_k) \\ \Rightarrow \sharp(g_i) &= \sum_j g_{i,j} g^j \text{ und} \\ \sharp(v) &= \sharp\left(\sum_i v^i g_i\right) = \sum_i v^i \sum_j g_{i,j} g^j = \sum_j \left(\sum_i g_{i,j} v^i\right) g^j \end{aligned}$$

Bezeichnen wir mit v^i die Koordinaten des Vektors $v \in E$ bezüglich der Basis (g_i) und mit v_j die Koordinaten des dazugehörigen dualen Vektors $\sharp(v) \in E^*$ bezüglich der dualen Basis (g^i) , so gilt also:

$$v_j = \sum_i g_{i,j} v^i.$$

Sei nun $M \subset \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit des \mathbb{R}^n . Dann ist $T_x M$ ein Teilraum vom \mathbb{R}^n und erbt somit das übliche innere Produkt von \mathbb{R}^n . Also ist $(T_x M)^*$ isomorph zu $T_x M$ vermöge dem Isomorphismus $\sharp : T_x M \rightarrow (T_x M)^*$. Wir erhalten also auch

eine faserlineare Bijektion der Bündel $TM \rightarrow M$ und $T^*M \rightarrow M$. In Koordinaten ist sie durch

$$\frac{\partial}{\partial u^i} \mapsto \sum_j g_{i,j} du^j$$

gegeben, wobei $g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle$ mit $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$ und $g^i = du^i$. Da die g_i glatte Funktionen von $M \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}^n$ sind, sind alle Koeffizienten $g_{i,j} : M \supseteq U \rightarrow \mathbb{R}$ glatt, und somit die Bündel TM und T^*M isomorph.

Es entsprechen sich also auch die glatten Schnitte eindeutig, d.h. $\mathfrak{X}(M) \cong \Omega^1(M)$. Das Vektorfeld, welches einer exakten 1-Form df entspricht, heißt GRADIENTENFELD $\text{grad}(f)$ von f .

Nun wollen wir das auf allgemeine Mannigfaltigkeiten M übertragen. Dazu benötigen wir für alle $x \in M$ ein inneres Produkt g_x im Tangentialraum $T_x M$. Daß dieses vernünftig von x abhängt, gewährleisten wir folgendermaßen.

41.1 Tensorfelder auf Riemann-Mannigfaltigkeiten

Allgemein wissen wir, daß $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist und wir wollen nun $\Omega^1(M)$ anders beschreiben. Sei dazu vorerst E ein endlich dimensionaler Vektorraum mit innerem Produkt. Wir haben dann nach [32.1](#) einen Isomorphismus $\sharp : E \xrightarrow{\cong} E^*$ definiert durch $\sharp : v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$. Sein Inverses bezeichnen wir mit $\flat := \sharp^{-1}$. Sei (e_i) eine Orthonormalbasis von E und (e^i) die duale Basis von E^* , dann ist:

$$\sharp : x = \sum_i x^i e_i \in E \mapsto \sum_i x^i e^i \in E^*.$$

Sei (M, g) eine Riemann-Mannigfaltigkeit mit dem zugehörigen Tangentialraum $\sharp : T_x M \cong (T_x M)^*$. Eine Basis im Tangentialraum ist gegeben durch $\frac{\partial}{\partial u^i}$, diese wird nach [32.1](#) abgebildet auf $\sharp(\frac{\partial}{\partial u^i}) = \sum_j g_{j,i} du^j$. Und allgemeiner wird $\xi \in T_x M$ wie folgt abgebildet:

$$\sharp : \xi = \sum_i \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \in T_x M \mapsto \omega = \sum_i \omega_i du^i \in (T_x M)^*.$$

wobei $\xi^i = \sum_j g^{i,j} \omega_j$, $\omega_i = \sum_j g_{i,j} \xi^j$ und $g_{i,j} = \langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \rangle$ sind, und $(g^{i,j}) = (g_{i,j})^{-1}$ ist. Es folgt, daß auf kanonische Weise $TM \cong T^*M$ ist, und somit der Raum der Vektorfelder $\mathfrak{X}(M)$ kanonisch isomorph zum Raum der 1-Formen $\Omega^1(M)$ ist.

Allgemeiner gilt:

$$\mathcal{T}_p^q(M) \cong \mathcal{T}_{p+q}^0(M) \cong \mathcal{T}_0^{p+q}(M)$$

41.2 Volumsform

Sei E ein endlich dimensionaler, orientierter Vektorraum mit innerem Produkt. Falls (e_1, \dots, e_m) eine positiv orientierte Orthonormalbasis von E ist, so definieren wir $\det \in L_{Alt}^m(E; \mathbb{R})$ durch $\det(e_1, \dots, e_m) = 1$. Um zu zeigen, daß diese Definition nicht von der gewählten Basis abhängt wählen wir beliebige Vektoren $g_i \in E$ und betrachten die Abbildung $A : E \rightarrow E$, welche e_j auf $g_j := \sum_i a_j^i e_i$ abbildet. Dann

ist

$$\begin{aligned}
 \det(g_1, \dots, g_m) &= \det\left(\sum_{j_1} a_1^{j_1} e_{j_1}, \dots, \sum_{j_m} a_m^{j_m} e_{j_m}\right) \\
 &= \sum_{j_1, \dots, j_m} a_1^{j_1} \cdots a_m^{j_m} \underbrace{\det(e_{j_1}, \dots, e_{j_m})}_{=0, \text{ falls } j_1, \dots, j_m \text{ keine} \\ &\quad \text{Permutation von } 1, \dots, m} \\
 &= \sum_{j \text{ Permutation}} a_1^{j(1)} \cdots a_m^{j(m)} \underbrace{\operatorname{sgn}(j) \det(e_1, \dots, e_m)}_{=1} \\
 &= \det(a_i^j)_{i,j}.
 \end{aligned}$$

Falls also $(g_i)_i$ insbesondere eine andere positiv orientierte Orthonormalbasis ist, so ist $[A] \in SO(n)$, also $1 = \det[A] = \det(g_1, \dots, g_m)$.

Da wir diese Konstruktion auf den Tangentialraum einer orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit anwenden wollen (dort aber nicht eine orthonormal-Basis) sondern nur eine (positiv orientierte) Basis $(\frac{\partial}{\partial u^j})_j$ gegeben haben, benötigen wir auch für so eine Basis (g_j) eine Formel für die Determinante: Dazu betrachten wir wieder die inneren Produkte

$$g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle = \left\langle \sum_k a_i^k e_k, \sum_l a_j^l e_l \right\rangle = \sum_{k,l} a_i^k a_j^l \underbrace{\langle e_k, e_l \rangle}_{\delta_{k,l}} = \sum_k a_i^k a_j^k$$

und erhalten $(g_{i,j})_{i,j} = [A \cdot A^t]$ und weiters

$$\det(g_{i,j})_{i,j} = \det([A] \cdot [A]^t) = (\det[A])^2$$

und schließlich (wegen $\det[A] > 0$)

$$\det(g_1, \dots, g_m) = \det[A] = \sqrt{\det(g_{i,j})_{i,j}} =: \sqrt{G}.$$

Für jede orientierte (siehe [60, 34.3]) Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) ist $\det \in L_{\text{alt}}^m(T_x M, \mathbb{R})$ und wir definieren die Volumsform $\operatorname{vol}_M \in \Omega^m(M)$ der Mannigfaltigkeit durch

$$\operatorname{vol}_M(x) := \det \in L_{\text{alt}}^m(T_x M; \mathbb{R}).$$

Diese Volumsform wollen wir mittels lokaler Koordinaten (u^1, \dots, u^m) berechnen. Es bilden die $g_i := \frac{\partial}{\partial u^i}$ eine Basis in $T_x M$, von der wir annehmen dürfen, daß sie positiv orientiert ist, wenn wir ein Orientierungs-erhaltende Karte $\varphi = (u^1, \dots, u^m)^{-1}$ verwenden. Es ist $\operatorname{vol} = \operatorname{vol}_{1, \dots, m} \cdot du^1 \wedge \dots \wedge du^m$ mit

$$\begin{aligned}
 \operatorname{vol}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right) &= \left(\operatorname{vol}_{1, \dots, m} \cdot du^1 \wedge \dots \wedge du^m\right) \left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right) \\
 &= \operatorname{vol}_{1, \dots, m} \cdot \sum_{\pi} \operatorname{sgn}(\pi) \underbrace{du^1\left(\frac{\partial}{\partial u^{\pi(1)}}\right)}_{\delta_{\pi(1),1}} \cdots \underbrace{du^m\left(\frac{\partial}{\partial u^{\pi(m)}}\right)}_{\delta_{\pi(m),m}} = \operatorname{vol}_{1, \dots, m},
 \end{aligned}$$

da π die Identität sein muß, siehe auch [40.1]. Wegen obiger Rechnung ist

$$\operatorname{vol}\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}\right) = \det(g_1, \dots, g_m) = \sqrt{G}$$

$$\text{mit } G := \det(g_{i,j})_{i,j} \text{ und } g_{i,j} := \langle g_i, g_j \rangle = g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right).$$

Wir erhalten für orientierbare Riemann-Mannigfaltigkeiten folgenden Isomorphismus:

$$C^\infty(M, \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \Omega^m(M), \quad f \mapsto f \cdot \operatorname{vol}_M.$$

41.3 Skalare Produkt auf $\Omega(M)$

Dazu betrachten wir zuerst einen orientierten, m -dimensionalen Vektorraum E . Seien die (e_i) eine positiv-orientierte Orthonormalbasis von E . Wir definieren ein skalares Produkt auf E^* indem wir fordern, daß die duale Basis (e^i) ebenfalls eine Orthonormalbasis sei. Auf $\otimes^k E$ definieren wir ein skalares Produkt indem wir fordern, daß die Basis $(e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k})_{i_1, \dots, i_k}$ eine Orthonormalbasis sei und analog auf $\wedge^k E$ durch die Orthonormalbasis $(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k})_{i_1 < \dots < i_k}$. Diese Definition ist von der Basis unabhängig, denn das skalare Produkt auf E^* ist durch folgende Formel gegeben:

$$\langle x^*, y^* \rangle_{E^*} = \langle \flat x^*, \flat y^* \rangle_E, \text{ da } \langle e^i, e^j \rangle_{E^*} = \langle e_i, e_j \rangle_E = \delta_{i,j},$$

wobei $\flat : E^* \rightarrow E$ den inversen Isomorphismus zu $\sharp : E \rightarrow E^*$ bezeichnet. Auf $\otimes^k E$ ist das skalare Produkt analog gegeben durch:

$$\langle x_1 \otimes \dots \otimes x_k, y_1 \otimes \dots \otimes y_k \rangle_{\otimes^k E} = \langle x_1, y_1 \rangle_E \cdot \dots \cdot \langle x_k, y_k \rangle_E$$

Auf $\wedge^k E$ ist das skalare Produkt analog gegeben durch:

$$\begin{aligned} \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, y_1 \wedge \dots \wedge y_k \rangle_{\wedge^k E} &= \det \left((\langle x_i, y_j \rangle_E)_{i,j} \right) \\ &= \frac{1}{k!} \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, y_1 \wedge \dots \wedge y_k \rangle_{\otimes^k E}. \end{aligned}$$

Achtung: Die Einschränkung des skalaren Produkts von $\otimes^k E$ auf den Teilraum $\wedge^k E$ hat noch einen Faktor $k!$, denn

$$x_1 \wedge \dots \wedge x_k = k! \operatorname{alt}(x_1 \otimes \dots \otimes x_k) = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \langle x_1 \wedge \dots \wedge x_k, x_1 \wedge \dots \wedge x_k \rangle_{\otimes^k E} &= \\ &= \sum_{\sigma, \pi} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\pi) \langle x_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(k)}, x_{\pi(1)} \otimes \dots \otimes x_{\pi(k)} \rangle_{\otimes^k E} \\ &= \sum_{\sigma, \pi} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\pi) \langle x_{\sigma(1)}, x_{\pi(1)} \rangle \dots \langle x_{\sigma(k)}, x_{\pi(k)} \rangle \\ &= \sum_{\sigma, \pi} \operatorname{sign}(\sigma) \operatorname{sign}(\pi \circ \sigma) \langle x_{\sigma(1)}, x_{\pi(\sigma(1))} \rangle \dots \langle x_{\sigma(k)}, x_{\pi(\sigma(k))} \rangle \\ &= k! \sum_{\pi} \operatorname{sign}(\pi) \langle x_1, x_{\pi(1)} \rangle \dots \langle x_k, x_{\pi(k)} \rangle. \end{aligned}$$

41.4 Definition (Hodge-Sternoperator)

Sei E ein orientierter m -dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann hat $\wedge^k E$ Dimension $\binom{m}{k}$. Und somit ist $\wedge^k E \cong \wedge^{m-k} E$. Wir wollen nun einen Isomorphismus $*$: $\wedge^k E \rightarrow \wedge^{m-k} E$ angeben, der nicht von der Wahl einer Basis abhängt. Dieser heißt Hodge-Sternoperator und ist durch folgende implizite Gleichung gegeben:

$$\eta \wedge (*\omega) = \langle \eta, \omega \rangle \cdot \det \text{ für } \eta, \omega \in \wedge^k E.$$

Um zu zeigen, daß dadurch wirklich ein linearer Operator eindeutig bestimmt ist wählen wir eine positiv orientierte Orthonormalbasis (e^1, \dots, e^m) in E .

Eine Basis von $\bigwedge^k E$ ist dann durch die Elemente $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ mit $i_1 < \dots < i_k$ und eine solche von $\bigwedge^{m-k} E$ durch die Elemente

$$e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{i_1}} \wedge \dots \wedge \overline{e^{i_k}} \wedge \dots \wedge e^m$$

gegeben. Wir wollen die Koeffizienten α_{j_1, \dots, j_k} des Bildes von $\omega = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$ unter dem Sternoperator bestimmen:

$$*\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \alpha_{j_1, \dots, j_k} e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{j_1}} \wedge \dots \wedge \overline{e^{j_k}} \wedge \dots \wedge e^m.$$

Dazu verwenden wir die implizite Gleichung mit

$$\eta := e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_k} \text{ f\"ur } l_1 < \dots < l_k$$

und erhalten

$$\begin{aligned} \alpha_{l_1, \dots, l_k} e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_k} \wedge e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_1}} \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_k}} \wedge \dots \wedge e^m &= \\ = \eta \wedge (*\omega) &= \langle \eta, \omega \rangle \det \\ = \underbrace{\langle e^{l_1} \wedge \dots \wedge e^{l_k}, e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \rangle}_{\delta^{(l_1, \dots, l_k), (i_1, \dots, i_k)}} e^1 \wedge \dots \wedge e^m. \end{aligned}$$

Um das Hackprodukt auf der linken Seite auch in die natürliche Reihenfolge zu bekommen müssen wir zuerst e^{l_k} mit $e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_1}} \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_k}}$ vertauschen und erhalten ein Vorzeichen $(-1)^{l_k - k}$, danach $e^{l_{k-1}}$ mit $e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_1}} \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_{k-1}}}$ und erhalten ein Vorzeichen $(-1)^{l_{k-1} - k - 1}$ u.s.w. und schließlich e^{l_1} mit $e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{l_1}}$ mit $(-1)^{l_1 - 1}$ als resultierenden Vorzeichen. Also verschwinden alle α_{l_1, \dots, l_k} bis auf

$$\alpha_{i_1, \dots, i_k} = (-1)^{i_k - k} \dots (-1)^{i_1 - 1} = (-1)^{(\sum_{j=1}^k i_j) - k(k+1)/2}.$$

Wir wollen nun zeigen, daß $*$ bis auf ein Vorzeichen zu sich selbst invers ist. Sei $\omega = e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k} \in \bigwedge^k E$ gegeben. Dann ist

$$*\omega = (-1)^{(\sum_{j=1}^k i_j) - k(k+1)/2} e^1 \wedge \dots \wedge \overline{e^{i_1}} \wedge \dots \wedge \overline{e^{i_k}} \wedge \dots \wedge e^m$$

und

$$**\omega = (-1)^{1 + \dots + \overline{i_1} + \dots + \overline{i_k} + m - (m-k)(m-k+1)/2} (-1)^{i_1 + \dots + i_k - k(k+1)/2} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$$

Die Berechnung des Vorzeichen ergibt: $(-1)^{k(m-k)}$, d.h. $* \circ * = (-1)^{k(m-k)} : \bigwedge^k E \rightarrow \bigwedge^{m-k} E \rightarrow \bigwedge^k E$. Dieses Vorzeichen ist genau dann -1 (und sonst $+1$), wenn m gerade und k ungerade ist.

Der Hodge-Stern Operator ist eine Isometrie, wie man entweder durch die Wirkung auf einer orthonormal-Basis sofort sieht, oder wie aus

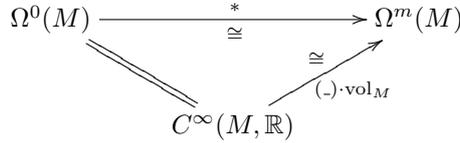
$$\langle *\alpha, *\beta \rangle \cdot \text{vol}_M = *\alpha \wedge **\beta = (-1)^{k(m-k)} *\alpha \wedge \beta = \beta \wedge *\alpha = \langle \beta, \alpha \rangle \text{vol}_M$$

folgt. Umgekehrt hätten wir auch die Isometrie-Eigenschaft von $*$ verwenden können um mit dieser Rechnung $* \circ * = (-1)^{k(m-k)}$ zu zeigen.

Für eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) der Dimension m definieren wir den HODGE-STERNOOPERATOR $*$: $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{m-k}(M)$ durch $(*\omega)(x) := *(\omega(x))$.

41.5 Spezialfälle

($k = 0$)



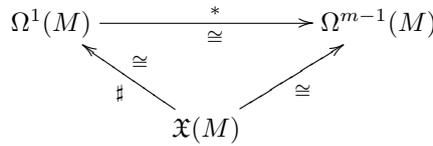
Sei $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, dann ist $g \wedge *f = \langle g, f \rangle_{C^\infty(M, \mathbb{R})} \cdot \text{vol}_M$. Wählen wir $g := 1$, so gilt:

$$*f = 1 \wedge *f = f \cdot \text{vol}_M \text{ für } * : C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^m(M)$$

und wegen $* \circ * = \text{id}$, ist

$$*(f \cdot \text{vol}_M) = f \text{ für } * : \Omega^m(M) \rightarrow \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R}).$$

($k = 1$)



Sei $\xi = \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \omega = \sum \omega_i du^i \in \Omega^1(M)$, wobei $\omega_i = \sum_j g_{i,j} \xi^j$ und $\text{vol}_M = \sqrt{G} du^1 \wedge \dots \wedge du^m$, dann gilt für

$$*\omega = \sum_{i=1}^m \overbrace{\eta_{1, \dots, \hat{i}, \dots, m}}^{\eta_i :=} du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m$$

$$\begin{aligned}
 \eta_i (-1)^{i-1} du^1 \wedge \dots \wedge du^m &= \eta_i du^i \wedge du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \\
 &= du^i \wedge (*\omega) = \left\langle du^i, \sum \omega_j du^j \right\rangle \cdot \text{vol}_M \\
 &= \sum_j \omega_j \underbrace{\langle du^i, du^j \rangle_{\Omega^1(M)}}_{g^{i,j}} \cdot \text{vol}_M \\
 &= \sum_j \omega_j g^{i,j} \sqrt{G} du^1 \wedge \dots \wedge du^m,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{da } \langle du^i, du^j \rangle &= \langle b(du^i), b(du^j) \rangle = \left\langle \sum_k g^{i,k} \frac{\partial}{\partial u^k}, \sum_l g^{j,l} \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle \\
 &= \sum_{k,l} g^{i,k} g^{j,l} \underbrace{\left\langle \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle}_{g^{k,l}} = \sum_k g^{i,k} \delta_k^j = g^{i,j},
 \end{aligned}$$

wobei $(g^{i,k})$ die inverse Matrix zu $(g_{i,k})$ ist. Mit dieser Behauptung folgt:

$$\begin{aligned}\eta_i &= \sum_j (-1)^{i-1} \omega_j g^{i,j} \sqrt{G} \quad \text{und somit} \\ * \omega &= \sum_i \eta_i du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \\ &= \sum_i (-1)^{i-1} \sqrt{G} \underbrace{\sum_j g^{i,j} \omega_j}_{\xi^i} du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \\ &= \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m.\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} * \circ \sharp : \mathfrak{X}(M) \ni \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} &\mapsto \\ &\mapsto \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i du^1 \wedge \dots \wedge \overline{du^i} \wedge \dots \wedge du^m \in \Omega^{m-1}(M).\end{aligned}$$

42. Graduierte Derivationen

42.1 Lemma (Algebra der Differentialformen).

Es ist $\Omega(M) := \bigoplus_k \Omega^k(M)$ eine graduiert kommutative Algebra bezüglich dem punktweisen Hackprodukt (siehe auch [38.4](#))

$$\begin{aligned}(\alpha \wedge \beta)_x(\xi_1, \dots, \xi_{k+i}) &= \\ &= \frac{1}{k!i!} \sum_{\pi} \text{sgn } \pi \cdot \alpha_x(\xi_{\pi(1)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \cdot \beta_x(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+i)}),\end{aligned}$$

für $\alpha \in \Omega^k(M)$, $\beta \in \Omega^i(M)$ und $\xi_i \in T_x M$. Für parakompakte Mannigfaltigkeiten M ist sie als Algebra durch $\{f, df : f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}$ erzeugt.

Beweis. Da die Fasern $\bigwedge T_x^* M = \bigoplus_k \bigwedge^k T_x^* M$ graduiert kommutative Algebren sind, ist auch $\Omega(M) = \Gamma(\bigwedge T^* M)$ eine graduiert kommutative Algebra. Lokal wird $\Omega(M)$ durch $\{f, df : f \in C^\infty(M, \mathbb{R})\}$ erzeugt, denn $\omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$. Um das auch global zu erhalten, benötigen wir einen endlichen Atlas von M . Für Lindelöf-Mannigfaltigkeiten existiert ein solcher nach [19.11](#). Wir wählen nun eine Partition der Eins $\{f_1, \dots, f_N\}$, welche dem zugehörigen Vektorbündel-Atlas von $T^* M$ untergeordnet ist. Dann ist $\omega = \sum_j f_j \omega$ und $f_j \omega = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \omega_{j; i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$, wobei die u^i und die Koeffizienten $\omega_{j; i_1, \dots, i_k}$ globale glatte Funktionen auf M sind, sodaß (u^1, \dots, u^m) lokale Koordinaten auf $\text{Trg}(f_j)$ sind. \square

42.2 Zurückziehen von Formen

Sei $f : M \rightarrow N$ glatt, dann haben wir die Tangentialabbildung $T_p f : T_p M \rightarrow T_{f(p)} N$, sowie deren adjungierte $(T_p f)^* : T_{f(p)}^* N \rightarrow T_p^* M$. Falls nun p nicht durch $f(p)$ determiniert ist, d.h. f nicht injektiv ist, oder zu gewissen $q \in N$ kein p mit

$f(p) = q$ existiert, d.h. f nicht surjektiv ist, läßt sich keine Abbildung $T^*f : T^*N \rightarrow T^*M$ aus den $(T_p f)^*$ zusammensetzen. Es läßt sich aber nach [31.11](#) dennoch ganz allgemein aus

$$\begin{array}{ccc} \bigwedge^k TM & \xrightarrow{\bigwedge^k T f} & \bigwedge^k TN \\ \downarrow & & \downarrow \\ M & \xrightarrow{f} & N \end{array}$$

eine Abbildung

$$f^* := \left(\bigwedge^k T f \right)^* : \Omega^k(N) := \Gamma\left(\left(\bigwedge^k TN\right)^* \rightarrow N\right) \rightarrow \Gamma\left(\left(\bigwedge^k TM\right)^* \rightarrow M\right) =: \Omega^k(M)$$

definieren. Dabei heißt $f^*(\omega)$ die mit f ZURÜCKGEZOGENE FORM zu ω .

$$(f^*\omega)_p(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k) := \omega_{f(p)}\left(\left(\bigwedge^k T f\right)(\xi_1 \wedge \cdots \wedge \xi_k)\right)$$

oder unter Verwendung des Isomorphismuses $\left(\bigwedge^k T_x M\right)^* \cong L_{Alt}^k(T_x M; \mathbb{R})$ auch als

$$(f^*\omega)_p(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega_{f(p)}(T_p f \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p f \cdot \xi_k|_p).$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned} f^*(dg)_p(\xi_p) &= (dg)_{f(p)}(T_p f \cdot \xi_p) \\ &= \text{pr}_2 \cdot T_{f(p)} g \cdot T_p f \cdot \xi_p \\ &= \text{pr}_2 \cdot T_p(g \circ f) \cdot \xi_p \\ &= d(g \circ f)_p \cdot \xi_p \end{aligned}$$

Das so definierte $f^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$ ist ein Algebrhomomorphismus, wie man leicht nachrechnet. Mittels des Isomorphismuses $\left(\bigwedge^k TM\right)^* \cong \bigwedge^k(T^*M)$ kann man f^* für $\omega_1, \dots, \omega_k \in \Omega^1(M)$ auch durch $f^*(\omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_k) := f^*(\omega_1) \wedge \cdots \wedge f^*(\omega_k)$ definieren, wobei $f^*(\omega_k)$ die in [31.12](#) definierte zurückgezogene 1-Form ist. Weiters gilt:

$$\begin{aligned} f^*(g) &= g \circ f \text{ und} \\ f^*(dg) &= d(g \circ f) \text{ für } g \in C^\infty(N, \mathbb{R}) \\ (f_1 \circ f_2)^* &= f_2^* \circ f_1^* \text{ für zusammensetzbare Abbildungen } f_1 \text{ und } f_2 \end{aligned}$$

Seien $(u^i)_{i=1}^m$ lokale Koordinaten auf M und $(v^j)_{j=1}^n$ lokale Koordinaten auf N . Dann läßt sich $\omega \in \Omega^k(N)$ lokal als

$$\omega = \sum_{j_1 < \dots < j_k} \omega_{j_1, \dots, j_k} dv^{j_1} \wedge \dots \wedge dv^{j_k}$$

schreiben. Die zurückgezogene Form muß eine lokale Darstellung der Form

$$f^*(\omega) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} \eta_{i_1, \dots, i_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$$

besitzen. Wir berechnen nun die lokalen Koeffizienten η_{i_1, \dots, i_k} von $f^*(\omega)$:

$$\begin{aligned}
 \eta_{i_1, \dots, i_k}(x) &= f^*(\omega)_x \left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{i_k}} \right) \\
 &= \omega_{f(x)} \left(\bigwedge^k T_x f \left(\frac{\partial}{\partial u^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial u^{i_k}} \right) \right) \\
 &\stackrel{38.6}{=} \omega_{f(x)} \left(\sum_{j_1 < \dots < j_k} \det \left(\frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \frac{\partial}{\partial v^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial v^{j_k}} \right) \\
 &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \det \left(\frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \omega_{f(x)} \left(\frac{\partial}{\partial v^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial v^{j_k}} \right) \\
 &= \sum_{j_1 < \dots < j_k} \det \left(\frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \omega_{j_1, \dots, j_k}(f(x)).
 \end{aligned}$$

Wir können dies auch durch die Multiplikativität von f^* wie folgt erhalten:

$$\begin{aligned}
 f^*(dv^{j_1} \wedge \dots \wedge dv^{j_k}) &= d(v^{j_1} \circ f) \wedge \dots \wedge d(v^{j_k} \circ f) \\
 &= \left(\sum_{i_1} \frac{\partial(v^{j_1} \circ f)}{\partial u^{i_1}} du^{i_1} \right) \wedge \dots \wedge \left(\sum_{i_k} \frac{\partial(v^{j_k} \circ f)}{\partial u^{i_k}} du^{i_k} \right) \\
 &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \det \left(\frac{\partial(v^{j_s} \circ f)}{\partial u^{i_t}} \right)_{t,s} \cdot du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}.
 \end{aligned}$$

Also ist

$$f^*(\omega) = \sum_{\substack{i_1 < \dots < i_k \\ i_1, \dots, i_k = 1 \dots m}} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_k \\ j_1, \dots, j_k = 1 \dots n}} \omega_{(j_1, \dots, j_k)} \rho_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_k}$$

$$\text{Wobei } \rho_{i_1, \dots, i_k}^{j_1, \dots, j_k} := \det \left(\frac{\partial(v^{j_1}, \dots, v^{j_k})}{\partial(u^{i_1}, \dots, u^{i_k})} \right) = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial v^{j_1}}{\partial u^{i_1}} & \dots & \frac{\partial v^{j_1}}{\partial u^{i_k}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial v^{j_k}}{\partial u^{i_1}} & \dots & \frac{\partial v^{j_k}}{\partial u^{i_k}} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \frac{\partial v^j}{\partial u^i} := \frac{\partial}{\partial u^i}(v^j \circ f),$$

In [60, 29.1] haben wir die kommutative Algebra $A := C^\infty(M, \mathbb{R})$ betrachtet. Den Raum $\text{Der}(A)$ ihrer Derivationen konnten wir mit dem Raum $\mathfrak{X}(M)$ der Vektorfelder auf M identifizieren. Wir haben auf $\text{Der}(A)$ die Struktur einer Lie-Algebra gefunden. Wir wollen ähnliche Ideen nun auf die graduiert kommutative Algebra $A = \Omega(M)$ der Differentialformen auf M anwenden.

42.3 Definition (graduierte Derivation)

Eine Abbildung $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ heißt **GRADUIERTE DERIVATION VOM GRAD d** , falls D linear ist, für alle k den Summanden $\Omega^k(M)$ in $\Omega^{d+k}(M)$ abbildet und falls für alle $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega(M)$ die Produktregel $D(\omega \wedge \eta) = D(\omega) \wedge \eta + (-1)^{dk} \omega \wedge D\eta$ gilt.

Mit $\text{Der}_d(\Omega(M))$ bezeichnen wir den **VEKTORRAUM ALLER GRADUIERTEN DERIVATIONEN** von $\Omega(M)$ vom Grad d , und mit $\text{Der}(\Omega(M))$ bezeichnen wir die direkte Summe $\bigoplus_{d \in \mathbb{Z}} \text{Der}_d(\Omega(M))$.

Allgemeiner heißt für eine glatte Abbildung $g : N \rightarrow M$ eine Abbildung $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N)$ **GRADUIERTE DERIVATION ÜBER g^*** , falls D linear ist, für alle k den Summanden $\Omega^k(M)$ in $\Omega^{d+k}(N)$ abbildet und falls die Produktregel $D(\omega \wedge \eta) = D(\omega) \wedge g^*(\eta) + (-1)^{dk} g^*(\omega) \wedge D\eta$ für alle $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\eta \in \Omega(M)$ gilt.

42.4 Lemma (Eindeutigkeit graduerter Derivationen).

Es sei $g : N \rightarrow M$ C^∞ . Jede graduierte Derivation $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N)$ über dem Algebra-Homomorphismus $g^* : \Omega(M) \rightarrow \Omega(N)$ ist eindeutig durch die Werte $D(f)$ und $D(df)$ für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ festgelegt.

Beweis. Da f und df die Algebra $\Omega(M)$ erzeugen folgt dies sofort aus [42.1](#). Wollen wir aber die dort verwendete Dimensionstheorie nicht hineinstecken so können wir dies auch wie folgt zeigen:

Hätten wir zwei solche Derivationen, so betrachten wir die Differenz D . Wir müssen zeigen: $\forall f : D(f) = 0, D(df) = 0 \Rightarrow D = 0$.

Wir behaupten zuerst, daß die Derivation D ein lokaler Operator ist. Sei nämlich $\omega \in \Omega(M)$ lokal um $g(x)$ gleich 0. Dann wählen wir ein $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $f(g(x)) = 1$ und $f\omega = 0$, und erhalten

$$0 = D(0) = D(f\omega) = \underbrace{D(f)}_{=0} \wedge g^*(\omega) + g^*(f) \cdot D(\omega)$$

Und an der Stelle $x \in N$ gilt $0 = \underbrace{f(g(x))}_{=1} \cdot D(\omega)(x) = D(\omega)(x)$. Da D ein lokaler und

linearer Operator ist, dürfen wir ihn durch eine lokale Darstellung durchtauschen:

$$\begin{aligned} D(\omega) &= D\left(\sum_{i_1 < \dots < i_p} \omega_{i_1, \dots, i_p} du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p}\right) \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_p} \left(\underbrace{D(\omega_{i_1, \dots, i_p})}_{=0} \wedge g^*(du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_p})\right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=1}^p g^*(\omega_{i_1, \dots, i_p}) g^*(du^{i_1}) \wedge \dots \wedge \underbrace{D(du^{i_k})}_{=0} \wedge \dots \wedge du^{i_p}\right) = 0. \quad \square \end{aligned}$$

42.5 Bemerkung.

Es folgt aus [42.4](#), daß $\text{Der}_d(\Omega(M)) = \{0\}$ für $d < -1$. Denn $D(\Omega^k(M)) \subseteq \Omega^{k+d}(M) = \{0\}$ für $k+d < 0$ und insbesondere für $k \in \{0, 1\}$ und $d < -1$.

Wir wollen als nächstes $\text{Der}_{-1}(\Omega(M))$ bestimmen. Sei also $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ eine graduierte Derivation vom Grad $d = -1$. Dann ist $D(C^\infty(M, \mathbb{R})) = \{0\}$ und die lineare Abbildung $D \circ d : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ erfüllt $(D \circ d)(f \cdot g) = D(g \cdot df + f \cdot dg) = D(g) \wedge df + (-1)^{0 \cdot d} g \cdot D(df) + D(f) \wedge dg + (-1)^{0 \cdot d} f \cdot D(dg) = (D \circ d)f \cdot g + f \cdot (D \circ d)g$, wegen $D(g) = 0 = D(f)$. Also ist $D \circ d$ auf $C^\infty(M, \mathbb{R})$ eine Derivation und somit durch ein Vektorfeld ξ gegeben, d.h. $D(f) = 0$ und $D(df) = \xi(f) = df(\xi)$ für alle $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Wir werden in [42.6](#) zeigen, daß wir durch $(i_\xi \omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) := \omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_k)$ zu jedem Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ eine graduierte Derivation i_ξ vom Grad $d = -1$ definieren können.

Nun zu $\text{Der}_0(\Omega(M))$. Sei also $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ eine graduierte Derivation vom Grad $d = 0$. Dann wirkt D auf $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ derivativ, ist also durch ein Vektorfeld ξ gegeben, d.h.

$$D(f) = \xi(f) = \mathcal{L}_\xi(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* f \text{ (siehe [60, 29.10]).}$$

Der letzte Ausdruck $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^* \omega$ macht aber auch für $\omega \in \Omega(M)$ einen Sinn und wir werden in [42.6](#) zeigen, daß dadurch für jedes Vektorfeld $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ eine

Derivation \mathcal{L}_ξ vom Grad $d = 0$ auf $\Omega(M)$ definiert wird. Man kann zeigen, daß dies alle Derivationen vom Grad 0 sind, die zusätzlich $D(df) = d(Df)$ erfüllen. Um eine globale Formel für \mathcal{L}_ξ zu erhalten, differenzieren wir die Funktion $\omega(\xi_1, \dots, \xi_k)$ (für $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$) in Richtung von ξ an der Stelle $x \in M$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
(\xi \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k))_x &= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \circ \text{Fl}_t^\xi)_x \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \omega_{\text{Fl}_t^\xi(x)}(\xi_1, \dots, \xi_k) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \omega_{\text{Fl}_t^\xi(x)}(T \text{Fl}_t^\xi \cdot T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_1, \dots, T \text{Fl}_t^\xi \cdot T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_k) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(((\text{Fl}_t^\xi)^* \omega)_x (T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_1|_{\text{Fl}_t^\xi(x)}, \dots, T \text{Fl}_{-t}^\xi \cdot \xi_k|_{\text{Fl}_t^\xi(x)}) \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} \left(((\text{Fl}_t^\xi)^* \omega)_x ((\text{Fl}_t^\xi)^*(\xi_1)(x), \dots, (\text{Fl}_t^\xi)^*(\xi_k)(x)) \right) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} ((\text{Fl}_t^\xi)^* \omega)_x \right) (\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^k \omega_x \left(\xi_1(x), \dots, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} ((\text{Fl}_t^\xi)^*(\xi_j)(x)), \dots, \xi_k(x) \right) \\
&= (\mathcal{L}_\xi \omega)_x (\xi_1(x), \dots, \xi_k(x)) \\
&\quad + \sum_{i=1}^k \omega_x \left(\xi_1(x), \dots, [\xi, \xi_i](x), \dots, \xi_k(x) \right),
\end{aligned}$$

und somit

$$\mathcal{L}_\xi \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \xi \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) - \sum_{i=1}^k \omega \left(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, [\xi, \xi_i], \xi_{i+1}, \dots, \xi_k \right).$$

Insbesondere ist

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_\xi df)(\eta) &= \xi(df(\eta)) - df([\xi, \eta]) = \xi(\eta \cdot f) - [\xi, \eta] \cdot f = \eta(\xi \cdot f) \\
&= d(\xi \cdot f)(\eta)
\end{aligned}$$

Schließlich wollen wir noch eine ausgezeichnete Derivation vom Grad $d = 1$ angeben. Nach [37.4](#) hoffen wir ja durch die Abweichung der Ableitung einer 1-Form (oder allgemeiner einer k -Form) davon symmetrisch zu sein, zu erkennen ob die Form selbst Ableitung einer Funktion (bzw. $k - 1$ -Form) ist. Betrachten wir dazu zuerst den Fall, wo $M = U$ offen in einen Vektorraum E ist. Dann ist eine k -Form auf U eine Abbildung

$$\omega : U \rightarrow L_{\text{Alt}}^k(E; \mathbb{R})$$

und ihre Ableitung ist

$$\omega' : U \rightarrow L(E, L_{\text{Alt}}^k(E; \mathbb{R})).$$

Setzen wir diese mit dem Alternator von

$$L(E, L_{\text{Alt}}^k(E; \mathbb{R})) \subseteq L(E, L^k(E; \mathbb{R})) \cong L^{k+1}(E, \mathbb{R}) \xrightarrow{\text{alt}} L_{\text{Alt}}^{k+1}(E, \mathbb{R})$$

zusammen, so erhalten wir die Abweichung $d\omega$ davon, daß $\omega'(x)$ symmetrisch ist für alle $x \in U$. Es ist also

$$\begin{aligned}
d\omega(x)(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \frac{1}{(k+1)!} \sum_{\sigma} \text{sgn}(\sigma) \omega'(x)(\xi_{\sigma(0)})(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)}) \\
&= \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^k (-1)^i \omega'(x)(\xi_i)(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

Um nun eine globale Formel für d auf beliebige Mannigfaltigkeiten M zu erhalten ersetzen wir die Vektoren $\xi_i \in E$ durch Vektorfelder $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$ und differenzieren $\omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k)$ an der Stelle $x \in M$ in Richtung $\xi_i(x)$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \left(\omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \right)'(x)(\xi_i(x)) &= \omega'(x)(\xi_i(x))(\xi_0(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \xi_k(x)) \\ &\quad + \sum_{j < i} \omega(x)(\dots, \xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots) \\ &\quad + \sum_{j > i} \omega(x)(\dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \dots) \end{aligned}$$

Und Einsetzen in obige Formel liefert

$$\begin{aligned} (k+1)d\omega(x)(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \omega'(x)(\xi_i(x))(\xi_0(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \xi_k(x)) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i (\xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k))(x) \\ &\quad - \sum_{j < i} (-1)^{i+j} \omega(x)(\xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \xi_0(x), \dots, \overline{\xi_j(x)}, \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots) \\ &\quad - \sum_{j > i} (-1)^{i+j-1} \omega(x)(\xi_j'(x) \cdot \xi_i(x), \xi_0(x), \dots, \overline{\xi_i(x)}, \dots, \overline{\xi_j(x)}, \dots) \\ &= \left(\sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi(k)) \right)(x). \end{aligned}$$

Wegen des lästigen Faktors $(k+1)$ ersetzen wir $d\omega$ besser durch $(k+1)d\omega$.

42.6 Lemma (Lie-Algebra der graduierten Derivationen).

Der Raum $\text{Der}(\Omega(M))$ ist eine graduierte Lie-Algebra bezüglich der punktweisen Vektoroperationen und dem graduierten Kommutator als Lie-Klammer:

$$[D_1, D_2] := D_1 \circ D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 \circ D_1 \text{ für } D_i \in \text{Der}_{d_i}(\Omega(M))$$

Im Detail bedeutet das:

1. Die Klammer $[\cdot, \cdot] : \text{Der}_{d_1}(\Omega(M)) \times \text{Der}_{d_2}(\Omega(M)) \rightarrow \text{Der}_{d_1+d_2}(\Omega(M))$ ist bilinear für alle d_1, d_2 .
2. Sie ist GRADUIERT ANTIKOMMUTATIV: $[D_1, D_2] + (-1)^{d_1 d_2} [D_2, D_1] = 0$.
3. $[D_0, \cdot]$ ist eine graduierte Derivation bezüglich $[\cdot, \cdot]$, d.h. es gilt die GRADUIERTE JACOBI-IDENTITÄT

$$[D_0, [D_1, D_2]] = [[D_0, D_1], D_2] + (-1)^{d_0 d_1} [D_1, [D_0, D_2]],$$

oder äquivalent und zyklisch symmetrisch

$$(-1)^{d_0 d_2} [D_0, [D_1, D_2]] + (-1)^{d_1 d_0} [D_1, [D_2, D_0]] + (-1)^{d_2 d_1} [D_2, [D_0, D_1]] = 0.$$

Beweis. Wir führen den Beweis abstrakt für eine beliebige graduiert-kommutative Algebra A anstelle von $\Omega(M)$.

Behauptung: $[D_1, D_2] \in \text{Der}_{d_1+d_2}(A)$ für $D_i \in \text{Der}_{d_i}(A)$ für $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}
[D_1, D_2](X \cdot Y) &= \left(D_1 \circ D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 \circ D_1 \right) (X \cdot Y) \\
&= D_1 \left(D_2 X \cdot Y + (-1)^{x d_2} X \cdot D_2 Y \right) \\
&\quad - (-1)^{d_1 d_2} D_2 \left(D_1 X \cdot Y + (-1)^{x d_1} X \cdot D_1 Y \right) \\
&= D_1 D_2 X \cdot Y + (-1)^{d_1(d_2+x)} D_2 X \cdot D_1 Y \\
&\quad + (-1)^{x d_2} D_1 X \cdot D_2 Y + (-1)^{x d_2 + x d_1} X \cdot D_1 D_2 Y \\
&\quad - (-1)^{d_1 d_2} D_2 D_1 X \cdot Y - (-1)^{d_1 d_2 + (d_1+x) d_2} D_1 X \cdot D_2 Y \\
&\quad - (-1)^{d_1 d_2 + x d_1} D_2 X \cdot D_1 Y - (-1)^{d_1 d_2 + d_1 x + d_2 x} X \cdot D_2 D_1 Y \\
&= [D_1, D_2] X \cdot Y + (-1)^{x(d_1+d_2)} X \cdot [D_1, D_2] Y.
\end{aligned}$$

Klarerweise ist $[,]$ bilinear und graduiert antikommutativ. Verbleibt die graduierte Jacobi-Identität zu zeigen:

$$\begin{aligned}
&[D_0, [D_1, D_2]] - [[D_0, D_1], D_2] - (-1)^{d_0 d_1} [D_1, [D_0, D_2]] = \\
&= [D_0, D_1 D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_2 D_1] - [D_0 D_1 - (-1)^{d_0 d_1} D_1 D_0, D_2] \\
&\quad - (-1)^{d_0 d_1} [D_1, D_0 D_2 - (-1)^{d_0 d_2} D_2 D_0] \\
&= +D_0 D_1 D_2 - (-1)^{d_1 d_2} D_0 D_2 D_1 \\
&\quad - (-1)^{(d_1+d_2)d_0} D_1 D_2 D_0 + (-1)^{d_1 d_2 + d_0(d_1+d_2)} D_2 D_1 D_0 \\
&\quad - D_0 D_1 D_2 + (-1)^{d_0 d_1} D_1 D_0 D_2 \\
&\quad + (-1)^{(d_0+d_1)d_2} D_2 D_0 D_1 - (-1)^{d_0 d_1 + (d_0+d_1)d_2} D_2 D_1 D_0 \\
&\quad - (-1)^{d_0 d_1} D_1 D_0 D_2 + (-1)^{d_0 d_1 + d_0 d_2} D_1 D_2 D_0 \\
&\quad + (-1)^{d_0 d_1 + (d_0+d_2)d_1} D_0 D_2 D_1 - (-1)^{d_0(d_1+d_2) + (d_0+d_2)d_1} D_2 D_0 D_1 \\
&= 0. \quad \square
\end{aligned}$$

42.7 Theorem (Die wichtigsten graduierten Derivationen).

Sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$.

- (i_ξ) Durch $i_\xi(f) := 0$, $i_\xi(df) := \xi \cdot f$ ist eine graduierte Derivation i_ξ vom Grad -1 , der EINSETZOPERATOR festgelegt.
- (\mathcal{L}_ξ) Durch $\mathcal{L}_\xi(f) := \xi \cdot f$, $\mathcal{L}_\xi(df) := d(\xi \cdot f)$ ist eine graduierte Derivation \mathcal{L}_ξ vom Grad 0 , die LIE-ABLEITUNG festgelegt.
- (d) Durch $d(f) := df$, $d(df) := 0$ ist eine graduierte Derivation d vom Grad $+1$, die ÄUSSERE ABLEITUNG, festgelegt.

Globale Formeln für diese graduierten Derivationen sind mit $\omega \in \Omega^k(M)$ und $\xi_i \in \mathfrak{X}(M)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
(\iota_{\xi_0} \omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) &:= \omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\
(\mathcal{L}_{\xi_0} \omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) &:= \xi_0 \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) - \sum_{i=1}^k \omega(\xi_1, \dots, \xi_{i-1}, [\xi_0, \xi_i], \xi_{i+1}, \dots, \xi_k)
\end{aligned}$$

$$(d\omega)(\xi_0, \dots, \xi_k) := \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\ + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k).$$

Die graduierten Kommutatoren sind durch folgende Tabelle gegeben:

$[D_1, D_2]$	i_η	\mathcal{L}_η	d
i_ξ	0	$-\iota_{[\xi, \eta]}$	$-\mathcal{L}_\xi$
\mathcal{L}_ξ	$\iota_{[\xi, \eta]}$	$\mathcal{L}_{[\xi, \eta]}$	0
d	\mathcal{L}_η	0	0

Falls $\eta \in \mathfrak{X}(N)$ verwandt mit $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ bezüglich einem glatten $g : M \rightarrow N$ ist, d.h. $Tg \circ \xi = \eta \circ g$ erfüllt ist, so gilt:

$$g^* \circ i_\eta = i_\xi \circ g^*, \quad g^* \circ \mathcal{L}_\eta = \mathcal{L}_\xi \circ g^*, \quad g^* \circ d = d \circ g^*$$

Weiters gilt: $\iota_{f\xi}\omega = f i_\xi\omega$, $\mathcal{L}_{f\xi}\omega = f \mathcal{L}_\xi\omega + df \wedge i_\xi\omega$ und $(\mathcal{L}_\xi\omega)(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} (F_t^\xi)^* \omega|_x$

Beweis. Wir führen den Beweis in 15 Schritten:

Behauptung. $i_\xi\omega \in \Omega^{k-1}(M)$:

Offensichtlich ist $i_\xi\omega$ alternierend und $k+1$ -linear und es gilt

$$i_\xi\omega(f\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = \omega(\xi, f\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = f \omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\ = f i_\xi\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}).$$

Behauptung. $d\omega \in \Omega^{k+1}(M)$:

Offensichtlich ist $d\omega$ ist $(k+1)$ -linear und alternierend. Die $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -Homogenität ergibt sich wie folgt:

$$d\omega(f\xi_0, \dots, \xi_k) = (f\xi_0) \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \\ + \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i \cdot f\omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\ + \sum_{j>i=0} (-1)^j \omega([f\xi_0, \xi_j], \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\ + \sum_{j>i>0} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], f\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\ = (f\xi_0)\omega(\xi_1, \dots, \xi_k) \\ + \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i(f) \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\ + \sum_{i>0} (-1)^i f (\xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k)) \\ + \sum_{j>i=0} (-1)^j \omega(f[\xi_0, \xi_j] - \xi_j(f)\xi_0, \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\ + f \sum_{j>i>0} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k)$$

$$\begin{aligned}
&= f d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{i>0} (-1)^i \xi_i(f) \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad - \sum_{j>i=0} (-1)^j \xi_j(f) \omega(\xi_0, \overline{\xi_0}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= f d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

Behauptung. $i_\xi \in \text{Der}_{-1}(\Omega(M))$. Sei dazu $\alpha \in \Omega^{k+1}$ und $\beta \in \Omega^l$, dann ist:

$$\begin{aligned}
&\iota_{\xi_0}(\alpha \wedge \beta)(\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) = \\
&= (\alpha \wedge \beta)(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{k+l}) \\
&= \frac{1}{(k+1)!l!} \sum_{\pi} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\
&= \sum_{\substack{\pi \text{ stkw.} \\ \nearrow}} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\
&= \sum_{\pi(0)=0} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\
&\quad + \sum_{\pi(k+1)=0} \text{sgn}(\pi) \alpha(\xi_{\pi(0)}, \dots, \xi_{\pi(k)}) \beta(\xi_{\pi(k+1)}, \dots, \xi_{\pi(k+l)}) \\
&= \left((\iota_{\xi_0} \alpha) \wedge \beta \right) (\xi_1, \dots, \xi_{k+l}) \\
&\quad + \sum_{\substack{\pi' \text{ stkw.} \\ \nearrow}} (-1)^{k+1} \text{sgn}(\pi') \alpha(\xi_{\pi'(1)}, \dots, \xi_{\pi'(k+1)}) \beta(\xi_0, \xi_{\pi'(k+2)}, \dots, \xi_{\pi'(k+l)}) \\
&= \left((\iota_{\xi_0} \alpha) \wedge \beta + (-1)^{k+1} \alpha \wedge (\iota_{\xi_0} \beta) \right) (\xi_1, \dots, \xi_{k+l}).
\end{aligned}$$

Dabei ist $\pi' := \pi \circ (k+1, k, \dots, 1, 0)$ jene Permutation, die 0 auf 0 abbildet, auf $i+1 \leq k+1$ mit $\pi(i)$ übereinstimmt, und auf $i > k+1$ mit π ident ist.

Behauptung. $d(f\omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$

$$\begin{aligned}
&d(f\omega)(\xi_0, \dots, \xi_k) = \\
&= \sum_i (-1)^i \xi_i \cdot (f\omega)(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{j>i} (-1)^{i+j} f\omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_i (-1)^i \xi_i(f) \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_i (-1)^i f \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{j>i} (-1)^{i+j} f\omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_i (-1)^i df(\xi_i) \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) + f d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) \\
&= (df \wedge \omega + f \wedge d\omega)(\xi_0, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

Behauptung. d ist ein lokaler Operator

Sei dazu $\omega|_U = 0$ und $x \in U$. Dann existiert ein $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit $\text{Trg } f \subseteq U$, $f(x) = 1$ und $df(x) = 0$. Folglich ist $f\omega = 0$ und damit $0 = d(f\omega)(x) = df(x) \wedge \omega(x) + f(x) \cdot d\omega(x) = d\omega(x)$.

Behauptung. d und i_ξ erfüllen die ‘‘Anfangsbedingungen’’.

Das folgt sofort durch Einsetzen in die globalen Formeln, z.B.:

$$\begin{aligned} df(\xi_0) &= \sum_{i=0}^0 \xi_0 \cdot f(\overline{\xi_0}) + \sum_{\emptyset} = \xi_0(f) \\ d(df)(\xi_0, \xi_1) &= \xi_0 \cdot df(\xi_1) - \xi_1 \cdot df(\xi_0) + (-1)^{0+1} df([\xi_0, \xi_1]) \\ &= \xi_0 \cdot \xi_1 \cdot f - \xi_1 \cdot \xi_0 \cdot f - [\xi_0, \xi_1] \cdot f = 0 \end{aligned}$$

Behauptung. $d(du^I) = 0$, wobei $du^I := du^{i_1} \wedge \dots \wedge du^{i_{k-1}}$ für $I := (i_1, \dots, i_{k-1})$.

$$\begin{aligned} d(du^I)\left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}}\right) &= \\ &= \sum_{i=1}^k (-1)^i \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}\right) du^I \left(\frac{\partial}{\partial u^{j_1}}, \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^{j_k}}\right) \\ &\quad + \sum_{l>i} (-1)^{i+l} du^I \left(\left[\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}, \frac{\partial}{\partial u^{j_l}}\right], \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial u^{j_i}}}, \dots, \overline{\frac{\partial}{\partial u^{j_l}}}, \dots\right) \\ &= 0, \quad \text{da } \left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^l}\right] = 0 \text{ und } du^i\left(\frac{\partial}{\partial u^j}\right) \text{ konstant ist.} \\ \Rightarrow d\left(\sum_I \omega_I du^I\right) &= \sum_I d\omega_I \wedge du^I + \omega_I \wedge ddu^I = \sum_{i,I} \left(\frac{\partial \omega_I}{\partial u^i}\right) du^i \wedge du^I \end{aligned}$$

Behauptung. $d \in \text{Der}_{+1}(\Omega(M))$, i.e. $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|I|} \alpha \wedge d\beta$. mit $\alpha = \sum_I \alpha_I du^I$ und $\beta = \sum_J \beta_J du^J$.

$$\begin{aligned} d(\alpha \wedge \beta) &= \sum_{I,J} d(\alpha_I \beta_J du^I \wedge du^J) \\ &= \sum_{I,J,i} \frac{\partial(\alpha_I \beta_J)}{\partial u^i} du^i \wedge du^I \wedge du^J + \sum_{I,J} \alpha_I \beta_J d(du^I \wedge du^J) \\ &= \sum_{I,i} \frac{\partial \alpha_I}{\partial u^i} du^i \wedge du^I \wedge \sum_J \beta_J du^J \\ &\quad + (-1)^{|I|} \sum_I \alpha_I du^I \wedge \sum_{J,i} \frac{\partial \beta_J}{\partial u^i} du^i \wedge du^J + 0 \\ &= d\alpha \wedge \beta + (-1)^{|I|} \alpha \wedge d\beta. \end{aligned}$$

Behauptung. Es gelten die Formeln für die Kommutatoren von Einsetzoperatoren beziehungsweise für d .

Wegen [42.4](#) genügt es die ‘‘Anfangswerte’’ zu überprüfen:

$$\begin{aligned} [i_\xi, i_\eta] &= 0, \quad \text{da Derivation vom Grad -2} \\ [d, d](f) &= (d \circ d - (-1)^{(-1) \cdot (-1)} d \circ d)(f) = 2d(df) = 0 \\ [d, d](df) &= 2(d \circ d)(df) = 2d(d(df)) = 2d(0) = 0 \end{aligned}$$

Behauptung. Der Kommutator $[d, i_\xi]$ ist durch die globale Formel von \mathcal{L}_ξ gegeben, also ist $\mathcal{L}_\xi \in \text{Der}_0(\Omega(M))$.

$$\begin{aligned}
([d, \iota_{\xi_0}]\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \\
&= d(\iota_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) - (-1)^{1 \cdot (-1)} \iota_{\xi_0}(d\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) \\
&= \sum_i (-1)^{i-1} \xi_i \cdot \iota_{\xi_0}\omega(\xi_1, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{0 < i < j} (-1)^{i-1+j-1} \iota_{\xi_0}\omega([\xi_i, \xi_j], \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + d\omega(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_k) \\
&= - \sum_{i > 0} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{0 < i < j} (-1)^{i+j} \omega(\xi_0, [\xi_i, \xi_j], \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{i \geq 0} (-1)^i \xi_i \cdot \omega(\xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \xi_k) \\
&\quad + \sum_{0 \leq i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_0, \dots, \overline{\xi_i}, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= \xi_0 \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) + \sum_{j > 0} (-1)^j \omega([\xi_0, \xi_j], \xi_1, \dots, \overline{\xi_j}, \dots, \xi_k) \\
&= \xi_0 \cdot \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) - \sum_{j > 0} \omega(\xi_1, \dots, [\xi_0, \xi_j], \dots, \xi_k) \\
&= (\mathcal{L}_{\xi_0}\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k).
\end{aligned}$$

Behauptung. Es gilt die ‘‘Anfangsbedingung’’ für \mathcal{L}_ξ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_\xi &= d \circ i_\xi - (-1)^{(-1)(+1)} i_\xi \circ d \quad \Rightarrow \\
\mathcal{L}_\xi(f) &= d(i_\xi f) + i_\xi(df) = 0 + \xi \cdot f \\
\mathcal{L}_\xi(df) &= d(i_\xi df) + i_\xi(d^2 f) = d(\xi \cdot f) + 0.
\end{aligned}$$

Behauptung. Es gelten die Formeln für Kommutatoren mit \mathcal{L}_ξ .

Wieder brauchen wir nur die Anfangswerte zu überprüfen (oder wir verwenden die Jacobi-Identität):

$$\begin{aligned}
[\mathcal{L}_\xi, i_\eta](f) &= 0 = \iota_{[\xi, \eta]}(f), \text{ da der Grad } -1 \text{ ist} \\
[\mathcal{L}_\xi, i_\eta](df) &= \mathcal{L}_\xi(\eta \cdot f) - i_\eta(d(\xi \cdot f)) \\
&= \xi \cdot (\eta \cdot f) - \eta \cdot (\xi \cdot f) = [\xi, \eta](f) = \iota_{[\xi, \eta]}(df) \\
[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta](f) &= \xi \cdot \eta \cdot f - \eta \cdot \xi \cdot f = [\xi, \eta](f) = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}(f) \\
[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta](df) &= \mathcal{L}_\xi(d(\eta \cdot f)) - \mathcal{L}_\eta(d(\xi \cdot f)) \\
&= d(\xi \cdot \eta \cdot f - \eta \cdot \xi \cdot f) = d([\xi, \eta] \cdot f) = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}(df) \\
[d, \mathcal{L}_\xi](f) &= d(\xi \cdot f) - \mathcal{L}_\xi(df) = 0 \\
[d, \mathcal{L}_\xi](df) &= d(d(\xi \cdot f)) - \mathcal{L}_\xi(ddf) = 0.
\end{aligned}$$

Behauptung. Es gelten die Vertauschbarkeitsrelationen mit g^* .

$$(g^* \circ \iota_\eta)(df) = g^*(df(\eta)) = g^*(\eta(f)) = \eta(f) \circ g$$

$$\stackrel{\underline{\underline{[60, 29.3]}}}{=} \xi(f \circ g) = d(f \circ g)(\xi) = i_\xi(g^*(df)) = (i_\xi \circ g^*)(df)$$

oder direkt

$$\begin{aligned} (g^* \circ i_\eta)\omega_p(\xi_1, \dots, \xi_k) &= g^*(i_\eta\omega)(\xi_1, \dots, \xi_k) \\ &= (i_\eta\omega)|_{g(p)}(T_p g \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p g \cdot \xi_k|_p) \\ &= \omega|_{g(p)}(\eta|_{g(p)}, T_p g \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p g \cdot \xi_k|_p) \\ &= \omega|_{g(p)}(T_p g \cdot \xi|_p, T_p g \cdot \xi_1|_p, \dots, T_p g \cdot \xi_k|_p) \\ &= (g^*\omega)_p(\xi|_p, \xi_1|_p, \dots, \xi_k|_p) \\ &= (i_\xi(g^*\omega))(\xi_1, \dots, \xi_k)_p \\ &= (i_\xi \circ g^*)\omega_p(\xi_1, \dots, \xi_k); \end{aligned}$$

Für d haben wir das folgende bereits in [42.2](#) gezeigt:

$$\begin{aligned} (g^* \circ d)(f)(\xi|_p) &= g^*(df)(\xi|_p) = df|_{g(p)}(T_p g \cdot \xi|_p) \\ &= d(f \circ g)(\xi|_p) = d(g^*(f))(\xi|_p) = (d \circ g^*)(f)(\xi|_p) \\ (g^* \circ d)(df) &= g^*(ddf) = g^*(0) = 0 = d^2(g^*f) \\ &= d((d \circ g^*)(f)) = d((g^* \circ d)(f)) = (d \circ g^*)(df); \end{aligned}$$

Für \mathcal{L} folgt es nun durch Anwenden der Kommutatorformel:

$$\begin{aligned} g^* \circ \mathcal{L}_\eta &= g^* \circ (d \circ i_\eta + i_\eta \circ d) \\ &= g^* \circ d \circ i_\eta + g^* \circ i_\eta \circ d \\ &= d \circ g^* \circ i_\eta + i_\xi \circ g^* \circ d \\ &= d \circ i_\xi \circ g^* + i_\xi \circ d \circ g^* \\ &= (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \circ g^* \\ &= \mathcal{L}_\xi \circ g^*. \end{aligned}$$

Behauptung. Es gelten die Homogenitätsformeln für $\iota_{f\xi}$ und $\mathcal{L}_{f\xi}$.

$$\begin{aligned} \iota_{f\xi}\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) &= \omega(f\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) = f \cdot \omega(\xi, \xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\ &= f \cdot i_\xi\omega(\xi_1, \dots, \xi_{k-1}) \\ \mathcal{L}_{f\xi}\omega &= [d, \iota_{f\xi}]\omega = d(\iota_{f\xi}\omega) + \iota_{f\xi}(d\omega) \\ &= d(f \cdot i_\xi\omega) + f \cdot i_\xi(d\omega) \\ &= df \wedge i_\xi\omega + f \cdot d(i_\xi\omega) + f \cdot i_\xi(d\omega) \\ &= df \wedge i_\xi\omega + f \cdot \mathcal{L}_\xi\omega. \end{aligned}$$

Behauptung. \mathcal{L}_ξ ist die Lie-Ableitung aus [\[60, 29.9\]](#).

Beide Seiten definieren eine Derivation vom Grad 0, also genügt es auf Funktionen

und exakten 1-Formen auszutesten:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}|_{t=0}(\mathrm{Fl}_t^\xi)^* f &= \frac{d}{dt}|_{t=0} f \circ \mathrm{Fl}_t^\xi = \xi f = \mathcal{L}_\xi f, \\
\frac{d}{dt}|_{t=0}(\mathrm{Fl}_t^\xi)^*(df_p)(\eta_p) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} df(T \mathrm{Fl}_t^\xi \cdot \eta_p)|_{(\mathrm{Fl}_t^\xi(p))} \\
&= \frac{d}{dt}|_{t=0}(T \mathrm{Fl}_t^\xi \cdot \eta_p) f = \frac{d}{dt}|_{t=0} \eta_p(f \circ \mathrm{Fl}_t^\xi) \\
&= \eta_p \frac{d}{dt}|_{t=0}(f \circ \mathrm{Fl}_t^\xi) = \eta_p(\xi f) \\
&= \mathcal{L}_\xi(df)(\eta_p).
\end{aligned}$$

Das beendet den Beweis von [42.7](#). □

42.8 Die Frölicher-Nijenhuis und Nijenhuis-Richardson Klammer

Wir wollen nun allgemeine graduierte Derivationen genauer beschreiben. Dazu nennen wir eine graduierte Derivation $D \in \mathrm{Der}_k(\Omega(M))$ algebraisch, wenn sie auf den 0-Formen $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ verschwindet. Für so eine Derivation gilt

$$D(f \omega) = D(f) \wedge \omega + (-1)^{0 \cdot k} f \cdot D(\omega) = f \cdot D(\omega).$$

Folglich ist D tensoriell, d.h. $D(\omega)_x$ hängt nur von ω_x ab. Nach [42.4](#) ist D eindeutig durch $D|_{\Omega^1(M)} : \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^{k+1}(M)$ bestimmt, und das ist eine faserweise lineare Abbildung in

$$\begin{aligned}
L(T_x^* M, \bigwedge^{k+1} T_x^* M) &\cong T_x M \otimes \bigwedge^{k+1} T_x^* M \cong T_x M \otimes (\bigwedge^{k+1} T_x M)^* \cong \\
&\cong L(\bigwedge^{k+1} T_x M, T_x M) \cong L_{\mathrm{alt}}^{k+1}(T_x M; T_x M)
\end{aligned}$$

welche glatt von $x \in M$ abhängt. Sei umgekehrt $K \in \Omega^{k+1}(M; TM)$ so eine vektorwertige $k+1$ -Form. Dann können wir eine algebraische Derivation $D := i_K \in \mathrm{Der}_k(\Omega(M))$ durch folgende Formel definieren:

$$\begin{aligned}
(i_K \omega)(X_1, \dots, X_{k+l}) &:= \\
&= \frac{1}{(k+1)!(l-1)!} \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma) \omega(K(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k+1)}), X_{\sigma(k+2)}, \dots, X_{\sigma(k+l)}),
\end{aligned}$$

wobei $\omega \in \Omega^l(M)$ und $X_1, \dots, X_{k+l} \in \mathfrak{X}(M)$. Die Abbildung $i : \Omega^{*+1}(M, TM) \rightarrow \mathrm{Der}_*(\Omega(M))$ definiert einen linearen Isomorphismus auf eine Teil-Liealgebra, und macht somit $\Omega^{*+1}(M, TM)$ selbst zu einer graduierten Liealgebra (deren Klammer auch Nijenhuis-Richardson Klammer heißt).

Beweis. Da $\bigwedge T_x^* M$ nach [38.6](#) die freie graduiert kommutative Algebra über dem Vektorraum $T_x^* M$ ist, können wir $K \in \Omega^{k+1}(M; TM) \cong \Gamma(L(T_x^* M, \bigwedge^k T_x^* M)) \subseteq \Gamma(L(T_x^* M, \bigwedge T_x^* M)) = L_{C^\infty(M, \mathbb{R})}(\Omega^1(M), \Omega(M))$ zu einer eindeutig bestimmten Derivation $D : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ ausdehnen.

Die angegebene Formel ergibt sich durch Anwendung auf Hackprodukte von 1-Formen. Und offensichtlich ist der graduierte Kommutator zweier algebraischer graduierter Derivationen selbst algebraisch, und somit gelten auch die übrigen Aussagen. □

Wir definieren für $K \in \Omega^k(M; TM)$ eine graduierte Derivation $\mathcal{L}_K := [i_K, d]$. Die Abbildung $\mathcal{L} : \Omega(M; TM) \rightarrow \mathrm{Der}(\Omega(M))$ ist injektiv, da $\mathcal{L}_K f = [i_K, d]f = i_K(df) \pm d(i_K f) = df \circ K$ für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Proposition.

Jedes $D \in \text{Der}_k(\Omega(M))$ hat eine eindeutige Darstellung $D = i_L + \mathcal{L}_K$ mit $L \in \Omega^{k+1}(M; TM)$ und $K \in \Omega^k(M; TM)$. Das Bild von \mathcal{L} ist die Teil-Liealgebra aller D mit $[D, d] = 0$. Die Abbildung \mathcal{L} induziert somit eine graduierte Liealgebra Struktur (die Frölicher-Nijenhuis Klammer) auf $\Omega^*(M; TM)$.

Beweis. Für Vektorfelder $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ beschreibt $f \mapsto D(f)(X_1, \dots, X_k)$ eine Derivation $C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$. Folglich gibt es ein eindeutiges Vektorfeld $K(X_1, \dots, X_k) \in \mathfrak{X}(M)$ mit $D(f)(X_1, \dots, X_k) = K(X_1, \dots, X_k)(f)$. Es ist $K \in \Omega^k(M; TM)$. Die definierende Gleichung für K ist $D(f) = df \circ K = i_K df = \mathcal{L}_K f$ für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Also ist $D - \mathcal{L}_K$ algebraisch, d.h. $D = \mathcal{L}_K + i_L$ für ein eindeutiges $L \in \Omega^{k+1}(M; TM)$. Wir haben

$$0 = [i_K, 0] = [i_K, [d, d]] = [[i_K, d], d] + (-1)^{k-1} [d, [i_K, d]] = 2[\mathcal{L}_K, d]$$

Somit ist $0 = [d, D]$ für $D = \mathcal{L}_K + i_L$ genau dann, wenn $0 = [i_L, d] = \mathcal{L}_L$, i.e. $L = 0$. Es ist $df \circ [X, Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]} f = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] f$ für die Frölicher-Nijenhuis-Klammer von $X, Y \in \Omega^*(M, TM)$. \square

43. Divergenz, Rotation und Laplace

43.1 Differentialformen am \mathbb{R}^3

Für offenes $M \subseteq \mathbb{R}^m$ wissen wir, daß $\mathfrak{X}(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^m)$ ist vermöge der Abbildung $\sum f^i (\frac{\partial}{\partial x^i}) \mapsto (f^i)_{i=1}^m$, wobei x^i die Standardkoordinaten sind. Ebenso ist $\Omega^m(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})$ vermöge $* : f \cdot \text{vol}_M \mapsto f$, mit $\text{vol}_M = dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$. Schließlich sieht der Isomorphismus $* \circ \sharp : \mathfrak{X}(M) \rightarrow \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^{m-1}(M)$ nach [41.5](#) wie folgt aus: $*\sharp\xi = \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i du^i \wedge \dots \wedge \widehat{du^i} \wedge \dots \wedge du^m$. Für $m = 3$ liefert das

$$\begin{aligned} *\sharp\xi &= \xi^1 du^2 \wedge du^3 - \xi^2 du^1 \wedge du^3 + \xi^3 du^1 \wedge du^2 \\ &= \xi^1 du^2 \wedge du^3 + \xi^2 du^3 \wedge du^1 + \xi^3 du^1 \wedge du^2 \end{aligned}$$

Zusammenfassend haben also folgende Isomorphismen:

1. $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$
2. $\Omega^1(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ via der Basis dx^1, dx^2, dx^3
3. $\Omega^2(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R}^3)$ via der Basis $dx^2 \wedge dx^3, dx^3 \wedge dx^1, dx^1 \wedge dx^2$
4. $\Omega^3(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})$ via der Basis $dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$

Wie sieht nun d bezüglich dieser Basen aus?

$$\begin{array}{ccccccc} C^\infty(M, \mathbb{R}) & \xrightarrow{\text{grad}} & C^\infty(M, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{rot}} & C^\infty(M, \mathbb{R}^3) & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty(M, \mathbb{R}) \\ \parallel & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow & & \cong \downarrow \\ \Omega^0(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^1(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^2(M) & \xrightarrow{d} & \Omega^3(M) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} f & & (f_1, f_2, f_3) & & (f_1, f_2, f_3) & & f \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ f & & \sum_i f_i dx^i & & \begin{array}{l} f_1 dx^2 \wedge dx^3 \\ + f_2 dx^3 \wedge dx^1 \\ + f_3 dx^1 \wedge dx^2 \end{array} & & f dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 \end{array}$$

Der Operator d ist somit durch folgende Formeln gegeben:

$$d : \Omega^0(M) \ni f \mapsto df = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i$$

$$\begin{aligned} d : \Omega^1(M) \ni \sum f_i dx^i &\mapsto \sum df_i \wedge dx^i = \sum \frac{\partial f_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^i \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3} \right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1} \right) dx^3 \wedge dx^1 \\ &\quad + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right) dx^1 \wedge dx^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d : \Omega^2(M) \ni f_1 dx^2 \wedge dx^3 + f_2 dx^3 \wedge dx^1 + f_3 dx^1 \wedge dx^2 &\mapsto \\ \mapsto \left(\sum \frac{\partial f_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 & \end{aligned}$$

Also stimmt er bis auf natürliche Isomorphismen überein mit:

$$\begin{aligned} \text{grad } f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}, \frac{\partial f}{\partial x^2}, \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) \\ \text{rot}(f_1, f_2, f_3) &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}, \frac{\partial f_1}{\partial x^3} - \frac{\partial f_3}{\partial x^1}, \frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2} \right) \\ \text{div}(f_1, f_2, f_3) &= \frac{\partial f_1}{\partial x^1} + \frac{\partial f_2}{\partial x^2} + \frac{\partial f_3}{\partial x^3}. \end{aligned}$$

Es folgen direkt aus $d^2 = 0$ die bekannten Sätze aus der Vektoranalysis:

$$(\text{rot} \circ \text{grad})f = 0, \quad (\text{div} \circ \text{rot})(f_i) = 0$$

und ebenso folgt direkt aus dem Lemma von Poincaré (siehe (6) in [44.5](#)):

$$\begin{aligned} \text{rot}(f_i) = 0 &\Rightarrow \exists f, \text{ soda\ss lokal } \text{grad } f = (f_i) \text{ gilt.} \\ \text{div}(f_i) = 0 &\Rightarrow \exists (g_i), \text{ soda\ss lokal } \text{rot}(g_i) = (f_i) \text{ gilt.} \end{aligned}$$

43.2 Divergenz auf orientierten Riemann-Mannigfaltigkeiten

Für eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit M erhalten wir nach [41.5](#) mittels \sharp und Hodge-Sternoperator $*$ einen Isomorphismus $\mathfrak{X} \xrightarrow{\cong} \Omega^1 \xrightarrow{*} \Omega^{m-1}$. Dieser stimmt mit der Abbildung $\xi \mapsto i_\xi \text{vol}_M \in \Omega^{m-1}$ überein, denn dazu müssen wir $\omega \wedge i_\xi \text{vol}_M = \langle \omega, \sharp \xi \rangle \text{vol}_M$ für alle $\omega \in \Omega^1$ beweisen, was wegen

$$\begin{aligned} 0 &= i_\xi(0) = i_\xi(\omega \wedge \text{vol}_M) = i_\xi \omega \cdot \text{vol}_M + (-1)^1 \omega \wedge i_\xi \text{vol}_M \\ &\text{und } \langle \omega, \sharp \xi \rangle = \langle \flat \omega, \xi \rangle = \omega(\xi) = i_\xi(\omega) \end{aligned}$$

gilt. Lokal kann man das auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
i_\xi \text{vol}_M &= \iota \left(\sum_j \xi^j \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \left(\sqrt{G} du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \right) \\
&= \sum_j \xi^j \sqrt{G} \iota \frac{\partial}{\partial u^j} \left(du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \right) \\
&= \sum_j \xi^j \sqrt{G} \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} du^1 \wedge \cdots \wedge \underbrace{du^k \left(\frac{\partial}{\partial u^j} \right)}_{\delta_j^k} \wedge \cdots \wedge du^m \\
&= \sqrt{G} \sum_j (-1)^{j-1} \xi^j du^1 \wedge \cdots \wedge \overline{du^j} \wedge \cdots \wedge du^m \\
&= *\omega, \quad \text{wobei } \mathfrak{X}(M) \ni \xi \stackrel{\Delta}{=} \omega \in \Omega^1(M).
\end{aligned}$$

Die DIVERGENZ $\text{DIV } \xi$ eines Vektorfelds ξ wird dann durch

$$\text{div } \xi := * \left(d(i_\xi \text{vol}_M) \right) = (* \circ d \circ * \circ \#)(\xi) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

definiert. Also gilt:

$$\text{div } \xi \cdot \text{vol}_M = *(\text{div } \xi) = ** \left(d(i_\xi \text{vol}_M) \right) \stackrel{\boxed{41.4}}{=} d(i_\xi \text{vol}_M) = (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \text{vol}_M = \mathcal{L}_\xi \text{vol}_M,$$

d.h. $\text{div } \xi$ mißt die infinitesimale Änderung $\mathcal{L}_\xi \text{vol}_M = \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{t=0} (\text{Fl}_t^\xi)^*(\text{vol}_M)$ des infinitesimalen Volumens vol_M unter dem Fluß Fl^ξ des Vektorfelds ξ . Um auf eine explizite Formel der Divergenz zu kommen, rechnen wir lokal:

$$\begin{aligned}
\xi &= \sum \xi^i \frac{\partial}{\partial u^i} \xrightarrow{* \circ \#} i_\xi \text{vol}_M \stackrel{\text{s.o.}}{=} \sqrt{G} \sum_i (-1)^{i-1} \xi^i du^1 \wedge \cdots \wedge \overline{du^i} \wedge \cdots \wedge du^m \xrightarrow{d} \\
&\xrightarrow{d} \sum_i (-1)^{i-1} d(\sqrt{G} \xi^i) \wedge du^1 \wedge \cdots \wedge \overline{du^i} \wedge \cdots \wedge du^m + 0 \\
&= \sum_i (-1)^{i-1} \sum_{k=1}^m \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^k} du^k \wedge du^1 \wedge \cdots \wedge \overline{du^i} \wedge \cdots \wedge du^m \\
&= \sum_i (-1)^{i-1} \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^i} (-1)^{i-1} du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \\
&= \left(\sum_i \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^i} \right) du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \xrightarrow{*} \\
&\xrightarrow{*} \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^i}
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir:

$$\text{div } \xi = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_i \frac{\partial(\sqrt{G} \xi^i)}{\partial u^i}.$$

43.3 Laplace-Operator

Wir betrachten nun den Laplaceoperator allgemein auf Riemann-Mannigfaltigkeiten. Die Abbildung d^* definiert durch:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^p & \xrightarrow{(-1)^p d^*} & \Omega^{p-1} \\ \downarrow * \cong & & \downarrow \cong * \\ \Omega^{m-p} & \xrightarrow{d} & \Omega^{m-p+1} \end{array} \quad \text{oder} \quad \begin{array}{ccc} \Omega^p & \xrightarrow{d^*} & \Omega^{p-1} \\ \downarrow * \cong & & \downarrow \cong * \\ \Omega^{m-p} & \xrightarrow{(-1)^{pm+m+1} d} & \Omega^{m-p+1} \end{array}$$

heißt KODIFFERENTIALOPERATOR. Man sollte beachten, daß sie keine graduierte Derivation ist. Das Vorzeichen ist so gewählt, daß d^* formal adjungiert zu d wird, wie wir in [49.1](#) zeigen werden. Um die Gleichwertigkeit der beiden Diagramme zu zeigen rechnet man wie folgt:

$$\begin{aligned} * \circ (-1)^p d^* &= d \circ * \Leftrightarrow * \circ (-1)^{pm+m+1} d \circ * = * \circ (-1)^{pm+m+1} * \circ (-1)^p d^* \quad \underline{\underline{41.4}} \\ &= (-1)^{(pm+m+1)+p+(p-1)(m-p+1)} d^* = d^* \end{aligned}$$

Die Abbildung $\Delta := dd^* + d^*d : \Omega^p \rightarrow \Omega^p$ heißt LAPLACE-BELTRAMI-OPERATOR. Sei M offen im \mathbb{R}^3 , dann ist:

$$\begin{array}{ccccccc} \Omega^0 & \xrightarrow{d} & \Omega^1 & \xrightarrow{d} & \Omega^2 & \xrightarrow{d} & \Omega^3 \\ \downarrow * & & \downarrow * & & \downarrow * & & \downarrow * \\ \Omega^3 & \xrightarrow{-d^*} & \Omega^2 & \xrightarrow{d^*} & \Omega^1 & \xrightarrow{-d^*} & \Omega^0 \\ \parallel & & \parallel & & \parallel & & \parallel \\ C^\infty & \xrightarrow{\text{grad}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{rot}} & \mathfrak{X} & \xrightarrow{\text{div}} & C^\infty \end{array}$$

Allgemein gilt für Funktionen $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ die Formel $\Delta f = -\text{div grad } f$, denn

$$\begin{aligned} \Delta f &= d^* df + 0 = (-1)^{1m+m+1} * d * df \\ &= - * d * \sharp \text{grad } f \quad \underline{\underline{43.2}} \quad - * d i_{\text{grad } f} \text{vol}_M \quad \underline{\underline{43.2}} \quad - \text{div}(\text{grad } f). \end{aligned}$$

Der hier definierte Laplace-Operator hat somit ein ungewohntes Vorzeichen, welches dazu dient, ihn zu einen positiven Operator zu machen, siehe [49.1](#).

43.4 Satz von Frobenius, 2. Version.

Es sei E ein Teilvektorbündel von $TM \rightarrow M$. Dann gilt: E ist integrabel $\Leftrightarrow d(\Omega_E(M)) \subseteq \Omega_E(M)$, wobei $\Omega_E(M) = \{\omega \in \Omega(M) : \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = 0, \text{ falls } \forall i : \text{Bild } \xi_i \subseteq E\}$

Beweis. (\Rightarrow) Wir müssen zeigen, daß $d\omega \in \Omega_E(M)$ für $\omega \in \Omega_E(M)$ ist:

$$\begin{aligned} d\omega(\xi_0, \dots, \xi_k) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \xi_i \omega(\xi_0, \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \xi_k) + \\ &\quad + \sum_{j>i} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \dots, \widehat{\xi_i}, \dots, \widehat{\xi_j}, \dots, \xi_k) = 0, \end{aligned}$$

da E integrabel ist, also für $\text{Bild } \xi_i \subseteq E$ auch $[\xi_i, \xi_j] \subseteq E$ ist.

(\Leftarrow) Seien $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$ mit $\text{Bild } \xi, \text{Bild } \eta \subseteq E$. Zu zeigen ist: $\text{Bild}[\xi, \eta] \subseteq E$.
 Angenommen $[\xi, \eta]_p \notin E_p \subseteq T_p M$. Sei $\omega_p \in (T_p M)^*$ so gewählt, daß $\omega(E_p) = 0$ und $\omega_p([\xi, \eta]) \neq 0$. Lokal ist $E = M \times E_p$, dort ist ω lokal definiert. Durch Multiplikation von ω mit einer C^∞ -Funktion, deren Träger ganz im Definitionsbereich von ω liegt, wird ω zu einer global definierten 1-Form.

$$\begin{aligned} d\omega \in \Omega_E^2(M) \Rightarrow 0 = d\omega(\xi, \eta) &= \xi \omega(\eta) - \eta \omega(\xi) - \omega([\xi, \eta]) = 0 - \omega([\xi, \eta]) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \omega([\xi, \eta]) = 0, \text{ ein Widerspruch} \quad \square \end{aligned}$$

44. Kohomologie

44.1 Definition der Kohomologie

Es sei $d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ die äußere Ableitung.

1. $Z^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) : d\omega = 0\}$, der RAUM DER GESCHLOSSENEN DIFFERENTIALFORMEN (oder auch KOZYKELN);
2. $B^k(M) := \{d\omega : \omega \in \Omega^{k-1}(M)\}$, der RAUM DER EXAKTEN DIFFERENTIALFORMEN (oder auch KORÄNDER);
3. $H^k(M) := Z^k(M)/B^k(M)$, die k -TE DE-RHAM KOHOMOLOGIE von M ;
4. $H(M) := \bigoplus_k H^k(M)$, die DE-RHAM KOHOMOLOGIE von M ;
5. $b_k(M) := \dim H^k(M)$, die k -TE BETTIZAHLE;
6. $f_M(t) := \sum_k b_k t^k$, das POINCARÉ-POLYNOM; wohldefiniert, falls alle b_k endlich sind;
7. $\chi(M) := f_M(-1) = \sum (-1)^k b_k$, die EULER-CHARAKTERISTIK von M .

44.2 Definition (Kohomologie-Funktor)

Sei $g : M \rightarrow N$ glatt und $g^* : \Omega(N) \rightarrow \Omega(M)$ so gilt $g^*(d\omega) = d(g^*\omega)$ nach [42.7](#), somit existieren die Einschränkungen $g^* : Z^k(N) \rightarrow Z^k(M)$ und $g^* : B^k(N) \rightarrow B^k(M)$. Daher ist die Definition folgender linearen Abbildung sinnvoll:

$$g^* : H(N) \rightarrow H(M), \quad g^* : [\omega] \mapsto [g^*\omega].$$

44.3 Satz (Kohomologie-Axiome).

Die Kohomologie hat folgende Eigenschaften:

1. $H^0(\{*\}) = \mathbb{R}$, $H^k(\{*\}) = 0$ für $k \neq 0$ (DIMENSIONSAXIOM).
2. $f, g : M \rightarrow N$ glatt, $f \sim g \Rightarrow f^* = g^*$ (HOMOTOPIEAXIOM).
3. Sei $M = \bigsqcup_\alpha M_\alpha \Rightarrow H^k(M) = \prod_\alpha H^k(M_\alpha)$ (disjunkte Vereinigung).
4. Sei $M = U \cup V$ mit $U, V \subseteq M$ offen, dann existieren lineare Abbildungen δ_k , die die folgende lange Sequenz exakt machen:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H^k(M) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} H^k(U) \oplus H^k(V) \xrightarrow{(j_U^* - j_V^*)} H^k(U \cap V) \xrightarrow{\delta_k} \\ \xrightarrow{\delta_k} H^{k+1}(M) \rightarrow H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \rightarrow H^{k+1}(U \cap V) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

mit den Inklusionen $i_U : U \hookrightarrow U \cup V$, $i_V : V \hookrightarrow U \cup V$, $j_U : U \cap V \hookrightarrow U$ und $j_V : U \cap V \hookrightarrow V$. Diese Sequenz heißt MAYER-VIETORIS SEQUENZ und δ^k heißt EINHÄNGUNGSOPERATOR.

Ein Folge linearer Abbildungen $\dots \xrightarrow{f_k} E_k \xrightarrow{f_{k+1}} \dots$ heißt EXAKT, falls $\text{Bild } f_k = \text{Ker } f_{k+1}$ für alle k ist.

Beweis.

(1) Klar, da $\Omega^k(\{*\}) = \{0\}$ für $k \neq 0$ und $\Omega^0(\{*\}) = C^\infty(\{*\}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

(2) Sei $H \in C^\infty(M \times \mathbb{R}, N)$ die (glatte) Homotopie von f nach g , d.h. $H(0, x) = f(x)$ und $H(1, x) = g(x)$ für alle $x \in M$. Für $\omega \in \Omega^k(N)$ ist $H^*\omega \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$. Sei $j_t : M \rightarrow M \times \mathbb{R}$ definiert durch $j_t(x) := (x, t)$. Dann ist $H \circ j_0 = f$ und $H \circ j_1 = g$ und somit

$$g^* - f^* = (H \circ j_1)^* - (H \circ j_0)^* = (j_1^* - j_0^*) \circ H^*.$$

Für $\varphi \in \Omega^k(M \times \mathbb{R})$ ist $j_t^*\varphi \in \Omega^k(M)$ und $t \mapsto j_t^*\varphi$ ist eine glatte Kurve in $\Omega^k(M)$ und somit

$$(j_1^* - j_0^*)\varphi = \int_0^1 \frac{d}{dt} j_t^*\varphi dt = \int_0^1 j_t^* \mathcal{L}_\xi \varphi dt,$$

wobei $\xi := \frac{\partial}{\partial t} \in \mathfrak{X}(M \times \mathbb{R})$ das Einheitsvektorfeld in \mathbb{R} -Richtung bezeichnet, denn

$$\begin{aligned} j_{t_1+t_2} &= \text{Fl}_{t_2}^\xi \circ j_{t_1} \text{ für } t_1, t_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d}{dt_1} j_{t_1}^*\varphi &= \frac{d}{dt_2} \Big|_{t_2=0} (j_{t_1+t_2})^*\varphi = \frac{d}{dt_2} \Big|_{t_2=0} (\text{Fl}_{t_2}^\xi \circ j_{t_1})^*\varphi \\ &= \frac{d}{dt_2} \Big|_{t_2=0} (j_{t_1}^* \circ (\text{Fl}_{t_2}^\xi)^*)\varphi = j_{t_1}^* \frac{d}{dt_2} \Big|_{t_2=0} (\text{Fl}_{t_2}^\xi)^*\varphi = j_{t_1}^* \mathcal{L}_\xi \varphi. \end{aligned}$$

Somit definieren wir Faserintegration I_0^1 durch

$$I_0^1 : \Omega^k(M \times \mathbb{R}) \rightarrow \Omega^k(M), \quad I_0^1(\varphi) := \int_0^1 j_t^*\varphi dt.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} (d \circ I_0^1)(\varphi) &= d\left(\int_0^1 j_t^*\varphi dt\right) = \int_0^1 (d j_t^*\varphi) dt = \int_0^1 j_t^* d\varphi dt \\ &= I_0^1 d\varphi = (I_0^1 \circ d)(\varphi); \\ (j_1^* - j_0^*)\varphi &= \int_0^1 j_t^* \mathcal{L}_\xi \varphi dt = I_0^1 \mathcal{L}_\xi \varphi = I_0^1 (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d)\varphi. \end{aligned}$$

Wir definieren nun den Homotopie-Operator $G : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^{k-1}(M)$ mit $G := I_0^1 \circ i_\xi \circ H^*$, d.h.:

$$\begin{array}{ccc} \Omega^k(N) & \xrightarrow{\quad G \quad} & \Omega^{k-1}(M) \\ H^* \downarrow & & \uparrow I_0^1 \\ \Omega^k(M \times \mathbb{R}) & \xrightarrow{\quad i_\xi \quad} & \Omega^{k-1}(M \times \mathbb{R}) \end{array}$$

Dann ist

$$\begin{aligned} g^* - f^* &= (j_1^* - j_0^*) \circ H^* \\ &= I_0^1 \circ (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \circ H^* \\ &= (d \circ I_0^1 \circ i_\xi + I_0^1 \circ i_\xi \circ d) \circ H^* \\ &= d \circ (I_0^1 \circ i_\xi \circ H^*) + (I_0^1 \circ i_\xi \circ H^*) \circ d = G \circ d + d \circ G. \end{aligned}$$

und somit ist $g^*\omega - f^*\omega = Gd\omega + dG\omega = dG\omega$ exakt, falls $d\omega = 0$. Also ist $g^* - f^* = 0 : H(N) \rightarrow H(M)$.

(3) Klar, da $\Omega^k(\bigsqcup_\alpha M_\alpha) = \prod_\alpha \Omega^k(M_\alpha)$.

(4) Wir zeigen zuerst, daß

$$0 \rightarrow \Omega^k(U \cup V) \xrightarrow{(i_U^*, i_V^*)} \Omega^k(U) \oplus \Omega^k(V) \xrightarrow{j_U^* - j_V^*} \Omega^k(U \cap V) \rightarrow 0$$

exakt ist.

Die Abbildung $f := (i_U^*, i_V^*)$ ist klarerweise injektiv mit $\text{Bild}(i_U^*, i_V^*) = \text{Ker}(j_U^* - j_V^*)$. Die Abbildung $g := (j_U^* - j_V^*)$ ist surjektiv: Sei dazu $\{h_U, h_V\}$ eine Zerlegung der Eins zur Überdeckung $\{U, V\}$ und $\varphi \in \Omega(U \cap V)$. Mit $\varphi_U := h_V \varphi \in \Omega(U)$ und $\varphi_V := -h_U \varphi \in \Omega(V)$ gilt:

$$(j_U^* - j_V^*)(\varphi_U, \varphi_V) = \varphi_U - \varphi_V = (h_V + h_U)\varphi = \varphi.$$

Also ist die Sequenz exakt.

Um daraus die lange exakte Sequenz in der Kohomologie zu erhalten können wir das nachfolgende allgemeine Resultat verwenden. \square

44.4 Theorem.

Es sei $0 \rightarrow C' \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} C'' \rightarrow 0$ eine kurze exakte Folge von Ketten-Abbildungen, d.h. C, C' und C'' sind Kettenkomplexe (i.e. \mathbb{Z} -graduierte Vektorräume mit Randoperatoren ∂ vom Grad 1, welche $\partial^2 = 0$ erfüllen) und die verbindenden linearen Abbildungen f und g sind vom Grad 0 und vertauschen mit den Randoperatoren. Dann erhalten wie eine lange exakte Folge in Homologie:

$$\dots \xrightarrow{\partial_*} H_q(C') \xrightarrow{H_q(f)} H_q(C) \xrightarrow{H_q(g)} H_q(C'') \xrightarrow{\partial_*} H_{q+1}(C') \xrightarrow{H_{q+1}(f)} \dots$$

Beweis. Betrachte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & C'_q & \xrightarrow{f} & C_q & \xrightarrow{g} & C''_q & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ 0 & \longrightarrow & C'_{q+1} & \xrightarrow{f} & C_{q+1} & \xrightarrow{g} & C''_{q+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

Es sei $\partial_*[z''] := [(f^{-1} \circ \partial \circ g^{-1})(z'')]$ für $z'' \in C''$ mit $\partial z'' = 0$.

Wir zuerst zeigen, daß es möglich ist Elemente in den entsprechenden inversen Bildern zu wählen und dann zeigen wir, daß die resultierende Klasse nicht von irgendeiner der Wahlen abhängt.

Sei dazu $z''_q \in C''_q$ ein Zykel, d.h. $\partial z''_q = 0$. Da g surjektiv ist finden wir ein $x_q \in C_q$ mit $gx_q = z''_q$. Da $g\partial x_q = \partial gx_q = \partial z''_q = 0$, finden wir ein $x'_{q+1} \in C'_{q+1}$ mit $f x'_{q+1} = \partial x_q$. Und daher ist $x'_{q+1} \in f^{-1} \partial g^{-1} z''_q$. Weiters ist $f \partial x'_{q+1} = \partial f x'_{q+1} = \partial \partial x_q = 0$. Da f injektiv ist erhalten wir $\partial x'_{q+1} = 0$ und daher können wir die Klasse $\partial z''_q := [x'_{q+1}]$ bilden.

$$\begin{array}{ccccc} & & x_q & \xrightarrow{g} & z''_q \\ & & \downarrow \partial & & \downarrow \partial \\ x'_{q+1} & \xrightarrow{f} & x_{q+1} & \xrightarrow{g} & 0 \\ \downarrow \partial & & \downarrow \partial & & \\ \partial x'_{q+1} & \xrightarrow{f} & 0 & & \end{array}$$

Nun die Unabhängigkeit von allen Wahlen. Sei dazu $[z''_q] = [\bar{z}''_q]$, d.h. $\exists x'_{q-1} : \partial x'_{q-1} = z''_q - \bar{z}''_q$. Wähle $x_q, \bar{x}_q \in C_q$ wie zuvor, so daß $gx_q = x''_q$ und $g\bar{x}_q = \bar{x}''_q$. Ebenso wie zuvor wählen wir $x'_{q+1}, \bar{x}'_{q+1} \in C'_{q+1}$ mit $f x'_{q+1} = \partial x_q$ und $f \bar{x}'_{q+1} = \partial \bar{x}_q$. Wir haben zu zeigen, daß $[x'_{q+1}] = [\bar{x}'_{q+1}]$. Dazu wählen wir $x_{q-1} \in C_{q-1}$ mit $gx_{q-1} = x''_{q-1}$. Dann ist $g\partial x_{q-1} = \partial gx_{q-1} = \partial x''_{q-1} = z''_q - \bar{z}''_q = g(x_q - \bar{x}_q)$ und

daher existiert ein $x'_q \in C_q$ mit $fx'_q = x_q - \bar{x}_q - \partial x_{q-1}$. Weiters ist $f\partial x'_q = \partial fx'_q = \partial(x_q - \bar{x}_q - \partial x_{q-1}) = \partial x_q - \partial \bar{x}_q - 0 = f(x'_{q+1} - \bar{x}'_{q+1})$. Da f injektiv ist, haben wir $x'_{q+1} - \bar{x}'_{q+1} = \partial x'_q$, d.h. $[x'_{q+1}] = [\bar{x}'_{q+1}]$.

Exaktheit bei $H_q(C')$:

(\subseteq) $f_*\partial_*[z''] = [ff^{-1}\partial g^{-1}z''] = [\partial g^{-1}z''] = 0$.

(\supseteq) Es sei $\partial z' = 0$ und $0 = f_*[z'] = [fz']$, d.h. $\exists x: \partial x = fz'$. Dann erfüllt $x'' := gx$ sowohl $\partial x'' = \partial gx = g\partial x = gfz' = 0$ als auch $\partial_*[x''] = [f^{-1}\partial g^{-1}gx] = [f^{-1}\partial x] = [z']$.

Exaktheit bei $H_q(C)$:

(\subseteq) da $g \circ f = 0$.

(\supseteq) Es sei $\partial z = 0$ mit $0 = g_*[z] = [gz]$, d.h. $\exists x'': \partial x'' = gz$. Dann $\exists x: gx = x''$. Daher ist $gz = \partial x'' = \partial gx = g\partial x \Rightarrow \exists x': fx' = z - \partial x \Rightarrow f\partial x' = \partial fx' = \partial(z - \partial x) = 0 \Rightarrow \partial x' = 0$ und $f_*[x'] = [fx'] = [z - \partial x] = [z]$.

Exaktheit bei $H_q(C'')$:

(\subseteq) Wir haben $\partial_*g_*[z] = [f^{-1}\partial g^{-1}gz] = [f^{-1}\partial z] = [f^{-1}0] = 0$.

(\supseteq) Es sei $\partial z'' = 0$ und $0 = \partial_*[z'']$, d.h. $\exists x': \partial x' = z'$, wobei $z' \in f^{-1}\partial g^{-1}z''$, d.h. $\exists x: gx = z''$ und $fz' = \partial x$. Dann ist $\partial(x - fx') = fz' - f(\partial x') = 0$ und $g(x - fx') = z'' - 0$, d.h. $g_*[x - fx'] = [z'']$. \square

44.5 Bemerkungen

1. Die De-Rham Kohomologie ist durch die Eigenschaften aus Satz [44.3](#) schon eindeutig bestimmt, siehe [\[96, Kap.5\]](#).
2. Für die 0. Kohomologie gilt:

$$\begin{aligned} H^0(M) &= \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : df = 0\} \\ &= \{f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : f \text{ ist lokal konstant}\} \\ &= \mathbb{R}^\#, \end{aligned}$$

wobei $\#$ die Anzahl der Zusammenhangskomponenten von M ist.

3. Falls $k < 0$ oder $k > \dim M$ so ist $\Omega^k(M) = 0$ und somit $H^k(M) = 0$.
4. Seien M und N HOMOTOPIEÄQUIVALENT, d.h. es gibt glatte Abbildungen $f: M \rightarrow N$ und $g: N \rightarrow M$ mit $f \circ g \sim \text{id}_N$ und $g \circ f \sim \text{id}_M$. Die Abbildungen $H(f) := f^*: H(N) \rightarrow H(M)$ und $H(g) := g^*: H(M) \rightarrow H(N)$ sind dann inverse Isomorphismen. Ein Beispiel homotopieäquivalenter Räume sind das offene Möbiusband und der Zylinder.
5. Ist insbesondere $A \subseteq M$ ein DEFORMATIONSRETRAKT, d.h. eine Homotopie $h: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ existiert, sodaß $h(\cdot, 1) = \text{id}_M$, $h(X \times \{0\}) \subseteq A$ und $h(\cdot, 0)|_A = \text{id}_A$, so gilt $H(M) \cong H(A)$. Z.B. ist die Basis jedes Vektorbündels vermöge der Einbettung als Nullschnitt ein Deformationsretrakt des Totalraums.
6. Ist M KONTRAHIERBAR, d.h. ein Punkt p in M existiert, welcher ein Deformationsretrakt von M ist, dann gilt: $H(M) \cong H(\{p\})$, d.h. jede geschlossene Form ist exakt (dies ist das versprochene POINCARÉ-LEMMA). Falls $M = \mathbb{R}^m$ – oder allgemeiner $M \subset \mathbb{R}^m$ sternförmig ist – so ist $h: M \times \mathbb{R} \rightarrow M$ mit $(x, t) \mapsto t \cdot x$ eine Kontraktion von M zu einem Punkt, also ist M kontrahierbar, Lokal ist also jede Mannigfaltigkeit kontrahierbar.
7. Ist M einfach zusammenhängend, dann ist $H^1(M) = 0$. Um dies zu zeigen geht man so vor: Sei $\omega \in \Omega^1(M)$ mit $d\omega = 0$. Wir wollen ein $f \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ finden mit $df = \omega$. Dazu wählen wir einen fixen Punkt $x_0 \in M$ und suchen für jeden anderen Punkt $x \in M$ eine Kurve c , welche x_0 mit x

verbindet, und definieren

$$f(x) := \int_c \omega = \int_0^1 c^*(\omega).$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl der Kurve ab, denn die Zusammensetzung mit einer zweiten verkehrt durchlaufenen Kurve liefert eine geschlossene Kurve c . Diese ist nach Voraussetzung homotop zur konstanten Kurve konst_{x_0} , also ist $[c^*(\omega)] = [(\text{konst}_{x_0})^*(\omega)]$. Die beiden Formen auf $[0, 1]$ unterscheiden sich also nur um eine exakte Form dg , und somit ist:

$$\int_c \omega = \int_0^1 c^*(\omega) = \int_0^1 (\text{konst}_{x_0})^*(\omega) = \int_0^1 0 = 0.$$

Da lokal so ein f mit $df = \omega$ immer existiert, folgt daß das oben definierte f auch glatt ist. Und wegen

$$\begin{aligned} df(c'(0)) &= (f \circ c)'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \int_0^1 c(t \cdot)^*(\omega) \\ &= \int_0^1 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} c(t \cdot)^*(\omega)(s) ds = \int_0^1 \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega_{c(t \cdot)}(t c'(t \cdot)) ds \\ &= \int_0^1 \omega_{c(0)}(c'(0)) ds = \omega_{c(0)}(c'(0)) \end{aligned}$$

ist es auch die gesuchte Stammfunktion.

8. Falls $\dots \rightarrow E_i \xrightarrow{T_i} E_{i+1} \rightarrow \dots$ eine exakte Sequenz von endlichdimensionalen Vektorräumen ist, so folgt durch Aufsummieren der Gleichung

$$\begin{aligned} \dim(E_i) &= \dim(\text{Ker } T_i) + \dim(\text{Bild}(T_i)) \\ &= \dim(\text{Ker } T_i) + \dim(\text{Ker } T_{i+1}) \end{aligned}$$

die Identität

$$\sum_i (-1)^i \dim E_i = 0$$

Die Mayer-Vietoris Sequenz impliziert also, daß für die Euler-Charakteristik folgendes gilt:

$$\chi(U \cup V) + \chi(U \cap V) = \chi(U) + \chi(V)$$

9. Da \mathbb{R}^m kontrahierbar ist, ist seine Euler-Charakteristik jene des Punktes also 1 nach Dimensionsaxiom [44.3.1](#). Es ist $\chi(S^0) = 2$ wegen [44.3.3](#). Nach dem vorigen Punkt ist für jeden Punkt $p \in M$ einer m -dimensionalen Mannigfaltigkeit

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \chi(M \setminus \{p\}) + \chi(\mathbb{R}^m) - \chi(\mathbb{R}^m \setminus \{p\}) \\ &= \chi(M \setminus \{p\}) + \chi(\{p\}) - \chi(S^{m-1}) \\ &= \chi(M \setminus \{p\}) + 1 - \chi(S^{m-1}). \end{aligned}$$

Für die Sphären erhalten wir somit

$$\chi(S^m) = \chi(\mathbb{R}^m) + 1 - \chi(S^{m-1}) = 2 - \chi(S^{m-1})$$

und insbesondere $\chi(S^1) = 2 - \chi(S^0) = 0$.

Kompakte 2-dimensionale zusammenhängende Mannigfaltigkeiten M_g vom Geschlecht g erhält man aus S^2 durch Ankleben von g Henkeln oder g Möbiusbändern, also ergibt sich rekursive im nicht-orientierbaren Fall

$$\begin{aligned} \chi(M_g) &= \chi(M_{g-1} \setminus \{p\} \cup \text{Möb}) = \chi(M_{g-1}) - 1 + \chi(\text{Möb}) - \chi(S^1) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 1 = 2 - (g-1) - 1 = 2 - g, \end{aligned}$$

und im orientierbaren Fall

$$\begin{aligned}\chi(M_g) &= \chi(M_{g-1} \setminus \{p_-, p_+\} \cup S^1 \times \mathbb{R}) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 2 + \chi(S^1 \times \mathbb{R}) - \chi(S^1 \sqcup S^1) \\ &= \chi(M_{g-1}) - 2 = 2 - 2(g-1) - 2 = 2 - 2g\end{aligned}$$

10. Die Euler-Charakteristik χ einer Mannigfaltigkeit, läßt sich auch dadurch berechnen, daß man sie TRIANGULIERT, d.h. in Simplexe zerlegt. Sei γ_i die Anzahl der verwendeten Simplexe der Dimension i , dann gilt: $\chi = \sum_i (-1)^i \gamma_i$. Insbesondere gilt für jeden Polyeder, daß die Anzahl der Ecken minus die Anzahl der Kanten plus die Anzahl der Seitenflächen gleich $2 = \chi(S^2)$ ist (siehe algebraische Topologie).
11. Eine weitere Möglichkeit die Euler-Charakteristik zu berechnen ist mittels MORSE-FUNKTIONEN, das sind Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, deren kritische Punkte nicht degeneriert sind, d.h. die Hessesche Matrix ist definit. Sei $\beta_k(f)$ die Anzahl der kritischen Punkte, in denen die Hessesche Matrix genau k negative Eigenwerte hat, so gelten die Morse-Ungleichungen, siehe [42, S.161–162]

$$\begin{aligned}\beta_k(M) &\leq \beta_k(f) \\ \sum_k (-1)^k \beta_k(f) &= \chi(M).\end{aligned}$$

12. Noch allgemeiner kann man für ein Vektorfeld ξ mit isolierten Nullstellen (z.B. das Gradientenfeld einer Morsefunktion) einen Index $\text{ind}_x(\xi)$ in diesen Punkten definieren, siehe [42, S.133]. Und es gilt dann nach einen Satz von Hopf, siehe [42, S.164] $\chi(M) = \sum_{\xi(x)=0} \text{ind}_x(\xi)$. Falls es also ein nirgends verschwindendes Vektorfeld gibt, so muß die Eulercharakteristik $\chi(M)$ verschwinden. Dies zeigt den Igelsatz [50.11]. Man kann umgekehrt zeigen, daß auf jeder kompakten, orientierten, zusammenhängenden Mannigfaltigkeit mit $\chi(M) = 0$ ein Nullstellenfreies Vektorfeld existiert, siehe [42, S.137].
13. Die Kohomologie der Sphären S^n für $n \geq 1$ ist:

$$H^k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & k = 0 \\ 0 & 0 < k < n \\ \mathbb{R} & k = n \\ 0 & n < k \end{cases}$$

also hat das Poincaré-Polynom die Form: $f_M(t) = 1 + t^n$.

(i) $H^0(S^n) = \mathbb{R}$ folgt aus (2).

(ii) $H^k(S^n) = 0$ für $k > n$ gilt immer, vergl. (3).

(iii) Bleibt zu zeigen: $H^k(S^n) \cong H^{k+1}(S^{n+1})$ für $0 < k$ sowie $H^1(S^n) = 0$ für $n > 2$ und $H^1(S^1) = \mathbb{R}$.

Es ist $S^{n+1} = U \cup V$ mit $U := \{x \in S^{n+1} : -1 \leq \langle x, a \rangle\}$ und $V := \{x \in S^{n+1} : +1 \geq \langle x, a \rangle\}$ für fix gewähltes $a \in S^{n+1}$. Also ist $U \cap V \cong S^n \times]-1, +1[$ und somit $H(U \cap V) \cong H(S^n)$ nach [5]. Die Mayer-Vietoris Sequenz (für

$k \geq 1$) ist

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \downarrow \\
 H^k(U) \oplus H^k(V) \cong H^k(\{*\}) \oplus H^k(\{*\}) \\
 \downarrow \\
 H^k(U \cap V) \cong H^k(S^n) \\
 \downarrow \delta \\
 H^{k+1}(U \cup V) = H^{k+1}(S^{n+1}) \\
 \downarrow \\
 H^{k+1}(U) \oplus H^{k+1}(V) \cong H^{k+1}(\{*\}) \oplus H^{k+1}(\{*\}) \\
 \downarrow \\
 \vdots
 \end{array}$$

Also ist $H^k(S^n) \xrightarrow[\cong]{\delta} H^{k+1}(S^{n+1})$ für alle $k > 0$. Der Anfang der Sequenz sieht so aus:

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 \downarrow \\
 H^0(S^{n+1}) \cong \mathbb{R} \\
 \downarrow \\
 H^0(\{*\}) \oplus H^0(\{*\}) \cong \mathbb{R}^2 \\
 \downarrow \\
 H^0(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \text{für } n = 0 \\ \mathbb{R} & \text{für } n > 0 \end{cases} \\
 \downarrow \\
 H^1(S^{n+1}) \\
 \downarrow \\
 0
 \end{array}$$

Folglich ist $H^1(S^1) = \mathbb{R}$ und $H^1(S^{n+1}) = 0$ für $n > 0$ wegen [8](#).

45. Klassische Mechanik

45.1 Kraftgesetz von Newton

Für die KRAFT F , die MASSE m , und die BESCHLEUNIGUNG \ddot{x} gilt folgende Formel:

$$F(x) = m \cdot \ddot{x}.$$

Wir beschränken uns hier und im Folgendem der Einfachheit halber auf zeitunabhängige Kräfte. Auch setzen wir $m = 1$, denn ein allgemeines m läßt sich in F absorbieren.

Sei vorerst der Raum $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ der Orte x offen. Die Funktion $F : Q \rightarrow \mathbb{R}^n$ kann dann als Vektorfeld interpretiert werden. Besonders wichtig ist der Fall, wo F ein GRADIENTEN-FELD ist, d.h. ein POTENTIAL $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $F = -\text{grad } U$.

Dies ist eine lokale (INTEGRABILITÄTS-)Bedingung $dF = 0$ und eine globale (KOHOMOLOGISCHE) Bedingung $H^1(Q) = 0$ an Q , siehe [44.5.6](#) und [44.5.7](#).

Die Newton'sche Gleichung ist eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung. Eine solche läßt sich als (System) gewöhnliche(r) Differentialgleichung(en) 1-ter Ordnung auf $TQ = Q \times \mathbb{R}^n$ umschreiben indem man als zusätzliche Variable den Geschwindigkeitsvektor $v = \dot{x}$ verwendet:

$$\begin{aligned}\dot{x} &=: v \\ \dot{v} &= F(x).\end{aligned}$$

Die einfachste Bewegungsinvariante dieser DG ist die ENERGIE

$$E(x, \dot{x}) := \frac{|\dot{x}|^2}{2} + U(x),$$

denn

$$\frac{d}{dt}E(x, \dot{x}) = \langle \dot{x}, \ddot{x} \rangle + U'(x) \cdot \dot{x} = 0.$$

Dabei heißt $m \frac{|\dot{x}|^2}{2}$ die KINETISCHE und $U(x)$ die POTENTIELLE Energie.

45.2 Newton'sches Gesetz auf Mannigfaltigkeiten

Wie wir in [\[60, 25.1\]](#) bemerkt haben, wird eine gewöhnliche Differentialgleichung 1-ter Ordnung auf einer Mannigfaltigkeit Q durch ein Vektorfeld $\xi : Q \rightarrow TQ$ beschrieben, denn die erste Ableitung einer Kurve $x : \mathbb{R} \rightarrow Q$ ist eine Kurve $\dot{x} : \mathbb{R} \rightarrow TQ$ mit Werten im Tangentialbündel TQ . Wenn (x^1, \dots, x^n) lokale Koordinaten auf Q sind, dann bilden die Derivationen $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ eine Basis des Tangentialraums $T_x Q$. Seien (v^1, \dots, v^n) die Koordinaten bezüglich dieser Basis, so sind $(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n)$ lokale Koordinaten des Tangentialbündels TQ , die Fußpunkt-Abbildung $\pi_Q : TQ \rightarrow Q$ ist in lokalen Koordinaten durch die Zuordnung

$$(x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n) \mapsto (x^1, \dots, x^n)$$

gegeben und die Ableitung der Kurve $t \mapsto x(t) \in Q$ ist durch

$$t \mapsto (x^1(t), \dots, x^n(t); \dot{x}^1(t), \dots, \dot{x}^n(t))$$

gegeben.

Was entspricht einer gewöhnlichen Differentialgleichung 2-ter Ordnung, wie sie das Kraftgesetz darstellt? Die zweite Ableitung einer Kurve $x : \mathbb{R} \rightarrow Q$ ist eine Kurve $\ddot{x} : \mathbb{R} \rightarrow T(TQ) =: T^2Q$ mit Werten im 2-ten Tangentialbündel von Q . Seien $(x^1, \dots; v^1, \dots)$ obige lokale Koordinaten auf TQ , dann bilden die Derivationen $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots; \frac{\partial}{\partial v^1}, \dots)$ eine Basis des Tangentialraums $T_{(x,v)}(TQ)$ an die Mannigfaltigkeit TQ im Punkte $(x, v) \in TQ$. Seien $(y^1, \dots, y^n; w^1, \dots, w^n)$ die Koordinaten bezüglich dieser Basis, so sind $(x^1, \dots; v^1, \dots; y^1, \dots; w^1, \dots)$ lokale Koordinaten des zweiten Tangentialbündels T^2Q . Bezüglich dieser Koordinaten ist die Fußpunkt-Abbildung $\pi_{TQ} : T^2Q \rightarrow TQ$ gegeben durch $(x^1, \dots; v^1, \dots; y^1, \dots; w^1, \dots) \mapsto (x^1, \dots; v^1, \dots)$, die Ableitung $T\pi_Q : T^2Q \rightarrow TQ$ der Fußpunkt-Abbildung $\pi_Q : TQ \rightarrow Q$ durch $(x^1, \dots; v^1, \dots; y^1, \dots; w^1, \dots) \mapsto (x^1, \dots; y^1, \dots)$, und schließlich sieht die zweite Ableitung der Kurve $t \mapsto x(t) \in Q$ wie folgt aus:

$$\ddot{x} = (x^1, \dots, x^n; \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n; \dot{x}^1, \dots, \dot{x}^n; \ddot{x}^1, \dots, \ddot{x}^n).$$

Eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung $\ddot{x} = X(x, \dot{x})$ ist demnach durch eine Abbildung $X : TQ \rightarrow T(TQ)$ gegeben, welche in Koordinaten folgendes Aussehen hat:

$$X(x, v) = (x^1, \dots, x^n; v^1, \dots, v^n; v^1, \dots, v^n; X^1(x, v), \dots, X^n(x, v)).$$

Oder unter Verwendung der Basis-Vektorfelder

$$X(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n X^i(x, v) \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Die Abbildung $X : TQ \rightarrow T(TQ)$ ist also ein Vektorfeld auf TQ , welches zusätzlich die Eigenschaft hat, daß auch $T\pi_Q \circ X = \text{id}$ ist, also die 2-te und 3-te Komponente gleich ist. Man kann diese zusätzliche Bedingung auch durch $\kappa_Q \circ X = X$ formulieren, wobei $\kappa_Q : T^2Q \rightarrow T^2Q$ den kanonischen Flip bezeichnet, welcher gerade die beiden mittleren Komponenten vertauscht (Dieser ist global definiert!). Ein Vektorfeld X auf TQ mit dieser zusätzlichen Eigenschaft nennt man einen SPRAY. Diese beschreiben also gerade gewöhnliche Differentialgleichungen 2-ter Ordnung auf Q . Für die Lösungskurven $c : \mathbb{R} \rightarrow TQ$ der entsprechenden Differentialgleichung 1-ter Ordnung auf TQ bedeutet dies, daß

$$c = \frac{d}{dt}(\pi \circ c)$$

ist, wobei $\pi : TQ \rightarrow Q$ die Fußpunkt-Abbildung ist.

45.3 Variationsproblem

Mit der Philosophie, daß die Natur minimalistisch vorgeht, wird man versucht sein ein Funktional am Raum der Kurven zu finden, dessen kritische Punkte gerade die Lösungskurven der Differentialgleichung sind. Betrachten wir vorerst wieder den Fall, daß $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist. Die KRITISCHEN PUNKTE eines Funktionals I der Gestalt

$$I(x) = \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

sind gerade die Lösungen der EULER-LAGRANGE GLEICHUNG

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L(x, \dot{x}) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L(x, \dot{x}) \text{ für } i = 1, \dots, n$$

einer impliziten Differentialgleichung 2-ter Ordnung.

Um das einzusehen, beachten wir, daß das Funktional

$$x \mapsto I(x) := \int_a^b L(x(t), \dot{x}(t)) dt$$

genau x als kritischen Punkt hat, wenn die Richtungsableitung $\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} I(x + s v)$ für alle v verschwindet. Diese berechnen wir nun:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} I(x + s v) &= \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) \cdot v(t) + \frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \cdot \dot{v}(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \right) \right) \cdot v(t) dt \\ &\quad + \int_a^b \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \right) \cdot v(t) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v}(x(t), \dot{x}(t)) \right) \right) \cdot v(t) dt + 0. \end{aligned}$$

Da v beliebig war, müssen folglich alle Komponenten

$$\frac{\partial L}{\partial x^i}(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial v^i}(x(t), \dot{x}(t)) \right) = 0$$

sein.

Nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die Variablen x und \dot{x} in L getrennt sind, d.h. $L(x, \dot{x}) = f(x) + g(\dot{x})$ ist, dann lautet die Euler-Lagrange Gleichung:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} f(x) = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} g(\dot{x}) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} g(\dot{x}) \cdot \ddot{x}^j \quad \text{für } i = 1, \dots, n.$$

Durch Vergleich mit der Newton-Gleichung $F(x) = \ddot{x}$, erhalten wir als einfachste Lösung für L die Terme

$$g(\dot{x}) := \frac{|\dot{x}|^2}{2} \quad \text{und} \quad f(x) := -U(x)$$

und somit die sogenannte LAGRANGE-FUNKTION

$$L(x, v) = \frac{|v|^2}{2} - U(x).$$

Die Zeitentwicklung ist also anstelle des komplizierteren Objekts eines Sprays $X : TQ \rightarrow T(TQ)$ durch eine reellwertige Funktion $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ festgelegt. Allerdings ist die schöne gewöhnliche explizite Differentialgleichung 2-ter Ordnung (das Newton'sche Kraftgesetz) durch eine in Koordinaten implizite Differentialgleichung 2-ter Ordnung zu ersetzen, für die wir keine Theorie auf Mannigfaltigkeiten entwickelt haben.

45.4 Lagrange-Formalismus

Versuchen wir nun umgekehrt aus einer allgemeinen Lagrange-Funktion $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ einer Mannigfaltigkeit Q das Vektorfeld $X : TQ \rightarrow T^2Q$ und die Energie $E : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ zu erhalten. Die Euler-Lagrange Gleichung sieht in Koordinaten wieder wie folgt aus:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L = \sum_j \dot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} L + \sum_j \ddot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} L$$

Schreiben wir auch das gesuchte Vektorfeld X_L in den lokalen Koordinaten als:

$$X_L(x, v) = (x^1, \dots; v^1, \dots; v^1, \dots; X^1(x, v), \dots, X^n(x, v)).$$

so erhalten wir für die Koeffizienten X^i durch Einsetzen von $\ddot{x}^i = X^i(x, \dot{x})$ die implizite Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}^i} L = \sum_j \dot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} L + \sum_j X^j \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} L$$

Falls die Matrix $(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j})_{i,j=1}^n$ invertierbar ist können wir durch Multiplikation mit der inversen Matrix $L^{k,i}$ die X^i berechnen:

$$\begin{aligned} \sum_i L^{k,i} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} L - \sum_j \dot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial \dot{x}^i} L \right) &= \sum_i \sum_j L^{k,i} X^j \frac{\partial^2}{\partial \dot{x}^j \partial \dot{x}^i} L \\ &= \sum_j X^j \delta_j^k = X^k \end{aligned}$$

Das dadurch definierte Vektorfeld

$$X_L = \sum_i v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_i \sum_k L^{i,k} \left(\frac{\partial}{\partial x^k} L - \sum_j \dot{x}^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial \dot{x}^k} L \right) \frac{\partial}{\partial v^i}$$

heißt dann LAGRANGE-VEKTORFELD zu L . Wir müßten allerdings noch überprüfen ob diese Definition wirklich etwas Koordinaten-unabhängiges definiert. Das werden wir später zeigen.

Da wir die implizite Gleichung für das Lagrange-Vektorfeld nur unter zusätzlichen Bedingungen lösen können, wollen wir versuchen die einfachste Bewegungsinvariante, die Energie E , direkt aus L zu bestimmen.

Im speziellen Fall wo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $L(x, v) = \frac{|v|^2}{2} - U(x)$ ist, versuchen wir die kinetische Energie $|v|^2/2$ aus L zu gewinnen. In Koordinaten können wir das durch

$$|v|^2 = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=1} L(x, tv) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(x, v + tv) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i} L(x, v)$$

erreichen. Für ein allgemeines Vektorbündel $V \rightarrow Q$ und eine Funktion $L : V \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir folglich die sogenannte FASERABLEITUNG $d_f L : V \rightarrow V^*$ von L durch

$$d_f L(\xi)(\eta) := \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} L(\xi + t\eta).$$

Wenn (x^1, \dots, v^1, \dots) lokale Vektorbündel-Koordinaten von V mit Fußpunkt-Koordinaten (x^1, \dots, x^n) sind, dann ist

$$(d_f L)(x, v)(x, w) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, v) \cdot w^i.$$

Für eine Lagrange-Funktion $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ einer allgemeinen Mannigfaltigkeit Q definieren wir die WIRKUNG $A : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$A(\xi) := d_f L(\xi) \cdot \xi, \text{ d.h. } A(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i} L(x, v)$$

und die ENERGIE $E : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ als

$$E := A - L, \text{ d.h. } E(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i} L(x, v) - L(x, v).$$

Wir können nun leicht nachrechnen, daß die Energie in der Tat eine Bewegungsinvariante ist, denn

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(x(t), v(t)) &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i v^i(t) \frac{\partial}{\partial v^i} L(x(t), v(t)) - L(x(t), v(t)) \right) \\ &= \sum_i \dot{v}^i \frac{\partial L}{\partial v^i} + \sum_i v^i \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v^i} - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial x^i} v^i + \frac{\partial L}{\partial v^i} \dot{v}^i \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wegen der Euler-Lagrange Gleichung.

45.5 Mechanik auf Riemannschen Mannigfaltigkeiten

Auf einer (Pseudo-)Riemannschen Mannigfaltigkeit (Q, g) wird die Lagrange-Funktion bezüglich eines Potentials $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$ in Analogie durch

$$L(\xi) = \frac{1}{2}g(\xi, \xi) - U(\pi(\xi))$$

definiert, d.h. in lokalen Koordinaten

$$L(x, v) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g_{i,j}(x) v^i v^j - U(x).$$

Die Faserableitung ist dann offensichtlich

$$d_f L(\xi) \cdot \eta = g(\xi, \eta)$$

und somit ist die Wirkung $A(\xi) = g(\xi, \xi)$ und die Energie

$$E(\xi) = \frac{1}{2}g(\xi, \xi) + U(\pi(\xi)).$$

Im Falle, daß $U = 0$ ist, heißt das Vektorfeld X_L geodätischer Spray. Es ist dann $\frac{\partial}{\partial x^i} L = \frac{1}{2} \sum_{j,k} \frac{\partial g_{j,k}}{\partial x^i} v^j v^k$ und $\frac{\partial}{\partial v^i} L = \sum_j g_{i,j}(x) v^j$. Und somit ist die Matrix

($\frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j}$) gerade die Koeffizienten Matrix $(g_{i,j})$ der Metrik und ihre Inverse $(L^{i,j})$ wird üblicherweise mit $(g^{i,j})$ bezeichnet, siehe [41.1](#). Außerdem ist

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^k \partial v^i} = \frac{\partial}{\partial x^k} \sum_j g_{i,j}(x) v^j = \sum_j \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^k} v^j$$

Also lautet die Euler-Lagrange Gleichung in expliziter Form (siehe [45.4](#))

$$\begin{aligned} \ddot{x}^k &= \sum_i g^{k,i} \left(\frac{1}{2} \sum_{j,r} \frac{\partial g_{j,r}}{\partial x^i} v^j v^r - \sum_j \dot{x}^j \sum_r \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x^j} v^r \right) \\ &= \sum_{i,j,r} g^{k,i} \dot{x}^j \dot{x}^r \left(\frac{1}{2} \frac{\partial g_{j,r}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x^j} \right) \\ &= - \sum_i g^{k,i} \sum_{j,r} \dot{x}^j \dot{x}^r \frac{1}{2} \left(-\frac{\partial g_{j,r}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{i,r}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{i,j}}{\partial x^r} \right) \\ &= - \sum_{j,r} \dot{x}^j \dot{x}^r \sum_i g^{k,i} \Gamma_{j,r,i} \\ &= - \sum_{j,r} \dot{x}^j \dot{x}^r \Gamma_{j,r}^k. \end{aligned}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Geodäten, wobei $\Gamma_{j,r,i}$ die Christoffelsymbole der 1-ten Art und $\Gamma_{j,r}^k$ jene der 2-ten Art sind, siehe [\[60, 58.2\]](#). Also sind die Integral-Kurven in Q des geodätischen Spray's X_L gerade die Geodäten, die wir auch als kritischen Punkten der Bogenlänge erkannt haben.

Für eine allgemeines U und ein $e > U(x)$ für alle $x \in Q$ definiert man eine neue (die sogenannte JACOBI-METRIK) $g_e := (e - U) \cdot g$. Die Integralkurven c von X_L mit Energie $e = g(\dot{c}(t), \dot{c}(t))$ für alle t sind bis auf Reparametrisierung genau die Geodäten der Jacobi-Metrik g_e mit Energie 1.

45.6 Zusammenhang zwischen Lagrange-Vektorfeld X_L und Energie E

Schön wäre wenn es so einen ähnlichen Zusammenhang gäbe, wie er zwischen Gradient und Potential besteht. Dazu erinnern wir uns daß der Gradient eines Potentials $U : Q \rightarrow \mathbb{R}$ bezüglich einer Riemann-Metrik g auf Q gegeben ist durch:

$$g_x(\text{grad } U(x), \eta) = dU(x) \cdot \eta \text{ für alle } \eta \in T_x Q,$$

wobei dU das totale Differential von U bezeichnet. Wir suchen also eine Bilinearform ω , welche

$$\omega_{x,v}(X_L, Y) = dE(x, v) \cdot Y \text{ für alle } Y \in T_{(x,v)}(TQ)$$

erfüllt. Sei X_L das Vektorfeld auf TQ , welches die Euler-Lagrange Gleichung für eine hinreichen reguläre Lagrange-Funktion L beschreibt. In Koordinaten hat jedes Vektorfeld X_L , welches eine gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung beschreibt, nach dem in [45.2](#) Gezeigten die folgende Gestalt:

$$X_L(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sum_{i=1}^n X^i(x, v) \frac{\partial}{\partial v^i}.$$

Für die Energie haben wir die Formel

$$E(x, v) = \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^i} L(x, v) - L(x, v)$$

und für ihr Differential

$$\begin{aligned}
 dE(x, v) &= \sum_j \frac{\partial}{\partial x^j} E(x, v) dx^j + \sum_j \frac{\partial}{\partial v^j} E(x, v) dv^j \\
 &= \sum_j \left(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \frac{\partial}{\partial x^j} L \right) dx^j \\
 &\quad + \sum_j \left(\frac{\partial}{\partial v^j} L + \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \frac{\partial}{\partial v^j} L \right) dv^j \\
 &= \sum_j \left(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \frac{\partial}{\partial x^j} L \right) dx^j + \sum_j \left(\sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L \right) dv^j.
 \end{aligned}$$

Eine allgemeine Bilinearform ω auf TQ , d.h. ein 2-fach kovariantes Tensorfeld auf TQ ist bezüglich der lokalen Koordinaten $(x^1, \dots; v^1, \dots)$ gegeben durch:

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sum_{i,j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) dx^i \otimes dx^j + \sum_{i,j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) dx^i \otimes dv^j \\
 &\quad + \sum_{i,j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) dv^i \otimes dx^j + \sum_{i,j} \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) dv^i \otimes dv^j.
 \end{aligned}$$

Folglich wäre

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n v^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sum_{i=1}^n X^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \omega\left(X, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = dE \cdot \frac{\partial}{\partial x^j} = \\
 &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \frac{\partial}{\partial x^j} L \\
 \sum_{i=1}^n v^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) + \sum_{i=1}^n X^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) &= \omega\left(X, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) = dE \cdot \frac{\partial}{\partial v^j} = \\
 &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L.
 \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhalten wir durch Koeffizienten-Vergleich

$$\begin{aligned}
 \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) &= \frac{\partial}{\partial v^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L \\
 \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial v^j}\right) &= 0.
 \end{aligned}$$

Setzen wir die implizite Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x^i} L = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial v^i} L = \sum_j v^j \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial v^i} L + \sum_j X^j \frac{\partial^2}{\partial v^j \partial v^i} L$$

in die erste Gleichung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n v^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) + \sum_{i=1}^n X^i \omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) &= \\
 &= \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial v^i} L - \sum_{i=1}^n v^i \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial v^j} L - \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} L
 \end{aligned}$$

und es drängt sich auf $\omega\left(\frac{\partial}{\partial v^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) := -\frac{\partial^2}{\partial v^i \partial v^j} L$ und

$$\omega\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) := \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial v^i} L - \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial v^j} L.$$

zu setzen.

In den lokalen Koordinaten $(x^1, \dots; v^1, \dots)$ ist also ω gegeben durch:

$$\begin{aligned}\omega &= \sum_{i,j} \left(\frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i} - \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial v^j} \right) dx^i \otimes dx^j \\ &+ \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} dx^i \otimes dv^j - \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial v^i \partial v^j} dv^i \otimes dx^j\end{aligned}$$

Es zeigt sich also, daß die Bilinearform ω schief-symmetrisch ist, und somit eine 2-Form $\omega \in \Omega^2(TQ)$ darstellt. Unter Verwendung von $du^i \wedge du^j := du^i \otimes du^j - du^j \otimes du^i$ ist sie in lokalen Koordinaten durch

$$\omega = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial x^j \partial v^i} dx^i \wedge dx^j + \sum_{i,j} \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i} dx^i \wedge dv^j$$

gegeben. Sie ist sogar exakt, denn die 1-Form

$$\vartheta := \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial v^i} dx^i$$

hat als äußere Ableitung $d\vartheta = -\omega$.

Allerdings haben wir noch nicht überprüft, ob ω und ϑ wirklich Koordinaten-unabhängig definiert sind. Wir werden das später nachholen.

Für jeden Spray $X : TQ \rightarrow T^2Q$ ist

$$\vartheta_L X = \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i} dx^i \right) \left(\sum_j v^j \frac{\partial}{\partial x^j} + X^j(x, v) \frac{\partial}{\partial v^j} \right) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i} v^i = A.$$

Global läßt sich nun die definierende implizite Gleichung für das Lagrange Vektorfeld X als

$$i_X \omega = dE$$

schreiben, wobei ι der Einsetz-Operator $(\iota_X \omega)(Y) := \omega(X, Y)$ ist.

Leider hängen diese Differentialformen aber noch von L ab, und wir schreiben besser $\omega_L := \omega$, $\vartheta_L := \vartheta$.

45.7 Hamilton-Formalismus

Um diese Abhängigkeit der Differentialformen ω_L und ϑ_L von der Lagrange-Funktion L loszuwerden, wollen wir neue Koordinaten einführen. Es drängen sich natürlich die partiellen Ableitungen $p_i := \frac{\partial L}{\partial v^i}$ auf. Die Koordinaten x^i in der Basis-Mannigfaltigkeit benennen wir bloß um in $q^i := x^i$.

Die Form ϑ_L ist dann in den neuen Koordinaten gegeben durch

$$\vartheta_0 := \sum_{i=1}^n p_i dq^i$$

und ihre äußere Ableitung $-\omega_0 := d\vartheta_0$ durch

$$\omega_0 := \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i.$$

Wir haben aber das Problem, ob die q^i und p_i wirklich Koordinaten eines Punktes in TQ sind. Dazu müssen wir den Koordinatenwechsel bestimmen. Seien dazu $(\bar{x}^1, \dots, \bar{x}^n)$ andere Koordinaten auf Q , so gilt für die Basen von TQ

$$\frac{\partial}{\partial \bar{x}^i} = \sum_j \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j}$$

und für die Komponenten v^j bezüglich dieser Basen

$$v^j = \sum_i \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \bar{v}^i.$$

Weiters ist

$$\frac{\partial v^j}{\partial \bar{v}^i} = \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i} \left(\sum_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \bar{v}^k \right) = \sum_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{v}^k}{\partial \bar{v}^i} = \sum_k \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^k} \delta_i^k = \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}.$$

Somit gilt für die neuen Koordinaten:

$$\bar{p}_i = \frac{\partial}{\partial \bar{v}^i} L = \sum_k \frac{\partial v^k}{\partial \bar{v}^i} \frac{\partial}{\partial v^k} L = \sum_k \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i} p_k$$

Dies ist nicht das richtige Transformationsverhalten für Vektoren im Tangentialraum. Vergleichen wir es aber mit den Koordinaten-Wechsel im Kotangentialbündel T^*Q der Komponenten (η_1, \dots, η_n) bezüglich der Basis (dx^1, \dots, dx^n) :

$$\begin{aligned} dx^i &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} d\bar{x}^j \\ \bar{\eta}_j &= \sum_i \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^j} \eta_i, \end{aligned}$$

siehe [31.5](#), so zeigt sich, daß (q^1, \dots, p_1, \dots) gerade die üblichen Koordinaten eines Punktes des Kotangentialbündels T^*Q sind. Der Übergang von den Koordinaten (x^1, \dots, v^1, \dots) am Tangentialbündel TQ zu den Koordinaten (q^1, \dots, p_1, \dots) am Kotangentialbündel T^*Q ist gerade durch die Faserableitung $d_f L : TQ \rightarrow T^*Q$ gegeben, welche bezüglich der Basen $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n})$ und (dx^1, \dots, dx^n) folgende Darstellung hat:

$$(d_f L)_i = \frac{\partial L}{\partial v^i},$$

also (x^1, \dots, v^1, \dots) auf (q^1, \dots, p_1, \dots) abbildet, mit $q^i(x, v) := x^i$ und $p_i(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v^i}(x, v)$.

Wir zeigen nun, daß die kanonischen 1-Form ϑ_0 wirklich Koordinaten-unabhängig ist und damit auch $\omega_0 = -d\vartheta_0$ ist.

Die beiden Abbildungen $T\pi_Q^* : TT^*Q \rightarrow TQ$ und $\pi_{T^*Q} : TT^*Q \rightarrow T^*Q$ welche lokal gegeben sind durch $(q, p, v, \rho) \mapsto (q, v)$ und $(q, p, v, \rho) \mapsto (q, p)$ definieren eine Abbildung $(\pi_{T^*Q}, T\pi_Q^*) : TT^*Q \rightarrow T^*Q \times_Q TQ := \{(\alpha, \xi) : \pi^*(\alpha) = \pi(\xi)\}$. Zusammengesetzt mit der Evaluation $\text{ev} : T^*Q \times_Q TQ \rightarrow \mathbb{R}$, $(q, p; q, v) \mapsto \sum_i p_i v^i$ ist dies genau die kanonische 1-Form ϑ_0 , denn

$$\sum_i p_i v^i = \sum_i p_i dq^i(v) = \vartheta_0(v).$$

Man sieht nun sofort, daß

$$\vartheta_L = \sum_i \frac{\partial L}{\partial v^i} dx^i = (d_f L)^* \left(\sum_i p_i dq^i \right) = (d_f L)^* \vartheta_0$$

und somit auch

$$\omega_L = -d\vartheta_L = -d(d_f L)^* \vartheta_0 = -(d_f L)^* d\vartheta_0 = (d_f L)^* \omega_0$$

ist, also sind diese Formen auch Koordinaten unabhängig.

Der Energie $E = \sum_i v^i \frac{\partial L}{\partial v^i} - L$ entspricht dann eine sogenannte HAMILTON-Funktion $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$, definiert durch

$$H \circ d_f L := E$$

und dem Vektorfeld X_L entspricht nun das sogenannte HAMILTONSCHE Vektorfeld X_H , welches d_fL -verwandt zu X_L definiert ist durch

$$X_H \circ d_fL := T(d_fL) \circ X_L.$$

Die Gleichung $i_{X_E}\omega_L = dE$ geht über in

$$i_{X_H}\omega_0 = dH, \text{ d.h. } \omega_0(X_H, Y) = dH \cdot Y \text{ f\u00fcr alle } Y.$$

Dies sieht man wie folgt:

$$\begin{aligned} i_{X_H}\omega_0(T_x(d_fL)\xi) &= \omega_0\left((X_H)_{(d_fL)x}, T_x(d_fL)\xi\right) \\ &= \omega_0\left(T_x(d_fL)X_L, T_x(d_fL)\xi\right) = \omega_L(X_L, \xi_x) \\ &= (i_{X_L}\omega_L)(\xi) = dE(\xi) = d(H \circ d_fL)(\xi) \\ &= dH_{(d_fL)x} \cdot T_x(d_fL) \cdot \xi, \end{aligned}$$

wobei $T_x(d_fL)\xi$ alle Tangentialvektoren in $T^*_{(d_fL)x}Q$ durchl\u00e4uft.

Bez\u00fcglich der Koordinaten (q^i, p_i) ist $X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$.
Denn $\omega_0 = \sum_i dq^i \wedge dp_i$ und sei $X_H = \sum_i a^i \frac{\partial}{\partial p_i} + \sum_i b^i \frac{\partial}{\partial q^i}$. Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i &= dH = \iota_{X_H}\omega_0 \\ &= \sum_{i,j} a^i \iota_{\frac{\partial}{\partial p_i}}(dq^j \wedge dp_j) + \sum_{i,j} b^i \iota_{\frac{\partial}{\partial q^j}}(dq^j \wedge dp_j) \\ &= \sum_i a^i dq^i - \sum_i b^i dp_i \end{aligned}$$

und ein Koeffizienten-Vergleich liefert $a^i = \frac{\partial H}{\partial q^i}$ und $b^i = -\frac{\partial H}{\partial p_i}$.

Die Integralkurven $t \mapsto (q(t), p(t))$ von X_H sind also die L\u00f6sungen von $\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ und $\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$.

Da die Integral-Kurven die Ableitungen von Kurven in der Basis Q sind, und die Basiskoordinaten einander entsprechen, sind die Basis Kurven f\u00fcr X_H und X_L die selben.

Es ist $A = \vartheta_0(X_H) \circ d_fL$:

$$\begin{aligned} \vartheta_0(X_H) \circ d_fL &= \text{ev} \circ (\pi_{T^*Q}, T\pi_Q^*) \circ X_H \circ d_fL = \text{ev} \circ (\text{id} \circ d_fL, T\pi_Q^* \circ T(d_fL) \circ X_L) \\ &= \text{ev} \circ (d_fL, T(\pi_Q^* \circ d_fL) \circ X_L) = \text{ev} \circ (d_fL, T\pi_Q \circ X_L) \\ &= \text{ev} \circ (d_fL, \text{id}_{TQ}) = A \end{aligned}$$

oder f\u00fcr $\xi \in TQ$

$$\begin{aligned} (\vartheta_0(X_H) \circ d_fL)(\xi) &= \vartheta_0|_{d_fL \cdot \xi}(X_H|_{d_fL \cdot \xi}) = \vartheta_0|_{d_fL \cdot \xi}(T(d_fL)(X_L|_\xi)) \\ &= (d_fL)^*(\vartheta_0)(X_L|_\xi) = \vartheta_L(X_L|_\xi) = A(\xi) \end{aligned}$$

Wir haben als Vorteile der Hamilton-Mechanik, da\u00df die Zeitentwicklung beschreibende Objekt eine reell-wertige Funktion $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist die gleichzeitig auch eine Bewegungsinvariante darstellt und au\u00dferdem das zugeh\u00f6rige Vektorfeld X_H sich auf einfache Weise aus $\iota_{X_H}\omega = dH$ berechnen l\u00e4\u00dft.

Hamilton-Mechanismus auf Riemann-Mannigfaltigkeiten

Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ eine Riemann-Metrik auf Q und $L : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ die Lagrange-Funktion, die durch $L(v) = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle - U(\pi(v))$ gegeben ist. Dann ist $d_f L : TQ \rightarrow T^*Q$ die Abbildung $\sharp : w \mapsto \langle w, \cdot \rangle$ und $A(v) = \langle v, v \rangle$. Also ist $E = A - L = \frac{1}{2}\langle v, v \rangle + U(\pi(v))$. Ist insbesondere $U = 0$, so ist $A = 2E = 2L$. Die Hamilton-Funktion $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ ist dann durch $H(\eta) = \frac{1}{2}\langle \eta^\flat, \eta^\flat \rangle$ gegeben, d.h. in Koordinaten durch $H(\sum_i \eta_i dx^i) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} g^{i,j} \eta_i \eta_j$.

45.9 Legendre-Transformation

Um im Spezialfall der symplektischen Mannigfaltigkeit T^*Q mit ihrer kanonischen 2-Form ω_0 alles zurück in den Lagrange Formalismus zu übersetzen, benötigen wir eine Beschreibung der Inversen der Legendre-Transformation $d_f L : TQ \rightarrow T^*Q$ ausschließlich durch die Hamilton-Funktion H .

Es ist $d_f H \circ d_f L = \delta : TQ \rightarrow T^{**}Q$ der kanonische Isomorphismus:

Um dies zu sehen sei $\xi \in T_x Q$ und $\eta \in (T_x Q)^*$. Sei $\xi_t \in T_x Q$ so, daß $d_f L \cdot \xi_t = d_f L \cdot \xi + t \eta \in (T_x Q)^* t$, also $\xi_0 = 0$ und $\eta = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d_f L \cdot \xi + t \eta) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_f L \cdot \xi_t$. Dann ist

$$\begin{aligned} (d_f H \circ d_f L)(\xi)(\eta) &= d_f H(d_f L \cdot \xi)(\eta) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H(d_f L \cdot \xi + t \eta) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} H(d_f L \cdot \xi_t) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} E(\xi_t) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d_f L(\xi_t) \cdot \xi_t - L(\xi_t) \\ &= \left(\partial_1(\widehat{d_f L})(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \cdot \xi_0 + d_f L(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \right) - d_f L(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \\ &= \partial_1(\widehat{d_f L})(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \cdot \xi_0 \end{aligned}$$

und andererseits

$$\begin{aligned} \delta(\xi)(\eta) &= \eta(\xi_0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (d_f L \cdot \xi_t)(\xi_0) \\ &= \partial_1(\widehat{d_f L})(\xi_0) \cdot \dot{\xi}_0 \cdot \xi_0 \end{aligned}$$

Damit können wir $E := (d_f H^{-1})^*(H)$, $A := (d_f H^{-1})^*(G)$ wobei $G := \vartheta_0(X_H)$, $L := A - E$ und $X_L := (d_f H^{-1})^*(X_H)$ unter der Voraussetzung der Invertierbarkeit von $d_f H$ zurückgewinnen.

45.8 Symplektische Mechanik

Allgemeiner betrachtet man anstelle von T^*Q nun SYMPLEKTISCHE MANNIGFALTIGKEITEN M , d.h. Mannigfaltigkeiten zusammen mit einer sogenannten SYMPLEKTISCHE FORM ω , d.h. einer nicht-degenerierten geschlossenen 2-Form $\omega \in \Omega^2(M)$. Wir haben in [60, 14.9] gezeigt, daß solch eine Mannigfaltigkeit gerade-dimensional sein muß, und wir werden in [50.39] weiters zeigen, daß man lokal immer Koordinaten (q^1, \dots, p_1, \dots) wählen kann, so daß $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp_i$ ist. Das n -fache wedge-Produkt von ω definiert eine Volumensform

$$\text{vol}_\omega := \omega \wedge \dots \wedge \omega$$

auf M . Insbesondere ist M orientiert. Sei $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine glatte Funktion (eine sogenannte HAMILTON-FUNKTION), so bezeichnet man mit X_H das sogenannte HAMILTONSCHE VEKTORFELD, welches durch die implizite Gleichung

$$i_{X_H}\omega = dH$$

gegeben ist. In lokalen Koordinaten ist X_H durch

$$X_H = \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \sum_i \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i}$$

gegeben.

Die Hamilton-Funktion H ist konstant längs der Integral-Kurven des Hamilton-Vektorfelds X_H :

Sei $t \mapsto x(t)$ eine Integralkurve, d.h. $x : \mathbb{R} \rightarrow T^*Q$ mit $\dot{x}(t) = X_H(x(t))$. Dann ist

$$\begin{aligned} (H \circ x)'(t) &= dH_{x(t)}(\dot{x}(t)) = \iota_{X_H}\omega_{x(t)}(\dot{x}(t)) \\ &= \omega(X_H(x(t)), \dot{x}(t)) = \omega(X_H(x(t)), X_H(x(t))) = 0, \end{aligned}$$

also $H \circ x$ konstant.

Der Fluß Fl_t des Vektorfelds X_H ist ein Symplektomorphismus, d.h. läßt die symplektische Form ω invariant und folglich auch die symplektische Volumensform $\omega^m = \text{vol}_\omega$, d.h.

$$\left(\text{Fl}_t^{X_H}\right)^* \text{vol}_\omega = \text{vol}_\omega .$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\text{Fl}_t)^*\omega &= (\text{Fl}_t^*) \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} (\text{Fl}_s)^*\omega = (\text{Fl}_t^*) \mathcal{L}_{X_H}\omega \\ &= (\text{Fl}_t^*)(\iota_{X_H}d\omega + d\iota_{X_H}\omega) = (\text{Fl}_t^*)(\iota_{X_H}0 + ddH) = 0, \end{aligned}$$

Also ist $(\text{Fl}_t)^*\omega$ konstant gleich $(\text{Fl}_0)^*\omega = \omega$.

Nicht jedes Vektorfeld X auf M ist ein Hamiltonsches Vektorfeld. Um eines zu sein muß wieder eine lokale (Integrabilitätsbedingung) $\mathcal{L}_X\omega = 0$ für X erfüllt sein, sowie eine globale (kohomologische) Bedingung $H^1(M) = 0$ an M , siehe [50.40](#).

VII. Integration

In diesem Kapitel entwickeln wir die Integration auf orientierten Mannigfaltigkeiten. Die integrierbaren Objekte sind dabei die Differentialformen maximalen Grades. Wir beweisen den allgemeinen Satz von Stokes und führen dafür auch Mannigfaltigkeiten mit Rand ein. Im Fall einer orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit haben wir eine ausgezeichnete Form maximalen Grades, die Volumensform. Damit sind wir in der Lage auch Funktionen zu integrieren und führt zu den Green'schen Formeln. Schließlich folgt noch ein Abschnitt über den Laplace-Beltrami Operator, wo wir den Satz von Hodge über harmonische Formen beweisen.

46. Orientierbarkeit

Um Integrationen auf Mannigfaltigkeiten durchführen zu können benötigen wir einen Orientierungsbegriff: Man beachte etwa die Formel $\int_a^b f = -\int_b^a f$ für das gewöhnliche Riemann-Integral über ein Intervall $[a, b]$.

46.1 Definition (Orientierbarkeit)

Eine Mannigfaltigkeit M heißt ORIENTIERBAR $:\Leftrightarrow$ es existiert ein kompatibler Atlas \mathcal{A} , sodaß (M, \mathcal{A}) im Sinne von [60, 34.3] orientiert ist.

Ein Vektorbündel $E \rightarrow M$ heißt ORIENTIERBAR $:\Leftrightarrow$ es existiert ein Vektorbündelatlas \mathcal{A} , dessen Transitionsfunktionen Werte in $GL_+(\mathbb{R}^n) := \{T \in GL(n) : \det(T) > 0\}$ haben.

46.2 Proposition (Orientierbare Vektorbündel).

Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel. Folgende Aussagen sind äquivalent:

1. Das Vektorbündel $E \rightarrow M$ ist orientierbar.
2. Auf jeder Faser E_x kann eine Orientierung gewählt werden und dazu ein Vektorbündelatlas, dessen Vektorbündelkarten faserweise orientierungserhaltend sind.
3. Auf jeder Faser E_x kann eine Orientierung gewählt werden, sodaß jede Vektorbündelkarte mit zusammenhängender Domäne entweder überall faserweise orientierungserhaltend oder überall orientierungsvertauschend ist.

Beweis. (1) \Rightarrow (3): Sei also \mathcal{A} ein Vektorbündelatlas, dessen Transitionsfunktionen faserweise orientierungserhaltend sind. Wir definieren eine Orientierung auf E_x , indem wir für irgendeine VB-Karte $\varphi \in \mathcal{A}$ um x die induzierte Orientierung vom \mathbb{R}^k nehmen.

Das ist wohldefiniert, denn würden φ, φ' auf E_x verschiedene Orientierungen induzieren, so wäre $\varphi^{-1} \circ \varphi'$ bei x orientierungsvertauschend. \mathcal{A} ist also ein VB-Atlas, der aus faserweise orientierungserhaltenden Karten besteht.

Sei ψ irgendeine beliebige VB-Karte um x mit zusammenhängender Domäne, dann ist zu zeigen, daß ψ lokal um x orientierungserhaltenden bzw. vertauschend ist. Sei also ψ_x orientierungserhaltend bzw. vertauschend. Die Transitionsfunktion ψ zu φ hat Werte in $GL(\mathbb{R}^k)$, in x hat sie einen Wert in GL_+ bzw. GL_- . Also hat sie lokal Werte in der offenen Menge GL_+ bzw. GL_- , und damit ist ψ lokal orientierungserhaltenden bzw. vertauschend.

(3) \Rightarrow (2) ist klar.

(2) \Rightarrow (1) Der in (2) geforderte Atlas hat faserweise orientierungserhaltende Transitionsfunktionen. (Diese sind faserweise Zusammensetzungen von orientierungserhaltenden Vektorraumisomorphismen.) \square

46.3 Lemma (Orientierbare Mannigfaltigkeiten).

M ist orientierbare Mannigfaltigkeit $\Leftrightarrow TM \rightarrow M$ ist orientierbares Vektorbündel.

Beweis. (\Rightarrow) Die Transitionsfunktionen des durch M induzierten Vektorbündelatlases auf $TM \rightarrow M$ sind genau die Ableitungen der Kartenwechsel für M .

(\Leftarrow) Betrachte den von den Karten auf M induzierten VB-Atlas auf $TM \rightarrow M$ und wähle auf den Fasern von TM eine Orientierung wie in Punkt (3) der Proposition [46.2](#): Ist φ' eine durch eine Karte φ von M induzierte Vektorbündelkarte von $TM \rightarrow M$, die orientierungsvertauschend ist, so ersetze φ durch eine umparametrisierte Karte $\psi := \varphi \circ j$, mit $j : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$,

$$j := \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & +1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & +1 \end{pmatrix}.$$

Der so erhaltene Atlas auf M hat nur orientierungserhaltende Kartenwechsel, liefert also eine Orientierung auf M . \square

46.4 Beispiel

Sei G eine Lie-Gruppe, also eine Mannigfaltigkeit mit glatter Gruppenstruktur: Dann ist $TG \rightarrow G$ global ein triviales Vektorbündel (siehe [67.2](#)) und da jedes triviale Vektorbündel orientierbar ist, sind $TG \rightarrow G$ und G selbst orientierbar.

46.5 Bemerkung

Sind alle Mannigfaltigkeiten M_i orientierbar, dann sind es auch $\prod M_i$ und $\coprod M_i$. Z.B. sind alle Tori, $T^n := (S^1)^n$, orientierbar, denn S^1 ist eine Lie-Gruppe.

46.6 Bemerkungen

1. Sind 2 der folgenden 3 Vektorbündel orientierbar, so auch das dritte: $E_1 \rightarrow M$, $E_2 \rightarrow M$, $E_1 \oplus E_2 \rightarrow M$. Aus faserweisen Orientierungen zweier dieser Bündel läßt sich leicht eine Orientierung auf dem dritten konstruieren.
2. Sei $E_0 \xrightarrow{i} E_1 \xrightarrow{p} E_2$ eine KURZE EXAKTE SEQUENZ VON VEKTORBÜNDELN, d.h. faserweise ist i injektiv, p surjektiv und $\text{Ker}(p) = \text{Bild}(i)$. Falls zwei der Bündel orientierbar sind, so ist es auch das dritte. (Benütze, daß jede kurze exakte Sequenz von Vektorbündel nach [26.7](#) splittet, d.h. $E_1 \cong E_0 \oplus E_2$, und dann (1).)

3. Ist das Vektorbündel $E \rightarrow M$ orientierbar und $f : N \rightarrow M$ glatt, so ist auch das induzierte Bündel $f^*(E) \rightarrow N$ orientierbar. (Wähle auf $(f^*(E))_x \cong E_{f(x)}$ die Orientierung von $E_{f(x)}$)
4. Sind 2 der folgenden 3 Objekte orientierbar, so auch das dritte: $E \rightarrow M$ als Vektorbündel, E als Mannigfaltigkeit, M als Mannigfaltigkeit (Benütze die kurze exakte Sequenz aus [26.8]: $p^*(E) \rightarrow TE \rightarrow p^*(TM)$, sowie die Tatsache, daß $E \rightarrow M$ das von $0 : M \rightarrow E$ induzierte Bündel zu $p^*(E) \rightarrow E$ und $TM \rightarrow M$ das von $0 : M \rightarrow E$ induzierte Bündel zu $p^*(TM) \rightarrow E$ ist, also M genau dann orientierbar ist, wenn $p^*(TM) \rightarrow E$ es ist, und E genau dann, wenn $p^*(E) \rightarrow E$ es ist).

46.7 Beispiele

1. Vektorbündel mit eindimensionaler Faser sind genau dann orientierbar, falls sie trivial sind. Alle 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten sind orientierbar. Das Vektorbündel $\text{Möb} \rightarrow S^1$ ist nicht orientierbar, ebensowenig das Möbiusband als Mannigfaltigkeit nach Bemerkung [46.6.4].
2. Jedes komplexe Vektorbündel ist orientierbar, denn $GL(\mathbb{C}^n) \subseteq GL_+(\mathbb{R}^{2n})$ nach [60, 14.14] oder auch weil $GL(\mathbb{C}^n)$ zusammenhängend ist und die Orientierungserhaltende Identität enthält. Das Tangentialbündel einer komplexen Mannigfaltigkeit ist ein komplexes Vektorbündel und daher orientierbar. Somit ist also jede komplexe Mannigfaltigkeit selbst orientierbar.
3. Eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit ist genau dann orientierbar, wenn eine komplexe Struktur existiert. [15]
4. Sei $E \rightarrow M$ ein Vektorbündel mit einfach zusammenhängender Basismanigfaltigkeit M , dann ist das Vektorbündel $E \rightarrow M$ orientierbar, da wir längs Kurven in der Basis die Orientierung der Fasern fortsetzen können und diese nicht von der gewählten Kurve abhängt, da die Basis einfach zusammenhängend ist. Insbesondere ist jede einfach zusammenhängende Mannigfaltigkeit orientierbar.

46.8 Lemma (Nullstellenmengen sind orientierbar).

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $f : U \rightarrow \mathbb{R}^k$ glatt und $\text{rang } f'(x) = k$ für alle $x \in U$. Dann ist $f^{-1}(0)$ orientierbar.

Beweis. Sei $M := f^{-1}(0)$. Dann ist $T_x M = \text{Ker } T_x f$ nach [21.2] bzw. [21.14.2]. Folglich ist $TM \hookrightarrow T\mathbb{R}^m|_M \rightarrow f^*(T\mathbb{R}^k)|_M$ eine kurze exakte Sequenz von Vektorbündeln über M . Da $T\mathbb{R}^m$ und $T\mathbb{R}^k$ triviale Bündel sind, sind auch die Pullback-Bündel $T\mathbb{R}^m|_M$ und $f^*(T\mathbb{R}^k)|_M$ orientierbar und somit auch $TM \rightarrow M$, also ist M orientierbar nach [46.6.2]. \square

46.9 Beispiele

1. Alle S^n sind orientierbar.
2. Alle kompakten 2-dimensionalen Mannigfaltigkeiten im \mathbb{R}^3 sind orientierbar, siehe Klassifikationssatz [60, 9.2].
3. $\mathbb{P}^1 \cong S^1$ ist orientierbar. Die projektive Ebene \mathbb{P}^2 enthält ein Möbiusband als offenen Teil, also ist sie nicht orientierbar. Allgemein gilt: \mathbb{P}^n ist orientierbar $\Leftrightarrow n$ ungerade.
4. TM ist als Mannigfaltigkeit immer orientierbar, als Vektorbündel hingegen nur, wenn M als Mannigfaltigkeit orientierbar ist:

Für jedes beliebige Vektorbündel $p : E \rightarrow M$ haben wir nach [26.8](#) die kurze exakte Sequenz $p^*(E) \rightarrow TE \rightarrow p^*(TM)$. Im Falle $E = TM$ und $p = \pi_M$ reduziert sich das auf $\pi^*(TM) \rightarrow T(TM) \rightarrow \pi^*(TM)$, also ist $T^2M \rightarrow TM$ als Vektorbündel isomorph zu $\pi^*(TM) \oplus \pi^*(TM)$. Die Summe gleicher Bündel ist aber immer orientierbar. Wählt man auf den Fasern der beiden Summanden die gleiche Orientierung, so ergibt das auf der Summe offenbar eine Orientierung, die, unabhängig von der jeweiligen Wahl, positiv ist.

46.10 Die Orientierungsüberlagerung

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $M^{or} := \{(p, \omega) : p \in M, \omega \text{ Orientierung auf } T_p M\}$. Wir definieren einen Atlas \mathcal{A} für M^{or} mittels Karten φ für M durch $\varphi_{\pm} : \text{Dom } \varphi \rightarrow M^{or}$, $x \mapsto (\varphi(x), \pm\omega)$ wobei ω die Orientierung, die unter $T\varphi$ aus der Standardorientierung des \mathbb{R}^n entsteht, ist. Zu zeigen ist, daß \mathcal{A} ein C^∞ -Atlas auf M^{or} ist. Seien φ und ψ Karten auf M , dann folgt $\varphi_+^{-1} \circ \psi_+$ (und genauso $\varphi_+^{-1} \circ \psi_-$, etc.) ist der offenen Menge $\{x \in \mathbb{R}^n : (\varphi^{-1} \circ \psi)'(x) \text{ ist orientierungserhaltend (vertauschend)}\}$ definiert und stimmt dort mit $\varphi^{-1} \circ \psi$ überein:

$$\begin{aligned} & x \in \text{Dom}(\varphi_+^{-1} \circ \psi_+) \\ \Leftrightarrow & x \in \text{Dom}(\varphi^{-1} \circ \psi) \text{ s.d. } T_x \psi \text{ und } T_{(\varphi^{-1} \circ \psi)(x)} \varphi \text{ induzieren die gleiche Orientierung} \\ \Leftrightarrow & x \in \text{Dom}(\varphi^{-1} \circ \psi) \text{ s.d. } (\varphi^{-1} \circ \psi)'(x) \text{ ist orientierungserhaltend} \end{aligned}$$

Es ist $\text{pr}_1 : M^{or} \rightarrow M$ eine zweiblättrige Überlagerung von M , sie heißt ORIENTIERUNGSÜBERLAGERUNG.

Die Mannigfaltigkeit M^{or} ist orientiert: Die Orientierung auf $T_{(p, \omega)} M^{or} \cong T_p M$ ist ω .

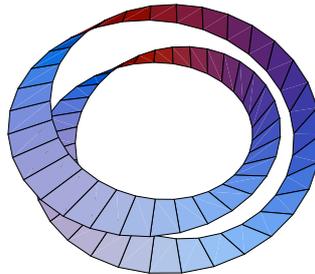
Es gilt außerdem: M ist orientierbar $\Leftrightarrow M^{or} \cong M \times \{-1, 1\}$, denn:

(\Leftarrow) Die Einbettung $M \hookrightarrow M \times \{-1, 1\} \cong M^{or}$ ist offen und M^{or} ist orientiert. Also ist M orientierbar.

(\Rightarrow) Ist M orientierbar, dann gibt es auf $T_p M$ eine ausgezeichnete Orientierung ω . Somit liefern $p \mapsto (p, \omega)$ bzw. $p \mapsto (p, -\omega)$ eine Trivialisierung $M \times \{-1, 1\} \cong M^{or}$.

46.11 Beispiel

(1) Ein zweifach verdrehtes Möbiusband ist die Orientierungsüberlagerung des Möbiusbandes.



(2) $S^n = (\mathbb{P}^n)^{or}$ für n ungerade.

47. Integration und der Satz von Stokes

47.1 Proposition (Pull-back von Volumsformen).

Sei $f : M \rightarrow N$ glatt, $\dim M = m = \dim N$ und (x^1, \dots, x^m) lokale Koordinaten von M und (y^1, \dots, y^m) solche von N . Dann gilt:

$$f^*(g \cdot dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) = (g \circ f) \det \left(\frac{\partial(y^i \circ f)}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

Beweis. O.B.d.A. $g = 1$ und $f^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) = \omega \cdot (dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m)$. Wenden wir dies auf $(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m})$ an, so folgt (siehe auch [42.2](#)):

$$\begin{aligned} \omega &= f^*(dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) \left(Tf \frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, Tf \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \\ &= (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) \left(\sum_{i_1} \frac{\partial f^{i_1}}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^{i_1}}, \dots, \sum_{i_m} \frac{\partial f^{i_m}}{\partial x^1} \frac{\partial}{\partial y^{i_m}} \right) \\ &= \sum_{\pi} (dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m) \left(\frac{\partial}{\partial y^{\pi(1)}}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{\pi(m)}} \right) \prod_{i=1}^m \frac{\partial(y^{\pi(i)} \circ f)}{\partial x^i} \\ &= \det \left(\frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i} \right) \quad \square \end{aligned}$$

47.2 Bemerkung

Speziell für $f = \text{id}$ und $g = 1$ gilt:

$$dy^1 \wedge \dots \wedge dy^m = \det \left(\frac{\partial y^j}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m.$$

47.3 Proposition.

M ist orientierbar \Leftrightarrow Das Vektorbündel $\Lambda^m T^*M$ ist trivial.

Beweis.

(\Rightarrow) Wir müssen zeigen: Es gibt ein $\omega \in \Lambda^m T^*M$, sodaß $\omega_p \neq 0$ für alle $p \in M$ ist (Ein solches ω liefert dann unmittelbar eine VB-Karte des (eindimensionalen!) Bündels $\Lambda^m T^*M \rightarrow M$). Auf den Bild U jeder orientierungserhaltenden Karte $(u^1, \dots, u^m)^{-1}$ können wir ω_U durch $\omega_U(\frac{\partial}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial u^m}) := 1$ definieren. Es ist dann $\omega_U(v_1, \dots, v_m) > 0$ für jede positiv orientierte Basis. Wir wählen eine Überdeckung von M mit solchen offenen Mengen U und zugehörigen ω_U , und sei $\{f_U\}$ eine untergeordnete Partition der Eins. Wir definieren ω durch $\omega := \sum_U f_U \cdot \omega_U \in \Omega^m(M)$. Dann ist $\omega_p(v_1, \dots, v_m) > 0$ für jede positiv orientierte Basis von T_pM , also insbesondere $\omega_p \neq 0$.

(\Leftarrow) Sei $f : M \times \mathbb{R} \rightarrow \Lambda^m T^*M$ ein globaler Vektorbündelisomorphismus, dann ist $\omega := f(- \times \{1\})$ eine nirgends verschwindende m -Form. Wir nennen die Basis

$(v_i)_{i=1}^m$ auf $T_p M$ positiv orientiert, falls $\omega_p(v_1, \dots, v_m) > 0$. Sei φ eine Karte mit zusammenhängender Domäne und (x^1, \dots, x^m) lokale Koordinaten:

$$\omega_p \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^m} \right) \neq 0 \Rightarrow \omega(\dots) > 0 \text{ (bzw. } < 0) \text{ überall.}$$

Nach Proposition [46.2](#) ist also $TM \rightarrow M$ als Vektorbündel orientierbar und somit ist M als Mannigfaltigkeit orientierbar. \square

47.4 Motivation

Wir können Funktionen $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ nicht so ohne weiteres über eine Mannigfaltigkeit integrieren. Sehen wir uns dazu den einfachsten Fall der 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten an. Wenn M ein Intervall in \mathbb{R} mit Grenzen a und b ist, dann mißt das übliche Riemann-Integral $\int_M f = \int_a^b f$ die orientierte Fläche unterhalb des Graphens von f . Damit wir das Integral für eine beliebige 1-dimensionale Mannigfaltigkeit M auch definieren können, brauchen auf jeden Fall eine Orientierung auf M . In diesem Kapitel seien also alle Mannigfaltigkeiten orientiert. Weiters müssen wir aber auch (infinitesimale) Längen (bzw. Volumina) auf M messen können. Falls M eine Riemann-Mannigfaltigkeit ist, dann können wir das mittels der Volumensform vol_M tun, im eindimensionalen Fall also mit dem Bogenelement.

Auf abstrakten Mannigfaltigkeiten brauchen wir ein Substitut für das Volumenelement. Im 1-dimensionalen, wäre das eine 1-Form $\omega \in \Omega^1(M)$ (welche in keinem Punkt verschwindet). Dann könnten wir das Integral $\int_M f \cdot \omega$ von f bzgl. ω über M definieren. Da aber $f \cdot \omega$ selbst eine 1-Form ist, genügt es $\int_M \omega$ für beliebige 1-Formen $\omega \in \Omega^1(M)$ zu erklären. Sei dazu $c : [a, b] \rightarrow M$ eine orientierungserhaltende globale Parametrisierung, dann ist $\int_M \omega := \int_a^b \omega_{c(t)}(\dot{c}(t)) dt$ das wie üblich definierte Kurvenintegral.

Auf allgemeinen orientierten m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten M wollen wir nun das Integral $\int_M \omega$ für beliebige m -Formen $\Omega^m(M)$ mit kompaktem Träger definieren.

47.5 Definition (Integration von Differentialformen)

Sei M eine orientierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $\omega \in \Omega^m(M)$ mit kompaktem Träger.

1. Falls $M = U \subseteq \mathbb{R}^m$ offen ist, dann läßt sich ω als

$$\omega(x^1, \dots, x^m) = f(x^1, \dots, x^m) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^m$$

mit $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ schreiben. Das Integral definieren wir dann als gewöhnliches Riemann-Integral:

$$\int_M \omega := \int_U f(x^1, \dots, x^m) d(x^1, \dots, x^m).$$

2. Falls $\text{Trg } \omega \subseteq \varphi(U)$ für eine orientierungserhaltende Karte $\varphi : \mathbb{R}^m \supseteq U \rightarrow \varphi(U) \subseteq M$ ist, definieren wir:

$$\int_M \omega := \int_U \varphi^*(\omega).$$

3. Ist $\text{Trg } \omega$ beliebig kompakt, so wählen wir eine endliche, offene Überdeckung mit Kartenumgebungen von $\text{Trg } \omega$, sowie eine Partition der Eins $\{h_i\}$, die der Überdeckung untergeordnet ist. Dann hat jedes $h_i \cdot \omega$ Träger in einer Karte, und somit können wir nach (2) definieren:

$$\int_M \omega = \int_M \left(\sum_i h_i \right) \omega := \sum_i \int_M h_i \omega.$$

Bemerkung

Diese Definitionen sind sinnvoll, d.h. die Begriffe hängen nicht von den getroffenen Wahlen ab:

Im Fall (1) ist nichts zu zeigen. Aber man beachte, daß für jeden orientierungserhaltenden Diffeomorphismus $g : \mathbb{R}^m \supseteq V \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^m$ gilt:

$$\int_{g(V)} \omega = \int_V g^*(\omega),$$

denn falls $\omega = f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$ ist, so ist

$$(g^*(\omega))(x) = (f \circ g)(x) \underbrace{\det(g'(x))}_{>0} dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m$$

nach [47.1](#) und somit die Integrale gleich nach der Transformationsformel für mehrdimensionale Integrale, siehe z.B. [57](#), [7.5.10](#)

Im Fall (2) sei $\text{Trg } \omega \subseteq \varphi(U) \cap \psi(V) =: W$ für zwei Karten φ und ψ . Sei der Kartenwechsel $g := \varphi^{-1} \circ \psi : \psi^{-1}(W) \rightarrow \varphi^{-1}(W)$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus.

Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_U \varphi^*(\omega) &= \int_{\varphi^{-1}(W)} \varphi^*(\omega) = \int_{g(\psi^{-1}(W))} \varphi^*(\omega) \stackrel{(1)}{=} \\ &= \int_{\psi^{-1}(W)} \underbrace{g^*(\varphi^*(\omega))}_{(\varphi \circ g)^*(\omega)} = \int_{\psi^{-1}(W)} \psi^*(\omega) = \int_V \psi^*(\omega). \end{aligned}$$

Diese Gleichung folgt aus dem in (1) Gesagten.

Im Fall (3) sei $\{g_j\}$ eine zweite Partition der Eins, die einer endlichen Überdeckung des Trägers mit Kartenumgebungen untergeordnet ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_i \int_M h_i \omega &= \sum_i \int_M \left(\sum_j g_j \right) h_i \omega = \sum_i \sum_j \int_M g_j h_i \omega = \\ &= \sum_j \int_M \left(\sum_i h_i \right) g_j \omega = \sum_j \int_M g_j \omega. \end{aligned}$$

47.6 Bemerkung (Dichten)

Falls wir über nicht orientierbaren Mannigfaltigkeiten integrieren wollen, brauchen wir etwas anderes als m -Formen. Dazu definieren wir ein eindimensionales Vektorbündel $\text{VOL}(M)$ durch Angabe der Transitionsfunktionen $x \mapsto |\det \psi'(x)| \in GL(1)$ zu den Kartenwechseln ψ von M . Schnitte von $\text{vol}(M)$ heißen DICHTEN, solche kann man dann über M integrieren. Falls M orientierbar ist, ist $\text{vol}(M) \cong \Lambda^m T^*M$.

47.7

Wir steuern jetzt auf den Satz von Stokes zu: Nach dem Hauptsatz [56, 5.2.2] der Differential- und Integralrechnung ist $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$. Insbesondere gilt: $\int_{-\infty}^0 f' = \int_a^0 f' = f(0)$, falls $\text{Trg } f$ kompakt ist und a unterhalb des Infimums von $\text{Trg } f$ liegt.

Lemma (Satz von Stokes für Halbraum).

Sei $H = H^{m+1} := \{(t, x) : t \leq 0, x \in \mathbb{R}^m\}$ ein $(m+1)$ -DIMENSIONALER HALBRAUM. Die Teilmenge $\partial H := \{(0, x) : x \in \mathbb{R}^m\} \cong \mathbb{R}^m$ heißt der RAND von H , und für eine m -Form ω im \mathbb{R}^{m+1} mit kompaktem Träger gilt:

$$\int_H d\omega = \int_{\partial H} \omega := \int_{\partial H} \text{incl}^* \omega,$$

wo $\text{incl} : \partial H \hookrightarrow H$ die Inklusion ist.

Beweis. Es gilt für $\omega \in \Omega^m(\mathbb{R}^{m+1})$:

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i=0}^m \omega_i dx^0 \wedge \cdots \wedge \overline{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m; \\ d\omega &= \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x^j} dx^j \wedge dx^0 \wedge \cdots \wedge \overline{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m + 0 \\ &= \sum_{i=0}^m \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} (-1)^i dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^m \Rightarrow \\ \Rightarrow \int_H d\omega &= \sum_{i=0}^m (-1)^i \int_H \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} d(x^0, \dots, x^m) \stackrel{\text{Fubini}}{=} \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \left(\int_{-\infty}^0 \frac{\partial \omega_0}{\partial x^0}(x^0, x^1, \dots, x^m) dx^0 \right) d(x^1, \dots, x^m) \\ &\quad + \sum_{i=1}^m (-1)^i \int_{H_i} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \omega_i}{\partial x^i} dx^i \right) d(x^0, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m) \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \omega_0(0, \cdot) + 0, \end{aligned}$$

wobei $H_i := \{(t, x_1, \dots, \overline{x^i}, \dots, x_m) : t \leq 0\}$ ist, und der 2te Summand 0 ist, da $\text{Trg } \omega$ kompakt ist. Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \int_{\partial H} \omega &= \int_{\partial H} \text{incl}^* \omega \\ &\stackrel{42.2}{=} \int_{\partial H} \sum_{i=0}^m \omega_i(0, x^1, \dots, x^m) \det \left(\frac{\partial(x^0, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \right) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^m \\ &= \int_{\mathbb{R}^m} \omega_0(0, x^1, \dots, x^m) d(x^1, \dots, x^m) + 0, \end{aligned}$$

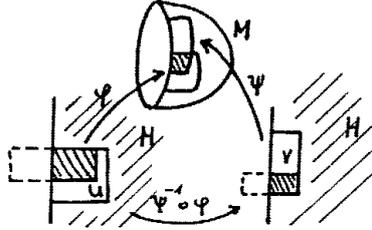
denn

$$\det \left(\frac{\partial(x^0, \dots, \overline{x^i}, \dots, x^m)}{\partial(x^1, \dots, x^m)} \right) = \begin{cases} 1 & \text{für } i = 0 \\ 0 & \text{sonst} \quad \square \end{cases}$$

Wir wollen diese Überlegungen nun auf Räume übertragen, die nur lokal wie H aussehen:

47.8 Definition (Berandete Mannigfaltigkeit)

Eine C^∞ -MANNIGFALTIGKEIT MIT RAND ist eine Menge M zusammen mit einem Atlas \mathcal{A} von injektiven Abbildungen $\varphi : U \rightarrow M$, wobei $U \subseteq H$ offen in einem abgeschlossenen Halbraum H , und die Kartenwechsel $\psi^{-1} \circ \varphi : \varphi^{-1}(\psi(V)) \rightarrow \psi^{-1}(\varphi(U))$ auf offenen Teilmengen von Halbräumen definiert und glatt sind.



Dabei heißt eine Abbildung zwischen solchen Mengen glatt, wenn es eine glatte Fortsetzung auf offene Mengen im \mathbb{R}^m gibt. Wie üblich setzen wir voraus, daß die durch den Atlas induzierte finale Topologie Hausdorff und parakompakt ist. Der RAND von M (nicht im topologischen Sinn) ist dann definiert als

$$\partial M := \{p \in M : \exists \text{ eine Karte } \varphi \text{ um } p \text{ mit } \varphi^{-1}(p) \in \partial H\}.$$

Da der Kartenwechsel ein lokaler (Diffeomorphismus und somit) Homöomorphismus des \mathbb{R}^n ist, erhält er innere Punkte, und folglich ist $p \in \partial M \Leftrightarrow \varphi^{-1}(p) \in \partial H$ für jede Karte φ um p . Der Rand ∂M ist dann eine Mannigfaltigkeit (ohne Rand). Ein Atlas auf ∂M ist durch die Einschränkungen $\varphi|_{\partial M}$ gegeben.

Man kann die Begriffe TM , T^*M , $C^\infty(M, N)$, $\Lambda^k T^*M$ und $\Omega^k(M)$ wie auf Mannigfaltigkeiten ohne Rand definieren.

47.9 Definition (innerer Tangentialvektor)

Ein Vektor $v \in T_p M$ heißt INNERER TANGENTIALVEKTOR falls $p \notin \partial M$ oder $T_{\varphi^{-1}(p)} H \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{m-1}$ 0-te Komponente kleiner als 0 hat.

47.10 Lemma (Verlängern berandeter Mannigfaltigkeiten).

Jede Mannigfaltigkeit mit Rand läßt sich zu einer Mannigfaltigkeit ohne Rand "verlängern", d.h. sie ist Teilmannigfaltigkeit der gleichen Dimension:

Beweisskizze. Mittels Partition der Eins findet man ein VF auf M , das nur aus inneren Tangentialvektoren besteht. Durch "Zusammenstauchen" kann dessen Fluß global gemacht werden: $\text{Fl}(1, \cdot) : M \rightarrow M \setminus \partial M$ ist dann eine Einbettung von M in die Mannigfaltigkeit ohne Rand $M \setminus \partial M$. \square

Beispiele für berandete Mannigfaltigkeiten sind: das abgeschlossene Möbiusband und die abgeschlossene Kugel.

47.11 Lemma (Rand einer Mannigfaltigkeit).

Der Rand einer orientierten Mannigfaltigkeit M mit Rand ist in kanonischer Weise orientierbar.

Beweis. Eine Basis $(e_i)_{i=1}^m$ von $T_p(\partial M)$ heißt positiv orientiert, falls (e_0, \dots, e_m) in $T_p M$ positiv orientiert ist für einen nach außen weisenden Tangentialvektor e_0 . (d.h. $-e_0$ ist innerer Tangentialvektor) \square

47.12 Satz von Stokes.

Sei M eine $(n+1)$ -dimensionale orientierte Mannigfaltigkeit mit Rand ∂M und dieser trage die kanonische Orientierung. Sei $\omega \in \Omega^n(M)$ mit $\text{Trg } \omega$ kompakt, dann gilt:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega := \int_{\partial M} \text{incl}^* \omega \quad (\text{wobei } \text{incl} : \partial M \hookrightarrow M)$$

Beweis. Sei $\{h_i\}$ eine Partition der Eins, die einer Überdeckung mit Kartenbildern untergeordnet ist. Dann ist $\omega = \sum_i \omega_i$ mit Formen $\omega_i := h_i \cdot \omega$ mit Träger in Kartenbildern. Somit ist

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_i d(\omega_i), \text{Trg } d(\omega_i) \subseteq \text{Trg}(\omega_i) \subseteq \text{Trg}(h_i) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_M d\omega = \sum_i \int_M d(\omega_i), \int_{\partial M} \omega = \sum_i \int_{\partial M} \omega_i. \end{aligned}$$

Es genügt also, den Beweis für die Situation, wo $\text{Trg } \omega$ in einer Kartenumgebung liegt, zu führen. Also o.B.d.A. $\omega \in \Omega^n(\mathbb{R}^{n+1})$ und somit $\int_H \partial\omega = \int_{\partial H} \omega$. Für diese Situation wurde das in [47.7](#) bereits gezeigt. \square

48. Integration auf Riemann-Mannigfaltigkeiten**48.1 Bemerkungen**

1. Die VOLUMSFORM auf einer m -dimensionalen orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit M ist jene eindeutig bestimmte m -Form vol_M , welche punktweise auf positiv orientierten Orthonormalbasen von TM den Wert 1 hat, siehe [41.2](#). In lokalen Koordinaten ist sie gegeben durch:

$$\begin{aligned} \text{vol}_M &= \sqrt{G} \, du^1 \wedge \cdots \wedge du^m \\ \text{mit } G &:= \det((g_{i,j})_{i,j}) \text{ und } g_{i,j} := g\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right), \end{aligned}$$

wobei g die Riemann-Metrik auf M ist.

2. Sei N eine orientierte Teilmannigfaltigkeit von Kodimension 1 der $(n+1)$ -dimensionalen orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit M und sei ν_x für $x \in N$ der eindeutig bestimmte Vektor in $T_x M$, sodaß (ν_x, e_1, \dots, e_n) eine positiv orientierte Orthonormalbasis in $T_x M$ ist für eine (jede) orientierte Orthonormalbasis (e_1, \dots, e_n) von $T_x N$. Sei ν zu einem Vektorfeld gleichen Namens auf ganz M fortgesetzt, so gilt

$$\text{vol}_N = \text{inkl}^*(i_\nu(\text{vol}_M)) \text{ auf } N,$$

denn $\text{vol}_N(e_1, \dots, e_n) = 1 = \text{vol}_M(\nu_N, e_1, \dots, e_n) = (i_{\nu_N} \text{vol}_M)(e_1, \dots, e_n)$. Insbesondere gilt das für den Rand $N = \partial M$ einer berandeten Mannigfaltigkeit M . Der Vektor ν ist dann der nach außen weisende Einheitsnormalvektor.

3. Sei allgemeiner $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein beliebiges Vektorfeld. Dann ist $\text{div } \xi \cdot \text{vol}_M = \mathcal{L}_\xi \text{vol}_M$ nach [43.2](#) und es gilt auf ∂M :

$$\text{inkl}^*(i_\xi \text{vol}_M) = \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M} \text{ auf } \partial M,$$

denn

$$\begin{aligned}
 (i_\xi \text{vol}_M)(e_1, \dots, e_m) &= \text{vol}_M(\xi, e_1, \dots, e_m) = \\
 &= \text{vol}_M\left(\underbrace{\langle \xi, \nu \rangle \nu}_{\in (T(\partial M))^\perp} + \underbrace{(\xi - \langle \xi, \nu \rangle \nu)}_{\in T(\partial M)}, e_1, \dots, e_m\right) \\
 &= \langle \xi, \nu \rangle \cdot \text{vol}_M(\nu, e_1, \dots, e_m) + 0 \\
 &= \langle \xi, \nu \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M}(e_1, \dots, e_m).
 \end{aligned}$$

48.2 Greenske Satz.

Sei M eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit mit Rand und sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ mit kompaktem Träger. Dann gilt

$$\int_M \text{div } \xi \cdot \text{vol}_M = \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M}.$$

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_M \text{div } \xi \cdot \text{vol}_M &\stackrel{43.2}{=} \int_M \mathcal{L}_\xi \text{vol}_M \stackrel{42.7}{=} \int_M (d \circ i_\xi + i_\xi \circ d) \text{vol}_M \\
 &= \int_M d(i_\xi \text{vol}_M) + 0 \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial M} \text{incl}^*(i_\xi \text{vol}_M) \\
 &= \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M}. \quad \square
 \end{aligned}$$

48.3 Produktregeln

$$\begin{aligned}
 \text{grad}(f \cdot g) &= g \cdot \text{grad}(f) + f \cdot \text{grad}(g) \\
 \text{div}(f \cdot \xi) &= f \cdot \text{div}(\xi) + df \cdot \xi = f \cdot \text{div}(\xi) + \langle \text{grad}(f), \xi \rangle \\
 \Delta(f \cdot g) &= f \cdot \Delta(g) + \Delta(f) \cdot g - 2\langle \text{grad}(f), \text{grad}(g) \rangle,
 \end{aligned}$$

siehe Aufgabe [59, 72.69].

48.4 Greenske Formeln.

Sei M eine kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit mit Rand und seien f und h in $C^\infty(M, \mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
 \int_M (\langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle - f \cdot \Delta h) \cdot \text{vol} &= \int_{\partial M} f \cdot \langle \text{grad } h, \nu \rangle \cdot \text{vol} \\
 \int_M (f \cdot \Delta h - h \cdot \Delta f) \cdot \text{vol} &= - \int_{\partial M} (f \, dh - h \, df)(\nu) \cdot \text{vol}
 \end{aligned}$$

Beweis. (1) Es gilt $\text{div}(f \cdot \text{grad } h) = f \cdot \text{div}(\text{grad } h) + \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle = -f \cdot \Delta h + \langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle$ und somit für $\xi = f \cdot \text{grad } h$:

$$\begin{aligned}
 \int_M (\langle \text{grad } f, \text{grad } h \rangle - f \cdot \Delta h) \cdot \text{vol}_M &= \int_M \text{div}(f \cdot \text{grad } h) \cdot \text{vol}_M = \\
 &= \int_M \text{div } \xi \cdot \text{vol}_M \stackrel{48.2}{=} \int_{\partial M} \langle \xi, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M} \\
 &= \int_{\partial M} \langle f \cdot \text{grad } h, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M} = \int_{\partial M} f \cdot \langle \text{grad } h, \nu_{\partial M} \rangle \cdot \text{vol}_{\partial M} \\
 &= \int_{\partial M} f \cdot dh(\nu_{\partial M}) \cdot \text{vol}_{\partial M}.
 \end{aligned}$$

(2) Vertauscht man f und h in (1) und zieht das Resultat von (1) ab so erhält man die zweite Greensche Formel. \square

48.5 Folgerung (Subharmonische Funktionen sind konstant).

Sei M eine kompakte, orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit ohne Rand. Dann ist jede SUBHARMONISCHE FUNKTION $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ – d.h. $\Delta f \leq 0$ – konstant. Insbesondere gilt dies für harmonische Funktionen, d.h. die stationären Punkte f der Wärmeleitungsgleichung $\Delta f = 0$.

Beweis. Wählen wir in der 1.ten Greenschen Formel die erste Funktion konstant 1, so erhalten wir $\int_M -\Delta f \cdot \text{vol}_M = \int_\emptyset df(\nu) \cdot \text{vol} = 0$. Wegen $\Delta f \leq 0$ ist also Δf konstant 0, i.e. f harmonisch. Nach der 1.ten Greenschen Formel für $h = f$ erhalten wir analog

$$\begin{aligned} 0 &\stackrel{\text{Green}}{=} \int_M \left(|\text{grad } f|^2 - \underbrace{f \cdot \Delta f}_{=0} \right) \cdot \text{vol}_M \\ &= \int_M |\text{grad } f|^2 \cdot \text{vol}_M, \end{aligned}$$

also ist $\text{grad } f = 0$ und somit ist f konstant. \square

49. Der Laplace-Beltrami-Operator

49.1 Der Laplace-Beltrami-Operator ist selbstadjungiert

Was läßt sich allgemein über den Laplace-Beltrami-Operator $\Delta := dd^* + d^*d : \Omega(M) \rightarrow \Omega(M)$ einer kompakten orientierten Riemann-Mannigfaltigkeit M aussagen? Auf jedem homogenen Teil $\Omega^k(M)$ haben wir nach [41.3](#) ein inneres Produkt, welches gegeben ist durch

$$\langle \alpha, \beta \rangle_{\Omega^k(M)} := \int_M \langle \alpha(\cdot), \beta(\cdot) \rangle_{\wedge^k T^*M} \text{vol}_M.$$

Es gilt, daß d und d^* formal adjungierte Operatoren bezüglich diesem inneren Produkt sind, denn nach [41.4](#):

$$\alpha \wedge * \beta = \langle \alpha, \beta \rangle \cdot \text{vol} \text{ für } \alpha, \beta \in \Omega^k(M)$$

und für $\alpha \in \Omega^k$ und $\beta \in \Omega^{k-1}$ rechnen wir wie folgt

$$\begin{aligned} \left(\langle \alpha, d\beta \rangle - \langle d^* \alpha, \beta \rangle \right) \text{vol} &\stackrel{\text{43.3}}{=} \langle d\beta, \alpha \rangle \text{vol} - \langle \beta, (-1)^{km+m+1} * d * \alpha \rangle \text{vol} \\ &= d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{km+m} \beta \wedge * * d * \alpha \\ &\stackrel{\text{41.4}}{=} d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{km+m} \beta \wedge (-1)^{(m-k+1)(k-1)} d * \alpha \\ &= d\beta \wedge * \alpha + (-1)^{k-1} \beta \wedge d * \alpha \\ &= d(\beta \wedge * \alpha). \\ \Rightarrow \int_M \langle \alpha, d\beta \rangle \text{vol} &= \int_M \langle d^* \alpha, \beta \rangle \text{vol} + \underbrace{\int_M d(\beta \wedge * \alpha)}_{=0}. \end{aligned}$$

Somit ist der Laplace-Beltrami-Operator $\Delta = dd^* + d^*d$ symmetrisch, d.h.

$$\langle \Delta \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta \beta \rangle$$

Er ist auch positiv, denn

$$\langle \Delta \alpha, \alpha \rangle = \langle (dd^* + d^*d)\alpha, \alpha \rangle = \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle + \langle d\alpha, d\alpha \rangle \geq 0.$$

Wegen dieser Gleichung gilt auch:

$$\Delta \alpha = 0 \Leftrightarrow d\alpha = 0 = d^*\alpha, \text{ also } \text{Ker}(\Delta) = \text{Ker}(d) \cap \text{Ker}(d^*).$$

Die Formen im Kern von H werden auch als HARMONISCHE FORMEN bezeichnet.

Der Operator Δ ist ein linearer Differentialoperator vom Grad 2. Man kann zeigen, daß er elliptisch ist, siehe [96, 6.35] und damit folgende Lemmas gelten:

49.2 Lemma.

Eine Folge von k -Formen $\alpha_n \in \Omega^k(M)$, für die sowohl $\{\|\alpha_n\|^2 := \langle \alpha_n, \alpha_n \rangle : n \in \mathbb{N}\}$ als auch $\{\|\Delta(\alpha_n)\|^2 : n \in \mathbb{N}\}$ beschränkt ist, besitzt eine Cauchy-Teilfolge im normierten Raum $\Omega^k(M)$.

Ohne Beweis, siehe [96, 6.6].

49.3 Lemma.

Jede SCHWACHE LÖSUNG α von $\Delta\alpha = \gamma$ ist eine wirkliche Lösung, d.h. Aus $\alpha \in L(\Omega^k(M), \mathbb{R})$ mit $\langle \gamma, \beta \rangle = \alpha(\Delta(\beta))$ für alle $\beta \in \Omega^k(M)$ folgt, daß ein $\tilde{\alpha} \in \Omega^k(M)$ existiert mit $\alpha(\beta) = \langle \tilde{\alpha}, \beta \rangle$ für alle β .

Ohne Beweis, siehe [96, 6.5].

49.4 Theorem von Hodge.

Sei M eine kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit so gilt:

1. $\dim(\text{Ker } \Delta) < \infty$.
2. $\Delta : (\text{Ker } \Delta)^\perp \rightarrow \text{Im } \Delta$ ist eine offene Abbildung.
3. $\text{Im } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$.

Beweis.

(1) Angenommen $\text{Ker } \Delta$ ist unendlich-dimensional, dann existiert eine orthogonale Folge von $\varphi_n \in \text{Ker } \Delta$. Diese nach [49.2] eine Cauchy-Teilfolge, ein Widerspruch zu $\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 = \|p h_n\|^2 + \|\varphi_m\|^2 = 1$.

(2) Klarerweise ist $\Delta : (\text{Ker } \Delta)^\perp \rightarrow \text{Im } \Delta$ bijektiv.

Behauptung: $\exists c \forall \beta \in (\text{Ker } \Delta)^\perp : \|\beta\| \leq c \|\Delta\beta\|$ (also ist $\Delta^{-1} : \text{Bild } \Delta \rightarrow (\text{Ker } \Delta)^\perp$ stetig).

Wir wollen die Behauptung indirekt beweisen. Angenommen $\exists \beta_n \in (\text{Ker } \Delta)^\perp$ mit $\|\beta_n\| = 1$ und $\|\Delta\beta_n\| \rightarrow 0$. Nach Lemma [49.2] dürfen wir annehmen, daß β_n eine Cauchy-Folge ist. Also existiert

$$\ell(\psi) := \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \beta_n, \psi \rangle \text{ für alle } \psi \in \Omega^k.$$

Das lineare Funktional $\ell : \Omega^p \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt, denn $|\ell(\varphi)| \leq \sup_n |\langle \beta_n, \varphi \rangle| \leq 1 \cdot \|\varphi\|$ und es gilt $\ell|_{\text{Ker } \Delta} = 0$, denn

$$\varphi \in \text{Ker } \Delta \Rightarrow \ell(\varphi) = \lim_n \langle \beta_n, \varphi \rangle \stackrel{\beta_n \in (\text{Ker } \Delta)^\perp}{=} \lim_n 0 = 0$$

aber auch $\ell|_{\text{Im } \Delta} = 0$, denn

$$\ell(\Delta\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \beta_n, \Delta\varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \Delta\beta_n, \varphi \rangle = 0.$$

Also ist ℓ eine schwache Lösung von $\Delta\ell = 0$. Nach Lemma [49.3] ist es eine wirkliche Lösung, d.h. $\exists \beta \in \Omega^k : \ell(\psi) = \langle \beta, \psi \rangle$ für alle $\psi \in \Omega^k$. Somit ist $\beta \in (\text{Ker } \Delta)^\perp$, denn $\langle \beta, \psi \rangle = \ell(\psi) = 0$ für $\psi \in \text{Ker } \Delta$, und $\beta \neq 0$, ja sogar $\|\beta\| = \lim_n \|\beta_n\| = 1$.

Aber es ist $0 = \ell(\Delta\varphi) = \langle \beta, \Delta\varphi \rangle = \langle \Delta\beta, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \Omega^k$ und somit $\Delta\beta = 0$. Das ist ein Widerspruch.

(3) Die Idee zum Beweis von $\text{Im } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$ ist die Gleichung $(\text{Ker } T)^\perp = \text{Im}(T^*)$ aus der linearen Algebra für lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen. Im unendlich-Dimensionalen stimmt diese so nicht mehr, aber mittels der Elliptizität können wir sie nun für $T := \Delta$ zeigen.

(\subseteq) Es gilt $\text{Bild } \Delta \subseteq (\text{Ker } \Delta)^\perp$, denn für $\beta \in \text{Ker } \Delta$ ist $\langle \Delta\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, \Delta^*\beta \rangle = 0$ da Δ symmetrisch ist.

(\supseteq) Sei $\alpha \in (\text{Ker } \Delta)^\perp$. Wir definieren $\ell(\Delta\varphi) := \langle \alpha, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in \Omega^k$. Dann ist $\ell : \text{Bild } \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ wohldefiniert, denn aus $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi_2$ folgt $\varphi_1 - \varphi_2 \in \text{Ker } \Delta$ und somit $\langle \alpha, \varphi_1 - \varphi_2 \rangle = 0$. Und $\ell : \text{Bild } \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ ist beschränkt, denn für den auf $\text{Ker } \Delta$ orthogonal stehenden Anteil ψ von φ gilt: $\Delta\varphi = \Delta\psi$ und somit

$$|\ell(\Delta\varphi)| = |\ell(\Delta\psi)| = |\langle \alpha, \psi \rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\psi\| \leq c \cdot \|\alpha\| \cdot \|\Delta\psi\| = c \cdot \|\alpha\| \cdot \|\Delta\varphi\|$$

Also ist ℓ nach dem SATZ VON HAHN-BANACH (siehe [46, 7.2.1]) erweiterbar zu einem $\|\cdot\|$ -beschränkten linearen Funktional auf Ω^k . Diese Erweiterung ist aber eine schwache Lösung von $\Delta\ell = \alpha$, und somit existiert nach Lemma 49.3 ein $\omega \in \Omega^k$ mit $\langle \omega, \psi \rangle = \ell(\psi)$ für alle ψ . Und somit $\langle \Delta\omega, \psi \rangle = \langle \omega, \Delta^*\psi \rangle = \ell(\Delta\psi) = \langle \alpha, \psi \rangle \forall \psi$ also ist $\alpha = \Delta\omega \in \text{Bild } \Delta$. \square

49.5 Folgerung (Orthogonale Zerlegung der Formen).

Für kompakte orientierbare Riemann-Mannigfaltigkeiten M haben wir folgende orthogonale Zerlegungen:

$$\Omega = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } \Delta \quad \text{und weiter} \quad \text{Bild } \Delta = \text{Bild } d \oplus \text{Bild } d^*$$

Beweis. Die erste direkte Summenzerlegung haben wir in 49.4 gezeigt. Nun zur zweiten:

(\supseteq) Die linearen Unterräume $\text{Bild } d$ und $\text{Bild } d^*$ sind in $\text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$ enthalten, da $\langle d\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d^*\beta \rangle = \langle \alpha, 0 \rangle = 0$ und $\langle d^*\alpha, \beta \rangle = \langle \alpha, d\beta \rangle = \langle \alpha, 0 \rangle = 0$ für alle $\beta \in \text{Ker } \Delta$ nach 49.1.

(\subseteq) Dies ist wegen $\Delta = dd^* + d^*d$ offensichtlich.

(\oplus) Die Summe ist orthogonal, denn wegen $\langle d\alpha, d^*\beta \rangle = \langle d^2\alpha, \beta \rangle = \langle 0, \beta \rangle = 0$ steht $\text{Bild}(d)$ auf $\text{Bild}(d^*)$ normal. \square

49.6 Definition (Green-Operator)

Wegen 49.4 ist $\Delta : (\text{Ker } \Delta)^\perp \rightarrow \text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$ eine offene Bijektion und, wenn wir mit $H : \Omega \rightarrow \text{Ker } \Delta$ die orthonormale Projektion bezeichnen, so ist der durch $G := (\Delta|_{\text{Bild } \Delta})^{-1} \circ H^\perp : \Omega \rightarrow (\text{Ker } \Delta)^\perp$ mit $H^\perp := \text{id}_\Omega - H$ definierte GREEN-OPERATOR G der eindeutig bestimmte Lösungsoperator von $\Delta(G(\alpha)) = H^\perp(\alpha)$ für alle $\alpha \in \Omega$. Folglich ist G beschränkt, und als Inverse des symmetrischen elliptischen Differentialoperators Δ symmetrisch und kompakt.

49.7 Folgerung.

Sei $T : \Omega \rightarrow \Omega$ ein linearer Operator, welcher mit Δ kommutiert, d.h. $T \circ \Delta = \Delta \circ T$, so kommutiert er auch mit G . Insbesondere gilt das für d, d^* und Δ .

Beweis. Aus $T \circ \Delta = \Delta \circ T$ folgt, daß $\text{Ker } \Delta$ und $\text{Bild } \Delta = (\text{Ker } \Delta)^\perp$ T -invariant sind. Somit kommutiert T mit H und H^\perp (denn $T(H(x)) \in \text{Bild } \Delta$ und $T(H^\perp(x)) \in$

Ker Δ und wegen $T(H(x)) + T(H^\perp(x)) = T(x) = H(T(x)) + H^\perp(T(x))$ ist $T(H(x)) = H(T(x))$ und $T(H^\perp(x)) = H^\perp(T(x))$ also auch mit G . \square

49.8 Folgerung (Harmonische Repräsentanten).

Die Kohomologie $H(M)$ von M ist isomorph zum Raum $\text{Ker } \Delta$ der harmonischen Formen. Genauer, in jeder Kohomologiekategorie gibt es genau einen harmonischen Repräsentanten.

Beweis. Nach [49.5](#) ist $\Omega = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } d \oplus \text{Bild } d^*$. Wir behaupten $\text{Ker } d = \text{Ker } \Delta \oplus \text{Bild } d$.

- (\supseteq) Nach [49.1](#) ist $\text{Ker } \Delta = \text{Ker } d \cap \text{Ker } d^* \subseteq \text{Ker } d$ und wegen $d^2 = 0$ ist $\text{Im } d \subseteq \text{Ker } d$.
- (\subseteq) Sei $\omega \in \text{Ker } d$. Nach [49.5](#) ist $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ mit $\omega_1 \in \text{Ker } \Delta$, $\omega_2 \in \text{Im } d$ und $\omega_3 \in \text{Im } d^*$ und somit $0 = d\omega = d\omega_1 + d\omega_2 + d\omega_3$ mit $d\omega_1 = 0 = d\omega_2$ wegen (\supseteq). Da $\omega_3 \in \text{Im } d^*$ existiert ein α mit $d^*\alpha = \omega_3$ und somit $0 = d\omega_3 = dd^*\alpha$ und weiters $\|\omega_3\|^2 = \|d^*\alpha\|^2 = \langle d^*\alpha, d^*\alpha \rangle = \langle dd^*\alpha, \alpha \rangle = \langle 0, \alpha \rangle = 0$. Also ist $\omega = \omega_1 + \omega_2 \in \text{Ker } \Delta \oplus \text{Im } d$.

49.9 Folgerung (Kohomologie ist endlichdimensional).

Die Kohomologie jeder kompakten, orientierbaren Mannigfaltigkeit ist endlichdimensional, d.h. alle Betti-Zahlen sind endlich.

Beweis. Wir wählen eine Riemann-Metrik auf M , dann ist $H(M) \cong \text{Ker } \Delta$ nach [49.8](#), und ist somit endlichdimensional nach [49.4](#). \square

49.10 Definition (Poincaré-Dualität)

Für jede kompakte orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit induziert die Abbildung $\Omega^{m-k}(M) \times \Omega^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$, welche durch $(\alpha, \beta) \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta$ gegeben ist, eine bilineare Abbildung $H^{m-k}(M) \times H^k(M) \rightarrow \mathbb{R}$, die sogenannte POINCARÉ-DUALITÄT.

Diese Definition macht Sinn, denn aus $\alpha_2 - \alpha_1 = d\alpha$ folgt $\alpha_2 \wedge \beta - \alpha_1 \wedge \beta = d\alpha \wedge \beta = d(\alpha \wedge \beta) \pm \alpha \wedge d\beta$, wo $d\beta = 0$, da $[\beta] \in H^k(M) = \text{Ker } d/\text{Bild } d$ ist. Somit ist nach dem Satz von Stokes $\int_M \alpha_2 \wedge \beta = \int_M \alpha_1 \wedge \beta$.

49.11 Lemma.

Die Poincaré-Dualität induziert einen Isomorphismus $H^{m-k} \cong (H^k)^*$, i.e. für die Betti-Zahlen gilt $\beta_k = \beta_{m-k}$.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß die Poincaré-Dualität nicht degeneriert ist.

Sei dazu $[\alpha] \in H^{m-k} \setminus \{0\}$, wegen [49.8](#) dürfen wir annehmen, daß α harmonisch und damit auch $d^*\alpha = 0$ ist. Wählen wir $\beta := *\alpha$, so gilt: $d\beta = d*\alpha = \pm *d^*\alpha = 0$ und $\int_M \alpha \wedge \beta = \int_M \alpha \wedge *\alpha = \int_M \langle \alpha, \alpha \rangle \text{ vol} > 0$, da $\alpha \neq 0$.

Bekanntlich induziert jede bilineare nicht-degenerierte Abbildung $b : E \times F \rightarrow \mathbb{R}$ auf endlichdimensionalen Vektorräumen einen Isomorphismus $b^\vee : E \rightarrow F^*$:

Die induzierte Abbildung $E \ni v \mapsto b(v, \cdot) \in F^*$ ist injektiv, denn $b(v, w) = 0$ für alle $w \in F$ impliziert $v = 0$. Also ist $\dim E \leq \dim(F^*) = \dim F$, und aus Symmetriegründen $\dim E = \dim F$. Somit ist die induzierte Abbildung ein Isomorphismus. \square

Bemerkung.

Da H^k nach [49.9](#) endlich-dimensional ist, liefert jedes innere Produkt auf H^k

einen Isomorphismus $\sharp : H^k \rightarrow (H^k)^*$ und somit nach [49.11](#) einen Isomorphismus $H^{m-k} \rightarrow (H^k)^* \leftarrow H^k$. Verwenden wir insbesondere den Isomorphismus $H(M) \cong \text{Ker } \Delta \subseteq \Omega(M)$ und das von $\Omega(M)$ induzierte innere Produkt aus [49.1](#) so läßt sich obiger Isomorphismus $H^{m-k} \leftrightarrow H^k$ wie folgt beschreiben:

$$\begin{array}{ccc}
 H^{m-k} \times H^k & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \longleftarrow H^k \times H^k \\
 \uparrow & & \uparrow \\
 Z^{m-k} \times Z^k & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R} \longleftarrow \text{Ker } \Delta \times \text{Ker } \Delta \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \Omega^{m-k} \times \Omega^k & \xrightarrow{\quad \wedge \quad} & \Omega^m \xrightarrow{\quad} \Omega^k \times \Omega^k
 \end{array}$$

$\langle \cdot, \cdot \rangle$

$$H^{m-k} \xrightarrow{\quad \cong \quad} (H^k)^* \xleftarrow{\quad \cong \quad} H^k$$

$$[\alpha] \leftrightarrow ([\beta] \mapsto \int_M \alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \gamma \in \text{Ker } \Delta,$$

mit $\int_M \alpha \wedge \beta = \langle \gamma, \beta \rangle_{\Omega^k(M)} := \int_M \langle \gamma, \beta \rangle_{\Delta^k(M)} \text{vol}_M = \int_M * \gamma \wedge \beta$ für alle $[\beta] \in H^k(M)$, also ist $[\alpha] = [* \gamma]$, d.h. der Isomorphismus ist durch den Hodge-Stern-Operator gegeben. Beachte dabei, daß

$$\begin{aligned}
 \Delta(*\gamma) &= (dd^* + d^*d) * \gamma \\
 &= (-1)^{1+m+m(m-k)} d * d * * \gamma + (-1)^{1+m+m(m-k+1)} * d * d * \gamma \\
 &= (-1)^{1+m+m(m-k)+k(m-k)} d * d \gamma + (-1)^{1+m+m(m-k+1)} * d * d * \gamma \\
 &= *((-1)^{m(m-1-2k)} (-1)^{1+m+m(k+1)} * d * d \\
 &\quad + (-1)^{m(m-1-2k)} (-1)^{2m} (-1)^{1+m+m k} d * d *) \gamma \\
 &= (-1)^{m(m-1-2k)} * (d^*d + dd^*) \gamma = *\Delta \gamma = *0 = 0, \quad \text{für } \gamma \in \text{Ker } \Delta,
 \end{aligned}$$

d.h. Δ die harmonischen Formen auf solche abbildet.

49.12 Folgerung.

Ist M eine kompakte zusammenhängende orientierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit, so ist $H^m(M) \cong \mathbb{R}$, i.e. $\beta_M = 1$.

Vgl. dies mit [50.5](#).

Beweis. Die Poincaré-Dualität liefert den Isomorphismus $H^m \cong (H^0)^*$, und $H^0 \cong \mathbb{R}$, da M zusammenhängend ist. Die Zusammensetzung der Isomorphismen $H^m \cong (H^0)^* \cong H^0 \cong \mathbb{R}$ ist: $[\omega] \mapsto \int_M \omega \wedge 1 = \int_M \omega$. \square

49.13 Folgerung.

Ist M kompakt, zusammenhängend, orientierbar und von ungerader Dimension so verschwindet die Euler-Charakteristik $\chi = \sum_k (-1)^k \beta_k$.

Beweis. Sei $\dim M = 2n + 1 = m$ so gilt

$$\begin{aligned}\chi &= \sum_{k=0}^m (-1)^k \beta_k = \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k + \sum_{k=n+1}^m (-1)^k \beta_k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \beta_k + \sum_{k=0}^n (-1)^{m-k} \beta_{m-k} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \underbrace{(\beta_k - \beta_{m-k})}_{\text{nach 49.11} = 0} = 0. \quad \square\end{aligned}$$

49.14 Kann man die Form einer Trommel hören?

Um diese sehr anschauliche Problem in eine mathematische Formulierung zu bekommen, denken wir uns eine Trommel als ein berandetes Gebiet im \mathbb{R}^2 . Lassen wir diese nun mit festgehaltenem Rand schwingen, so besitzt sie gewisse Eigenfrequenzen, die wir – zumindest mit absolutem Gehör – hören könnten. Es stellt sich nun die Frage, ob das Gebiet durch dieses Spektrum von Eigenfrequenzen bereits bis auf Isometrien eindeutig festgelegt ist.

Allgemeiner können wir das Problem auch für beliebig dimensionale, abstrakte orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeiten stellen, [48].

Da wir sie nur ein wenig aus der Ruhelage bringen wollen, ist es egal in welchem umgebenden Raum die Mannigfaltigkeit isometrisch eingebettet ist, am einfachsten in $M \times \mathbb{R}$. Sei nun $u(x, t)$ die Entfernung des Punktes $x \in M$ von seiner Ruhelage zum Zeitpunkt t . Dann erfüllt u , wie bei der üblichen Gleichung der schwingenden Saite (siehe z.B. [57, 9.3.1]), die partielle Differentialgleichung 2.ter Ordnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Delta u = 0 \text{ mit } u|_{\partial M} = 0,$$

wobei Δ der Laplace-Beltrami-Operator der Riemann-Mannigfaltigkeit ist.

Die übliche Lösungsmethode verwendet den Ansatz der getrennten Variablen (vgl. [57, 9.3.2]), d.h. $u(x, t) := \varphi(x) \cdot \psi(t)$. Die Gleichung übersetzt sich dann in $\frac{\Delta \varphi}{\varphi}(x) = -\frac{\psi''}{\psi}(t)$ und somit müssen beide Seiten konstant – z.B. gleich λ – sein. Insbesondere suchen wir also Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{R}$ und Eigenfunktionen $\varphi \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ des Operators $\Delta : C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$.

Falls M kompakt ist, so sind nach [49.1] alle Eigenwerte reell und die Eigenfunktionen zu verschiedenen Eigenwerten stehen orthogonal (da Δ symmetrisch ist). Die Eigenwerte sind alle nicht negativ (da Δ positiv ist) und lassen sich zu einer monoton wachsenden Folge (λ_k) anordnen, die sich nur im Unendlichen häuft, denn andernfalls besäße eine zugehörige orthonormale Folge von Eigenfunktionen nach [49.2] einen Häufungswert. Vermöge einer orthonormalen Folge von zugehörigen Eigenfunktionen $\varphi_k \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ läßt sich die Wellengleichung mittels Fourierreihen

$$u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + b_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right) \cdot \varphi_k(x)$$

lösen, wobei die Konstanten a_k und b_k durch die Anfangsbedingungen festgelegt sind. Die Klangwelle der Mannigfaltigkeit ist dann ein geeigneter Mittelwert:

$$s(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\alpha_k \cos(\sqrt{\lambda_k} t) + \beta_k \sin(\sqrt{\lambda_k} t) \right).$$

Und somit können wir (in einem gewissen Sinn) die λ_k hören.

Diese Folge (λ_k) heißt das SPEKTRUM DER RIEMANN-MANNIGFALTIGKEIT. Z.B. kann man zeigen, daß das Spektrum der S^n die Folge $(k(k+n-1))_{k=0}^{\infty}$ ist, wobei jedes $k > 0$ mit Vielfachheit $\frac{(n+2k-1)!(n+k-2)!}{(n-1)!k!}$ auftritt.

Man konnte zeigen, daß folgende Dinge gehört werden können, d.h. durch das Spektrum bereits eindeutig bestimmt sind:

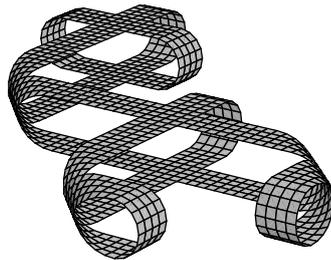
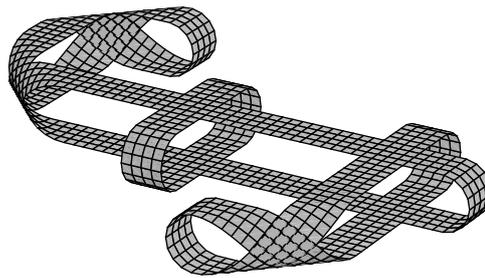
die Dimension, das Volumen und die Euler-Charakteristik und damit das Geschlecht (einer 2-dimensionalen unberandeten Mannigfaltigkeit) und die totale skalare Krümmung (siehe [64.13](#)).

Man konnte zeigen, daß man die folgenden Riemann-Mannigfaltigkeiten mit ihrer kanonischen Metrik durch Hören erkennen kann: die Sphären S^n , die reellen projektiven Räume \mathbb{P}^{2n-1} für $n \leq 3$, den flachen Torus $S^1 \times S^1$, sowie alle kompakten 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit konstanten Krümmung $K > 0$.

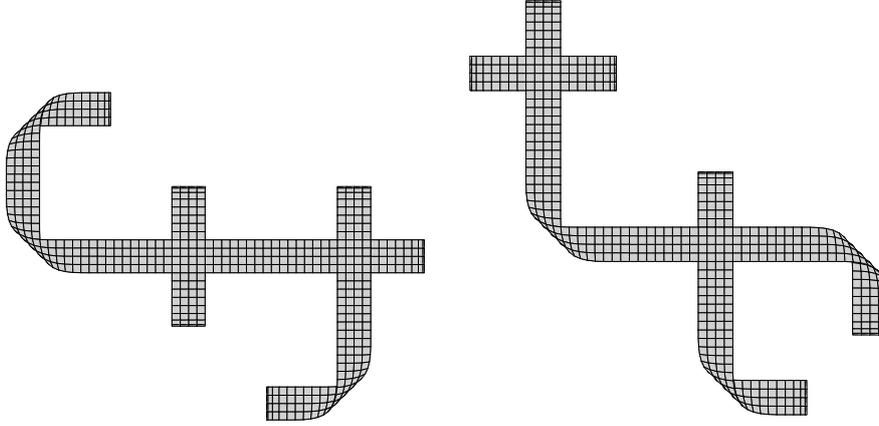
Jedoch gibt es ISOSPEKTRALE RIEMANN-MANNIGFALTIGKEITEN die nicht isometrisch sind. Das erste Beispiel wurde von [\[70\]](#) gefunden und waren zwei 16-dimensionale Tori. [\[17\]](#) gaben 4-dimensionale Tori an. Marie-France Vigneras [\[94\]](#) konstruierte 2-dimensionale Beispiele die als Quotienten der hyperbolischen Halbebene nach diskreten Gruppen von Isometrien erhalten werden. Daß es sogar isospektrale Deformationen von Riemann-Mannigfaltigkeiten gibt, wurde von [\[29\]](#) gezeigt und in [\[88\]](#) systematisiert. Schließlich konstruierten [\[28\]](#) eine berandete Fläche die aus $168 = 7 \cdot 24$ Kreuzen zusammengesetzt ist und auf welcher die Elemente von $SL_{\mathbb{Z}_2}(3)$ als fixpunktfreie Isometrien wirken. Die jeweils $24 = 2 \cdot 2 \cdot 6$ elementigen Untergruppen

$$G_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix} \right\} \quad \text{und} \quad G_2 := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \right\}$$

liefern dann zwei 24-blättrige Überlagerungen $M \rightarrow M/G_i =: M_i$ mit M_1 und M_2 isospektral aber nicht isometrisch.



Faktoriert man noch die offensichtliche isometrische Involution $\tau_i : M_i \rightarrow M_i$ heraus, so erhält man zwei isospektrale aber nicht isometrische Gebiete mit Ecken in \mathbb{R}^2 .



50. Anwendungen zum Satz von Stokes

50.1 Kurvenintegrale

Sei M eine Mannigfaltigkeit, $\omega \in \Omega^1(M)$ geschlossen, $c : [0, 1] \rightarrow M$ glatt. Dann ist $\int_c \omega = \int_0^1 c^*(\omega)$ und lokal sieht $c^*(\omega)$ wie folgt aus:

$$\omega = \sum \omega_i dx^i,$$

$$c^*(\omega) = \sum (\omega_i \circ c) \det \left(\frac{\partial(x_i \circ c)}{\partial t} \right) dt = \sum \omega_i(c(t))(x_i \circ c)'(t) dt.$$

Nach dem Satz von Stokes [47.12](#) ist für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$: $\int_c df = \int_{[0,1]} c^*(df) = \int_{\partial[0,1]} c^*(f) = c^*(f)(1) - c^*(f)(0) = f(c(1)) - f(c(0))$. Falls M einfach-zusammenhängend ist, so ist nach [44.5](#) die erste Kohomologie $H^1(M) = 0$. Somit ist jedes geschlossene ω exakt, d.h. $\omega = df$ für passendes $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. Es ist also $\int_c \omega = \int_c df = f(c(1)) - f(c(0))$, d.h. das Integral ist wegunabhängig.

50.2 Cauchyscher Integralsatz.

Sei M ein einfach zusammenhängendes Gebiet in \mathbb{C} , $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Abbildung und c eine geschlossene Kurve in M . Dann gilt: $\int_c f = 0$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned} \int_c f(z) dz &:= \int_c (f_1(z) + i f_2(z))(dx + i dy) \\ &:= \int_c \underbrace{(f_1(z) dx - f_2(z) dy)}_{=: \omega_1} + i \int_c \underbrace{(f_1(z) dy + f_2(z) dx)}_{=: \omega_2} \\ &:= \int_c \omega_1 + \int_c \omega_2. \end{aligned}$$

mit $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$.

Wegen der Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} &= \frac{\partial f_2}{\partial y}.\end{aligned}$$

und dem Poincare-Lemma folgt $\int_c f(z) dz = 0$. \square

50.3 Cauchysche Integralformel.

Sei M ein Gebiet in \mathbb{C} und $f : M \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Sei $D \subseteq M$ eine Kreisscheibe um z_0 und c parametrisiere den Rand ∂D von D . Dann gilt:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Beweis. Sei $\omega := \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$. Dann ist $d\omega = 0$ auf $M \setminus \{z_0\}$, weil $z \mapsto \frac{f(z)}{z - z_0}$ dort holomorph ist (verwende die Cauchy-Riemann'schen-Differentialgleichungen). Sei K_ε die Scheibe $B(z_0, \varepsilon)$ und R_ε der Kreisring $D \setminus K_\varepsilon \subseteq M$. Mit dem Satz von Stokes erhält man:

$$\begin{aligned}0 &= \int_{R_\varepsilon} d\omega = \int_{\partial R_\varepsilon} \omega = \int_{\partial D} \omega - \int_{\partial K_\varepsilon} \omega \Rightarrow \\ &\Rightarrow \int_{\partial D} \omega = \int_{\partial K_\varepsilon} \omega = \int_0^1 \frac{1}{2\pi i} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{2\pi i t})}{\varepsilon e^{2\pi i t}} \varepsilon 2\pi i e^{2\pi i t} dt \\ &\Rightarrow f(z_0) = \int_{\partial D} \omega \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad \square\end{aligned}$$

50.4 Kohomologie

Wir wollen nun für allgemeine Mannigfaltigkeiten M die höchste Kohomologie $H^m(M)$ bestimmen.

Sei M kompakt, orientierbar und ohne Rand. Wie in [47.3](#) folgt die Existenz eines $\omega \in \Omega^m(M)$, $m = \dim M$, mit $\omega(v_1, \dots, v_m) > 0$ für alle positiv orientierten Basen $(v_i)_{i=1}^m$. Somit ist $\int_M \omega > 0$ und ω ist geschlossen, weil ω eine m -Form ist.

Die Form ω kann aber nicht exakt sein: Gäbe es ein $\eta \in \Omega^{m-1}(M)$ mit $\omega = d\eta$, dann wäre

$$\int_M \omega = \int_M d\eta = \int_{\partial M} \eta = 0, \text{ da } \partial M = \emptyset.$$

Das ist ein Widerspruch. Also ist $H^m(M) \neq 0$.

50.12 Lemma.

Es ist

$$\begin{aligned}(r^* \text{vol}_{S^m})(x) &= \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \iota_\nu \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}}(x) \\ &= \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \dots \wedge \overline{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m\end{aligned}$$

wobei $r : \mathbb{R}^{m+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^m$ die Retraktion $x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$ und $\nu \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{m+1})$ das Vektorfeld $\nu : x \mapsto x$ sei.

Beweis. Es wird $T_x \mathbb{R}^{m+1}$ von $T_x(\|x\| S^m)$ und ν_x erzeugt, also genügt es beide Seiten auf Vektoren v_i aus diesen Teilräumen zu testen. Falls $v_i = \nu_x$ für mindestens ein i ist, so ist die rechte Seite

$$\frac{1}{\|x\|^{m+1}} \iota_\nu \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}}(\dots, v^i, \dots) = \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}}(\nu_x, \dots, v_i, \dots) = 0$$

und die linke Seite ebenfalls, denn $T_x r \cdot \nu = \frac{d}{dt}|_{t=0} r(x + tx) = 0$.

Sind alle Vektoren in $v_i \in T_x(\|x\| S^m)$, so ist $T_x r \cdot v_i = \frac{1}{\|x\|} v_i$, denn $r : \|x\| S^m \rightarrow S^m$ ist eine Streckung mit Faktor $\frac{1}{\|x\|}$. Damit sind ebenfalls beide Seiten gleich, denn nach Aufgabe EX25 ist

$$\text{vol}_{S^m} = \text{incl}^* \left(\sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m \right)$$

□

50.13 Lemma. Integration nach Polarkoordinaten.

Es sei $B := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| \leq 1\}$ und $f \in C^\infty(B, \mathbb{R})$. Dann ist

$$\int_B f = \int_B f \text{vol}_{\mathbb{R}^{m+1}} = \int_{S^m} g \text{vol}_{S^m} \quad \text{mit } g : x \mapsto \int_0^1 t^m f(tx) dt.$$

Beweis. Es ist $B \setminus \{0\} \cong S^m \times (0, 1]$ vermöge $\varphi : x \mapsto (\frac{x}{\|x\|}, \|x\|)$ mit Umkehrabbildung $(y, t) \mapsto ty$. Sei eine $m+1$ -Form auf $S^m \times [0, 1]$ gegeben durch $dt \wedge \text{vol}_{S^m} := \text{pr}_2^*(dt) \wedge \text{pr}_1^*(\text{vol}_{S^m})$ und $h : S^m \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $h(y, t) = t^m f(ty)$. Dann ist

$$\int_{S^m} g \text{vol}_{S^m} = \int_{S^m} \int_0^1 \underbrace{t^m f(t \cdot)}_{=h(\cdot, t)} dt \text{vol}_{S^m} = \int_{S^m \times [0, 1]} h dt \wedge \text{vol}_{S^m}.$$

Weiters ist mit $\rho(x) := \|x\|$

$$\begin{aligned} \varphi^*(dt \wedge \text{vol}_{S^m}) &= \varphi^*(\text{pr}_2^*(dt) \wedge \text{pr}_1^*(\text{vol}_{S^m})) = (\text{pr}_2 \circ \varphi)^*(dt) \wedge (\text{pr}_1 \circ \varphi)^*(\text{vol}_{S^m}) \\ &= \rho^*(dt) \wedge r^*(\text{vol}_{S^m}) \\ &\stackrel{\text{50.12}}{=} \sum_{j=0}^m \frac{x^j}{\|x\|} dx^j \wedge \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^1 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= \frac{1}{\|x\|^{m+2}} \sum_{i=0}^m (x^i)^2 dx^0 \wedge \dots \wedge dx^m = \frac{1}{\|x\|^m} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^m \end{aligned}$$

und für $x \neq 0$ somit

$$\begin{aligned} \varphi^*(h \text{vol}_{S^m} \wedge dt)(x) &= h(\varphi(x)) \varphi^*(\text{vol}_{S^m} \wedge dt)(x) = \|x\|^m f(x) \frac{1}{\|x\|^m} dx^0 \wedge \dots \wedge dx^m \\ &= f(x) dx^0 \wedge \dots \wedge dx^m. \end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_B f &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{B \setminus \varepsilon B} \varphi^*(h \text{vol}_{S^m} \wedge dt) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{\varphi(B \setminus \varepsilon B)} h \text{vol}_{S^m} \wedge dt \\ &= \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_{S^m \times [\varepsilon, 1]} h \text{vol}_{S^m} \wedge dt = \int_{S^m \times [0, 1]} h \text{vol}_{S^m} \wedge dt \\ &= \int_{S^m} g \text{vol}_{S^m}. \quad \square \end{aligned}$$

50.15 Definition. Kohomologie mit kompakten Träger.

Indem wir die Teilräume $\Omega_c^k(M) := \{\omega \in \Omega^k(M) : \text{Trg } \omega \text{ ist kompakt}\}$ anstelle von $\Omega^k(M)$ verwenden definieren wir die Kohomologie mit kompakten Träger durch

$$\begin{aligned} Z_c^k(M) &:= \text{Ker}(d : \Omega_c^k(M) \rightarrow \Omega_c^{k+1}(M)) \\ B_c^k(M) &:= \text{Bild}(d : \Omega_c^{k-1}(M) \rightarrow \Omega_c^k(M)) \\ H_c^k(M) &:= Z_c^k(M) / B_c^k(M) \end{aligned}$$

Beachte dabei, daß $B_c^k(M) \neq \{d\eta \in \Omega_c^k(M) : \eta \in \Omega_c^{k-1}(M)\}$, denn z.B. ist für $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $0 \neq f \geq 0$ die Differentialform $\omega := f dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n \in \Omega_c^n(\mathbb{R}^n)$ wegen dem Poincaré-Lemma [44.5.6](#) exakt, aber für kein $\eta \in \Omega_c^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ ist $d\eta = \omega$, denn nach dem Satz [47.12](#) von Stokes wäre dann $0 < \int_{\mathbb{R}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} d\eta = \int_{\emptyset} \eta = 0$ ein Widerspruch.

Ein direkte Verallgemeinerung dieses Arguments zeigt, daß es ein $\omega_0 \in \Omega_c^m(M)$ mit $\int_M \omega_0 = 1$ gibt und somit $H_c^m(M) \neq 0$ für alle orientierbaren m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten M ist. Wir wollen nun zeigen, daß $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$ für solche M ist, also für alle $\omega \in \Omega_c^m(M)$ ein $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M)$ existiert mit $\omega = (\int_M \omega) \omega_0 + d\eta$, und damit $\int : \Omega_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}$ einen Isomorphismus $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$ induziert.

50.6 Theorem.

Für jede zusammenhängende orientierbare m -dimensionale Mannigfaltigkeit M ist $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$.

Beweis. Wir müssen nur zeigen, daß $B_c^m(M)$ der Kern von $\int_M : \Omega_c^m(M) \rightarrow \mathbb{R}$ ist, d.h. für jedes $\omega \in \Omega_c^m(M)$ mit $\int_M \omega = 0$ ein $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M)$ existiert mit $\omega = d\eta$.

Beh.: Das Theorem stimmt für $M = \mathbb{R}$.

Sei $\omega \in \Omega_c^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \omega = 0$. Wegen dem Poincaré Lemma [44.5.6](#) existiert ein $f \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mit $\omega = df$. Da $\text{Trg } \omega = \text{Trg } f'$ kompakt ist, existiert ein N , s.d. f sowol auf $(-\infty, -N]$ als auch auf $[N, +\infty)$ konstant ist. Wegen $0 = \int_{\mathbb{R}} \omega = \int_{\mathbb{R}} df = \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t) dt = \int_{-N}^{+N} f'(t) dt = f(N) - f(-N)$ ist $f(N) = f(-N)$ und somit $g := f - f(N) \in C_c^\infty$ und $\omega = dg$.

Beh.: Falls das Theorem für S^m gilt, so auch für \mathbb{R}^{m+1} .

Sei $\omega = f dx^0 \wedge \cdots \wedge dx^m \in \Omega_c^m(\mathbb{R}^{m+1})$ mit $\int_{\mathbb{R}^{m+1}} \omega = 0$ und o.B.d.A. sei $\text{Trg}(\omega) \subseteq \{x : \|x\| < 1\}$. Wegen dem Poincaré Lemma [44.5.6](#) existiert ein $\eta \in \Omega^m(\mathbb{R}^{m+1})$ mit $\omega = d\eta$. Nach Aufgabe [EX24](#) ist

$$\begin{aligned} \eta(x) &:= \int_0^1 t^m f(tx) dt \cdot \sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m \\ &\stackrel{(s = \|x\|t)}{=} \frac{1}{\|x\|^{m+1}} \int_0^{\|x\|} s^m f\left(s \frac{x}{\|x\|}\right) ds \cdot \sum_{i=0}^m (-1)^i x^i dx^0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^i} \wedge \cdots \wedge dx^m \\ &\stackrel{\text{50.12}}{=} \int_0^{\|x\|} t^m f\left(t \frac{x}{\|x\|}\right) dt \cdot (r^* \text{vol}_{S^m})(x). \end{aligned}$$

Es sei $g : S^m \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $g(x) := \int_0^1 t^m f(tx) dt$ und $B := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \|x\| \leq 1\}$. Da

$$0 = \int_{\mathbb{R}^{m+1}} \omega = \int_B f \stackrel{\text{50.13}}{=} \int_{S^m} g \text{vol}_{S^m}$$

existiert nach Voraussetzung ein $\lambda \in \Omega^{m-1}(S^m)$ mit $g \operatorname{vol}_{S^m} = d\lambda$. Wegen $f|_{\mathbb{R}^{m+1} \setminus B} = 0$ ist

$$\begin{aligned} \eta(x) &= \int_0^1 t^m f\left(t \frac{x}{\|x\|}\right) dt \cdot (r^* \operatorname{vol}_{S^m})(x) \text{ f\"ur } x \notin B \\ \Rightarrow \eta &= (g \circ r) \cdot r^* \operatorname{vol}_{S^m} = r^*(g \operatorname{vol}_{S^m}) = r^*(d\lambda) = d(r^*\lambda) \text{ auf } \mathbb{R}^{m+1} \setminus B. \end{aligned}$$

Sei nun $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{m+1}, [0, 1])$ so, da\ss $h = 0$ nahe 0 und $h|_{\mathbb{R}^{m+1} \setminus B} = 1$. Dann ist $h \cdot r^*\lambda \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^{m+1})$ und

$$\omega = d\eta = d(\eta - d(h \cdot r^*\lambda)) \text{ mit } (\eta - d(h \cdot r^*\lambda))|_{\mathbb{R}^{m+1} \setminus B} = (\eta - d(r^*\lambda))|_{\mathbb{R}^{m+1} \setminus B} = 0.$$

Beh.: Falls das Theorem f\"ur \mathbb{R}^m gilt, so f\"ur alle m -dimensionalen M .

Sei dazu $\omega_0 \in \Omega^m(M)$ mit $\int \omega_0 = 1$ und $\operatorname{Trg} \omega_0 \subseteq \operatorname{Bild} \varphi_0$ f\"ur eine Karte $\varphi_0 : \mathbb{R}^m \rightarrow M$. Wir zeigen, da\ss zu $\omega \in \Omega_c^m(M)$ ein $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M)$ gibt mit $\omega = (\int_M \omega) \cdot \omega_0 + d\eta$. Daraus folgt dann $\omega = d\eta$ f\"ur alle ω mit $\int \omega = 0$.

Betrachten wir zuerst den Fall $\operatorname{Trg} \omega \subseteq \operatorname{Bild} \psi$ f\"ur eine Karte $\psi : \mathbb{R}^m \rightarrow M$: Es gibt dann endlich viele Karten $\psi_i : \mathbb{R}^m \rightarrow M$ mit $\operatorname{Bild} \psi_i \cap \operatorname{Bild} \psi_{i+1} \neq \emptyset$, ψ_0 die obige Karte bei ω_0 und weiters $\psi_m = \psi$ ist. Dazu gibt es ω_i mit kompaktem Tr\"ager $\operatorname{Trg} \omega_i \subseteq \operatorname{Bild} \psi_{i-1} \cap \operatorname{Bild} \psi_i$ und $\int \omega_i = 1$. Da das Theorem f\"ur $M = \mathbb{R}^m$ vorausgesetzt ist, existieren $\eta_i \in \Omega_c^{m-1}(M)$ mit $\operatorname{Trg} \eta_i \subseteq \operatorname{Bild} \psi_{i-1}$ und $\omega_i - \omega_{i-1} = d\eta_i$. Schlie\sslich existiert ebenso f\"ur $c := \int \omega$ ein η_{m+1} mit $\omega - c\omega_m = d\eta_{m+1}$. Daraus folgt

$$\omega = c\omega_m + d\eta_{m+1} = \dots = c\omega_0 + c \sum_{i=1}^m d\eta_i + d\eta_{m+1} = c\omega_0 + d\left(\eta_{m+1} + c \sum_{i=1}^m \eta_i\right).$$

Sei nun $\omega \in \Omega_c^m(M)$ beliebig und $\{f_i\}$ eine Partition der Eins, die einer \u00dcberdeckung mit offenen zu \mathbb{R}^m diffeomorphen Mengen untergeordnet ist, dann ist $f_i\omega = c_i\omega_0 + d\eta_i$ f\"ur ein $\eta_i \in \Omega_c^{m-1}(M)$ und somit $\omega = \sum_i f_i\omega = (\sum_i c_i)\omega_0 + d\sum_i \eta_i$, wobei $\int_M \omega = \sum_i c_i \int_M \omega_0 + \int_M d\sum_i \eta_i = \sum_i c_i$, eine endliche Summe. \square

50.5 Satz (H\u00f6chste Kohomologie).

F\"ur zusammenh\"angende m -dimensionale Mannigfaltigkeiten M ohne Rand gilt:

$$\begin{aligned} H^m(M) &\cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } M \text{ kompakt und orientierbar ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \\ H_c^m(M) &\cong \begin{cases} \mathbb{R} & \text{falls } M \text{ orientierbar ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \end{aligned}$$

F\"ur kompaktes orientierbares M haben wir diese Aussage in [49.12](#) unter Verwendung des Theorems von Hodge bewiesen. Der nachfolgende Beweis benutzt dieses nicht.

Beweis. Nach [50.6](#) ist $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$ f\"ur alle orientierbaren M und damit $H^m(M) = H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$ f\"ur alle orientierbaren kompakten M .

Sei als n\"achstes M orientierbar aber nicht kompakt:

Da M nicht kompakt ist existiert eine \u00dcberdeckung $\{\operatorname{Bild} \psi_i : i \in \mathbb{N}\}$ f\"ur Karten ψ_i , s.d. jede kompakte Menge nur endlich viele $\operatorname{Bild} \psi_i$ trifft (\"uberdecke die Differenzen einer kompakten Aussch\u00f6pfung mit Kartenbildern) und (durch eventuelles Vergr\u00f6\ssern d\"urfen wir o.B.d.A. annehmen, da\ss) $\operatorname{Bild} \psi_i \cap \operatorname{Bild} \psi_{i+1} \neq \emptyset$. Sei $\{f_i : i \in \mathbb{N}\}$ eine untergeordnete Partition der 1. Wir w\"ahlen wieder $\omega_i \in \Omega_c^m(M)$ mit $\operatorname{Trg} \omega_i \subseteq \operatorname{Bild} \psi_i \cap \operatorname{Bild} \psi_{i+1}$ und $\int_M \omega_i = 1$. Sei nun $\omega \in \Omega^m(M)$ mit $\operatorname{Trg} \omega \subseteq$

Bild ψ_j für ein j und $c := \int_M \omega$. Für $i \geq j$ existieren dann $\eta_i \in \Omega_c^{m-1}(M)$ mit $\text{Trg } \eta_i \subseteq \text{Bild } \psi_i$, und $\omega = c\omega_j + d\eta_j$ sowie $c\omega_{i-1} = c\omega_i + d\eta_i$ für $i > j$. Somit ist

$$\omega = c\omega_j + d\eta_j = \cdots = c\omega_k + \sum_{i=j}^k d\eta_i = d\left(\sum_{i=j}^{\infty} \eta_i\right)$$

und $\mu_j := \sum_{i=j}^{\infty} \eta_i$ lokal endlich. Sei nun $\omega \in \Omega^m(M)$ beliebig. Dann ist $f_j\omega$ wie zuvor, also existiert ein $\mu_j \in \Omega^{m-1}(M)$ mit $f_j\omega = d\mu_j$ und $\text{Trg } \mu_j \subseteq \bigcup_{i \geq j} \text{Bild } \psi_i$, somit ist $\sum_j \mu_j$ lokal endlich und

$$\omega = \sum_j f_j\omega = \sum_j d\mu_j = d\left(\sum_j \mu_j\right),$$

also ist $H^m(M) = \{0\}$.

Sei nun M nicht orientierbar:

Auf dem Totalraum der Orientierungsüberlagerung $p : M^{or} \rightarrow M$ der Mannigfaltigkeit M definieren wir die ORIENTIERUNGSVERTAUSCHUNG $\chi : \chi(x, \pm\omega) := (x, \mp\omega)$ und damit

$$\begin{aligned} \Omega_{\pm}^k(M^{or}) &:= \{\omega \in \Omega^k(M^{or}) : \chi^*\omega = \pm\omega\} \\ H_{\pm}^k(M^{or}) &:= \{\omega \in \Omega_{\pm}^k(M^{or}) : d\omega = 0\} / \{d\eta : \eta \in \Omega_{\pm}^{k-1}(M^{or})\} \\ \Omega_{\pm,c}^k(M^{or}) &:= \{\omega \in \Omega_c^k(M^{or}) : \chi^*\omega = \pm\omega\} \\ H_{\pm,c}^k(M^{or}) &:= \{\omega \in \Omega_{\pm,c}^k(M^{or}) : d\omega = 0\} / \{d\eta : \eta \in \Omega_{\pm,c}^{k-1}(M^{or})\}. \end{aligned}$$

Wir behaupten:

$$\begin{aligned} \Omega^k(M^{or}) &= \Omega_+^k(M^{or}) \oplus \Omega_-^k(M^{or}) \\ H^k(M^{or}) &= H_+^k(M^{or}) \oplus H_-^k(M^{or}) \\ p^* : H^k(M) &\xrightarrow{\cong} H_+^k(M^{or}) \end{aligned}$$

und analog für Formen mit kompakten Träger. Sei $\omega \in \Omega^k(M^{or})$, dann gilt:

$$\begin{aligned} \omega &= \frac{1}{2} \left((\omega + \chi^*\omega) + (\omega - \chi^*\omega) \right) \in \Omega_+^k \oplus \Omega_-^k, \text{ wobei } \Omega_-^k \cap \Omega_+^k = \{0\} \\ \Rightarrow \Omega^k(M^{or}) &= \Omega_-^k(M^{or}) \oplus \Omega_+^k(M^{or}) \\ \text{und } d(\Omega_{\pm}^k) &\subseteq \Omega_{\pm}^{k+1}, \text{ weil } \chi^*(d\omega) = d(\chi^*\omega) = \pm d\omega \text{ für } \omega \in \Omega_{\pm}^k \\ \Rightarrow H^k(M^{or}) &= H_-^k(M^{or}) \oplus H_+^k(M^{or}) \\ \text{und } p^* : \Omega^k(M) &\rightarrow \Omega^k(M^{or}) \text{ ist injektiv, da } p \text{ eine surjektive Submersion ist.} \end{aligned}$$

Weiters ist

$$p^*(\Omega^k(M)) = \Omega_+^k(M^{or}).$$

(\subseteq) Weil $\chi^*p^*\omega = (p \circ \chi)^*\omega = p^*\omega$.

(\supseteq) Sei $\omega \in \Omega_+^k(M^{or})$ und sei $U \subseteq M^{or}$, sodaß $p|_U : U \rightarrow p(U)$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $\alpha|_{p(U)} := ((p|_U)^{-1})^*\omega$. Dann ist $\alpha \in \Omega^k(M)$ wohldefiniert, weil $\chi^*\omega = \omega$, und $p^*\alpha = \omega$.

Somit gilt $p^* : \Omega^k(M) \xrightarrow{\cong} \Omega_+^k(M^{or}) \hookrightarrow \Omega^k(M^{or})$. Wegen $p^* \circ d = d \circ p^*$ folgt daraus $p^* : H^k(M) \xrightarrow{\cong} H_+^k(M^{or}) \hookrightarrow H^k(M^{or})$ und analog $p^* : H_c^k(M) \xrightarrow{\cong} H_{+,c}^k(M^{or}) \hookrightarrow H_c^k(M^{or})$, was die letzte Behauptung war.

Sei $\omega \in \Omega_{+,c}^m(M^{or})$. Dann ist $\int \omega = 0$, denn $\int \omega = \int \chi^*\omega \stackrel{\chi \text{ orient. vert.}}{=} - \int \omega$. Somit existiert nach dem Vorigen ein $\eta \in \Omega_c^{m-1}(M^{or})$ mit $\omega = d\eta$ und somit ist

$\omega = \frac{1}{2}(\omega + \chi^*\omega) = \frac{1}{2}(d\eta + \chi^*d\eta) = d(\eta_+)$ mit $\eta_+ := \frac{1}{2}(\eta + \chi^*\eta) \in \Omega_{+,c}^{m-1}(M^{or})$, also $[\omega] = [d\eta_+] = 0 \in H_{+,c}^m(M^{or})$. Somit ist $H_c^m(M) \cong H_{+,c}^m(M^{or}) = \{0\}$.

Schließlich sei M weder kompakt noch orientierbar:

Dann folgt das Resultat für H^m aus dem orientierbaren Fall, denn $p^* : H^m(M) \hookrightarrow H^m(M^{or}) = \{0\}$. □

50.7 Beispiel

Für die orientierte zweiblättrige Überlagerung $S^n \rightarrow \mathbb{P}^n$ sei χ die Antipodalabbildung $x \mapsto -x$. Dann ist $H^k(\mathbb{P}^n) \cong H_+^k(S^n) \subseteq H^k(S^n)$ wie im Beweis von 50.5 und somit

$$H^k(\mathbb{P}^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{für } k \neq 0, n \\ \mathbb{R} & \text{für } k = 0 \text{ (da } \mathbb{P}^n \text{ zush. ist)} \\ 0 & \text{für } k = n \text{ gerade} \\ \mathbb{R} & \text{für } k = n \text{ ungerade} \end{cases}$$

In der Tat ist χ auf S^n genau dann orientierungserhaltend, wenn n ungerade ist und somit ist für $\omega \in \Omega_{\pm}(S^n)$ $\int_{S^n} \pm\omega = \int_{S^n} \chi^*\omega = (-1)^{n+1} \int_{S^n} \omega$, also wie zuvor $H_+^n(S^n) = 0$ falls n gerade ist und für n ungerade ist $H_-(S^n) = 0$ und damit $H^n(\mathbb{P}^n) = H_+^n(S^n) = H^n(S^n) = \mathbb{R}$.

50.8 Brouwerscher Fixpunktsatz.

Sei $f : B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\} \rightarrow B^n$ glatt, dann gibt es ein $x \in B^n$ mit $f(x) = x$.

Beweis. Indirekt: Sei $f(x) \neq x$ für alle x , dann gibt es eine C^∞ -Abbildung $r : B^n \rightarrow S^{n-1}$ mit $r|_{S^{n-1}} = \text{id}_{S^{n-1}}$, sei nämlich $r(x)$ der auf der Seite von x liegende Schnittpunkt der wohldefinierten Geraden durch x und $f(x)$ mit der Sphäre S^{n-1} . Wir erweitern r zu einer Abbildung gleichen Namens $r : \mathbb{R}^n \rightarrow S^{n-1}$. Nun folgt

$$\begin{array}{ccccc} H^{n-1}(S^{n-1}) & \xrightarrow{r^*} & H^{n-1}(\mathbb{R}^n) & \xrightarrow{\text{incl}^*} & H^{n-1}(S^{n-1}) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ & & 0 & & \\ \parallel & \swarrow & \searrow & & \parallel \\ \mathbb{R} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{R} & & \mathbb{R} \end{array}$$

Das ist ein Widerspruch. □

50.9 Definition (Abbildungsgrad)

Seien M, N zusammenhängende, kompakte und orientierte Mannigfaltigkeiten von gleicher Dimension m und sei $f : M \rightarrow N$ glatt. Der **ABBILDUNGSGRAD** $\text{deg } f \in \mathbb{R}$ sei durch folgendes Diagramm definiert:

$$\begin{array}{ccc} H^m(M) & \xleftarrow{H^m(f)} & H^m(N) \\ f \downarrow \cong & & f \downarrow \cong \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{\text{deg } f} & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\text{deg } f \cdot t \longleftarrow t$$

wobei

$$\deg f \cdot \int [\omega] = \deg f \cdot \int \omega = \int H^m(f)[\omega] := \int [f^*\omega] = \int f^*\omega.$$

Falls M und N orientierte aber nicht notwendig kompakte Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension m sind und $f : M \rightarrow N$ glatt und proper (d.h. die Urbilder kompakter Mengen sind kompakt) ist, so verallgemeinern wir den ABBILDUNGSGRAD $\deg f \in \mathbb{R}$ durch

$$\begin{array}{ccc} H_c^m(M) & \xleftarrow{H_c^m(f)} & H_c^m(N) \\ f \downarrow \cong & & f \downarrow \cong \\ \mathbb{R} & \xleftarrow{\deg f} & \mathbb{R} \end{array}$$

$$\deg f \cdot t \longleftarrow t$$

Beachte dabei, daß $f^* : \Omega_c^k(N) \rightarrow \Omega_c^k(M)$ für properes f wohldefiniert ist und somit auch $H_c^k(f) : H_c^k(N) \rightarrow H_c^k(M)$.

50.16 Proposition.

Sei $f : M \rightarrow N$ eine propre glatte Abbildung zwischen zusammenhängenden orientierten m -dimensionalen Mannigfaltigkeiten und $y \in N$ ein regulärer Wert von f . Dann ist

$$\deg f = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \text{sign}_x f \in \mathbb{Z},$$

wobei

$$\text{sign}_x f := \begin{cases} +1 & \text{falls } T_x f : T_x M \rightarrow T_y N \text{ orientierungserhaltend,} \\ -1 & \text{falls } T_x f : T_x M \rightarrow T_y N \text{ orientierungsvertauschend ist.} \end{cases}$$

Beachte, daß nach dem Theorem [21.17](#) von Sard so ein regulärer Wert y immer existiert und weil f proper ist, ist $f^{-1}(y)$ endlich.

Beweis. Sei $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Wir wählen paarweise disjunkte offene Koordinatenumgebungen U_i von x_i , s.d. $f : U_i \rightarrow f(U_i)$ ein Diffeomorphismus ist. Sei $W \subseteq \bigcup_i f(U_i)$ eine kompakte Umgebung von y . Dann ist $W' := f^{-1}(W) \setminus \bigcup_i U_i \subseteq M \setminus f^{-1}(y)$ kompakt und somit $f(W')$ abgeschlossen und enthält nicht y . Sei $V \subseteq W \setminus f(W') \subseteq \bigcup_i f(U_i)$ eine Umgebung von y . Dann ist

$$f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(V) \subseteq f^{-1}(W \setminus f(W')) \subseteq f^{-1}(W) \setminus f^{-1}(f(W')) \subseteq f^{-1}(W) \setminus W' \subseteq \bigcup_i U_i,$$

und indem wir U_i durch $f^{-1}(V) \cap U_i$ ersetzen dürfen wir o.B.d.A. $f^{-1}(V) = \bigcup_i U_i$ und $f(U_i) \subseteq f(f^{-1}(V)) \subseteq V$ annehmen und wenn wir nun V durch $\bigcup_i f(U_i)$ ersetzen gilt zusätzlich $f(U_i) = V$.

Sei nun $w \in \Omega_c^m(N)$ mit $\text{Trg } w \subseteq V$ und $\int_M w = 1$. Dann ist $\text{Trg } f^*(w) \subseteq \bigcup_i U_i$ und

$$\int_M f^*w = \sum_i \int_{U_i} f^*w = \sum_i \text{sign}_{x_i} f \cdot \int_{f(U_i)} w = \sum_i \text{sign}_{x_i} f \cdot \int_M w. \quad \square$$

50.10 Folgerung.

1. $\deg(f \circ g) = \deg(f) \cdot \deg(g)$.
2. $f \sim g$ zwischen kompakten Mannigfaltigkeiten $\Rightarrow \deg f = \deg g$.

3. f ist Diffeomorphismus $\Rightarrow \deg f = \pm 1$;
 Weiters ist $\deg f = 1 \Leftrightarrow f$ orientierungserhaltend ist.
 4. $\deg f \neq 0 \Rightarrow f$ ist surjektiv.

Beweis. (1) da $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$.

(2) da dann $H^k(f) = H^k(g)$ nach [44.3.2](#).

(3) folgt aus (1) unter Verwendung von $\deg f \in \mathbb{Z}$ nach [50.16](#).

(4) Sei f nicht surjektiv. Dann ist $\deg(f) = 0$ nach [50.16](#), da jedes $y \in N \setminus f(M)$ regulärer Wert ist. Direkt sieht man das auch, indem man $\omega \in \Omega^m(N)$ so wählt, daß $\text{Trg } \omega \subseteq N \setminus f(M)$ und $\int_N \omega = 1$. Also ist $\deg f = \deg f \cdot \int_M \omega = \int_M f^* \omega = \int_M 0 = 0$. \square

50.11 Igelsatz.

Sei $\xi \in \mathfrak{X}(S^{2n})$. Dann gibt es ein $x \in S^{2n}$ mit $\xi(x) = 0$.

Beweis. Indirekt: Sei $\xi(x) \neq 0$ für alle x . Dann gibt es eine Homotopie zwischen Identität und Antipodalabbildung σ (dazu verbinden wir x mit $-x$ längs des Großkreises in Richtung $\xi(x)$) und somit folgt $1 = \deg(\text{id}) = \deg(\sigma) = -1$ (siehe [50.7](#)), ein Widerspruch. \square

50.17 Proposition.

Für alle $0 \leq k < n$ ist $H_c^k(\mathbb{R}^n) = \{0\}$.

Beweis. ($k = 0$) ist offensichtlich, denn jedes $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $df = 0$ muß konstant und somit gleich 0 sein.

($0 < k < n$) Es sei $\omega \in \Omega_c^k(\mathbb{R}^n)$ mit $d\omega = 0$. Nach dem Poincaré-Lemma existiert ein $\eta \in \Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ mit $d\eta = \omega$. Sei B ein abgeschlossener Ball mit $\text{Trg } \omega \subseteq B$. Für $k = 1$ ist also η außerhalb B konstant, sagen wir c , und somit $\eta - c \in \Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ mit $d(\eta - c) = d\eta = \omega$. Ist $k > 1$ so ist jedenfalls $\eta|_{\mathbb{R}^n \setminus B}$ geschlossen und, wegen $\mathbb{R}^n \setminus B \cong \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und $H^{k-1}(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \cong H^{k-1}(S^{n-1}) = \{0\}$ nach [44.5.13](#), existiert ein $\lambda \in \Omega_c^{k-2}(\mathbb{R}^n \setminus B)$ mit $d\lambda = \eta - c$. Sei $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ mit $f = 1$ auf $\mathbb{R}^n \setminus 2B$ und $f = 0$ auf einer Umgebung von B . Dann existiert $f\lambda \in \Omega_c^{k-2}(\mathbb{R}^n)$ und weiters hat $\eta - d(f\lambda) \in \Omega_c^{k-1}(\mathbb{R}^n)$ kompakten Träger in $2B$ und

$$\omega = d\eta = d(\eta - d(f\lambda)). \quad \square$$

50.18 Die Mayer-Vietoris Sequenz für Kohomologie mit kompakten Träger.

Sei $M = U \cup V$ mit $U, V \subseteq M$ offen, dann existieren lineare Abbildungen δ_k , die die folgende lange Sequenz exakt machen:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_c^k(U \cap V) \xrightarrow{(j_U^* - j_V^*)} H_c^k(U) \oplus H_c^k(V) \xrightarrow{i_U^* + i_V^*} H_c^k(U \cup V) \xrightarrow{\delta_k} \\ \xrightarrow{\delta_{k+1}} H_c^{k+1}(U \cap V) \rightarrow H_c^{k+1}(U) \oplus H_c^{k+1}(V) \rightarrow H_c^{k+1}(U \cup V) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

mit den Inklusionen $i_U : U \hookrightarrow U \cup V$, $i_V : V \hookrightarrow U \cup V$, $j_U : U \cap V \hookrightarrow U$ und $j_V : U \cap V \hookrightarrow V$ wobei die Abbildungen i_U^* , j_U^* , etc. durch Fortsetzen mit 0 gegeben sind.

Beweis. Wegen [44.4](#) genügt es die Exaktheit von

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(U \cap V) \rightarrow \Omega_c^k(U) \oplus \Omega_c^k(V) \rightarrow \Omega_c^k(U \cup V) \rightarrow 0$$

zu zeigen. Offensichtlich ist die erste Abbildung injektiv. Die zweite ist surjektiv, denn $\omega = h_U \omega + h_V \omega$, wobei $\{h_U, h_V\}$ eine Partition der 1 sei, welche $\{U, V\}$ untergeordnet ist. Die Zusammensetzung ist offensichtlich 0, und falls $i'_U(\omega_1) + i'_V(\omega_2) = 0$ ist, so ist $\text{Trg } \omega_1 = \text{Trg}(i'_U \omega_1) = \text{Trg}(i'_V \omega_2) = \text{Trg } \omega_2$, also $\omega := \omega_1|_{U \cap V} \in \Omega_c^k(U \cap V)$ und $j'_U(\omega) = \omega_1$ und $j'_V(\omega) = -\omega_2$. \square

50.35 Bemerkung.

Die Kohomologie H_c^* mit kompakten Träger ist viel schwerer auszurechnen als H^* , da das Homotopie-Axiom für sie nicht gilt. Z.B. ist \mathbb{R}^m Homotopie-äquivalent zu $\{0\}$ und $H_c^0(\{0\}) = H^0(\{0\}) = \mathbb{R}$ aber $H_c^0(\mathbb{R}^m) = \{0\}$. Oder $H_c^2(S^1 \times \mathbb{R}) = \mathbb{R}$ da der Zylinder $S^1 \times \mathbb{R}$ 2-dimensional orientierbar ist, aber $H_c^2(S^1) = H^2(S^1) = \{0\}$.

50.19 Theorem. Die exakte Sequenz eines Paares.

Sei $N \subseteq M$ eine kompakte Teilmannigfaltigkeit. Dann existiert eine lange exakte Sequenz in der Kohomologie:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_c^k(M \setminus N) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H_c^k(N) \xrightarrow{\delta_k} \\ \xrightarrow{\delta_k} H_c^{k+1}(M \setminus N) \rightarrow H_c^{k+1}(M) \rightarrow H_c^{k+1}(N) \rightarrow \dots \end{aligned}$$

Beweis. Beachte, daß

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(M \setminus N) \hookrightarrow \Omega_c^k(M) \xrightarrow{\text{incl}^*} \Omega_c^k(N) \rightarrow 0$$

nicht exakt bei $\Omega_c^k(M)$ ist, denn $\text{Ker } \text{incl}^*$ enthält alle $\omega \in \Omega_c^k(M)$ welche auf N verschwinden, während das Bild des Erweiterungsoperators $\Omega_c^k(M \setminus N) \hookrightarrow \Omega_c^k(M)$ aus jenen $\omega \in \Omega_c^k(M)$ besteht, welche auf einer Umgebung von N verschwinden. Deshalb ersetzen wir $\Omega_c^k(N) = \Omega^k(N)$ durch $\Omega^k(N \subseteq M)$, den Raum der Keime auf $N \subseteq M$ von glatten k -Formen. Also $\Omega^k(N \subseteq M) := \bigcup_{U \supseteq N} \Omega^k(U) / \sim$, wobei U die offenen Umgebungen von N in M durchläuft und $\omega_1 \sim \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 = \omega_2$ auf einer Umgebung von N in M .

Dann ist

$$0 \rightarrow \Omega_c^k(M \setminus N) \hookrightarrow \Omega_c^k(M) \xrightarrow{\text{incl}^*} \Omega^k(N \subseteq M) \rightarrow 0$$

offensichtlich exakt.

Aus [44.4](#) folgt nun die Existenz einer langen exakten Sequenz in der Kohomologie. Es folgt das Resultat, da $H(\Omega^*(N \subseteq M)) \cong H(N)$: In der Tat sei $p : M \supseteq U \rightarrow N$ eine tubuläre Umgebung nach [62.9](#). Wenn wir eine Metrik g auf $p : U \rightarrow N$ wählen, so sind die Mengen $U_n := \{\xi : g(\xi, \xi) \leq \frac{1}{n^2}\}$ eine Umgebungsbasis von N und $0^* : H^k(U_i) \rightarrow H^k(N)$ ein Isomorphismus, da U_n Homotopie-äquivalent zu N ist. Einschränken $\Omega^k(N \supseteq M) \rightarrow \Omega^k(N)$ induziert eine Abbildung $H^k(\Omega^*(N \subseteq M)) \rightarrow H^k(N)$. Diese ist surjektiv, denn die Zusammensetzung mit $H^k(U_i) \rightarrow H^k(\Omega^*(N \subseteq M))$ ist ein Isomorphismus. Sie ist auch injektiv, denn sei $[\omega] \in \Omega^k(N \subseteq M)$ geschlossen mit $\omega \in \Omega^k(U_i)$ und $\omega|_N \in \Omega^k(N)$ exakt. Dann ist $0 = [\omega] \in H^k(U_i)$, da $\text{incl}^*([\omega]) = [\omega|_N] = 0$, also ω exakt und damit auch $[\omega] \in \Omega^k(N \subseteq M)$ exakt, also verschwindet die Kohomologiekategorie in $H^k(\Omega^*(N \subseteq M))$. \square

50.20 Folgerung.

Sei M eine Mannigfaltigkeit mit kompakten Rand ∂M . Dann existiert eine lange exakte Sequenz:

$$\begin{aligned} \dots \rightarrow H_c^k(M \setminus \partial M) \rightarrow H_c^k(M) \rightarrow H_c^k(\partial M) \xrightarrow{\delta_k} \\ \xrightarrow{\delta_k} H_c^{k+1}(M \setminus \partial M) \rightarrow H_c^{k+1}(M) \rightarrow H_c^{k+1}(\partial M) \rightarrow \dots \end{aligned} \quad \square$$

50.33 Folgerung.

$$H_c^k(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = m \\ 0 & \text{für } k \neq m > 0 \end{cases}.$$

Beweis. Wir wenden [50.20](#) auf den abgeschlossenen Einheitsball $M \subseteq \mathbb{R}^m$ an. Dann ist $M \setminus \partial M \cong \mathbb{R}^m$, $\partial M = S^{m-1}$ und $H_c^k(M) = H^k(M) \cong H^k(\{*\}) = \{0\}$ für $k > 0$ und somit liefert [50.20](#) für $k > 0$ die exakte Sequenz

$$0 \rightarrow H^k(S^{m-1}) \rightarrow H_c^{k+1}(\mathbb{R}^m) \rightarrow 0$$

mit Anfang

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \rightarrow H^0(S^{m-1}) \rightarrow H_c^1(\mathbb{R}^m) \rightarrow 0$$

wegen $H_c^0(\mathbb{R}^m) = \{0\}$, siehe den Beweis von [50.17](#). Daraus folgt

$$H_c^k(\mathbb{R}^m) = H^{k-1}(S^{m-1}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } k = m > 1 \\ \{0\} & \text{für } 1 < k \neq m \end{cases}$$

und

$$H_c^1(\mathbb{R}^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{für } m = 1 \\ \{0\} & \text{für } m > 1. \quad \square \end{cases}$$

50.36 Bemerkung.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ eine kompakte zusammenhängende Hyperfläche. Wir wollen zuerst zeigen, daß $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$ mindestens 2 Zusammenhangskomponenten besitzt. Sei dazu vorerst M orientiert. Für $p \notin M$ ist die Windungszahl von M bzgl. p definiert durch

$$w_M(p) := \deg(r_p|_M), \quad \text{wobei } r_p : x \mapsto \frac{1}{\|x-p\|}(x-p), \quad M \rightarrow S^m.$$

Es ist w_M konstant auf den Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$: Sei nämlich $t \mapsto p(t)$ eine Kurve in $\mathbb{R}^{m+1} \setminus M$, dann ist $(t, x) \mapsto r_{p(t)}(x)$ eine Homotopie und somit $t \mapsto w_M(p(t))$ konstant. Bis auf einen Diffeomorphismus (mit kompakten Träger) ist $0 \in M$ und M nahe 0 durch eine Hyperebene v^\perp gegeben. Wir behaupten, daß $w_p(M) - w_q(M) = \pm 1$ für p, q nahe 0 auf verschiedenen Seiten von v^\perp . In der Tat ist $t \mapsto r_{tv}|_{M \setminus \{0\}}$ eine Homotopie und für $x \in v^\perp$ mit $\|x\| \leq \delta$ ist das Bild eine Polkappe um v die für $t = 0$ zum Äquator degeneriert und dann in die andere Polkappe mutiert.



Erweitern wir diese Homotopie indem wir die geographische Breite des Bildes nahe dem Pol v konstant halten (d.h. ϑ durch $\pi/2 + h(\vartheta)(\pi/2 - \vartheta)$ ersetzen) so werden Punkte nahe dem Pol $-v$ nicht mehr getroffen. Sei nun y nahe $-v$ ein regulärer Wert für $r_{\pm v}$. Dann besitzt der Endwert der Homotopie ein Urbild x nahe 0 weniger als r_v und somit ist $w_M(-v) = w_M(v) + \text{sign}_x(r_{-v}) = w_M(v) \pm 1$.

Sei nun M und N kompakt zusammenhängend aber nicht notwendig orientierbar. Wir definieren den mod-2 Grad von $f : M \rightarrow N$ durch $\deg_2(f) := \sum_{x \in f^{-1}(y)} 1 \in \mathbb{Z}_2 := \mathbb{Z}/(2\mathbb{Z})$, wobei y ein regulärer Wert von f sei.

Wir müssen zeigen, daß diese Anzahl modulo 2 nicht von der Wahl des regulären Werts abhängt. Sei dazu f_0 und f_1 glatt homotop vermöge $H : [0, 1] \times M \rightarrow N$. O.B.d.A. ist $H(t, x) = f_i(x)$ für t nahe $i \in \{0, 1\}$ (Ersetze H durch $(t, x) \mapsto H(h(t), x)$ mit h konstant nahe 0 und nahe 1). Nach dem Beweis von [50.16](#) sind alle Werte nahe regulären Werten selbst regulär und haben die gleich Anzahl von

Urbilder. Somit dürfen wir annehmen, daß y ein regulärer Wert von H somit auch für f_0 und f_1 ist. Dann ist $H^{-1}(y)$ eine 1-dimensionale Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R} \times M$ die $\{0, 1\} \times M$ transversal schneidet. Die Spur $H^{-1}(y) \cap [0, 1] \times M$ ist somit eine disjunkte Vereinigung von endlich vielen 1-dimensionalen Mannigfaltigkeiten mit Rand und somit liegt eine gerade Anzahl von Randpunkten vor. Die Randpunkte sind aber gerade $\{(i, x) : i \in \{0, 1\}, f_i(x) = y\}$, also ist

$$\sum_{x \in f_0^{-1}(y)} 1 \equiv - \sum_{x \in f_1^{-1}(y)} 1 \equiv \sum_{x \in f_1^{-1}(y)} 1 \pmod{2}$$

Sind nun y_0 und y_1 beides reguläre Werte von f , dann existiert eine Diffeotopie h die y_0 auf y_1 abbildet (lokal geht das indem wir ein Vektorfeld $\xi = f \cdot \frac{\partial}{\partial u^1}$ mit kompakten Träger wählen und den Fluß Fl_t^ξ betrachten) und somit ist $h_1 \circ f \sim f$ und y_1 regulärer Wert von $h_1 \circ f$ und von f , also $|f^{-1}(y_1)| = |(h_1 \circ f)^{-1}(y_1)| = |f^{-1}(y_0)|$.

Wenn wir die Windungszahl $w_M(p)$ nun wie zuvor aber mit \deg_2 anstelle von \deg definieren, so können wir den Beweis wie oben führen und erhalten $w_p(M) \neq w_q(M)$ für Punkte lokal auf verschiedenen Seiten von M .

50.22 Proposition.

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ eine kompakte zusammenhängende Hyperfläche. Dann ist M orientierbar und $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ hat genau 2 Zusammenhangskomponenten und M ist der Rand beider.

Beweis. Die Kohomologiesequenz des Paares $M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ ist

$$\underbrace{H_c^n(\mathbb{R}^{n+1})}_{=0} \rightarrow H^n(M) \xrightarrow{\delta} H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1} \setminus M) \rightarrow \underbrace{H_c^{n+1}(\mathbb{R}^{n+1})}_{\cong \mathbb{R}} \rightarrow \underbrace{H^{n+1}(M)}_{=0}$$

Somit ist $\dim H^n(M) + 1$ die Anzahl der (mindestens 2) Zusammenhangskomponenten von $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$. Also ist $\dim H^n(M) \geq 1$ und damit M orientierbar, also $\dim H^n(M) = 1$ und damit hat $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ genau $2 = \dim H^n(M) + 1$ Zusammenhangskomponenten.

Da nach obigen Argumenten nahe $x \in M$ Punkte in jeder Komponente sind, ist M der Rand jeder Komponente. \square

50.23 Folgerung. Verallgemeinerter Jordanscher Kurvensatz.

Sei $S^n \cong M \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Dann hat $\mathbb{R}^{n+1} \setminus M$ genau zwei Zusammenhangskomponenten und M ist der Rand beider. \square

50.24 Folgerung.

Weder die projektive Ebene noch die Klein'sche Flasche läßt sich als Teilmannigfaltigkeit von \mathbb{R}^3 realisieren.

Beweis. Andernfalls wären sie nach 50.22 orientierbar. \square

50.34 Beispiel.

Selbst für orientierbare zusammenhängende 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten M muß $H^1(M)$ nicht endlich dimensional sein. Sei z.B. $U := \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{R}^2$ und $V \subseteq \mathbb{C}$ die Vereinigung der offenen Bälle um alle $z \in \mathbb{Z}$ mit Radius $\frac{1}{3}$. Dann ist $U \cap V \sim \bigcup_{\mathbb{Z}} S^1$ und somit liefert die Mayer-Vietoris Sequenz

$$0 \rightarrow H^1(U) \oplus \{0\} \rightarrow H^1(U \cap V) \rightarrow 0$$

und somit $H^1(U) \cong H^1(U \cap V) \cong H^1(\bigsqcup_{\mathbb{Z}} S^1) = \prod_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$.

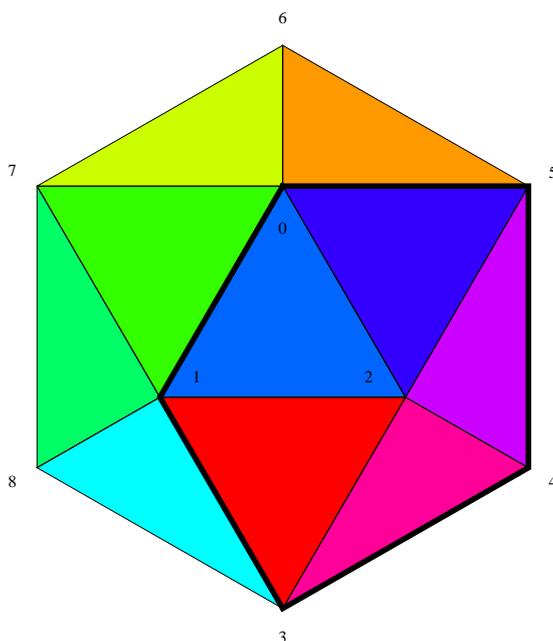
50.25 Definition.

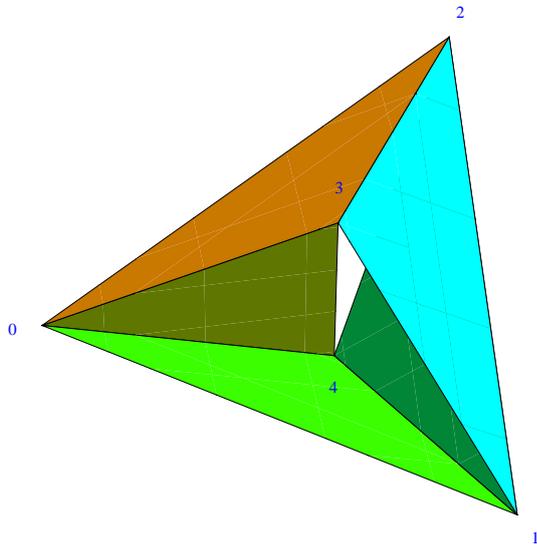
Analog zur Poincaré-Dualität $H^k(M) \rightarrow H^{m-k}(M)^*$ für kompakte zusammenhängende orientierbare M können wir $H^k(M) \rightarrow H_c^{m-k}(M)^*$ für allgemeine zusammenhängende orientierbare M definieren. Dazu sei das Cup-Produkt $\cup : H^k(M) \times H_c^j(M) \rightarrow H_c^{k+j}(M)$ definiert durch $[\alpha] \cup [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$ und die Poincaré-Dualität $H^k(M) \rightarrow H_c^{m-k}(M)^*$ die vermöge $H_c^m(M) \cong \mathbb{R}$ induzierte lineare Abbildung.

50.26 Proposition.

Sei M eine zusammenhängende orientierte Mannigfaltigkeit. Dann ist die Poincaré-Dualität ein Isomorphismus $H^k(M) \rightarrow H_c^{m-k}(M)^*$.

Eine Triangulierung ist eine endliche Familie von diffeomorphen Bildern $\{\sigma_i : i\}$ des standard m -Simplex $\Delta_m := \{x \in \mathbb{R}^{m+1} : \forall i : x^i \geq 0, \sum_i x^i = 1\}$, s.d. $\sigma_i \cap \sigma_j \neq \emptyset \Rightarrow \sigma_i \cap \sigma_j$ ist eine k -Seite von σ_i und von σ_j , wobei eine k -Seite das Bild der Teilmenge von Δ_m ist, die durch 0-Setzen von $m - k$ vielen Koordinaten entsteht. Man kann mit einigem Aufwand zeigen, daß jede glatte Mannigfaltigkeit eine Triangulierung besitzt, siehe [74] oder [99].



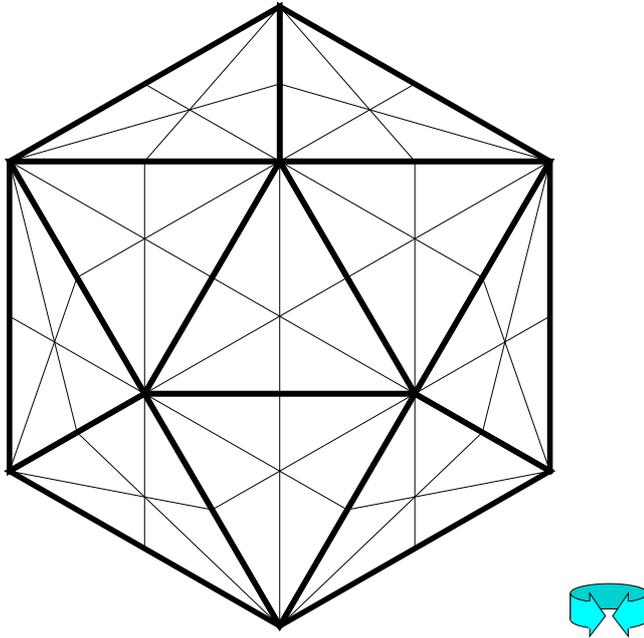


Beweis (für triangulierbare Mannigfaltigkeiten). Falls $M = U \cup V$ ist mit offenen U und V , s.d. der Satz für U , V und $U \cap V$ gilt, so folgt aus der Mayer-Vietoris Sequenz und der dualen der Mayer-Vietoris Sequenz für kompakte Träger

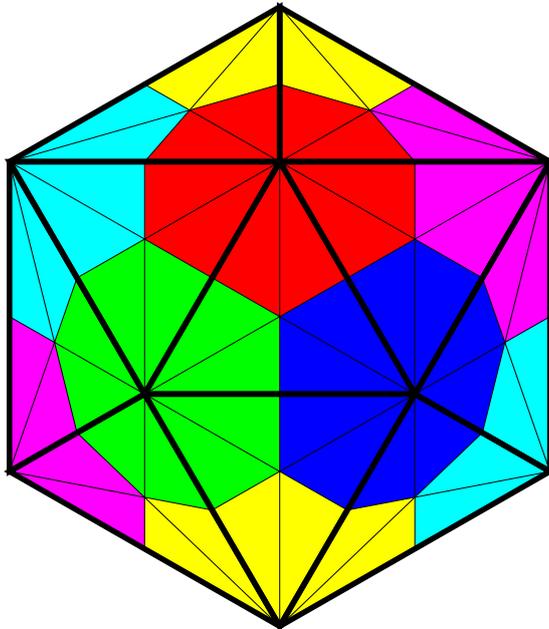
$$\begin{array}{ccccccccc}
 H^{k-1}(U) \oplus H^{k-1}(V) & \rightarrow & H^{k-1}(U \cap V) & \rightarrow & H^k(M) & \rightarrow & H^k(U) \oplus H^k(V) & \rightarrow & H^k(U \cap V) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H_c^{l+1}(U)^* \oplus H_c^{l+1}(V)^* & \rightarrow & H_c^{l+1}(U \cap V)^* & \rightarrow & H_c^l(M)^* & \rightarrow & H_c^l(U)^* \oplus H_c^l(V)^* & \rightarrow & H_c^l(U \cap V)^*
 \end{array}$$

mittels nachstehenden 5-er Lemma [5.37](#) der Satz für M selbst, denn wie Aufgabe [EX30](#) zeigt kommutiert das Diagramm und die duale einer exakten Sequenz ist (wie man leicht zeigt) ebenfalls exakt.

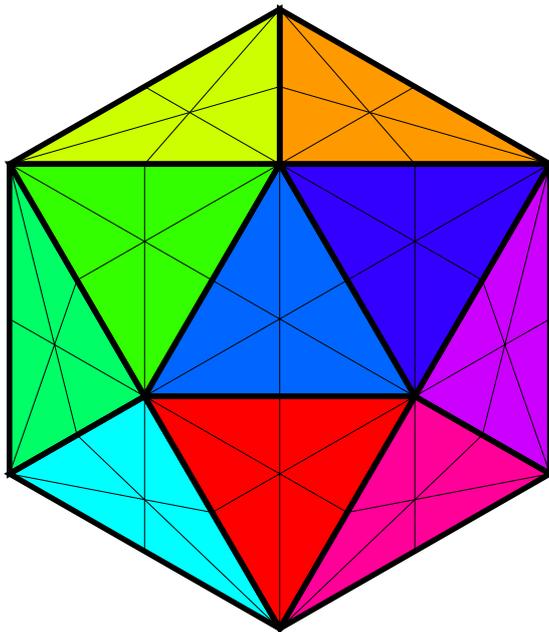
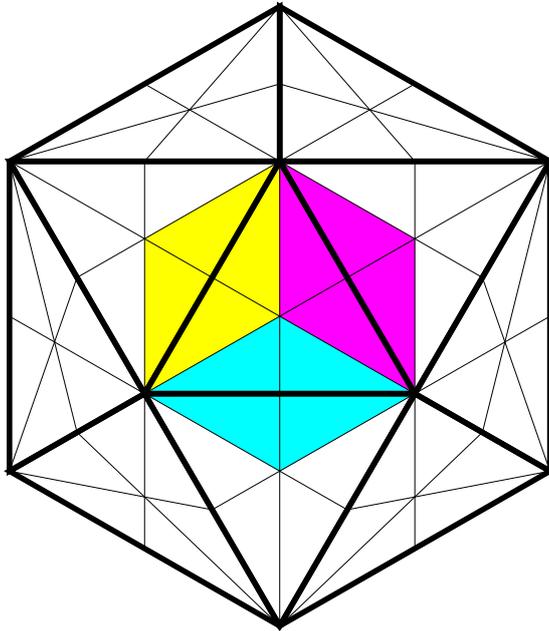
Wir wählen auf jedem Seitensimplex der Simplexe der Triangulierung einen “inneren” Punkt. Rekursiv definieren wir nun disjunkte Vereinigungen U_k offener kontrahierbarer Teilmengen von M wie folgt: Es sei U_0 die disjunkte Vereinigung von kontrahierbaren Umgebungen jeder Ecke, die keinen der anedern inneren Punkte enthält Die Menge U_k bestehe dann aus der disjunkten Vereinigung von offenen kontrahierbaren Umgebungen der nicht-leeren Menge $\sigma \setminus U_{k-1}$. Explizit kann man das erreichen, indem man alle Simplexe betrachtet, die als Ecken die zuvor gewählten inneren Punkte haben, und zwar von aufsteigend geordneten Seiten eines Simplex der Triangulierung.



Nun wählt man U_0 als die Vereinigung aller solcher “offener” Simplexe die jeweils eine der ursprünglichen Ecken als Ecke haben.



Und analog nimmt man für U_k die Vereinigung aller solcher “offener” Simplexe die jeweils einen der inneren Punkte eines k -Simplexes als Ecke haben.



Offensichtlich ist $\sigma \subseteq \bigcup_{j \leq k} U_j$ für jeden (abgeschlossenen) k -Simplex σ und somit $\bigcup_{k=0}^m U_k = M$. Weiters ist $U_k \cong \bigsqcup_{\alpha_k} \mathbb{R}^m$ und $U_k \cap \bigcup_{j < k} U_j \cong \bigsqcup_{\alpha_k} S^{k-1} \times \mathbb{R}^{m-k+1}$.

Klarerweise gilt die Poincaré-Dualität für \mathbb{R}^m (denn $H_0(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R} = H_c^m(\mathbb{R}^m)^*$ und 0 sonst) und mittels Induktion folgt, daß sie auch für $S^m \times \mathbb{R}^k$ gilt (Siehe Aufgabe [EX29](#)). Da $H^k(\bigsqcup_{j \in J} M_j) \cong \prod_{j \in J} H^k(M_j)$ und $H_c^k(\bigsqcup_{j \in J} M_j) \cong \bigoplus_{j \in J} H_c^k(M_j)$ gilt folgt sie auch für $U_k \cap \bigcup_{j < k} U_j$ und somit mittels Induktion für $\bigcup_{j \leq k} U_j$ und damit auch für $M = \bigcup_{j \leq \dim(M)} U_j$. \square

5.37 5'er Lemma.

Sei

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & A_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & A_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & A_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & A_5 \\
 f_1 \downarrow \cong & & f_2 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow \cong & & f_5 \downarrow \cong \\
 B_1 & \xrightarrow{\psi_1} & B_2 & \xrightarrow{\psi_2} & B_3 & \xrightarrow{\psi_3} & B_4 & \xrightarrow{\psi_4} & B_5
 \end{array}$$

ein kommutatives Diagramm mit exakten horizontalen Zeilen. Falls alle bis auf den mittleren vertikalen Pfeil Isomorphismen sind, so ist es auch dieser.

Beweis.

(f_3 ist injektive)

$$\begin{aligned}
 f_3 a_3 = 0 &\Rightarrow 0 = \psi_3 f_3 a_3 = f_4 \varphi_3 a_3 \\
 &\stackrel{f_4 \text{ inj.}}{\Rightarrow} \varphi_3 a_3 = 0 \\
 &\stackrel{\text{exakt bei } A_3}{\Rightarrow} \exists a_2 : a_3 = \varphi_2 a_2 \\
 &\Rightarrow 0 = f_3 a_3 = f_3 \varphi_2 a_2 = \psi_2 f_2 a_2 \\
 &\stackrel{\text{exakt bei } B_2}{\Rightarrow} \exists b_1 : f_2 a_2 = \psi_1 b_1 \\
 &\stackrel{f_1 \text{ surj.}}{\Rightarrow} \exists a_1 : b_1 = f_1 a_1 \\
 &\Rightarrow f_2 a_2 = \psi_1 f_1 a_1 = f_2 \varphi_1 a_1 \\
 &\stackrel{f_2 \text{ inj.}}{\Rightarrow} a_2 = \varphi_1 a_1 \\
 &\stackrel{\text{exakt bei } A_2}{\Rightarrow} a_3 = \varphi_2 a_2 = \varphi_2 \varphi_1 a_1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 a_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & a_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & a_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & 0 & \bullet \\
 f_1 \downarrow \cong & & f_2 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow \cong & \\
 b_1 & \xrightarrow{\psi_1} & f_2(a_2) & \xrightarrow{\psi_2} & 0 & \xrightarrow{\psi_3} & 0 & \bullet
 \end{array}$$

(f_3 ist surjektiv)

$$\begin{aligned}
 b_3 &\stackrel{f_4 \text{ surj.}}{\Rightarrow} \exists a_4 : f_4 a_4 = \psi_3 b_3 \\
 &\stackrel{\text{exakt bei } B_4}{\Rightarrow} f_5 \varphi_4 a_4 = \psi_4 f_4 a_4 = \psi_4 \psi_3 b_3 = 0 \\
 &\stackrel{f_5 \text{ inj.}}{\Rightarrow} \varphi_4 a_4 = 0 \\
 &\stackrel{\text{exakt bei } A_4}{\Rightarrow} \exists a_3 : a_4 = \varphi_3 a_3 \\
 &\Rightarrow \psi_3 f_3 a_3 = f_4 \varphi_3 a_3 = f_4 a_4 = \psi_3 b_3 \\
 &\stackrel{\text{exakt bei } B_3}{\Rightarrow} \exists b_2 : b_3 - f_3 a_3 = \varphi_2 b_2 \\
 &\stackrel{f_2 \text{ surj.}}{\Rightarrow} \exists a_2 : b_2 = f_2 a_2 \\
 &\Rightarrow b_3 = f_3 a_3 + \psi_2 b_2 = f_3 a_3 + \psi_2 f_2 a_2 = f_3(a_3 + \varphi_2 a_2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \bullet & a_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & a_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & a_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & \varphi_4 a_4 \\
 & f_2 \downarrow \cong & & f_3 \downarrow & & f_4 \downarrow \cong & & f_5 \downarrow \cong \\
 \bullet & b_2 & \xrightarrow{\psi_2} & b_3 & \xrightarrow{\psi_3} & \psi_3 b_3 & \xrightarrow{\psi_4} & 0 & \square
 \end{array}$$

50.28 Proposition.

Sei \mathcal{K} eine Triangulierung der kompakten Mannigfaltigkeit m und α_i die Anzahl der

i -Simplexe von \mathcal{K} . Dann ist

$$\chi(M) = \sum_i (-1)^i \alpha_i.$$

Beweis. Wir verwenden die im Beweis von [50.26](#) konstruierten offene Mengen $U_k \subseteq M$, welche disjunkte Vereinigung von α_k vielen Mengen diffeomorph zu \mathbb{R}^m sind und für die $U_k \cap \bigcup_{j < k} U_j$ disjunkte Vereinigung α_k vieler zu $S^{k-1} \times \mathbb{R}^{m-k+1} \sim S^{k-1}$ diffeomorpher Mengen sind. Somit gilt nach [44.5.8](#) für die Euler-Charakteristik:

$$\begin{aligned} \chi\left(\bigcup_{j < k} U_j\right) + \alpha_k &= \chi\left(\bigcup_{j < k} U_j\right) + \chi(U_k) = \chi\left(\bigcup_{j \leq k} U_j\right) + \chi\left(U_k \cap \bigcup_{j < k} U_j\right) \\ &= \chi\left(\bigcup_{j \leq k} U_j\right) + (1 + (-1)^{k-1})\alpha_k. \end{aligned}$$

Also

$$\chi\left(\bigcup_{j \leq k} U_j\right) = \chi\left(\bigcup_{j < k} U_j\right) + (-1)^k \alpha_k$$

und damit

$$\chi(M) = \chi\left(\bigcup_{j \leq m} U_j\right) = \chi(\emptyset) + \sum_{j \leq m} (-1)^j \alpha_j = \sum_{j \leq m} (-1)^j \alpha_j. \quad \square$$

50.27 Definition. Thom- und Euler-Klasse eines Vektorbündels.

Sei $p : E \rightarrow M$ ein orientiertes k -Ebenenbündel über einer m -dimensionalen kompakten orientierten zusammenhängenden Mannigfaltigkeit M . Das Cup-Produkt

$$\cup : H^m(E) \times H_c^k(E) \rightarrow H_c^{m+k}(E) \cong \mathbb{R}, \quad [\alpha] \cup [\beta] := [\alpha \wedge \beta]$$

induziert die Poincaré-Dualität

$$H_c^k(E) \xrightarrow{\cong} H^m(E)^*, \quad [\beta] \mapsto ([\alpha] \mapsto \int_E \alpha \wedge \beta).$$

Da $0 : M \hookrightarrow E$ ein Deformationsretrakt ist, ist $H^m(M) \cong H^m(E)$, vermöge $[\alpha] \mapsto [p^*(\alpha)]$ und somit

$$H_c^k(E) \cong H^m(E)^* \cong H^m(M)^*$$

vermöge

$$[\beta] \mapsto \left([\alpha] \mapsto \int_E \alpha \wedge \beta\right) \mapsto \left([\gamma] \mapsto \int_E p^*(\gamma) \wedge \beta\right).$$

Es ist $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^* \cong H^m(M)^*$, vermöge $1 \mapsto \int_M (\cdot : H^m(M) \rightarrow \mathbb{R}, [\gamma] \mapsto \int_M \gamma)$. Somit existiert eine eindeutige Klasse $U = [\tau] \in H_c^k(E)$ mit

$$\int_E p^*(\gamma) \wedge \tau = \int_M \gamma \text{ für alle } [\gamma] \in H^m(M),$$

die sogenannte THOM-KLASSE $U(p)$ des k -Ebenenbündels p .

Die EULER-KLASSE $\chi(p) \in H^k(M)$ des k -Ebenenbündels p ist dann als

$$\chi(p) := 0^*(U(p)) = s^*(U(p))$$

definiert, wobei $0 : M \hookrightarrow E$ der 0-Schnitt bzw. s ein beliebiger (klarerweise dazu homotoper) Schnitt von p ist.

Falls $p : E \rightarrow M$ einen nirgends verschwindenden Schnitt s besitzt, so ist $\chi(p) = (c \cdot s)^*(U(p)) = 0$, wenn c so groß gewählt wurde, daß $\text{Bild}(c \cdot s) \cap \text{Trg}(w) = \emptyset$ für $[\tau] = U(p)$.

50.29 Proposition.

Sei M eine zusammenhängende kompakte orientierte m -dimensionale Mannigfaltigkeit und $[\mu] \in H^m(M)$ mit $\int_M \mu = 1$. Sei $p : E \rightarrow M$ ein orientiertes k -Ebenenbündel, E_x seine Faser für $x \in M$ und $j_x : E_x \hookrightarrow E$ die Inklusion.

Dann ist die Thom-Klasse $U(p) = [\tau]$ das eindeutige Element aus $H_c^k(E)$ mit $\int_{E_x} j_x^*(\tau) = 1$ für alle $x \in M$,

Beweis. Es sei $U = [\tau] \in H_c^k(E)$ die Thom-Klasse von p . Sei weiters $\mu \in \Omega^m(M)$ mit $\int_M \mu = 1$, dann ist $\int_E p^*(\mu) \wedge \tau = \int_M \mu = 1$ nach Definition von U . Sei nun $W \cong \mathbb{R}^m$ eine offene Teilmenge von M für welche $E|_W$ trivial ist, also o.B.d.A. $E|_W \cong W \times \mathbb{R}^k$ und $p = \text{pr}_1$ sowie $j_x : v \mapsto (x, v)$. Dann existiert in $K > 0$ mit $\text{Trg}(\tau|_{p^{-1}(W)}) \subseteq W \times \{v : \|v\| < K\}$ und sei vorerst $\text{Trg}(\mu) \subseteq W$. Die Kontraktion von W zu $x \in W$ induziert eine glatte Homotopie $H : W \times \mathbb{R}^k \times I \rightarrow W \times \mathbb{R}^k$ mit $H_0 = \text{id}$ und $H_1 = (\text{const}_x, \text{pr}_2) = j_x \circ \text{pr}_2$. Es gilt $\text{Trg}(H^*\tau) \subseteq H^{-1}(\text{Trg} \tau) \subseteq \{(y, v, t) : \|v\| < K\}$. Damit ist $\text{Trg}(\lambda) \subseteq \{(y, v) : \|v\| < K\}$ für $\lambda := (I_0^1 \circ \iota_\xi \circ H^*)(\tau) \in \Omega(W \times \mathbb{R}^k)$ und damit nach dem Beweis von [44.3.2](#)

$$(j_x \circ \text{pr}_2)^*\tau - \tau = (H_1)^*(\tau) - (H_0)^*(\tau) = d\lambda.$$

Somit ist

$$\int_{W \times \mathbb{R}^k} p^*(\mu) \wedge \tau = \int_{W \times \mathbb{R}^k} \text{pr}_1^* \mu \wedge \text{pr}_2^* j_x^* \tau - \int_{W \times \mathbb{R}^k} \text{pr}_1^* \mu \wedge d\lambda = \int_W \mu \cdot \int_{\mathbb{R}^k} j_x^* \tau,$$

denn $\text{pr}_1^* \mu \wedge d\lambda = \pm d(\text{pr}_1^* \mu \wedge \lambda)$ und damit $\int_{W \times \mathbb{R}^k} \text{pr}_1^* \mu \wedge d\lambda = \pm \int_{W \times \mathbb{R}^k} d(\text{pr}_1^* \mu \wedge \lambda) = 0$. Folglich ist $\int_{\mathbb{R}^k} j_x^* \tau$ unabhängig von $x \in W$ und damit konstant bzgl. $x \in M$. Wir bezeichnen diesen Wert mit $\int_{\mathbb{R}^k} j^* \tau$. Aus $\int_E p^*(\mu) \wedge \tau = 1$ und $\int_M \mu = 1$ folgt $\int_{\mathbb{R}^k} j^* \tau = 1$ nun mittels Partition der 1, d.h. U hat die gewünschte Eigenschaft.

Nun zur Eindeutigkeit: Wegen $H_c^k(E) \cong \mathbb{R}$ gilt $U' = cU$ für jedes andere $U' \in H_c^k(E)$ mit einem $c \in \mathbb{R}$. Hat dieses auch die geforderte Eigenschaft so folgt $j_x^* U' = j_x^*(cU) = c j_x^* U$ und somit folgt $c = 1$ wegen $\int_{E_x} j_x^* U' = 1 = \int_{E_x} j_x^* U$. \square

50.30 Definition.

Sei ξ ein Vektorfeld auf einer offenen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^m$ mit isolierter Nullstelle 0. Dann ist der Index von ξ bei 0 definiert durch

$$\text{ind}_0(\xi) = \deg(r \circ \xi \circ i : S^{m-1} \hookrightarrow U \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \rightarrow S^{m-1}),$$

wobei $r(x) := \frac{1}{\|x\|}x$ und $i : S^{m-1} \hookrightarrow U \setminus \{0\}$ die Einbettung einer kleinen samt ihrem Inneren in U enthaltenen Sphäre ist. Dieser Index ist invariant unter Diffeomorphismen: In der Tat, wenn h ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus mit $h(0) = 0$ ist, dann ist

$$H(x, t) := \begin{cases} \frac{h(tx)}{t} & \text{für } t > 0 \\ h'(0)(x) & \text{sonst} \end{cases}$$

eine glatte Homotopie zwischen h und $h'(0)$, und, da $GL_+(\mathbb{R}^m)$ zusammenhängend ist, ist $h'(0)$ glatt homotop zu id . Somit ist $r \circ \xi \sim r \circ h^* \xi$ auf $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ nahe 0 und damit $\deg(r \circ \xi \circ i) = \deg(r \circ h^* \xi \circ i)$ für $h^* \xi := (Th)^{-1} \circ \xi \circ h$.

Um das auch für nicht-orientierungserhaltende h zu bekommen genügt es speziell $h : (x^1, \dots, x^{m-1}, x^m) \mapsto (x^1, \dots, x^{m-1}, -x^m)$ zu betrachten. Dann ist $h^* \xi = h^{-1} \circ \xi \circ h$ und somit $r \circ h^* \xi \circ i = r \circ h^{-1} \circ \xi \circ h \circ i = h^{-1} \circ r \circ \xi \circ i \circ h$ also $\deg(r \circ h^* \xi \circ i) =$

$$\deg(h^{-1} \circ r \circ \xi \circ i \circ h) \stackrel{\text{50.10.1}}{=} \deg(r \circ \xi \circ i).$$

Das radiale Vektorfeld $x \mapsto x$ hat offensichtlich Index 1 bei 0. Allgemeiner hat ein lineares Vektorfeld ξ am \mathbb{R}^m , welches diagonalisierbar mit k negativen und $m - k$

positiven Eigenwerten ist, Index $(-1)^k$, denn bis auf lineare orientierungserhaltende Isomorphismen ist es von der Form

$$(x_1, \dots, x_m) \mapsto (-x_1, \dots, -x_k, x_{k+1}, \dots, x_m)$$

und hat eingeschränkt auf S^{m-1} Abbildungsgrad $(-1)^k$ (e_m ist regulärer Wert von $\xi \circ i = r \circ \xi \circ i$ mit einzigem Urbild e_m und $\det(T_{e_m} \xi|_{S^{m-1}}) = (-1)^k$).

Für eine Vektorfeld ξ auf einer Mannigfaltigkeit mit isolierter Nullstelle x definieren wir $\text{ind}_x \xi$ als $\text{ind}_0 \bar{\xi}$ für eine Kartendarstellung $\bar{\xi}$ von ξ zentriert bei x .

50.31 Proposition.

Sei M eine kompakte orientierte zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $\mu \in H_c^m(M)$ mit $\int_M \mu = 1$. Sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld mit nur isolierten Nullstellen. Dann ist

$$\chi(\pi_M : TM \rightarrow M) = \left(\sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi \right) \cdot [\mu] \in H^m(M).$$

Beweis. Sei $[\tau] \in H_c^k(E)$ die Thom-Klasse. Wegen $\chi(\pi_M) = \xi^*([\tau])$ müssen wir $\int_M \xi^*(\tau) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi$ zeigen. Sei $\xi^{-1}(0) = \{x_1, \dots, x_k\}$ und (u_i, U_i) bei x_i zentrierte Karten mit $U_i := \{x : \|x\| \leq 1\}$. O.B.d.A. sei $\xi_x \notin \text{Trg } \tau$ für alle $x \notin \bigcup_{i=1}^k u(U_i)$. Dann ist

$$\int_M \xi^*(\tau) = \sum_{i=1}^k \int_{u_i(U_i)} \xi^*(\tau)$$

und es genügt $\int_{u_i(U_i)} \xi^*(\tau) = \text{ind}_{x_i} \xi$ zu zeigen. Der Einfachheit halber lassen wir den Index i im Rest des Beweises weg. Dann ist $TM|_W$ trivial für $W := u_i(U_i)$ und wie im Beweis von [50.29](#) $\text{Trg}(\tau|_{p^{-1}(W)}) \subseteq \{(y, v) : \|v\| \leq 1\}$. Wir haben dort $\text{pr}_2^* j_x^* \tau - \tau = d\lambda$ mit $\text{Trg}(\lambda) \subseteq \{(y, v) : \|v\| \leq 1\}$ gezeigt. Wegen $\xi(y) \notin \text{Trg } \lambda$ für alle $y \in \partial W$ gilt:

$$\int_W \xi^*(\tau) = \int_W \xi^* \text{pr}_2^* j_x^* \tau - \int_W \xi^* d\lambda = \int_W \xi^* \text{pr}_2^* j_x^* \tau - \int_{\partial W} \xi^* \lambda = \int_W \xi^* \text{pr}_2^* j_x^* \tau.$$

Wegen dem Poincaré-Lemma [44.5.6](#) ist $j_x^* \tau = d\rho$ für ein $\rho \in \Omega^{m-1}(\mathbb{R}^m)$. Mit $D := \{v \in \mathbb{R}^m : \|v\| \leq 1\}$ ist

$$\int_{S^{m-1}} \rho = \int_{\partial D} \rho = \int_D d\rho = \int_D j_x^* \tau = \int_{\mathbb{R}^m} j_x^* \tau \stackrel{\text{50.29}}{=} 1.$$

Für $y \in W \setminus \{x\}$ sei $\bar{\xi}(y) := \frac{1}{|\xi(y)|} \xi(y)$. Dann ist $\bar{\xi}|_{\partial W}$ glatt homotop zu $\xi|_{\partial W}$ und somit

$$\begin{aligned} \int_W \xi^* \text{pr}_2^* j_x^* \tau &= \int_W \xi^* \text{pr}_2^* d\rho = \int_{\partial W} \xi^* \text{pr}_2^* \rho = \int_{\partial W} \bar{\xi}^* \text{pr}_2^* \rho = \int_{\partial W} (\text{pr}_2 \circ \bar{\xi})^* \rho \\ &= \text{deg}(\text{pr}_2 \circ \bar{\xi} \circ \iota) \cdot \int_{S^{m-1}} \rho = \text{ind}_x \xi \cdot 1. \quad \square \end{aligned}$$

50.32 Proposition.

Sei M eine kompakte orientierte zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ ein Vektorfeld mit nur isolierten Nullstellen. Dann ist

$$\chi(M) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi = \int_M \chi(\pi_M).$$

Beweis. Für $\mu \in \Omega^m(M)$ mit $\int_M \mu = 1$ gilt nach [50.31](#) für jedes Vektorfeld ξ

$$\sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi \cdot [\mu] = \chi(\pi_M)$$

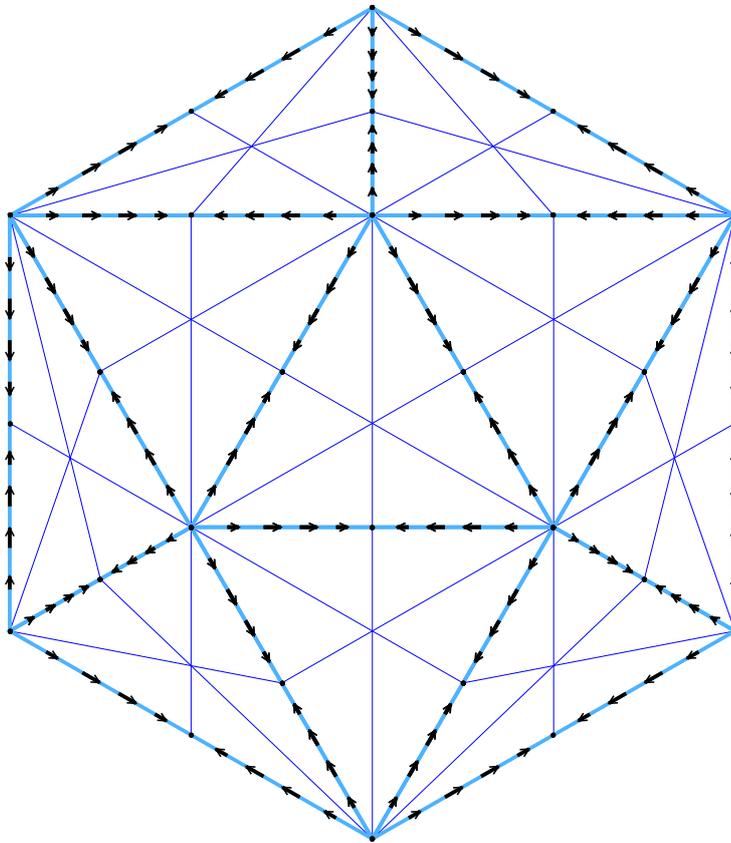
und somit

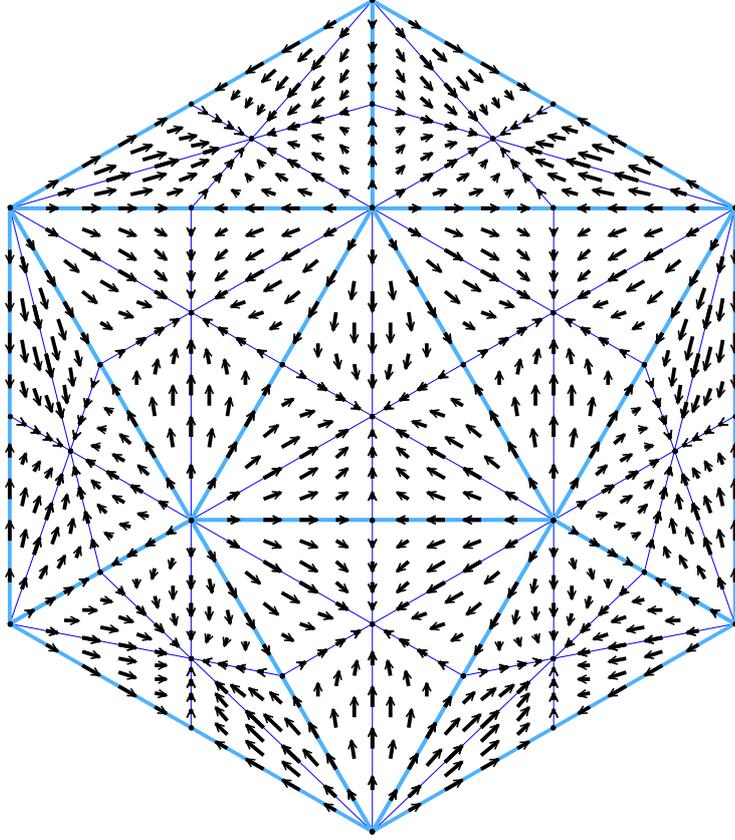
$$\sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi = \int_M \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \cdot \mu = \int_M \chi(\pi_M).$$

Es genügt also eine Vektorfeld ξ zu finden mit

$$\chi(M) = \sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi.$$

Wir verwenden dazu eine endliche Triangulierung und wie im Beweis von [50.26](#) auf jedem Seitensimplex einen “inneren” Punkt. Nach [50.28](#) ist $\chi(M) = \sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha_k$, wenn α_k die Anzahl der k -Simplexe bezeichnet. Das Vektorfeld mit genau diesen Punkten als Nullstellen wählen wir nun rekursiv auf den k -Simplex so, daß es die gewählten inneren Punkte als Senken hat.





Der Index so eines Vektorfelds ξ auf einem dieser inneren Punkt eines k -Simplexes ist $(-1)^k$ nach dem in [50.30](#) Gesagten und somit ist

$$\sum_{x \in \xi^{-1}(0)} \text{ind}_x \xi = \sum_{k=0}^m (-1)^k \alpha_k = \chi(M). \quad \square$$

50.37 Zeitabhängige Vektorfelder.

Sei ξ ein zeitabhängiges Vektorfeld auf einer Mannigfaltigkeit M , d.h. eine Abbildung $\xi : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$ mit $\pi_M \circ \xi = \text{pr}_2$. Für $t \in M$ bezeichnen wir mit ξ_t das Vektorfeld $x \mapsto \xi(t, x)$ auf M . Durch

$$\tilde{\xi} : \mathbb{R} \times M \rightarrow T(\mathbb{R} \times M) \cong T\mathbb{R} \times TM, \quad (t, x) \mapsto \left(\frac{\partial}{\partial t}, \xi(t, x) \right)$$

ist dann ein (zeitunabhängiges) Vektorfeld auf $\mathbb{R} \times M$ gegeben, welches nach [60, 28.3](#) einen lokalen Fluß $\text{Fl}^{\tilde{\xi}}$ besitzt, d.h.

$$\text{Fl}^{\tilde{\xi}}(t, x; 0) = (t, x) \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial s} \text{Fl}^{\tilde{\xi}}(t, x; s) = \tilde{\xi}(\text{Fl}^{\tilde{\xi}}(t, x; s)).$$

Insbesondere ist $(\text{pr}_1 \circ \text{Fl}^{\tilde{\xi}})(t, x; 0) = t$ und $\frac{\partial}{\partial s} (\text{pr}_1 \circ \text{Fl}^{\tilde{\xi}})(t, x; s) = 1$, also

$$(\text{pr}_1 \circ \text{Fl}^{\tilde{\xi}})(t, x; s) = t + s.$$

Sei $\text{Fl}^{\xi}(x, s) := (\text{pr}_2 \circ \text{Fl}^{\tilde{\xi}})(0, x; s)$. Dann ist $\text{Fl}^{\xi}(x, 0) = x$ und

$$\frac{\partial}{\partial s} \text{Fl}^{\xi}(x, s) = \frac{\partial}{\partial s} (\text{pr}_2 \circ \text{Fl}^{\tilde{\xi}})(0, x; s) = \xi(\text{Fl}^{\tilde{\xi}}(0, x; s)) = \xi(0 + s, \text{Fl}^{\xi}(x, s)),$$

also $s \mapsto \text{Fl}^\xi(x, s)$ die Integralkurve des zeitabhängigen Vektorfelds ξ die bei x startet. Wir setzen wieder $\text{Fl}_t^\xi(x) := \text{Fl}^\xi(x, t)$. Beachte jedoch, daß Fl^ξ trotz der benutzten Bezeichnung NICHT die Flußeigenschaft $\text{Fl}_{t+s}^\xi = \text{Fl}_t^\xi \circ \text{Fl}_s^\xi$ besitzt.

Der Einfachheit halber setzen wir nun M als kompakt voraus. Dann ist Fl^ξ global definiert. Sei nun $\omega \in \Omega^k(M)$ dann ist $t \mapsto (\text{Fl}_t^\xi)^*\omega$ eine glatte Kurve in (den lokalkonvex Vektorraum) $\Omega^k(M)$, oder äquivalent für jedes $x \in M$ ist $t \mapsto ((\text{Fl}_t^\xi)^*\omega)(x)$ eine glatte Kurve in den endlich dimensionalen Vektorraum $\Lambda^k T_x M^* \cong L_{\text{alt}}^k(T_x M; \mathbb{R})$.

Beh.: $\frac{\partial}{\partial t} (\text{Fl}_t^\xi)^*(\omega) = (\text{Fl}_t^\xi)^*(\mathcal{L}_{\xi_t} \omega)$

Der Kürze halber setzen wir $\varphi_t := \text{Fl}_t^\xi$. Für $x \in M$ ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \left(\varphi_{t+s} \circ (\varphi_t)^{-1} \right) (x) &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \varphi_{t+s} \left((\varphi_t)^{-1}(x) \right) = \xi_{t+0} \left(\varphi_t \left((\varphi_t)^{-1}(x) \right) \right) \\ &= \xi_t(x) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \text{Fl}_s^{\xi_t}(x) \end{aligned}$$

und somit ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\text{Fl}_t^\xi)^*(\omega) &= \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_t)^*(\omega) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\varphi_{t+s})^*(\omega) \\ &= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\varphi_t)^* \left((\varphi_{t+s} \circ (\varphi_t)^{-1})^*(\omega) \right) \\ &= (\varphi_t)^* \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\varphi_{t+s} \circ (\varphi_t)^{-1})^*(\omega) \right) = (\varphi_t)^* \left(\frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\text{Fl}_s^{\xi_t})^*(\omega) \right) \\ &= (\text{Fl}_t^\xi)^*(\mathcal{L}_{\xi_t} \omega). \end{aligned}$$

50.38 Darboux's Theorem.

Es seien ω_0 und ω_1 symplektische Formen auf einer Mannigfaltigkeit M und $x \in M$ mit $\omega_0(x) = \omega_1(x)$. Dann existiert ein lokaler Diffeomorphismus f von M bei x mit $f^*(\omega_1) = \omega_0$ lokal um x .

Beweis. Wir betrachten die Gerade $t \mapsto \omega_t := \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0) \in Z^2(M)$. Es genügt eine Kurve $t \mapsto \varphi_t \in \text{Diff}(M)$ zu finden mit $(\varphi_t)^*(\omega_t) = \omega_0$. Für das zugehörige zeitabhängige Vektorfeld $\xi_t(x) := \xi(t, x) := \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t(x)$ wäre $\text{Fl}_t^\xi = \varphi_t$ und somit

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t} \omega_0 = \frac{\partial}{\partial t} (\varphi_t)^*(\omega_t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} (\varphi_t)^* \right) (\omega_t) + (\varphi_t)^* \left(\frac{\partial}{\partial t} \omega_t \right) \\ &\stackrel{\text{50.37}}{=} (\varphi_t)^* \left(\mathcal{L}_{\xi_t} \omega_t + \omega_1 - \omega_0 \right). \end{aligned}$$

Da φ_t lokale Diffeomorphismen sind, ist dies (wegen $d\omega_t = 0$) äquivalent zu $di_{\xi_t} \omega_t = \mathcal{L}_{\xi_t} \omega_t = \omega_0 - \omega_1$. Wegen $d(\omega_0 - \omega_1) = 0$ existiert lokal ein λ mit $d\lambda = \omega_0 - \omega_1$ und, da ω_t lokal um x (wegen $\omega_0(x) = \omega_1(x)$) nicht degeneriert ist, ein eindeutiges lokales zeitabhängiges Vektorfeld $t \mapsto \xi_t$ mit $i_{\xi_t} \omega_t = \lambda$. Wenn wir $\varphi_t := \text{Fl}_t^\xi$ setzen, so ist $(\varphi_t)^*(\omega_t) = \omega_0$ für alle t also insbesondere $\varphi_1^*(\omega_1) = \omega_0$. \square

50.39 Folgerung.

Sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann existieren lokale Koordinaten (q^1, \dots, p^1, \dots) auf M s.d. $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$.

Beweis. in [60, 14.9] haben wir gesehen, daß lokale Koordinaten $\psi^{-1} = (q^1, \dots, p^1, \dots)$ auf M existieren s.d. $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$, i.e. $\psi^*(\omega) = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{n+i} \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n})$, in einem Punkt gilt. Nach [50.38] existiert weiters ein lokaler Diffeomorphismus φ

des \mathbb{R}^{2n} mit $\varphi^*(\psi^*(\omega)) = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dx^{n+i}$ lokal um diesen Punkt. In den neuen Koordinaten $(q^1, \dots, p^1, \dots) := \psi \circ \varphi$ ist somit $\omega = \sum_{i=1}^n dq^i \wedge dp^i$ lokal. \square

Damit können wir die letzte Aussage über die Beschreibung der Hamilton'schen Vektorfelder aus [45.8](#) präzise machen:

50.40 Proposition.

Es sei (M, ω) eine symplektische Mannigfaltigkeit. Dann existiert folgende exakte Sequenz von Lie-Algebren:

$$0 \rightarrow H^0(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{X}_\omega(M) \rightarrow H^1(M) \rightarrow 0,$$

wobei $\mathfrak{X}_\omega(M) := \{\xi \in \mathfrak{X}(M) : \mathcal{L}_\xi \omega = 0\}$ die Unter-Lie-Algebra von $\mathfrak{X}(M)$ der lokal Hamilton'schen Vektorfelder ist, $C^\infty(M, \mathbb{R})$ mit der Poisson-Klammer und $H^0(M)$ und $H^1(M)$ Abel'sche Lie-Algebren sind.

Beweis. Die Abbildung $H^0(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist die Inklusion der lokal konstanten Funktionen. Die Abbildung $C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$ ordnet jeder Funktion f das zugehörige Hamilton'sche Vektorfeld X_f mit $i_{X_f} \omega = df$ zu, siehe [45.8](#) und ist wegen $\mathcal{L}_{X_f} \omega = di_{X_f} \omega + i_{X_f} d\omega = d^2 f + i_{X_f} 0 = 0$ wohldefiniert. Die Abbildung $\mathfrak{X}_\omega(M) \rightarrow H^1(M)$ ist durch $\xi \mapsto [i_\xi \omega]$ gegeben und wegen $di_\xi \omega = \mathcal{L}_\xi \omega - i_\xi d\omega = 0$ wohldefiniert.

Wir zeigen zuerst die Exaktheit als lineare Abbildungen zwischen Vektorräumen:

Bei $H^0(M)$ ist das offensichtlich und auch bei $C^\infty(M, \mathbb{R})$, denn $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist genau dann in $H^0(M)$, wenn es lokal konstant, also $df = 0$ ist, und das ist wegen $df = i_{X_f} \omega$ und der nicht-Degeneriertheit von ω mit $X_f = 0$ äquivalent.

Exaktheit bei $\mathfrak{X}_\omega(M)$ gilt, denn $[i_\xi \omega] = 0 \Leftrightarrow \exists f \in C^\infty(M, \mathbb{R}) : i_\xi \omega = df$, i.e. $\xi = X_f$.

Exaktheit bei $H^1(M)$ gilt, denn sei $[\alpha] \in H^1(M)$ (also $d\alpha = 0$). Dann existiert ein $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ mit $i_\xi \omega = \alpha$. Es ist $\xi \in \mathfrak{X}_\omega(M)$, denn $\mathcal{L}_\xi \omega = di_\xi \omega + i_\xi d\omega = d\alpha + 0 = 0$.

Offensichtlich ist jeder Vektorraum (also insbesondere $H^0(M)$ und $H^1(M)$) mit der Lie-Klammer $[-, -] := 0$ eine Lie-Algebra.

Es ist $\mathfrak{X}_\omega(M)$ eine Teil-Lie-Algebra von $\mathfrak{X}(M)$, denn für $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_\omega(M)$ ist $\mathcal{L}_{[\xi, \eta]} \omega =$
[42.7](#) $[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta] \omega = \mathcal{L}_\xi 0 - \mathcal{L}_\eta 0 = 0$.

Die POISSON-KLAMMER auf $C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist $\{f, g\} := \omega(X_g, X_f) = i_{X_f} i_{X_g} \omega = i_{X_f} dg = \mathcal{L}_{X_f} g$. Es vertauscht $f \mapsto X_f$ die Klammern, denn

$$\begin{aligned} i_{X_{\{f, g\}}} \omega &= d(\{f, g\}) = d(\mathcal{L}_{X_f} g) = \mathcal{L}_{X_f} dg = \mathcal{L}_{X_f} i_{X_g} \omega - i_{X_f} \underbrace{\mathcal{L}_{X_g} \omega}_{=0} \\ &= [\mathcal{L}_{X_f}, i_{X_g}] \omega \stackrel{\text{42.7}}{=} i_{[X_f, X_g]} \omega \end{aligned}$$

also $X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g]$. Die Poisson-Klammer macht $C^\infty(M, \mathbb{R})$ zu einer Lie-Algebra, denn

$$\begin{aligned} \{f, g\} &= \omega(X_g, X_f) = -\omega(X_f, X_g) = -\{g, f\} \\ \{\{f, g\}, h\} &= \mathcal{L}_{X_{\{f, g\}}} h = \mathcal{L}_{[X_f, X_g]} h = [\mathcal{L}_{X_f}, \mathcal{L}_{X_g}] h \\ &= (\mathcal{L}_{X_f} \mathcal{L}_{X_g} - \mathcal{L}_{X_g} \mathcal{L}_{X_f}) h = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\}. \end{aligned}$$

Die Inklusion $H^0(M) \rightarrow C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist ein Lie-Algebra-Homomorphismus, denn $\{f, g\} = i_{X_f} dg = 0$ falls $g \in H^0(M)$.

Schließlich ist $\xi \mapsto [i_\xi \omega]$ auch ein Lie-Algebra-Homomorphismus, denn für $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_\omega(M)$ ist

$$i_{[\xi, \eta]} \omega \stackrel{42.7}{=} [\mathcal{L}_\xi, i_\eta] \omega = (\mathcal{L}_\xi i_\eta - i_\eta \mathcal{L}_\xi) \omega = \mathcal{L}_\xi i_\eta \omega = i_\xi \underbrace{di_\eta \omega}_{=0} + di_\xi i_\eta \omega,$$

also $[i_{[\xi, \eta]} \omega] = 0$. \square

Bemerkung.

In [67] wurde dies zu folgender kurzen exakten Sequenz verallgemeinert:

$$0 \rightarrow H^*(M) \rightarrow \Omega^*(M)/B^*(M) \rightarrow \Omega_\omega^*(M; TM) \rightarrow H^{*+1}(M) \times \Gamma(E_\omega) \rightarrow 0,$$

wobei $\Omega_\omega^*(M; TM)$ die Lie-Algebra der TM -wertigen Differentialformen K mit $\mathcal{L}_K \omega = 0$ bzgl. der Frölicher-Nijenhuis Klammer ist und E_ω das Teilvektorbündel von $\bigwedge T^*M \otimes TM$ jener K mit $i_K \omega = 0$ ist. Allerdings trägt $\Gamma(E_\omega)$ keine verträgliche Lie-Algebra Struktur.

50.41 Proposition.

Es seien $\omega_0, \omega_1 \in \Omega^m(M)$ zwei nirgends verschwindende Differentialformen auf einer kompakten orientierbaren Mannigfaltigkeit M mit $\int_M \omega_0 = \int_M \omega_1$. Dann existiert ein (Orientierungs-erhaltender) Diffeomorphismus $\varphi: M \rightarrow M$ mit $\varphi^*(\omega_1) = \omega_0$.

Beweis. Wie im Beweis von [50.38] betrachten wir $\omega_t := \omega_0 + t(\omega_1 - \omega_0)$. Wegen $\int_M \omega_0 = \int_M \omega_1$ ist $[\omega_0 - \omega_1] = 0$, also existiert ein $\lambda \in \Omega^{m-1}(M)$ mit $d\lambda = \omega_0 - \omega_1$. Da ω_t nirgends verschwindet existiert ein eindeutiges zeitabhängiges Vektorfeld $t \mapsto \xi_t$ mit $i_{\xi_t} \omega_t = \lambda$ und somit gilt für $\varphi_t := \text{Fl}_t^{\xi_t}$ die gewünschte Beziehung $(\varphi_t)^*(\omega_t) = \omega_0$ wie im Beweis von [50.38]. \square

Als Folgerung erhalten wir die nicht-lineare Version von $GL_+(m)/SL(m) \cong \mathbb{R}^+$:

50.42 Folgerung.

Es sei M eine kompakte orientierte zusammenhängende Mannigfaltigkeit und $\omega_0 \in \text{Vol}(M) := \{\omega \in \Omega^m(M) : \int_M \omega = 1 \text{ und } \omega \text{ verschwindet nirgends}\}$. Weiters sei $\text{Diff}_+(M)$ die Gruppe der Orientierungs-erhaltenden Diffeomorphismen von M und $\text{Diff}_{\omega_0}(M)$ die Untergruppe der ω_0 -erhaltenden Diffeomorphismen. Dann induziert die Abbildung $\gamma: f \mapsto f^*(\omega_0)$ eine Bijektion zwischen dem durch die Linkswirkung der Untergruppe gegebene Orbitraum $\text{Diff}_+(M)/\text{Diff}_{\omega_0}(M)$ mit $\text{Vol}(M)$.

Es kann gezeigt werden (siehe [61, 43.7]), daß dies ein Diffeomorphismus ist.

Beweis. Wegen [50.41] ist γ surjektiv. Weiters ist

$$\gamma(f) = \gamma(g) \Leftrightarrow f^*(\omega_0) = g^*(\omega_0) \Leftrightarrow \omega_0 = (g \circ f^{-1})^*(\omega_0) \Leftrightarrow \varphi := g \circ f^{-1} \in \text{Diff}_{\omega_0}(M),$$

also induziert γ eine Bijektion $\text{Diff}_+(M)/\text{Diff}_{\omega_0}(M) \rightarrow \text{Vol}(M)$. \square

VIII. Riemann-Geometrie

Wir rufen uns Einiges aus der Differentialgeometrie 1 in Erinnerung: In [60, 32.2] haben wir Riemann-Mannigfaltigkeiten definiert und [60, 32.3] die zugehörige Metrik im Sinne der Topologie beschrieben. In [60, 33.2] haben wir den Satz von Nash zitiert, der besagt, daß wir uns auf konkrete Mannigfaltigkeiten beschränken können. In [60, 33.3] haben wir die Existenz von Riemann-Metriken auf jeder Mannigfaltigkeit gezeigt. In [60, 57.1] haben wir Geodäten als kritische Punkte der Bogenlänge definiert und in [60, 58.3] für Hyperflächen die sie charakterisierende Differentialgleichung mittels Christoffelsymbole aus [60, 58.2] in Koordinaten beschrieben. Diese hat uns in [60, 58.4] die Exponentialabbildung geliefert, siehe [60, 58.5] für Beispiele. In [60, 62] haben wir die kovariante Ableitung auf Hyperflächen zu studieren begonnen und ihre wesentlichen Eigenschaften in [60, 62.4] hergeleitet. In [60, 62.5] haben wir die Existenz der kovarianten Ableitung auf abstrakten Riemann-Mannigfaltigkeiten nachgewiesen und damit in [60, 62.7] und [60, 62.8] die Exponentialabbildung erhalten.

62. Geodätische Vollständigkeit

In [60, 60.2] haben wir eine Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) als geodätisch vollständig bezeichnet, wenn jede Geodäte unendliche Länge hat, oder äquivalent, auf ganz \mathbb{R} definiert ist. Der folgende Satz liefert nun den Zusammenhang mit der Vollständigkeit im Sinne der Metrik, wie wir ihm in [60, 33.2] verwendet haben.

62.10 Satz von Hopf-Rinow.

Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind folgende Aussagen äquivalent

- 1 M ist geodätisch vollständig.
- 2 M ist als metrischer Raum vollständig, d.h. Cauchyfolgen konvergieren.
- 3 Jede in der Metrik beschränkte und abgeschlossene Menge ist kompakt.

Weiters folgt aus diesen äquivalenten Aussagen

- 4 Je zwei Punkte in der gleichen Zusammenhangskomponente lassen sich durch eine Geodäte minimaler Länge verbinden.

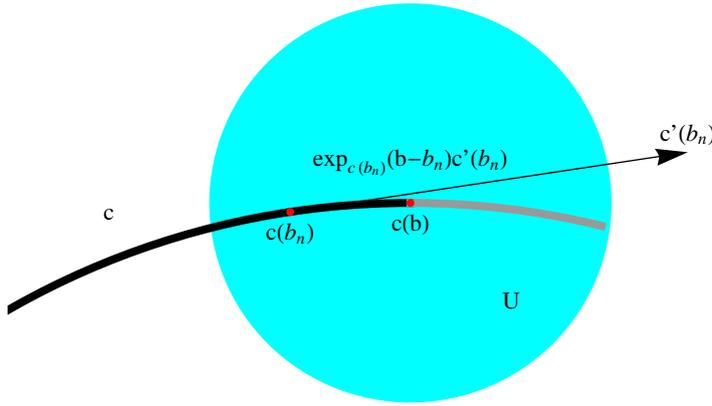
Beweis. (3 \Rightarrow 2) Dies ist ein allgemeiner Satz aus der Topologie, den nach dem Satz von Cantor (siehe [55, 3.1.4]) genügt es das Prinzip der Intervallschachtelung zu beweisen: Seien also $A_n \neq \emptyset$ abgeschlossen und monoton fallend mit $d(A_n) := \sup\{d(x, y) : x, y \in A_n\} \rightarrow 0$. Nach Voraussetzung ist somit A_n kompakt (falls $d(A_n) < \infty$) und somit $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \neq \emptyset$.

(2 \Rightarrow 1) Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte und $]a, b[$ ihr maximaler Definitionsbereich. Sei z.B. $b < +\infty$, und betrachten wir eine Folge

$b_n \nearrow b$, dann ist $c(b_n)$ eine Cauchyfolge, denn

$$d(c(t_1) - c(t_2)) < L(c|_{[t_1, t_2]}) = |t_2 - t_1|.$$

Nach (2) existiert also $\lim_{n \rightarrow \infty} c(b_n) =: c(b)$. Aus [60, 62.8] wissen wir, daß eine Umgebung U von $c(b)$ existiert und ein $\rho > 0$, sodaß \exp_x für alle $x \in U$ und alle Vektoren der Länge kleiner als ρ definiert ist. Wählen wir nun n so groß, daß $b - b_n < \rho$ und $c(b_n) \in U$. Dann ist die Geodäte mit Anfangsrichtung $c'(b_n)$ für $|t| < \rho$ definiert, also über b hinaus, Widerspruch.



(1 \Rightarrow 4) Es sei $r := d(x, y) > 0$. Wir wählen ein $0 < \rho < r$, so daß $\exp_x : B_\rho(0) \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus aufs Bild ist. Sei $0 < \rho_1 < \rho$ und $S := \exp_x(\partial B_{\rho_1}(0))$. Da S kompakt ist, existiert ein $x_1 \in S$ mit $d(x_1, y)$ minimal. Sei $v \in T_x M$ mit $|v| = 1$ und $x_1 := \exp_x(\rho_1 v)$, Wir behaupten, daß $\exp_x(rv) = y$, also $c(t) := \exp_x(tv)$ eine Geodäte von x nach y mit minimaler Länge r ist.

Es genügt $d(c(t), y) = r - t$ für $\rho_1 \leq t \leq r$ zu zeigen. Offensichtlich stimmt diese Gleichung für $t = \rho_1$, denn da jede Kurve von x nach y die Menge S trifft, gilt:

$$r = d(x, y) = \min_{s \in S} (d(x, s) + d(s, y)) = \rho_1 + d(x_1, y) = \rho_1 + d(c(\rho_1), y).$$

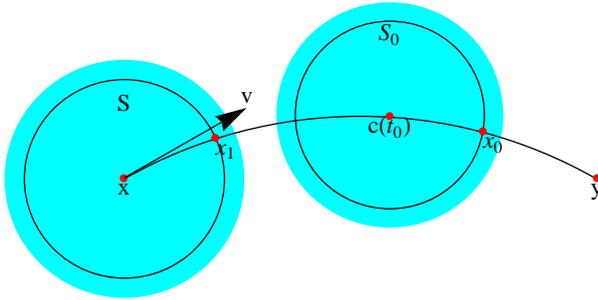
Sei nun t_0 das Infimum jener t , für welche die Gleichung nicht stimmt. Da die Bedingung abgeschlossen ist, gilt für t_0 die Gleichung. Insbesondere ist also $t_0 < r$. Sei S_0 eine geodätische Sphäre um $c(t_0)$ mit Radius $\rho_0 < r - t_0$, sei weiters x_0 ein Punkt auf S_0 mit minimalem Abstand von y , und sei c_0 eine Geodäte minimaler Länge von $c(t_0)$ nach x_0 . Dann gilt:

$$d(c(t_0), y) = \min_{s \in S_0} (d(c(t_0), s) + d(s, y)) = \rho_0 + d(x_0, y)$$

und somit $d(x_0, y) = (r - t_0) - \rho_0$. Weiters ist

$$d(x, x_0) \geq d(x, y) - d(x_0, y) = r - (r - t_0) + \rho_0 = t_0 + \rho_0,$$

und die Kurve $c|_{[0, t_0]}$ gefolgt von c_0 hat die Länge $t_0 + \rho_0$ somit gilt $d(x, x_0) = t_0 + \rho_0$, also die gestückelte Kurve eine Geodäte die $c|_{[0, t_0]}$ verlängert also mit c übereinstimmt. Somit gilt die gewünschte Gleichung auch noch für $t_0 + \rho_0$ für alle kleinen ρ_0 . Das ist ein Widerspruch dazu, daß t_0 das Infimum jener t ist, für die die Gleichung falsch ist.



(1 \Rightarrow 3) Sei $A \subseteq M$ abgeschlossen und beschränkt, i.e.

$$\sup\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in A\} =: r < \infty.$$

Nach (4) ist $A \subseteq \exp_x\{B_r(0)\} =: B$ für $x \in A$, und B ist als stetiges Bild der kompakten Menge $B_r(0)$ kompakt, also auch A . \square

62.11 Satz.

Sei (M, g) eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit, und sei $X \in \mathfrak{X}(M)$ ein bezüglich g beschränktes Vektorfeld. Dann ist X vollständig, d.h. hat einen globalen Fluß.

Beweis. Sei $|X(x)|_g \leq R$ für alle $x \in M$ und sei c eine Lösungskurve von X , dann gilt:

$$L(c|_{[a,b]}) = \int_a^b |c'(t)|_g dt = \int_a^b |X(c(t))|_g dt \leq |b-a|R$$

Also bleibt c auf endlichen Intervallen innerhalb einer beschränkten, und wegen der Vollständigkeit innerhalb einer kompakten Menge. Dies ist ein Widerspruch zu [60, 28.3]. \square

62.12 Satz von Nomitzu-Ozeki.

Zu jeder Riemann-Metrik gibt es immer eine konform äquivalente, die geodätisch vollständig ist.

Beweis. Sei (M, g) eine Riemann-Mannigfaltigkeit und d die assoziierte Metrik zu g . Sei wieder $B_r(x) := \{y \in M : d(x, y) < r\}$. Dann setzen wir

$$r(x) := \sup\{\rho > 0 : B_\rho(x) \text{ ist kompakt}\} \in (0, +\infty].$$

Aus der Dreiecksungleichung für d folgt sofort $|r(x_1) - r(x_2)| < d(x_1, x_2)$, also ist r stetig. Falls $r(x) = +\infty$ für ein x , so auch für alle anderen $x \in M$, und damit ist jede abgeschlossene beschränkte Menge kompakt, also M nach [62.10] vollständig. Wir dürfen folglich annehmen, daß $r : M \rightarrow \mathbb{R}$. Nun wählen wir mittels Partition der 1 eine glatte Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) > \frac{1}{r(x)}$ für alle $x \in M$. Und betrachten die konform äquivalente Metrik $g_f := f^2 g$.

Bleibt zu zeigen, daß g_f vollständig ist. Dafür genügt es die Inklusion $B_{1/3}^{g_f}(x) \subseteq B_{r(x)/2}^g(x)$ zu beweisen, denn dann hat auf Grund des Beweises von 2 \Rightarrow 1 in [62.10] jede Geodäte mindestens Länge $\frac{1}{3}$, und somit durch Aneinanderstückeln unendliche Länge. D.h. g_f ist vollständig.

Sei also $y \notin B_{r(x)/2}^g(x)$ und $c : [a, b] \rightarrow M$ eine glatte Kurve von x nach y dann gilt:
 $L^g(c) = \int_a^b |c'(t)|_g dt \geq d(x, y) > \frac{r(x)}{2}$ und

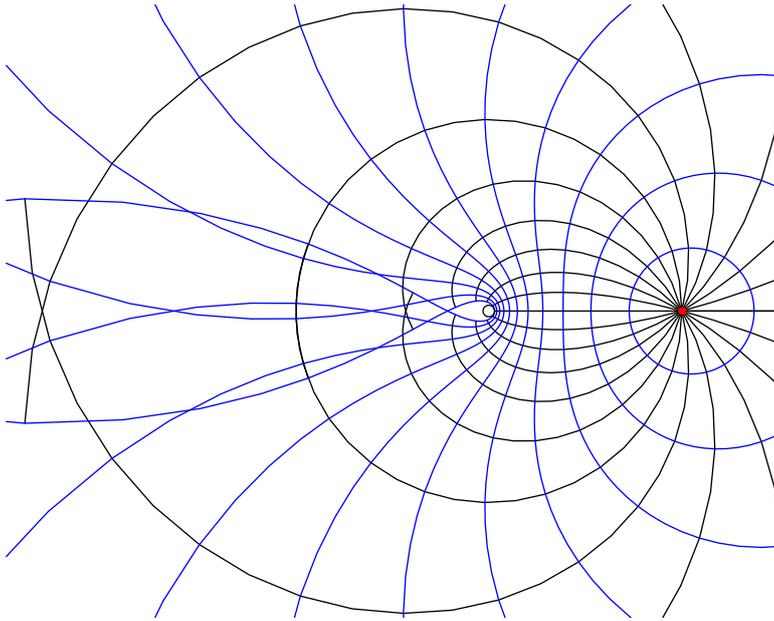
$$\begin{aligned} L^{g_f}(c) &= \int_a^b |c'(t)|_{g_f} dt = \int_a^b f(c(t)) |c'(t)|_g dt = \quad (\text{nach dem Zwischenwertsatz}) \\ &= f(c(\tau)) \int_a^b |c'(t)|_g dt = f(c(\tau)) L^g(c) > \frac{L^g(c)}{r(c(\tau))}. \end{aligned}$$

Wegen $|r(x) - r(c(\tau))| \leq d(x, c(\tau)) \leq L^g(c)$ gilt $r(c(\tau)) \leq r(x) + L^g(c)$ und somit

$$L^{g_f}(c) > \frac{L^g(c)}{r(c(\tau))} \geq \frac{L^g(c)}{r(x) + L^g(c)} > \frac{L^g(c)}{2L^g(c) + L^g(c)} = \frac{1}{3} \quad \square$$

62.12a Beispiel.

Es sei $M := \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Dann ist M mit der euklidischen Metrik g nicht vollständig (betrachte antipodale Punkte). Die Exponentialabbildung in einem Punkt (z.B. $(1, 0)$) in der konform äquivalenten vollständigen Metrik g_f mit $f(x, y) := 1/\sqrt{x^2 + y^2}$ sieht dann wie folgt aus:



62.13 Lemma (Divergenz via kovarianter Ableitung).

Sei ξ ein Vektorfeld auf der orientierten Riemannschen Mannigfaltigkeit M so gilt:

$$\operatorname{div} \xi = \operatorname{spur}(\eta \mapsto \nabla_\eta \xi).$$

Beweis. Für die Divergenz, die wir aus der äußeren Ableitung durch Anwendung des Hodge-Stern-Operators gewonnen haben, und die wir auch mittels Lie-Ableitung der Volumensform beschrieben haben, gilt nach [43.2](#) folgende lokale Formel:

$$\operatorname{div} \xi = \frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sqrt{G} \xi^i \right) = \sum_{i=1}^m \left(\xi^i \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial u^i} G + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^i \right).$$

Für ∇_ξ haben wir die lokale Formel:

$$\begin{aligned} \nabla_{g_i} \xi &\stackrel{[60, 62.4.3]}{=} \sum_{j=1}^m (\xi^j \nabla_{g_i} g_j + \frac{\partial}{\partial u^i} (\xi^j) g_j) \\ &\stackrel{[60, 62.6]}{=} \sum_{j=1}^m \left(\xi^j \sum_{k=1}^m \Gamma_{i,j}^k g_k + \frac{\partial}{\partial u^i} (\xi^j) g_j \right) \\ &= \sum_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \xi^k \Gamma_{i,k}^j + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^j \right) g_j. \end{aligned}$$

Für die Spur von $\eta \mapsto \nabla_\eta \xi$ erhalten wir also

$$\text{spur}(\eta \mapsto \nabla_\eta \xi) = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{k=1}^m \xi^k \Gamma_{i,k}^i + \frac{\partial}{\partial u^i} \xi^i \right).$$

Wegen $\det'(A)(B) = \det(A) \cdot \text{spur}(A^{-1}B)$ gilt schließlich:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2G} \frac{\partial}{\partial u^k} G &= \frac{1}{2G} G \text{spur}((g^{i,j}) (\frac{\partial}{\partial u^k} g_{i,j})) \\ &\stackrel{[60, 62.6]}{=} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m g^{j,i} (\Gamma_{k,i,j} + \Gamma_{k,j,i}) \stackrel{[60, 62.6]}{=} \sum_{i=1}^m \Gamma_{k,i}^i = \sum_{i=1}^m \Gamma_{i,k}^i. \quad \square \end{aligned}$$

63. Jacobi-Felder

63.1 Bemerkung

Sei $c : [0, a] \rightarrow M$ eine Geodäte in einer Riemannschen Fläche. Diese läßt sich als radiale Geodäte der Form $c(t) = \exp_{c(0)}(t c'(0))$ schreiben. Sei dazu $x := c(0)$ und $v := c'(0)$. Wir wollen benachbarte radiale Geodäten diskutieren. Nach [60, 62.8] gibt es eine Umgebung um $[0, a] \times \{v\} \subset \mathbb{R} \times T_x M$, auf welcher \exp wohldefiniert ist. Damit existieren auf dem Intervall $[0, a]$ die radialen Geodäten, welche bei x in eine Richtung nahe v starten. Betrachten wir nun die Variation $(t, w) \mapsto \exp_x(t(v+w))$ mit $w \perp v$. Die Richtungsableitung $\xi(t) := (T_{tv} \exp_x)(tw)$ an der Stelle $(t, 0)$ in Richtung $(0, w)$ definiert ein Vektorfeld ξ längs c .

Wir wollen nun zeigen, daß das Vektorfeld ξ die Jacobi-Gleichung

$$\nabla^2 \xi(t) + K(c(t)) \xi(t) = 0$$

mit den Anfangswerten $\xi(0) = 0$ und $\nabla \xi(0) = w$ erfüllt.

Da

$$\varphi : (r, \theta) \mapsto \exp_x(r(\cos \theta v + \sin \theta w)) \text{ für } |w| = 1 = |v|$$

geodätische Parallelkoordinaten sind, also $E = 1$, $F = 0$, $G > 0$ erfüllen, gilt die Jacobi-Gleichung $K = -\frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \sqrt{G}$ aus [60, 53.9].

$$\begin{aligned} \text{Für } \xi(t) &:= \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} \exp_x(t(v+sw)) \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_{\theta=0} \exp_x(t \cos \theta v + t \sin \theta w) = \partial_2 \varphi(t, 0) \\ \text{ist } |\xi|^2 &= |\partial_2 \varphi|^2 = G. \end{aligned}$$

Das Vektorfeld ξ steht normal auf c' , da die radialen Geodäten die geodätischen Sphären (wegen $F = 0$) orthogonal schneiden, also läßt sich ξ als $\lambda(t)\nu(t)$ schreiben, wobei ν das Einheitsnormalenfeld zu c' in TM und $\lambda = |\xi| = \sqrt{G}$ ist. Folglich gilt $\lambda'' + (K \circ c)\lambda = \lambda'' - \frac{1}{\sqrt{G}} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^2 \sqrt{G} \lambda = 0$. Da c eine Geodäte ist, ist c' ein paralleles

Vektorfeld (siehe [60, 61.1]) längs c und ebenso ν . Also gilt für die kovariante Ableitung von ξ :

$$\begin{aligned}\nabla \xi &= \nabla(\lambda \nu) = \lambda \nabla \nu + \lambda' \nu = \lambda' \nu \\ \Rightarrow \nabla^2 \xi &= \nabla(\lambda' \nu) = \lambda' \nabla \nu + \lambda'' \nu = \lambda'' \nu \\ \Rightarrow \nabla^2 \xi + K \xi &= \lambda'' \nu + K \lambda \nu = (\lambda'' + K \lambda) \nu = 0\end{aligned}$$

63.2 Definition (Jacobi-Felder).

Wir nennen ein Vektorfeld ξ längs einer Geodäte c ein JACOBI-FELD falls es die JACOBI-GLEICHUNG

$$\nabla^2 \xi + (K \circ c) \xi = 0$$

erfüllt und orthonormal auf die Geodäte steht.

63.3 Lemma.

Die Jacobi-Felder ξ längs einer Geodäte c mit Anfangsbedingung $\xi(0) = 0$ sind genau jene Vektorfelder, welche sich als $\xi(t) := (T_{tc'(0)} \exp_{c(0)})(tw)$ mit $w \in c'(0)^\perp \subset T_{c(0)}M$ schreiben lassen.

Beweis. Wir haben gerade gezeigt, daß so darstellbare Vektorfelder Jacobi-Felder sind. Berechnen wir nun noch deren Anfangswerte. Klarerweise ist

$$\xi(0) = (T_{0c'(0)} \exp_{c(0)})(0w) = 0.$$

Bezüglich der Koordinaten $(u^1, u^2) \mapsto \exp_x(u^1 v + u^2 w)$ gilt $u^1(t) = t$, $u^2(t) = 0$, $\xi^1(t) = 0$ und $\xi^2(t) = t$. Nach [60, 62.1] ist

$$\begin{aligned}\nabla \xi(0) &= \sum_{k=1}^m \left(\frac{d\xi^k}{dt} + \sum_{i,j} \Gamma_{i,j}^k \xi^i \frac{du^j}{dt} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^2} + \sum_{k=1}^2 \Gamma_{2,1}^k \cdot t \cdot 1 \cdot \frac{\partial}{\partial u^k} \Big|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial u^2} = w.\end{aligned}$$

Da die lineare Differentialgleichung 2.ter Ordnung $\lambda'' + (K \circ c) \lambda = 0$ aber zu jedem Anfangswert eine eindeutige Lösung hat, muß diese obige Gestalt besitzen. \square

Sei nun M eine vollständige Riemann-Mannigfaltigkeit und c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte in M . Wir haben [60, 58.7] gesehen, daß Kurven die in geodätischen Parallelkoordinaten nahe an c liegen, keine kürzere Bogenlänge haben können. Wir untersuchen nun die Frage, wann wir geodätische Polarkoordinaten um $c(0)$ finden können, welche bis zu $c(t)$ reichen. Dazu folgende

63.4 Definition (Konjugierte Punkte)

Es sei $c(t) = \exp_{c(0)}(tc'(0))$ eine Geodäte in M . Ein Punkt $c(t)$ heißt KONJUGIERT zu $c(0)$ falls das Differential $T_{tc'(0)}(\exp_{c(0)})$ der Exponentialabbildung bei $tc'(0) \in T_{c(0)}M$ kein Isomorphismus von $T_{c(0)}M = T_{tc'(0)}T_{c(0)}M$ nach $T_{c(t)}M$ ist.

63.5 Satz (Konjugierte Punkte).

Für eine Geodäte c in einer vollständigen Riemannschen Fläche sind folgende Aussagen äquivalent:

1. $c(t)$ ist konjugiert zu $c(0)$ längs c .
2. Es existiert ein nicht-verschwindendes Jacobi-Vektorfeld ξ längs c mit

$$\xi(t) = 0 = \xi(0).$$

Beweis. Es sei $x := c(0)$ und $v := c'(0)$. Nach [63.3](#) ist das Jacobi-Feld mit Anfangsbedingung $\xi(0) = 0$ und $\nabla\xi(0) = \xi_0 \perp v$ durch

$$\xi : t \mapsto (T_{tv} \exp_x)(t\xi_0)$$

gegeben. Also ist $\xi(t) = 0$ genau dann, wenn $t\xi_0$ im Kern von $T_{tv} \exp_x$ liegt. Nun brauchen wir nur noch zu beachten, daß $(T_{tv} \exp_x)(v) = c'(t) \neq 0$ und $(T_{tv} \exp_x)(w) \perp c'(t)$ für alle $w \perp v$ gilt. Also ist der Kern von $T_{tv} \exp_x$ die Menge $\{t\nabla\xi(0) : \xi \text{ ist ein Jacobi-Feld längs } c \text{ mit } \xi(t) = 0\}$. Da $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ eine Abbildung zwischen gleichdimensionalen Räumen ist, ist die Aussage $\text{Ker}(T_{tv} \exp_x) = 0$ damit äquivalent, daß $T_{tv} \exp_x$ ein Isomorphismus ist. \square

63.6 Folgerung.

Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Falls c im Inneren eines Parameterintervalls $[t_1, t_2]$ keine konjugierte Punkte enthält, so gilt $L(c_1) \geq L(c)$ für jede nahe c gelegene Kurve c_1 .

Es gilt auch die Umkehrung, siehe [52](#).

Beweis. Wie im Beweis von [63.3](#) betrachten wir eine Abbildung φ nach geodätischen Polarkoordinaten um $c(0)$. Wegen [63.5](#) ist diese Abbildung ein lokaler Diffeomorphismus in jedem Punkt von $]t_1, t_2[\times \{0\}$. Also haben wir, abgesehen von den Randpunkten, geodätische Parallelkoordinaten längs c . Nach [60, 58.7](#) ist dann die Länge jeder nahe c gelegenen Kurve mindestens so groß wie jene von c . \square

63.7a Lemma. Vergleichssatz von Sturm.

Es sei u (resp. v) Lösung der Differentialgleichung $u''(t) + a(t)u(t) = 0$ (resp. $v''(t) + b(t)v(t) = 0$) mit Anfangswert $u(0) = 0 = v(0)$ und $u'(0) = 1 = v'(0)$. Weiters sei $a \geq b$ (bzw. $\forall t : a(t) > b(t)$). Sei $t_u := \min\{t > 0 : u(t) = 0\}$ und $t_v := \min\{t > 0 : v(t) = 0\}$. Dann ist $t_u \leq t_v$ und für $0 < t_0 < t_1 < t_u$ ist $v(t_1)u(t_0) \geq u(t_1)v(t_0)$ (bzw. $>$) und $v(t_1) \geq u(t_1)$ (bzw. $>$).

Beweis. Nach Voraussetzung ist $u(t) > 0$ für alle $0 < t < t_u$ und $v(t) > 0$ für alle $0 < t < t_v$. Es sei $a(t) \geq b(t)$ für alle t . Wäre $t_u > t_v$ so wäre

$$0 = \int_0^{t_v} u(v'' + b \cdot v) - v(u'' + a \cdot u) = \underbrace{(u \cdot v' - v \cdot u') \Big|_0^{t_v}}_{=u(t_v)v'(t_v) < 0} + \underbrace{\int_0^{t_v} (b - a) \cdot v \cdot u}_{\leq 0},$$

ein Widerspruch.

Sein nun $0 < t < t_u$. Dann ist

$$0 = \int_0^t u(v'' + b \cdot v) - v(u'' + a \cdot u) = (u \cdot v' - v \cdot u') \Big|_0^t + \underbrace{\int_0^t (b - a) \cdot v \cdot u}_{\leq 0} \leq (u \cdot v' - v \cdot u') \Big|_0^t$$

und somit $(\log \circ v)' \geq (\log \circ u)'$, also $v(t_1)u(t_0) \geq u(t_1)v(t_0)$ für alle $0 < t_0 < t_1 < t_u$. Wegen $\lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{v(t_0)}{u(t_0)} = \frac{v'(0)}{u'(0)} = 1$ folgt $v(t_1) \geq u(t_1)$.

Den Fall $a(t) > b(t)$ für alle t behandelt man ganz analog. \square

63.7 Folgerung.

Sei c eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte, so daß $K_0 \leq K(c(t)) \leq K_1$. Dann liegt in jedem offenen Intervall der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$ kein konjugierter Punkt. In jedem abgeschlossenen Intervall der Länge $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ hingegen liegt ein konjugierter Punkt. Hierbei und im folgenden sei $\frac{\pi}{\sqrt{K_1}} = +\infty$ für $K_1 \leq 0$.

Beweis. Aus $b(t) := K(c(t)) \leq K_1 =: a(t)$ folgt mittels [63.7a](#) für die Lösung $\xi(t) = v(t) \nu(t)$ der Jacobi-Gleichung (siehe [63.1](#)) und jene von $u''(t) + K_1 u(t) = 0$ (also $u(t) = \frac{1}{\sqrt{K_1}} \sin(t\sqrt{K_1})$) die Beziehung $u(t_1) \leq v(t_1)$ und somit $v(t) = 0 \Rightarrow t\sqrt{K} \geq \pi$.

Die zweite Aussage zeigt man ganz analog. \square

63.8 Theorem von Bonnet.

Ist M eine vollständige zusammenhängende Riemannsche Fläche und $K \geq K_0 > 0$, so ist der geodätischen Abstand je zweier Punkte höchstens $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$. Insbesondere ist M kompakt.

Beweis. Nach [62.10.4](#) existiert zu je zwei Punkten eine Geodäte minimaler Länge. Falls diese Länge größer als $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ ist, so enthält sie nach [63.7](#) konjugierte Punkte, und nach der Umkehrung von [63.6](#) ist diese Geodäte dann nicht die kürzeste Verbindung, ein Widerspruch. Damit sind ihre Endpunkte aber höchstens $\frac{\pi}{\sqrt{K_0}}$ entfernt. Insbesondere ist der Durchmesser

$$d(M) := \inf\{d(x_1, x_2) : x_1, x_2 \in M\} \leq \frac{\pi}{\sqrt{K_0}},$$

und somit ist M nach [62.10](#) M kompakt. \square

63.9b Lemma.

Es sei $K(x) \leq K_1$ für alle $x \in M$ und $\rho_1 < \rho := \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$. Sei weiters $c : [0, \rho_1] \rightarrow M$ eine Bogenlängen-parametrisierte Geodäte von $x := c(0)$ nach $y := c(\rho_1)$. Sei $v : [s_0, s_1] \rightarrow B_\rho(0) \subseteq T_x M$ eine Kurve mit $\exp_x(v(s_0)) = x$ und $\exp_x(v(s_1)) = y$. Dann ist $L(\exp_x \circ v) \geq L(c)$.

Beweis. Wegen $K(x) \leq K_1$ für alle $x \in M$ ist $\exp_x : B_\rho(0) \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus nach [63.7](#) und [63.4](#). Somit ist $(\exp_x)^*(g)$ eine Riemann-Metrik auf $B_\rho(0)$ und \exp_x bzgl. dieser eine lokale Isometrie. Die Polarkoordinaten auf $B_\rho(0)$ induzieren somit geodätische Polarkoordinaten (siehe [60, 58.5](#)) auf $B_\rho(0)$ bzgl. der Metrik $(\exp_x^*)(g)$ und somit folgt das Resultat aus [60, 58.7](#). \square

63.9a Proposition.

Seien $(c_s)_s$ eine glatte Homotopie relativ $\{0, 1\}$ zwischen zwei verschiedene Geodäten von x nach y mit $L(c_0) \leq L(c_1)$. Falls $K(x) \leq K_1$ für alle $x \in M$ so existiert ein $0 \leq s_0 \leq 1$ mit $L(c_{s_0}) \geq \frac{2\pi}{\sqrt{K_1}} - L(c_0)$

Beachte, daß dies für $K_1 \leq 0$ besagt, daß verschiedene Geodäten von x nach y nicht homotop sein können.

Beweis. Es sei $\rho := \frac{\pi}{\sqrt{K_1}}$. Wegen [63.7](#) und [63.4](#) ist $\exp_x : B_\rho(0) \rightarrow M$ ein lokaler Diffeomorphismus und somit auf jedem kleineren offenen Ball eine Überlagerung (denn die Fasern sind endlich). O.B.d.A. ist $L(c_0) < \rho$ (andernfalls ist $\frac{2\pi}{\sqrt{K_1}} - L(c_0) \leq L(c_0)$). Sei $c_0 : t \mapsto \exp_x(tv)$. Falls $c_s(t) \in \exp_x(B_\rho(0))$ für alle s und t , so existiert somit ein Lift $(t, s) \mapsto \tilde{c}_s(t)$. Da aber der Lift der Geodäte c_1 eine Gerade durch 0 sein muß ist das wegen $c_0 \neq c_1$ unmöglich. Somit kommt die Homotopie den Rand von $\exp_x(B_\rho(0))$ beliebig nahe, d.h. für jedes $\rho_1 < \rho$ existiert ein $s \in [0, 1]$ s.d. der Lift \tilde{c}_s existiert und einem Punkt im Abstand ρ_1 von 0 enthält. Nach [63.9b](#) hat dann die Verkettung der beiden Kurven c_s und der verkehrt durchlaufenen c_0 eine Länge $\geq 2\rho_1$, also $L(c_s) \geq 2\rho_1 - L(c_0)$. Da ρ_1 beliebig nahe an ρ war, folgt aus der Stetigkeit von $s \mapsto L(c_s)$ das Resultat. \square

63.9 Theorem [36].

Die Exponential-Abbildung jeder vollständigen zusammenhängenden Riemann-Fläche mit $K \leq 0$ ist für jedes $x \in M$ eine Überlagerung $\exp_x : T_x M \rightarrow M$. Ist also M zusätzlich einfachzusammenhängend, so ist $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ ein Diffeomorphismus und zu je zwei Punkten gibt es genau eine minimale verbindende Geodäte.

Beweis für einfach zusammenhängendes M . Wegen [63.7] existieren für $K \leq 0$ keine konjugierten Punkte und somit ist $\exp_x : T_x M \rightarrow M$ überall ein lokaler Diffeomorphismus. Nach dem Satz [62.10] von Hopf-Rinow ist \exp_x surjektiv. Nun zur Injektivität. Sei $\exp_x(v_0) = \exp_x(v_1) = p \in M$. Dann sind $c_i(t) := \exp_x(t v_i)$ Geodäten die x mit p verbinden. Da M einfach zusammenhängend ist, sind diese homotop. Wegen [63.9a] sind sie somit ident, also $v_0 = v_1$.

Nach [60, 58.7] ist die radiale verbindende Geodäte von minimaler Länge. \square

Auf allgemeinen Riemannschen Mannigfaltigkeiten sieht die Jacobi-Gleichung wie folgt aus:

$$\nabla^2 \xi + R(\xi, c')c' = 0,$$

wobei R die (in [64.2]) noch zu definierende Riemann-Krümmung bezeichnet. Die Lösungen der Jacobi-Gleichung heißen wieder Jacobi-Felder, die genau die Richtungsableitung von 1-Parameter-Variationen der Geodäte c sind. Die Darstellung für Jacobi-Felder ξ mit $\xi(0) = 0$ via der Ableitung von $\exp_{c(0)}$ gilt genau wie im 2-Dimensionalen. Der Randwert dieser Jacobi-Felder beschreibt den Kern der Exponentialabbildung, und somit konjugierte Punkte. Ebenso gilt dann [63.6] und [63.8] nach Myres 1935 und [63.9] nach E. Cartan 1928, wobei K durch die Schnittkrümmung (siehe [64.7]) zu ersetzen ist Für Beweise dieser Resultate siehe z.B. [66, 6.14, 6.15, 6.16].

64. Riemann-, Ricci- und Schnittkrümmung

Seien 2 Vektorfelder ξ und η im \mathbb{R}^n gegeben. Dann gilt für die übliche Ableitung des Vektorfelds ξ in Richtung η , die wir hier auch mit $D_\eta \xi : x \mapsto \xi'(x)(\eta(x))$ bezeichnen wollen:

$$[D_\xi, D_\eta] := D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi = D_{[\xi, \eta]},$$

denn

$$\begin{aligned} (D_\xi \circ D_\eta - D_\eta \circ D_\xi) \left((\zeta^i)_{i=1}^m \right) &= (\xi(\eta(\zeta^i)) - \eta(\xi(\zeta^i)))_{i=1}^m \\ &= [\xi, \eta](\zeta^i)_{i=1}^m = D_{[\xi, \eta]} \left((\zeta^i)_{i=1}^m \right) \end{aligned}$$

64.1 Satz (Godazzi-Mainardi-Gleichung).

Sei M eine Hyperfläche im \mathbb{R}^n und seien ξ, η, ζ Vektorfelder im \mathbb{R}^n , welche längs M tangential an M sind. Dann ist

1. GAUSS-GLEICHUNG: $\nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi, \eta]} \zeta = \langle L \eta, \zeta \rangle L \xi - \langle L \xi, \zeta \rangle L \eta$,
2. GODAZZI-MAINARDI-GLEICHUNG: $\nabla_\xi L \eta - \nabla_\eta L \xi = L[\xi, \eta]$.

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
0 &= D_\xi D_\eta \zeta - D_\eta D_\xi \zeta - D_{[\xi, \eta]} \zeta \\
&\stackrel{[60, 62.2]}{=} D_\xi \left(\nabla_\eta \zeta - \langle L\eta, \zeta \rangle \nu \right) - D_\eta \left(\nabla_\xi \zeta - \langle L\xi, \zeta \rangle \nu \right) - D_{[\xi, \eta]} \zeta \\
&= D_\xi \nabla_\eta \zeta - \xi(\langle L\eta, \zeta \rangle) \nu - \langle L\eta, \zeta \rangle D_\xi \nu \\
&\quad - D_\eta \nabla_\xi \zeta + \eta(\langle L\xi, \zeta \rangle) \nu + \langle L\xi, \zeta \rangle D_\eta \nu \\
&\quad - D_{[\xi, \eta]} \zeta \\
&\stackrel{[60, 62.2]}{=} \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \langle L\xi, \nabla_\eta \zeta \rangle \nu - \xi(\langle L\eta, \zeta \rangle) \nu - \langle L\eta, \zeta \rangle L\xi \\
&\quad - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta + \langle L\eta, \nabla_\xi \zeta \rangle \nu + \eta(\langle L\xi, \zeta \rangle) \nu + \langle L\xi, \zeta \rangle L\eta \\
&\quad - \nabla_{[\xi, \eta]} \zeta + \langle L[\xi, \eta], \zeta \rangle \nu.
\end{aligned}$$

Der Tangentialanteil hiervon ist die Gauß-Gleichung:

$$0 = \nabla_\xi \nabla_\eta \zeta - \nabla_\eta \nabla_\xi \zeta - \nabla_{[\xi, \eta]} \zeta - \langle L\eta, \zeta \rangle L\xi + \langle L\xi, \zeta \rangle L\eta$$

Und der Normalanteil ist die Godazzi-Mainardi-Gleichung:

$$\begin{aligned}
0 &= -\langle \nabla_\eta \zeta, L\xi \rangle - \xi(\langle L\eta, \zeta \rangle) + \langle \nabla_\xi \zeta, L\eta \rangle + \eta(\langle L\xi, \zeta \rangle) + \langle L[\xi, \eta], \zeta \rangle \\
&= \left\langle -\nabla_\xi(L\eta) + \nabla_\eta(L\xi) + L[\xi, \eta], \zeta \right\rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

64.2 Definition (Riemann-Krümmung)

Die RIEMANN-KRÜMMUNG $R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow L(\mathfrak{X}(M), \mathfrak{X}(M))$ einer Riemann-Mannigfaltigkeit ist definiert durch die linke Seite der Gauß-Gleichung [64.1.1](#):

$$R(\xi, \eta) := [\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]}.$$

Die Motivation hierfür ist, daß die rechte Seite auf $\zeta := \eta$ angewandt und ins innere Produkt mit ξ genommen für orthonormale Vektoren ξ und η gerade die Gaußkrümmung liefert:

$$\langle \langle L\eta, \eta \rangle L\xi - \langle L\xi, \eta \rangle L\eta, \xi \rangle = \langle L\eta, \eta \rangle \langle L\xi, \xi \rangle - \langle L\xi, \eta \rangle \langle L\eta, \xi \rangle = \det(L) = K.$$

64.3 Lemma (Die Riemann-Krümmung ist ein Tensorfeld).

Die Riemann-Krümmung ist ein 3-fach ko- und 1-fach kontravariantes Tensorfeld auf M , d.h. $R \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M \otimes T^*M \otimes TM)$.

(Koordinatenfreier) Beweis. Dazu muß man nur zeigen, daß die Abbildung $(\xi, \eta, \zeta) \mapsto R(\xi, \eta)(\zeta)$ in allen Variablen $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -homogen ist, vgl. mit dem Beweis von [31.10](#).

$$\begin{aligned}
R(f\xi, \eta) &= [\nabla_{f\xi}, \nabla_\eta] - \nabla_{[f\xi, \eta]} \\
&\stackrel{[60, 29.2.3]}{=} [f\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{f[\xi, \eta] - \eta(f)\xi} \\
&= (f\nabla_\xi) \nabla_\eta - \nabla_\eta (f\nabla_\xi) - f\nabla_{[\xi, \eta]} + \eta(f) \nabla_\xi \\
&\stackrel{[60, 62.4.3]}{=} f\nabla_\xi \nabla_\eta - f\nabla_\eta \nabla_\xi - \eta(f) \nabla_\xi - f\nabla_{[\xi, \eta]} + \eta(f) \nabla_\xi \\
&= f([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]}) + 0 \\
&= fR(\xi, \eta).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R(\xi, \eta)(f\zeta) &= ([\nabla_\xi, \nabla_\eta] - \nabla_{[\xi, \eta]})(f\zeta) \\
&\stackrel{[60, 62.4.3]}{=} \nabla_\xi(f\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\zeta) - \nabla_\eta(f\nabla_\xi\zeta + \xi(f)\zeta) \\
&\quad - f\nabla_{[\xi, \eta]}\zeta - [\xi, \eta](f)\zeta \\
&\stackrel{[60, 62.4.3]}{=} f\nabla_\xi\nabla_\eta\zeta + \xi(f)\nabla_\eta\zeta + \eta(f)\nabla_\xi\zeta + \xi(\eta(f))\zeta \\
&\quad - f\nabla_\eta\nabla_\xi\zeta - \eta(f)\nabla_\xi\zeta - \xi(f)\nabla_\eta\zeta - \eta(\xi(f))\zeta \\
&\quad - f\nabla_{[\xi, \eta]}\zeta - \xi(\eta(f))\zeta + \eta(\xi(f))\zeta \\
&= f(\nabla_\xi\nabla_\eta - \nabla_\eta\nabla_\xi - \nabla_{[\xi, \eta]})\zeta \\
&= fR(\xi, \eta)(\zeta). \quad \square
\end{aligned}$$

Koordinatenbeweis.

$$\begin{aligned}
R(X, Y)Z &= \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X, Y]}Z \\
&\stackrel{[60, 62.5]}{=} \nabla_X \left(\sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j Y^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\
&\quad - \nabla_Y \left(\sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j X^k \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \right) \\
&\quad - \nabla_{\sum_{i, j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \frac{\partial}{\partial u^j}} Z \\
&\stackrel{[60, 62.4.3]}{=} \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j Y^k \right) \nabla_X \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad + X \left(\sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j Y^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j X^k \right) \nabla_Y \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - Y \left(\sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j, k} \Gamma_{j, k}^i Z^j X^k \right) \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&\quad - \sum_{i, j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} Z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \underline{\underline{[60, 62.4.2]}} \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \sum_l X^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& + \sum_i \left(\sum_k X \left(\frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \right) Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X(Y^k) \right. \\
& + \sum_{j,k} X(\Gamma_{j,k}^i) Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i X(Z^j) Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X(Y^k) \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \sum_l Y^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^l}} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left(\sum_k Y \left(\frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \right) X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y(X^k) \right. \\
& + \sum_{j,k} Y(\Gamma_{j,k}^i) Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Y(Z^j) X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y(X^k) \left. \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \sum_l \left(Z^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
& \underline{\underline{[60, 62.6]}} \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j Y^k \right) \sum_l X^l \sum_p \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& + \sum_i \left(\sum_k \sum_p X^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p} Y^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \right. \\
& + \sum_{j,k} \sum_p X^p \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} Z^j Y^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i \sum_p X^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} Y^k \\
& + \left. \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j \sum_p X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_i \left(\sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j X^k \right) \sum_l Y^l \sum_p \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
& - \sum_i \left(\sum_k \sum_p Y^p \frac{\partial \frac{\partial Z^i}{\partial u^k}}{\partial u^p} X^k + \sum_k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \right. \\
& + \sum_{j,k} \sum_p Y^p \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} Z^j X^k + \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i \sum_p Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} X^k \\
& + \left. \sum_{j,k} \Gamma_{j,k}^i Z^j \sum_p Y^p \frac{\partial X^k}{\partial u^p} \right) \frac{\partial}{\partial u^i} \\
& - \sum_{i,j} \left(X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} - Y^i \frac{\partial X^j}{\partial u^i} \right) \sum_l \left(Z^l \sum_p \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i,k,l,p} X^l Y^k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,k,l,p} X^l Y^k Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,k,p} X^p Y^k \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,k,l,p} X^k Y^l \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k Y^l Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_{i,k,p} X^k Y^p \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&- \sum_{i,j,l,p} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_{i,j,l} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&= \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p Z^j \frac{\partial \Gamma_{j,k}^i}{\partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,l,p} X^l Y^k Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,l,p} X^k Y^l Z^j \Gamma_{j,k}^i \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,k,l,p} X^l Y^k \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{l,i}^p \frac{\partial}{\partial u^p} - \sum_{i,j,k,p} X^k Y^p \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p Y^k \frac{\partial Z^j}{\partial u^p} \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,l,p} X^k Y^l \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,j,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l,p} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&- \sum_{i,j,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p Z^j \Gamma_{j,k}^i \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l,p} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i Z^l \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&+ \sum_{i,k,p} X^p \frac{\partial Y^k}{\partial u^p} \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,j,l} X^i \frac{\partial Y^j}{\partial u^i} \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&- \sum_{i,k,p} \frac{\partial X^k}{\partial u^p} Y^p \frac{\partial Z^i}{\partial u^k} \frac{\partial}{\partial u^i} + \sum_{i,j,l} \frac{\partial X^j}{\partial u^i} Y^i \frac{\partial Z^l}{\partial u^j} \frac{\partial}{\partial u^l} \\
&+ \sum_{i,k,p} X^p Y^k \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i} - \sum_{i,k,p} X^k Y^p \frac{\partial^2 Z^i}{\partial u^k \partial u^p} \frac{\partial}{\partial u^i}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_p \sum_{i,j,k} X^i Y^j Z^k \underbrace{\left(\frac{\partial \Gamma_{k,j}^p}{\partial u^i} - \frac{\partial \Gamma_{k,i}^p}{\partial u^j} + \sum_l \left(\Gamma_{k,j}^l \Gamma_{i,l}^p - \Gamma_{k,i}^l \Gamma_{l,j}^p \right) \right)}_{=: R_{i,j,k}^p} \frac{\partial}{\partial u^p} \\
&= \sum_p \sum_{i,j,k} X^i Y^j Z^k R_{i,j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^p} \quad \square
\end{aligned}$$

64.4 Bemerkung

In lokalen Koordinaten haben wir

$$\begin{aligned}
(1) \quad R &= \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k}^l du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes \frac{\partial}{\partial u^l} \\
\text{mit } R_{i,j,k}^l &= du^l \left(R \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \right) \\
&= \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{j,k}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{i,k}^l + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,p}^l - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,p}^l)
\end{aligned}$$

Beziehungweise für $R(\xi, \eta, \zeta, \chi) := \langle R(\xi, \eta) \zeta, \chi \rangle$

$$\begin{aligned}
(2) \quad R &= \sum_{i,j,k,l} R_{i,j,k,l} du^i \otimes du^j \otimes du^k \otimes du^l \\
\text{mit } R_{i,j,k,l} &= \left\langle R \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \middle| \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle = \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) \\
&\quad + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q} (\Gamma_{i,k,q} \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k,q} \Gamma_{i,l,p}).
\end{aligned}$$

Beweis. Wir rechnen wie folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=1}^m R_{i,j,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} &= R \left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} := \left(\left[\nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \right] - \nabla_{\left[\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right]} \right) \frac{\partial}{\partial u^k} \\
&\stackrel{[60, 62.6]}{=} \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \left(\sum_{l=1}^m \Gamma_{j,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \left(\sum_{l=1}^m \Gamma_{i,k}^l \frac{\partial}{\partial u^l} \right) + 0 \\
&\stackrel{[60, 62.4.3]}{=} \sum_{l=1}^m \left(\Gamma_{j,k}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^i}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&\quad - \sum_{l=1}^m \left(\Gamma_{i,k}^l \nabla_{\frac{\partial}{\partial u^j}} \frac{\partial}{\partial u^l} + \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&\stackrel{[60, 62.6]}{=} \sum_{l=1}^m \left(\Gamma_{j,k}^l \sum_{p=1}^m \Gamma_{i,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial}{\partial u^i} (\Gamma_{j,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&\quad - \sum_{l=1}^m \left(\Gamma_{i,k}^l \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,l}^p \frac{\partial}{\partial u^p} + \frac{\partial}{\partial u^j} (\Gamma_{i,k}^l) \frac{\partial}{\partial u^l} \right) \\
&= \sum_{l=1}^m \left(\sum_{p=1}^m (\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,p}^l - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,p}^l) + \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{j,k}^l - \frac{\partial}{\partial u^j} \Gamma_{i,k}^l \right) \frac{\partial}{\partial u^l}.
\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert also:

$$R_{i,j,k}^l = \frac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma_{j,k}^l) - \frac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma_{i,k}^l) + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,p}^l - \Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,p}^l).$$

Nun berechnen wir

$$R_{i,j,k,l} := \left\langle R\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle = \left\langle \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^p}, \frac{\partial}{\partial u^l} \right\rangle = \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l}$$

Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^m \frac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma_{j,k}^p) g_{p,l} &= \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p g_{p,l} \right) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p \frac{\partial}{\partial u^i}(g_{p,l}) \\ &\stackrel{[60, 62.6]}{=} \frac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma_{j,k,l}) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p (\Gamma_{i,p,l} + \Gamma_{i,l,p}). \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} R_{i,j,k,l} &= \sum_{p=1}^m R_{i,j,k}^p g_{p,l} \\ &= \sum_{p=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma_{j,k}^p) - \frac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma_{i,k}^p) + \sum_{q=1}^m (\Gamma_{j,k}^q \Gamma_{i,q}^p - \Gamma_{i,k}^q \Gamma_{j,q}^p) \right) g_{p,l} \\ &= \frac{\partial}{\partial u^i}(\Gamma_{j,k,l}) - \sum_{p=1}^m \Gamma_{j,k}^p \underbrace{(\Gamma_{i,p,l} + \Gamma_{i,l,p})}_{(1)} - \frac{\partial}{\partial u^j}(\Gamma_{i,k,l}) + \sum_{p=1}^m \Gamma_{i,k}^p \underbrace{(\Gamma_{j,p,l} + \Gamma_{j,l,p})}_{(3)} \underbrace{+ \Gamma_{j,l,p}}_{(4)} \\ &\quad + \sum_{q=1}^m \underbrace{(\Gamma_{j,k}^q \Gamma_{i,q,l} - \Gamma_{i,k}^q \Gamma_{j,q,l})}_{(1)} \underbrace{+ \Gamma_{j,q,l}}_{(3)} \\ &\stackrel{[60, 62.6]}{=} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^i} \left(\frac{\partial}{\partial u^j} g_{k,l} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{j,k} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{\partial}{\partial u^i} g_{k,l} + \frac{\partial}{\partial u^k} g_{l,i} - \frac{\partial}{\partial u^l} g_{i,k} \right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^m \underbrace{(\Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l,p})}_{(4)} \underbrace{+ \Gamma_{j,l,p}}_{(2)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m g^{p,q} (\Gamma_{i,k,q} \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k,q} \Gamma_{i,l,p}). \quad \square \end{aligned}$$

64.5 Lemma (Symmetrie der Riemann-Krümmung).

Die Riemann-Krümmung erfüllt folgende Identitäten:

1. $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0$
2. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle = 0$
3. $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle$
4. $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$
5. $(\nabla_Z R)(X, Y, W) + (\nabla_X R)(Y, Z, W) + (\nabla_Y R)(Z, X, W) = 0.$

Die Gleichungen 4 und 5 heißen 1.te und 2.te BIANCHI IDENTITÄT.

Beweis.

1 ist klar wegen der Definition $R(X, Y) := \nabla_X \nabla_Y - \nabla_Y \nabla_X - \nabla_{[X, Y]}$.

2 ist äquivalent zu $\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0$ für alle X, Y, Z . Es ist:

$$\begin{aligned} R(X, Y, Z, Z) &= \underbrace{\langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z \rangle}_{X \langle \nabla_Y Z, Z \rangle - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle} - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\ &= X \left(\frac{1}{2} Y(\langle Z, Z \rangle) \right) - \langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z \rangle - Y \left(\frac{1}{2} X(\langle Z, Z \rangle) \right) + \langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle \\ &= \frac{1}{2} [X, Y] \langle Z, Z \rangle - 0 - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, Z \rangle = 0 \end{aligned}$$

4 Nach [60, 62.4] gilt $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$ und durch Anwenden von ∇_X erhalten wir:

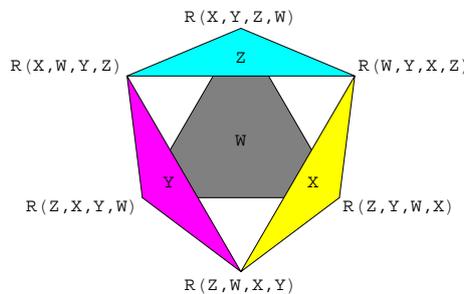
$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Y, Z]} X = \nabla_X [Y, Z] - \nabla_{[Y, Z]} X = [X, [Y, Z]]$$

Der zyklische Ausdruck läßt sich nun wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \\ &= \underbrace{\nabla_X \nabla_Y Z}_{(1)} - \underbrace{\nabla_Y \nabla_X Z}_{(2)} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]} Z}_{(3)} \\ &\quad + \underbrace{\nabla_Y \nabla_Z X}_{(2)} - \underbrace{\nabla_Z \nabla_Y X}_{(3)} - \underbrace{\nabla_{[Y, Z]} X}_{(1)} \\ &\quad + \underbrace{\nabla_Z \nabla_X Y}_{(3)} - \underbrace{\nabla_X \nabla_Z Y}_{(1)} - \underbrace{\nabla_{[Z, X]} Y}_{(2)} \\ &= \underbrace{[X, [Y, Z]]}_{(1)} + \underbrace{[Y, [Z, X]]}_{(2)} + \underbrace{[Z, [X, Y]]}_{(3)} \\ &= 0 \quad (\text{wegen der Jacobi-Identität}). \end{aligned}$$

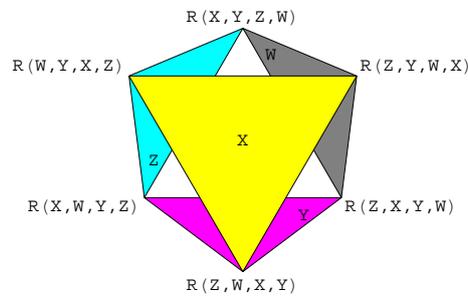
3 folgt rein algebraisch aus **1**, **2** und **4**:

Man setzt $R(X, Y, Z, W) := \langle R(X, Y)Z, W \rangle$. Nun betrachtet man einen Oktaeder und bezeichne 4 der Seitenflächen (die sich nur in Ecken schneiden) mit X, Y, Z, W .

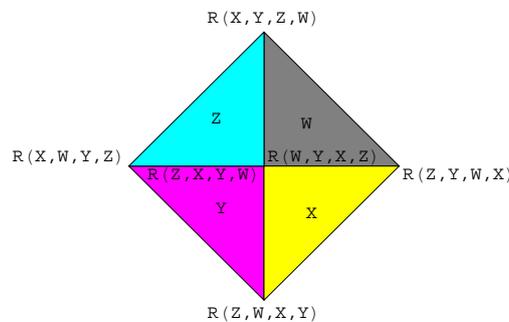


Die Ecken des Oktaeders, welche z.B. der Schnitt der Flächen X und Y ist, wird mit $R(Z, W, X, Y)$ bezeichnet, da von dieser Ecke aus betrachtet die Flächen X, Z, Y, W aufeinander folgen. Wegen **1** und **2** ist es egal, von welcher der beiden angrenzenden Flächen X oder Y aus man zu zählen beginnt.

Nun beachte man, daß die Summen der Ecken der Dreiecke X, Y, Z, W wegen **4** Null sind.



Zählt man diese Summen für die Dreiecke Z und W zusammen und zieht jene für X und Y ab, so erhält man, daß das Doppelte von der Differenz aus der Ecke $W \cap Z$ und der Ecke $X \cap Y$ Null ist, d.h. **3** gilt.



In Detail bedeutet dies:

$$\begin{aligned}
(+)\quad & \underbrace{R(X, Y, Z, W)}_{(1)} + \underbrace{R(Y, Z, X, W)}_{(2)} + \underbrace{R(Z, X, Y, W)}_{(3)} = 0 \\
(-)\quad & \underbrace{R(W, X, Y, Z)}_{(4)} + \underbrace{R(X, Y, W, Z)}_{(1)} + \underbrace{R(Y, W, X, Z)}_{(5)} = 0 \\
(-)\quad & \underbrace{R(Z, W, X, Y)}_{(6)} + \underbrace{R(W, X, Z, Y)}_{(4)} + \underbrace{R(X, Z, W, Y)}_{(3)} = 0 \\
(+)\quad & \underbrace{R(Y, Z, W, X)}_{(2)} + \underbrace{R(Z, W, Y, X)}_{(6)} + \underbrace{R(W, Y, Z, X)}_{(5)} = 0 \\
& \Rightarrow \underbrace{2R(X, Y, Z, W)}_{(1)} - \underbrace{2R(Z, W, X, Y)}_{(6)} = 0
\end{aligned}$$

5 Um diesem Punkt überhaupt Sinn zu geben, muß man ∇_Z auf Tensorfelder ausdehnen. Das geht mittels Produkt-Regel, i.e.

$$\begin{aligned}
(\nabla_Z R)(X, Y, W) &:= \\
&= \nabla_Z(R(X, Y)W) - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W - R(X, Y)\nabla_Z W \\
&= \nabla_Z(R(X, Y)W) + R(Y, \nabla_Z X)W - R(X, \nabla_Y Z + [Z, Y])W - R(X, Y)\nabla_Z W.
\end{aligned}$$

Mit $\sum_{\text{zykl.}}$ bezeichnen wir die zyklische Summe bezüglich der Variablen X, Y und Z . Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{zykl.}} (\nabla_Z R)(X, Y, W) &= \\
&= - \sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z(R(X, Y)W) - \sum_{\text{zykl.}} R(X, -[Y, Z])W - \sum_{\text{zykl.}} R(X, Y)\nabla_Z W \\
&= \sum_{\text{zykl.}} \nabla_Z \left(\underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y]}_{(1)} - \underbrace{\nabla_{[X, Y]}}_{(4)} \right) W \\
&\quad + \sum_{\text{zykl.}} \left(\underbrace{[\nabla_X, \nabla_{[Y, Z]}]}_{(4)} W - \underbrace{\nabla_{[X, [Y, Z]]}}_{(3)} W \right) \\
&\quad - \sum_{\text{zykl.}} \left(\underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y] \nabla_Z}_{(2)} W - \underbrace{\nabla_{[X, Y]} \nabla_Z}_{(4)} W \right) \\
&= - \underbrace{\nabla_{\sum_{\text{zykl.}} [X, [Y, Z]]}}_{(3)} W \\
&\quad + \sum_{\text{zykl.}} \left(\underbrace{\nabla_Z [\nabla_X, \nabla_Y]}_{(1)} W - \underbrace{[\nabla_X, \nabla_Y] \nabla_Z}_{(2)} W \right) + \underbrace{0}_{(4)} \\
&= 0 + \left(\sum_{\text{zykl.}} [[\nabla_X, \nabla_Y], \nabla_Z] \right) W \\
&= 0 \quad \text{wegen der Jacobi-Identität.} \quad \square
\end{aligned}$$

64.6 Folgerung (Polarisierungsformel).

Für die Riemannkrümmung gilt:

$$\begin{aligned}
4! R(X, Y, Z, W) &= \\
&= -R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) + R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \\
&\quad + R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) - R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \\
&\quad + R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \\
&\quad - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y)
\end{aligned}$$

Beweis. Es ist

$$\begin{aligned}
(6) \quad R(X, Y+Z, Y+Z, X) - R(X, Y-Z, Y-Z, X) &= \\
&= 2 \left(R(X, Y, Z, X) + R(X, Z, Y, X) \right) \\
&\stackrel{\boxed{64.5.1}, \boxed{64.5.2}}{=} 2 \left(R(X, Y, Z, X) + R(Z, X, X, Y) \right) \\
&\stackrel{\boxed{64.5.3}}{=} 4 R(X, Y, Z, X)
\end{aligned}$$

und weiters

$$\begin{aligned}
(7) \quad R(X+W, Y, Z, X+W) - R(X-W, Y, Z, X-W) &= \\
&= 2 \left(R(X, Y, Z, W) + R(W, Y, Z, X) \right)
\end{aligned}$$

Also ist

$$\begin{aligned}
(8) \quad R(Y, Z, X, W) &= \\
&\stackrel{\boxed{64.5.1}, \boxed{64.5.2}}{=} R(Z, Y, W, X) \\
&\stackrel{\boxed{7}}{=} -R(X, Y, W, Z) + \frac{1}{2} \left(R(Z+X, Y, W, Z+X) - R(Z-X, Y, W, Z-X) \right) \\
&\stackrel{\boxed{64.5.2}, \boxed{6}}{=} R(X, Y, Z, W) \\
&\quad + \frac{1}{8} \left(R(Z+X, Y+W, Y+W, Z+X) - R(Z+X, Y-W, Y-W, Z+X) \right. \\
&\quad \left. - R(Z-X, Y+W, Y+W, Z-X) + R(Z-X, Y-W, Y-W, Z-X) \right) \\
(9) \quad R(Z, X, Y, W) &= \\
&\stackrel{\boxed{64.5.2}}{=} -R(Z, X, W, Y) \\
&\stackrel{\boxed{7}}{=} R(Y, X, W, Z) - \frac{1}{2} \left(R(Z+Y, X, W, Z+Y) - R(Z-Y, X, W, Z-Y) \right) \\
&\stackrel{\boxed{64.5.1}, \boxed{64.5.2}, \boxed{6}}{=} R(X, Y, Z, W) \\
&\quad - \frac{1}{8} \left(R(Z+Y, X+W, X+W, Z+Y) - R(Z+Y, X-W, X-W, Z+Y) \right. \\
&\quad \left. - R(Z-Y, X+W, X+W, Z-Y) + R(Z-Y, X-W, X-W, Z-Y) \right)
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
& 0 \stackrel{\boxed{64.5.4}}{=} R(X, Y, Z, W) + \overbrace{R(Y, Z, X, W)}^{\boxed{8}} + \overbrace{R(Z, X, Y, W)}^{\boxed{9}} \\
& = R(X, Y, Z, W) \\
& \quad + R(X, Y, Z, W) \\
& \quad + \frac{1}{8} \left(R(Z + X, Y + W, Y + W, Z + X) - R(Z + X, Y - W, Y - W, Z + X) \right. \\
& \quad \left. - R(Z - X, Y + W, Y + W, Z - X) + R(Z - X, Y - W, Y - W, Z - X) \right) \\
& \quad + R(X, Y, Z, W) \\
& \quad - \frac{1}{8} \left(R(Z + Y, X + W, X + W, Z + Y) - R(Z + Y, X - W, X - W, Z + Y) \right. \\
& \quad \left. - R(Z - Y, X + W, X + W, Z - Y) + R(Z - Y, X - W, X - W, Z - Y) \right)
\end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned}
4! R(X, Y, Z, W) & = \\
& = -R(Z + X, Y + W, Y + W, Z + X) + R(Z + X, Y - W, Y - W, Z + X) \\
& \quad + R(Z - X, Y + W, Y + W, Z - X) - R(Z - X, Y - W, Y - W, Z - X) \\
& \quad + R(Z + Y, X + W, X + W, Z + Y) - R(Z + Y, X - W, X - W, Z + Y) \\
& \quad - R(Z - Y, X + W, X + W, Z - Y) + R(Z - Y, X - W, X - W, Z - Y) \quad \square
\end{aligned}$$

64.7 Definition.

Wir wollen nun die Ausdrücke der Form $R(X, Y, Y, X)$ in der Polarisierungsformel [64.6](#) weiter untersuchen. Sei dazu

$$\begin{aligned}
X' & = aX + bY \\
Y' & = cX + dY \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Wegen der Schiefsymmetrie [64.5.1](#) und [64.5.2](#) ist

$$R(X', Y', Y', X') = \det(A) R(X, Y, Y, X) = \det(A)^2 R(X, Y, Y, X).$$

Das gleiche Transformationsverhalten hat auch $|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2$, da dies das Quadrat der Fläche des von X und Y erzeugten Parallelogramms ist, siehe dazu [60](#), [53.4](#). Folglich ist der Ausdruck

$$K(F) := \frac{R(X, Y, Y, X)}{|X|^2 |Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$$

unabhängig von der Wahl eines Erzeugendensystems des von X und Y erzeugten 2-dimensionalen Teilraums $F := \langle \{X, Y\} \rangle$ von $T_p M$. Diese Zahl heißt die SCHNITTKRÜMMUNG von F . Die Polarisierungsformel [64.6](#) zeigt, daß die Riemannkrümmung sich aus der Schnittkrümmung berechnen läßt.

64.8 Satz (Gauß-Krümmung versus Schnitt-Krümmung).

Für jede Riemann-Fläche M ist die Gaußkrümmung ident mit der Schnittkrümmung (des ganzen 2-dimensionalen Tangentialraums).

Beweis für Hyperflächen im \mathbb{R}^3 . Sei (ξ_x, η_x) eine Orthonormalbasis von $T_x M$. Dann ist

$$\begin{aligned} K(T_x M) &:= \langle R_x(\xi_x, \eta_x)\eta_x, \xi_x \rangle \\ &\stackrel{\boxed{64.1}}{=} \langle \langle L_x \eta_x, \eta_x \rangle L_x \xi_x - \langle L_x \xi_x, \eta_x \rangle L_x \eta_x, \xi_x \rangle \\ &= \langle L_x \eta_x, \eta_x \rangle \langle L_x \xi_x, \xi_x \rangle - \langle L_x \xi_x, \eta_x \rangle \langle L_x \eta_x, \xi_x \rangle \\ &= \det(L_x) = K_x \end{aligned}$$

Beweis für abstrakte Riemann-Flächen.

Es seien (u^1, u^2) lokale Koordinaten auf M . Dann ist

$$\begin{aligned} D^2 \cdot K(T_x M) &:= D^2 \cdot \frac{R\left(\frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^2}, \frac{\partial}{\partial u^1}\right)}{\left|\frac{\partial}{\partial u^1}\right|^2 \left|\frac{\partial}{\partial u^2}\right|^2 - \left|\left\langle \frac{\partial}{\partial u^1}, \frac{\partial}{\partial u^2} \right\rangle\right|^2} =: R_{1,2,2,1} \\ &\stackrel{\boxed{64.4}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1} g_{2,2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2} g_{1,1} \right) \\ &\quad + g^{1,1} (\Gamma_{1,2,1} \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,1} \Gamma_{1,1,1}) \\ &\quad + g^{1,2} (\Gamma_{1,2,2} \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2,2} \Gamma_{1,1,1}) \\ &\quad + g^{2,1} (\Gamma_{1,2,1} \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,1} \Gamma_{1,1,2}) \\ &\quad + g^{2,2} (\Gamma_{1,2,2} \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2,2} \Gamma_{1,1,2}) \\ &\stackrel{\boxed{60, 58.1}, \boxed{60, 62.6}}{=} \frac{1}{2} (F_{1,2} - G_{1,1} + F_{2,1} - E_{2,2}) \\ &\quad + \frac{G}{D^2} (E_2 E_2 - (2F_2 - G_1) E_1) \\ &\quad - \frac{F}{D^2} (G_1 E_2 - G_2 E_1) \\ &\quad - \frac{F}{D^2} (E_2 G_1 - (2F_2 - G_1)(2F_1 - E_2)) \\ &\quad + \frac{E}{D^2} (G_1 G_1 - G_2 (2F_1 - E_2)) \\ &= \frac{E}{4D^2} (E_2 G_2 - 2F_1 G_2 + G_1^2) \\ &\quad + \frac{F}{4D^2} (E_1 G_2 - E_2 G_1 - 2E_2 F_2 + 4F_1 F_2 - 2F_1 G_1) \\ &\quad + \frac{G}{4D^2} (E_1 G_1 - 2E_1 F_2 + E_2^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} (E_{2,2} - 2F_{1,2} + G_{1,1}) \\ &\stackrel{\boxed{60, 53.7}}{=} D^2 K \end{aligned}$$

Oder etwas anders gerechnet:

$$\begin{aligned} R_{i,j,k,l} &\stackrel{\boxed{64.4}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^k} g_{l,j} - \frac{\partial^2}{\partial u^i \partial u^l} g_{j,k} + \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^l} g_{i,k} - \frac{\partial^2}{\partial u^j \partial u^k} g_{l,i} \right) \\ &\quad + \sum_{p=1}^m (\Gamma_{i,k}^p \Gamma_{j,l,p} - \Gamma_{j,k}^p \Gamma_{i,l,p}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{1,2,2,1} & \stackrel{\boxed{64.4}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^2} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^1 \partial u^1} g_{2,2} + \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^1} g_{1,2} - \frac{\partial^2}{\partial u^2 \partial u^2} g_{1,1} \right) \\
& + (\Gamma_{1,2}^1 \Gamma_{2,1,1} - \Gamma_{2,2}^1 \Gamma_{1,1,1}) \\
& + (\Gamma_{1,2}^2 \Gamma_{2,1,2} - \Gamma_{2,2}^2 \Gamma_{1,1,2}) \\
& \stackrel{[60, 58.1], [60, 62.6]}{=} \frac{1}{2} (F_{1,2} - G_{1,1} + F_{2,1} - E_{2,2}) \\
& + \frac{E_2 G - G_1 F}{2D^2} \cdot \frac{E_2}{2} \\
& - \frac{2 F_2 G - G_1 G - G_2 F}{2D^2} \cdot \frac{E_1}{2} \\
& + \frac{-E_2 F + G_1 E}{2D^2} \cdot \frac{G_1}{2} \\
& - \frac{-2 F_2 F + G_1 F + G_2 E}{2D^2} \cdot \frac{2 F_1 - E_2}{2} \\
& = \frac{E}{4D^2} (E_2 G_2 - 2F_1 G_2 + G_1^2) \\
& + \frac{F}{D^2} (E_1 G_2 - E_2 G_1 - 2E_2 F_2 + 4F_1 F_2 - 2F_1 G_1) \\
& + \frac{G}{D^2} (E_1 G_1 - 2E_1 F_2 + E_2^2) \\
& - \frac{1}{2} (E_{2,2} - 2F_{1,2} + G_{1,1}) \\
& \stackrel{[60, 53.7]}{=} D^2 K. \quad \square
\end{aligned}$$

64.9 Definition (Normalkoordinaten)

Unter RIEMANNSCHEN NORMALKOORDINATEN versteht man die Parametrisierung

$$\varphi : (u^1, \dots, u^m) \mapsto \exp_p \left(\sum_{i=1}^m u^i X_i \right)$$

für eine Orthonormalbasis (X_1, \dots, X_m) von $T_p M$.

64.10 Lemma (Christoffelsymbole in Normalkoordinaten).

In Riemannschen Normalkoordinaten verschwinden alle Christoffelsymbole bei p .

Beweis. Offensichtlich gilt

$$g_{i,j}(p) := \left\langle \frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j} \right\rangle(p) = \langle X_i, X_j \rangle = \delta_{i,j}.$$

Die radialen Geodäten $t \mapsto \exp_p(tX)$ erfüllen die Geodäten-Gleichung

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^m \Gamma_{i,j}^k \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0.$$

Für $u(t) := tX_j$ gilt wegen $u^k(t) = \delta_j^k t$ somit $\Gamma_{j,j}^k(p) = 0$. Für $u(t) := t(X_i + X_j)$ folgt analog $\Gamma_{i,i}^k + \Gamma_{i,j}^k + \Gamma_{j,i}^k + \Gamma_{j,j}^k = 0$ und da $\Gamma_{i,j}^k$ symmetrisch in (i, j) ist, ist $\Gamma_{i,j}^k(p) = 0$ für alle i, j, k . \square

64.11 Lemma.

Sei M eine Riemann-Mannigfaltigkeit und $F < T_x M$ ein 2-dimensionaler Teilraum. Dann ist die Schnittkrümmung $K(F)$ genau die Gauß-Krümmung der lokal durch $\exp(F)$ gegebenen Fläche.

Beweis. Wegen [64.8](#) genügt es zu zeigen, daß die Riemann-Krümmung R_N der Fläche $N := \exp(F)$ mit der Riemann-Krümmung R_M auf M übereinstimmt, wobei N durch $(t, s) \mapsto \exp_p(tX_p + sY_p)$ parametrisiert wird und die von M induzierte Metrik trägt.

Dazu wählt man Riemann-Normalkoordinaten $\varphi : (u^1, \dots, u^m) \mapsto \exp_p(\sum_{i=1}^m u^i X_i)$ für eine Orthonormalbasis (X_1, \dots, X_m) des Tangentialraums $T_p M$. Bezüglich diesen verschwinden nach [64.10](#) alle Christoffelsymbole bei p . Da die Koeffizientenfunktionen $g_{i,j}$ für M und N übereinstimmen, gilt das auch für

$$R_{i,j,k,l} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial^j \partial^l} g_{i,k} + \frac{\partial^2}{\partial^i \partial^k} g_{j,l} - \frac{\partial^2}{\partial^j \partial^k} g_{i,l} - \frac{\partial^2}{\partial^i \partial^l} g_{j,k} \right) + 0. \quad \square$$

64.12 Satz (Ungekrümmte Räume).

Für eine Riemann-Mannigfaltigkeit sind äquivalent:

1. $R = 0$.
2. M ist lokal isometrisch zum Euklidischen Raum.
3. Der Paralleltransport (siehe [60](#), [61](#)) ist lokal wegunabhängig.

Der Punkt (3) ist global nicht allgemein gültig wie das Möbiusband mit flacher Metrik zeigt.

Beweis. (1 \Rightarrow 3) Indem wir eine Karte verwenden, können wir annehmen, daß M eine offene Umgebung von 0 in \mathbb{R}^m ist, allerdings mit einer allgemeinen Riemann-Metrik g . Wir müssen zu gegebenem Anfangswert X_0 ein Vektorfeld X finden, welches längs jeder Kurve parallel ist. Dazu genügt es, daß $\nabla_{\partial_i} X = 0$ für alle $i = 1, \dots, m$ ist. Zuerst finden wir ein längs der u^1 -Achse paralleles Vektorfeld $u^1 \mapsto X(u^1, 0, \dots, 0)$. Zu jedem u^1 finden wir längs der Kurve $u^2 \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ ein paralleles Vektorfeld $u^2 \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ mit Anfangswert $X(u^1, 0, \dots, 0)$. Und somit erhalten wir ein Vektorfeld $(u^1, u^2) \mapsto X(u^1, u^2, 0, \dots, 0)$ längs der 2-Fläche $\psi : (u^1, u^2) \mapsto (u^1, u^2, 0, \dots, 0)$. Dieses erfüllt: $\nabla_{\partial_2} X = 0$ längs ψ und $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$. Es gilt $\nabla_{\partial_1} \nabla_{\partial_2} X - \nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} X = R(\partial_1, \partial_2)X = 0$, da $[\partial_s, \partial_t] = 0$ ist, weil die Flüsse $t \mapsto (t, s)$ und $s \mapsto (t, s)$ miteinander kommutieren. Somit ist $\nabla_{\partial_2} \nabla_{\partial_1} X = 0$, d.h. $\nabla_{\partial_1} X$ ist parallel längs $u^2 \mapsto \psi(u^1, u^2)$. Aus $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs $u^1 \mapsto \psi(u^1, 0)$ folgt $\nabla_{\partial_1} X = 0$ längs ψ . Es ist also X parallel längs aller Kurven in der 2-Fläche ψ .

Nun kann man obigen Prozeß fortsetzen, um das gewünschte parallele Vektorfeld X zu erhalten. Dies zeigt, daß der Paralleltransport wegunabhängig ist.

(3 \Rightarrow 2) Wählt man als Anfangswert die Vektoren einer Orthonormal-Basis von $T_0 \mathbb{R}^m$, so erhält man parallele Vektorfelder X_i , welche punktweise eine Basis bilden. Für diese gilt $[X_i, X_j] = \nabla_{X_i} X_j - \nabla_{X_j} X_i = 0$. Diese können integriert werden, um eine Karte φ zu erhalten, welche $\varphi_i = X_i$ erfüllt, siehe [60](#), [29.12](#). In dieser Karte hat die Riemann-Metrik dann aber Koeffizienten $\delta_{i,j}$ nach [60](#), [61.5.1](#), d.h. φ ist eine lokale Isometrie zwischen dem flachen \mathbb{R}^m und M .

(2 \Rightarrow 1) Da die kovariante Ableitung und somit die Riemann-Krümmung eine intrinsische Größe ist, also nur von der Riemann-Metrik abhängt, genügt es R für den Euklidischen Raum zu berechnen, dort ist aber $R = 0$ wegen der Vorbemerkung zu [64.1](#). \square

64.13 Definition (Krümmungen)

Unter der RICCI-KRÜMMUNG einer Riemann-Mannigfaltigkeit versteht man

$$\text{Ricci}(X, Y) = \text{spur}(Z \mapsto R(Z, X)(Y)) = -\text{spur}(Z \mapsto R(X, Z)(Y)).$$

In lokalen Koordinaten gilt:

$$\begin{aligned} \text{Ricci}\left(\sum_i X^i \frac{\partial}{\partial u^i}, \sum_j Y^j \frac{\partial}{\partial u^j}\right) &= \\ &= \sum_{i,j} X^i Y^j \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) \\ &= \sum_{i,j} X^i Y^j \sum_k du^k \underbrace{\left(R\left(\frac{\partial}{\partial u^k}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) \frac{\partial}{\partial u^j}\right)}_{R_{k,i,j}^k} \\ &\stackrel{\boxed{64.4.1}}{=} \sum_{i,j} X^i Y^j \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{i,j}^i - \frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{k,j}^i + \sum_p (\Gamma_{i,j}^p \Gamma_{k,p}^i - \Gamma_{k,j}^p \Gamma_{i,p}^i)\right) \end{aligned}$$

Beachte, daß Ricci : $T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ symmetrisch ist, denn

$$\begin{aligned} \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) &= \sum_k R_{k,i,j}^k \stackrel{\boxed{64.4.2}}{=} \sum_{k,l} R_{k,i,j,l} g^{l,k} \stackrel{\boxed{64.5.3}}{=} \sum_{k,l} R_{j,l,k,i} g^{l,k} \\ &\stackrel{\boxed{64.5.1}, \boxed{64.5.2}}{=} \sum_{l,k} R_{l,j,i,k} g^{k,l} = \sum_l R_{l,j,i}^l = \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^j}, \frac{\partial}{\partial u^i}\right) \end{aligned}$$

Unter der SKALARKRÜMMUNG versteht man $S := \text{spur}_g(\xi \mapsto (\text{Ricci}(\xi, -))^b)$, also von der Abbildung

$$T_x M \xrightarrow{\text{Ricci}_x^\vee} (T_x M)^* \xrightarrow{\cong} T_x M.$$

In Koordinaten ist das somit

$$\begin{aligned} S &:= \sum_{i,j} \text{Ricci}\left(\frac{\partial}{\partial u^i}, \frac{\partial}{\partial u^j}\right) g^{i,j} \\ &= \sum_{i,j} \sum_k \left(\frac{\partial}{\partial u^i} \Gamma_{k,j}^k - \frac{\partial}{\partial u^k} \Gamma_{i,j}^k + \sum_p (\Gamma_{k,j}^p \Gamma_{i,p}^k - \Gamma_{i,j}^p \Gamma_{k,p}^k)\right) g^{i,j}. \end{aligned}$$

Beachte, daß dies wegen der Symmetrieeigenschaften [64.6](#) alle nicht trivialen Spuren sind, welche man aus der Riemannkrümmung bilden kann.

64.7a Proposition.

Eine Riemann-Mannigfaltigkeit hat genau dann konstante Schnittkrümmung auf $G(2, T_p M)$, wenn für alle $X, Y, Z \in T_p M$ gilt:

$$R(X, Y)Z = K \cdot (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$$

Beweis. (\Leftarrow) Sei $R(X, Y)Z = K \cdot (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y)$ mit einer Konstanten $K \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned} K(\langle\langle X, Y \rangle\rangle) &:= \frac{g(R(X, Y)Y, X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} \\ &= \frac{g(K \cdot (g(Y, Y)X - g(X, Y)Y), X)}{g(X, X)g(Y, Y) - g(X, Y)^2} = K \end{aligned}$$

(\Rightarrow) Sei K die konstante Schnittkrümmung. Der Ausdruck

$$g(K \cdot (g(Y, Z)X - g(X, Z)Y), W) = K \cdot (g(Y, Z)g(X, W) - g(X, Z)g(Y, W))$$

hat die Eigenschaften [64.5.1](#)–[64.5.4](#) und stimmt für $Z = Y$ und $W = X$ mit $g(R(X, Y)Y, X)$ überein. Wegen [64.6](#) (wo wir nur diese Eigenschaften) verwendet haben stimmt er überhaupt mit $g(R(X, Y)Z, W)$ überein. \square

64.14 Folgerung.

Eine m -dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit habe konstante Schnittkrümmung K . Dann gilt für die Ricci- und die Skalar­krümmung:

$$\begin{aligned}\operatorname{Ricci}(X, Y) &= K \cdot (m - 1) \cdot g(X, Y) \\ S &= K \cdot (m - 1) \cdot m\end{aligned}$$

Beweis.

$$\begin{aligned}\operatorname{Ricci}(X, Y) &= \operatorname{spur}\left(Z \mapsto R(Z, X)Y\right) \\ &\stackrel{\text{64.7a}}{=} \operatorname{spur}\left(Z \mapsto K \cdot (g(X, Y)Z - g(Z, Y)X)\right) \\ &= K \cdot (m \cdot g(X, Y) - g(X, Y)) = K \cdot (m - 1) \cdot g(X, Y) \\ \text{und } S &= \operatorname{spur}\left(X \mapsto (\operatorname{Ricci}(X, -))^b\right) = \operatorname{spur}\left(X \mapsto (K \cdot (m - 1) \cdot g(X, -))^b\right) \\ &= \operatorname{spur}\left(X \mapsto K \cdot (m - 1) \cdot X\right) = K \cdot (m - 1) \cdot m. \quad \square\end{aligned}$$

66. Die Begleitbeinmethode von Cartan

66.1 Definition.

Es sei (M, g) eine m -dimensionale (PSEUDO-)RIEMANN-MANIGFALTIGKEIT, d.h. g ist eine (nicht notwendig positiv) definite Metrik auf der Mannigfaltigkeit M . Ein LOKALES m -BEIN (m -FRAME) auf einer offenen Menge $U \subseteq M$ ist ein m -Tupel von Vektorfeldern s_i auf U die punktweise (d.h. für jedes $x \in U$) eine Basis von $T_x M$ bilden. Es heißt $s = (s_1, \dots, s_m)$ ORTHONORMAL-BEIN falls $\{s_i(x)\}_i$ eine orthonormal-Basis von $T_x M$ für jedes $x \in U$ ist, d.h. $g(s_i, s_j) = \pm \delta_{i,j}$.

Lokal existieren orthonormal-Beine, denn die symmetrische definite bilinear-Form g_x auf $T_x M$ läßt sich in einer Basis (e_1, \dots, e_m) als

$$g_x\left(\sum_i v^i e_i, \sum_j w^j e_j\right) = \sum_{i \leq p} v^i w^i - \sum_{i > p} v^i w^i$$

schreiben, siehe [\[60, 14.8\]](#). Und indem wir die e_i zu lokal linear unabhängigen Vektorfeldern erweitern und auf diese Gram-Schmidt anwenden erhalten wir einen orthonormal-Rahmen.

Falls s und s' zwei m -Beine auf U sind, so ist $s'_i = \sum_{j=1}^m s_j \cdot h_i^j$ (kurz: $s' = s \cdot h$) für ein eindeutig bestimmtes $h = (h_i^j)_{i,j=1,\dots,m} \in C^\infty(U, GL(m))$.

Sei $s = (s_1, \dots, s_m)$ ein m -Bein auf U und ∇ die Levi-Civita-Ableitung. Dann existieren eindeutig bestimmte $\omega_i^j \in \Omega^1(U)$ mit

$$\nabla_\xi s_i = \sum_j s_j \cdot \omega_i^j(\xi), \text{ kurz: } \nabla_\xi s = s \cdot \omega(\xi) \text{ bzw. } \nabla s = s \cdot \omega$$

wobei $\omega = (\omega_i^j)_{i,j=1,\dots,m} \in \Omega^1(U, L(m))$ ZUSAMMENHANGSMATRIX VON ∇ bzgl. s heißt.

66.2 Lemma.

Es sei $\eta = \sum_j s_j \eta^j$ ein Vektorfeld auf U . Dann ist

$$\nabla \eta = \sum_k s_k \cdot \left(\sum_j \omega_j^k \cdot \eta^j + d\eta^k \right) = s \cdot \omega \cdot \eta + s \cdot d\eta.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \eta &= \nabla_\xi \left(\sum_j s_j \eta^j \right) = \sum_j \left((\nabla_\xi s_j) \cdot \eta^j + s_j \cdot \xi(\eta^j) \right) \\ &= \sum_j \left(\sum_k s_k \cdot \omega_j^k(\xi) \cdot \eta^j + s_j \cdot d\eta^j(\xi) \right) = \sum_k s_k \cdot \left(\sum_j \omega_j^k \cdot \eta^j + d\eta^k \right)(\xi) \quad \square \end{aligned}$$

66.3 Lemma.

Es seien s und $s' = s \cdot h$ zwei m -Beine und ω und ω' die zugehörigen Zusammenhangsformen, dann gilt:

$$h \cdot \omega' = dh + \omega \cdot h.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} s \cdot h \cdot \omega' &= s' \cdot \omega' = \nabla s' = \nabla(s \cdot h) = s \cdot dh + \nabla s \cdot h = s \cdot dh + s \cdot \omega \cdot h \\ &\Rightarrow h \cdot \omega' = dh + \omega \cdot h. \quad \square \end{aligned}$$

66.4 Lemma.

Es sei s ein orthonormal-Bein, ω die zugehörige Zusammenhangsform und $\varepsilon_i := g(s_i, s_i) \in \{\pm 1\}$, dann gilt:

$$\varepsilon_i \omega_k^i + \varepsilon_k \omega_i^k = 0.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \delta_{i,j} &= g(s_i, s_j) \Rightarrow 0 = dg(s_i, s_j) = g(\nabla s_i, s_j) + g(s_i, \nabla s_j) \\ &= g\left(\sum_k s_k \cdot \omega_i^k, s_j\right) + g\left(s_i, \sum_k s_k \cdot \omega_j^k\right) \\ &= \sum_k \omega_i^k g(s_k, s_j) + \sum_k \omega_j^k g(s_i, s_k) = \varepsilon_j \omega_i^j + \varepsilon_i \omega_j^i. \quad \square \end{aligned}$$

66.5 Lemma.

Es sei s ein orthonormal-Bein und ω die zugehörige Zusammenhangsform. Wir setzen $R(\xi, \eta)s := (R(\xi, \eta)s_i)_{i=1, \dots, m}$. Dann gilt:

$$R(\xi, \eta)s = s \cdot (d\omega + \omega \wedge \omega)(\xi, \eta),$$

wobei

$$\omega \wedge \omega := \left(\sum_k \omega_k^i \wedge \omega_j^k \right)_{i,j} \in \Omega^2(U, L(m)).$$

Beweis.

$$\begin{aligned} R(\xi, \eta)s &= \nabla_\xi \nabla_\eta s - \nabla_\eta \nabla_\xi s - \nabla_{[\xi, \eta]} s \\ &= \nabla_\xi (s \cdot \omega(\eta)) - \nabla_\eta (s \cdot \omega(\xi)) - s \cdot \omega([\xi, \eta]) \\ &= s \cdot d(\omega(\eta))(\xi) + \nabla_\xi s \cdot \omega(\eta) - s \cdot d(\omega(\xi))(\eta) - \nabla_\eta s \cdot \omega(\xi) - s \cdot \omega([\xi, \eta]) \\ &= s \cdot \left(d(\omega(\eta))(\xi) - d(\omega(\xi))(\eta) - \omega([\xi, \eta]) \right) + s \cdot \left(\omega(\xi) \cdot \omega(\eta) - \omega(\eta) \cdot \omega(\xi) \right) \\ &\stackrel{42.7}{=} s \cdot (d\omega + \omega \wedge \omega)(\xi, \eta). \quad \square \end{aligned}$$

66.6 Definition.

Man bezeichnet mit $\Omega := d\omega + \omega \wedge \omega \in \Omega^2(U, L(m))$ die KRÜMMUNGSMATRIX BZGL. s . Es gilt somit die 1. STRUKTURGLEICHUNG VON CARTAN

$$R(\xi, \eta)s_i = \sum_k s_k \cdot \Omega_i^k(\xi, \eta), \text{ kurz: } R(s) = s \cdot \Omega.$$

66.7 Lemma.

Es seien s und $s' = s \cdot h$ zwei m -Beine und Ω und Ω' die zugehörigen Krümmungsmatrizen, dann gilt:

$$h \cdot \Omega' = \Omega \cdot h.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} s \cdot h \cdot \Omega' &= s' \cdot \Omega' = R(s') = R(s \cdot h) \stackrel{\text{R ist tensoriell}}{=} R(s) \cdot h = s \cdot \Omega \cdot h \\ &\Rightarrow h \cdot \Omega' = \Omega \cdot h. \quad \square \end{aligned}$$

66.8 Lemma.

Es sei s ein orthonormal-Bein und $\varepsilon_i = g(s_i, s_i) \in \{\pm 1\}$ dann gilt $\varepsilon_i \Omega_j^i + \varepsilon_j \Omega_i^j = 0$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \Omega_j^i &= \varepsilon_i d\omega_j^i + \sum_k \varepsilon_i \omega_k^i \wedge \omega_j^k = -\varepsilon_j d\omega_i^j - \sum_k \varepsilon_k \omega_i^k \wedge \omega_j^k \\ &= -\varepsilon_j d\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \varepsilon_k \omega_j^k = -\varepsilon_j \left(d\omega_i^j - \sum_k \omega_i^k \wedge \omega_j^k \right) \\ &= -\varepsilon_j \left(d\omega_i^j + \sum_k \omega_k^j \wedge \omega_i^k \right) = -\varepsilon_j \Omega_i^j. \quad \square \end{aligned}$$

66.9 Definition.

Es sei $s = (s_i)_{i=1, \dots, m}$ ein m -Bein. Das dazu duale m -KOBELN $r = (r^j)_{j=1, \dots, m} \in \Omega^1(U, L(m))$ ist gegeben durch $r^j(x)(s_i(x)) := \delta_i^j$.

66.10 Lemma.

Es sei s ein m -Bein, r das zugehörige m -Kobeln und ω die Zusammenhangsmatrix. Dann gilt die 2. STRUKTURGLEICHUNG VON CARTAN:

$$dr^k + \sum_j \omega_j^k \wedge r^j = 0, \text{ kurz: } dr + \omega \wedge r = 0.$$

Beweis. Es sei ξ eine Vektorfeld auf U . Dann ist $\xi = \sum_i s_i \cdot r^i(\xi)$.

$$\begin{aligned} \nabla_\xi \eta &= \nabla_\xi \left(\sum_j s_j \cdot r^j(\eta) \right) = \sum_j \left(\nabla_\xi s_j \cdot r^j(\eta) + s_j \cdot \xi(r^j(\eta)) \right) \\ &= \sum_{j,k} s_k \cdot \omega_j^k(\xi) \cdot r^j(\eta) + \sum_k s_k \cdot \xi(r^k(\eta)). \end{aligned}$$

Folglich ist:

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_\xi \eta - \nabla_\eta \xi - [\xi, \eta] \\ &= \sum_{j,k} s_k \cdot \underbrace{\left(\omega_j^k(\xi) \cdot r^j(\eta) - \omega_j^k(\eta) \cdot r^j(\xi) \right)}_{(\omega_j^k \wedge r^j)(\xi, \eta)} + \sum_k s_k \cdot \underbrace{\left(\xi(r^k(\eta)) - \eta(r^k(\xi)) - r^k([\xi, \eta]) \right)}_{dr^k(\xi, \eta)} \\ &= \sum_k s_k \cdot \left(\sum_j \omega_j^k \wedge r^j + dr^k \right)(\xi, \eta) \quad \square \end{aligned}$$

66.11 Cartan's Lemma.

Es seien v_1, \dots, v_n linear unabhängig in einem Vektorraum E und $w_1, \dots, w_n \in E$. Dann ist $\sum_i v_i \wedge w_i = 0$ genau dann, wenn $w_i = \sum_j a_{i,j} v_j$ mit einer symmetrischen Matrix $(a_{i,j})_{i,j}$.

Beweis. Wir ergänzen v_i zu einer Basis $(v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_m)$ und somit ist $w_i = \sum_{j=1}^n a_{i,j} v_j + \sum_{k=n+1}^m b_{i,k} v_k$, also

$$\sum_i v_i \wedge w_i = \sum_{i < j \leq n} (a_{i,j} - a_{j,i}) v_i \wedge v_j + \sum_{i \leq n < k} b_{i,k} v_i \wedge v_k.$$

Da $(v_i \wedge v_j)_{i < j}$ eine Basis von $\Lambda^2(E)$ ist, ist dies genau dann 0, wenn $b_{i,k} = 0$ und $a_{i,j} = a_{j,i}$. \square

Bemerkung.

Es sei r der Korahmen eines orthonormal-Rahmens s . Dann ist die Zusammenhangsmatrix ω durch die 2. Strukturgleichung von Cartan bereits eindeutig festgelegt: Aus $dr + \omega \wedge r = 0 = dr + \omega' \wedge r$ folgt somit für $\sigma := \omega' - \omega$, daß $\sigma \wedge r = 0$, also $\sigma_k^i = \sum_j a_{j,k}^i \cdot r^j$ nach [66.11](#) mit symmetrischen a^i . Wegen $\varepsilon_j \omega_j^j = -\varepsilon_i \omega_j^i$ (mit $\varepsilon_i := g(s_i, s_i) \in \{\pm 1\}$) und analog für ω' gilt gleiches auch für σ . Wenn wir $b_{j,k}^i := \varepsilon_i a_{j,k}^i$ setzen, so ist

$$0 = \varepsilon_j \sigma_j^j + \varepsilon_i \sigma_j^i = \sum_k (\varepsilon_j a_{k,i}^j + \varepsilon_i a_{k,j}^i) r^k = \sum_k (b_{k,i}^j + b_{k,j}^i) r^k,$$

also $b_{k,i}^j = -b_{k,j}^i$ und $b_{j,k}^i = \varepsilon_i a_{j,k}^i = \varepsilon_i a_{k,j}^i = b_{k,j}^i$ und somit

$$b_{j,k}^i = b_{k,j}^i = -b_{k,i}^j = -b_{i,k}^j = b_{i,j}^k = b_{j,i}^k = -b_{j,k}^i$$

also $b_{j,k}^i = 0$, d.h. $\sigma = 0$, also $\omega' = \omega$.

66.6a Bemerkung.

Es sei (s_i) ein orthonormal-Bein und (r_i) das zugehörige Kobein. Dann erhalten

wir für die Krümmungen nach [64.13](#) folgende Darstellungen

$$\begin{aligned} R_{i,j,k}^l &:= r^l \left(R(s_i, s_j) s_k \right) \stackrel{66.6}{=} r^l \left(\sum_p s_p \Omega_k^p(s_i, s_j) \right) \\ &= \sum_p \delta_p^l \Omega_k^p(s_i, s_j) = \Omega_k^l(s_i, s_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{i,j,k,l} &:= g \left(R(s_i, s_j) s_k, s_l \right) \stackrel{66.6}{=} g \left(\sum_p s_p \Omega_k^p(s_i, s_j), s_l \right) \\ &= \sum_p \varepsilon_p \delta_{p,l} \Omega_k^p(s_i, s_j) = \varepsilon_l \Omega_k^l(s_i, s_j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Die Riemann-Krümmung } R &= \sum_{i,j,k,l} \underbrace{r^l \left(R(s_i, s_j) s_k \right)}_{=: R_{i,j,k}^l} r^i \otimes r^j \otimes r^k \otimes s_l \\ &= \sum_{i,j,k,l} \Omega_k^l(s_i, s_j) r^i \otimes r^j \otimes r^k \otimes s_l \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Die Ricci-Krümmung Ricci} &= \sum_{i,j} \underbrace{\text{spur} \left(Z \mapsto R(Z, s_i)(s_j) \right)}_{\sum_k r^k \left(R(s_k, s_i) s_j \right)} r^i \otimes r^j \\ &= \sum_{i,j,k} \Omega_j^k(s_k, s_i) r^i \otimes r^j = \sum_{i,j} \underbrace{\sum_k R_{k,i,j}^k}_{=: \text{Ricci}_{i,j}} r^i \otimes r^j \end{aligned}$$

$$\text{Die Skalarkrümmung } S = \sum_i \text{Ricci}_{i,i} = \sum_{i,k} R_{k,i,i}^k = \sum_{i,k} \Omega_i^k(s_k, s_i)$$

Eine (Pseudo-)Riemann-Mannigfaltigkeit heißt RICCI-FLACH falls $\text{Ricci} = 0$.

66.6b Proposition.

Es sei (s_i) eine orthonormal-Bein. Dann ist

$$\text{Ricci}(s_1, s_1) = g(s_1, s_1) \cdot \sum_{i>1} K(\langle \{s_1, s_i\} \rangle)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \text{Ricci}(s_1, s_1) &= \text{spur} \left(Z \mapsto R(Z, s_1) s_1 \right) = \sum_i r^i \left(R(s_i, s_1) s_1 \right) \\ &= \sum_i g(s_i, s_i) \cdot g \left(R(s_i, s_1) s_1, s_i \right) \\ &= 0 + \sum_{i>1} \underbrace{g(s_i, s_i)}_{=\pm 1} \cdot K(\langle \{s_i, s_1\} \rangle) \cdot \left(g(s_1, s_1) g(s_i, s_i) - g(s_i, s_1)^2 \right) \\ &= g(s_1, s_1) \cdot \sum_{i>1} K(\langle \{s_1, s_i\} \rangle) \end{aligned}$$

□

66.12 Beispiele.

1. Die 2-Sphäre S^2 .

Sei $f : (0, 2\pi) \times (-\pi, \pi) \rightarrow S^2$ die Parametrisierung nach Kugelkoordinaten,

d.h. $f(\varphi, \vartheta) := (\cos(\vartheta) \cos(\varphi), \cos(\vartheta) \sin(\varphi), \sin(\vartheta))$. Die Metrik ist in den Koordinaten (φ, ϑ) somit gegeben durch

$$f^*\left(\sum_{i=1}^3 dx^i \otimes dx^i\right) = \sum_i df^i \otimes df^i = \cos(\vartheta)^2 d\varphi \otimes d\varphi + d\vartheta \otimes d\vartheta$$

Somit ist $r^1 := d\vartheta$, $r^2 := \cos(\vartheta) d\varphi$ eine orthonormales Kobain. mit zugehörigen orthonormal-Bein $s_1 := \frac{\partial}{\partial \vartheta}$, $s_2 := \frac{1}{\cos(\vartheta)} \frac{\partial}{\partial \varphi}$. Damit ist $dr^1 = 0$ und $dr^2 = -\sin(\vartheta) d\vartheta \wedge d\varphi$. Mittels 2. Strukturgleichung von Cartan bestimmen wir die Zusammenhangsmatrix ω :

$$\begin{aligned} \omega_1^1 &= 0 = \omega_2^2, & \omega_1^2 &= -\omega_2^1 \\ 0 &= dr^1 + \omega_1^1 \wedge r^1 + \omega_2^1 \wedge r^2 = \omega_2^1 \wedge r^2 \\ &\Rightarrow \omega_2^1 &= a(\varphi, \vartheta) r^2 \\ 0 &= dr^2 + \omega_1^2 \wedge r^1 + \omega_2^2 \wedge r^2 = -\tan(\vartheta) r^1 \wedge r^2 - a(\varphi, \vartheta) r^2 \wedge r^1 \\ &\Rightarrow a(\varphi, \vartheta) &= \tan(\vartheta) \\ &\Rightarrow \omega_2^1 &= \tan(\vartheta) r^2 = \sin(\vartheta) d\varphi = -\omega_1^2 \end{aligned}$$

Für die Krümmungsmatrix Ω erhalten wir aus der 1. Strukturgleichung von Cartan somit

$$\begin{aligned} \Omega_1^1 &= \Omega_2^2 = 0 \\ -\Omega_1^2 &= \Omega_2^1 = d\omega_2^1 + \omega_1^1 \wedge \omega_2^1 + \omega_2^1 \wedge \omega_2^2 \\ &= d(\sin(\vartheta) d\varphi) = \cos(\vartheta) d\vartheta \wedge d\varphi = r^1 \wedge r^2. \end{aligned}$$

Die Schnittkrümmung ist somit

$$K(T_p S^2) = g(R(s_1, s_2)s_2, s_1) = g\left(\sum_k s_k \Omega_2^k(s_1, s_2), s_1\right) = \Omega_2^1(s_1, s_2) = 1.$$

2. Die Poincaré'sche Halbebene.

Die Metrik auf $H_+ := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ ist gegeben durch $g = \frac{1}{y^2}(dx \otimes dx + dy \otimes dy)$ ein orthonormales Kobain ist $r^1 := \frac{1}{y} dy$ und $r^2 := \frac{1}{y} dx$ mit Differential $dr^1 = 0$, $dr^2 = -\frac{1}{y^2} dx^1 \wedge dx^2 = r^1 \wedge r^2$. Die zweite Strukturgleichung von Cartan liefert

$$\omega_1^1 = 0 = \omega_2^2, \quad \omega_2^1 = -\omega_1^2 = \frac{1}{y} dx^1 = r^2$$

und die erste Strukturgleichung von Cartan

$$\Omega_1^1 = 0 = \Omega_2^2, \quad \Omega_2^1 = -\Omega_1^2 = \frac{1}{y^2} dx^1 \wedge dx^2 = r^2 \wedge r^1$$

Die Schnittkrümmung ist somit

$$K(T_p H^+) = \Omega_2^1(s_1, s_2) = -1.$$

3. Die 3-Sphäre S^3 .

Verallgemeinerte Kugelkoordinaten sind

$$f(\varphi, \vartheta, \tau) = (\cos \tau \cos \vartheta \cos \varphi, \cos \tau \cos \vartheta \sin \varphi, \cos \tau \sin \vartheta, \sin \tau).$$

Die Metrik ist

$$g = \cos(\tau)^2 \cos(\vartheta)^2 d\varphi \otimes d\varphi + \cos(\tau)^2 d\vartheta \otimes d\vartheta + d\tau \otimes d\tau$$

Ein orthonormaler Korahmen ist

$$r^1 := d\tau, \quad r^2 := \cos(\tau) d\vartheta, \quad r^3 := \cos(\tau) \cos(\vartheta) d\varphi$$

Für die Zusammenhangsmatrix erhalten wir

$$\begin{aligned}\omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\sin(\tau) d\vartheta & -\sin(\tau) \cos(\vartheta) d\varphi \\ \sin(\tau) d\vartheta & 0 & -\sin(\vartheta) d\varphi \\ \sin(\tau) \cos(\vartheta) d\varphi & \sin(\vartheta) d\varphi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\tan(\tau) r^2 & -\tan(\tau) r^3 \\ \tan(\tau) r^2 & 0 & -\frac{\tan(\vartheta)}{\cos(\tau)} r^3 \\ \tan(\tau) r^3 & \frac{\tan(\vartheta)}{\cos(\tau)} r^3 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

und für die Krümmungsmatrix

$$\begin{aligned}\Omega &= \begin{pmatrix} 0 & \cos \tau d\vartheta \wedge d\tau & \cos \tau \cos \vartheta d\varphi \wedge d\tau \\ -\cos \tau d\vartheta \wedge d\tau & 0 & \cos \tau^2 \cos \vartheta d\varphi \wedge d\vartheta \\ -\cos \tau \cos \vartheta d\varphi \wedge d\tau & -\cos \tau^2 \cos \vartheta d\varphi \wedge d\vartheta & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & r^2 \wedge r^1 & r^3 \wedge r^1 \\ r^1 \wedge r^2 & 0 & r^3 \wedge r^2 \\ r^1 \wedge r^3 & r^2 \wedge r^3 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Mittels [64.7a](#) läßt sich auch damit zeigen, daß die Schnittkrümmung konstant 1 und damit die Skalarkrümmung 6 ist, denn $R_{1,2,2}^1 = R_{1,3,3}^1 = R_{2,3,3}^2 = 1$ und alle übrigen die sich nicht aus Symmetrie ergeben sind 0.

4. Der hyperbolische Raum.

Der HYPERBOLISCHE RAUM ist $H^+ := \{(x^1, \dots, x^n \in \mathbb{R}^3) : x^1 > 0\}$ mit der Metrik

$$g = \frac{1}{(x^1)^2} (dx^1 \otimes dx^1 + dx^2 \otimes dx^2 + dx^3 \otimes dx^3)$$

Ein orthonormaler Korahmen ist

$$r^1 := \frac{1}{x^1} dx^3, \quad r^2 := \frac{1}{x^1} dx^2, \quad r^3 := \frac{1}{x^1} dx^1$$

Für die Zusammenhangsmatrix erhalten wir

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{x^1} dx^3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{x^1} dx^2 \\ -\frac{1}{x^1} dx^3 & -\frac{1}{x^1} dx^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & r^1 \\ 0 & 0 & r^2 \\ -r^1 & -r^2 & 0 \end{pmatrix}$$

und für die Krümmungsmatrix

$$\begin{aligned}\Omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{(x^1)^2} dx^2 \wedge dx^3 & -\frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^3 \\ \frac{1}{(x^1)^2} dx^2 \wedge dx^3 & 0 & -\frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^2 \\ \frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^3 & \frac{1}{(x^1)^2} dx^1 \wedge dx^2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & r^1 \wedge r^2 & r^1 \wedge r^3 \\ r^2 \wedge r^1 & 0 & r^2 \wedge r^3 \\ r^3 \wedge r^1 & r^3 \wedge r^2 & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Die bis auf Symmetrie nicht verschwindenden Koeffizienten der Riemannkrümmung sind

$$R_{122}^1 = R_{133}^1 = R_{233}^2 = -1$$

Somit ist die Schnittkrümmung nach [64.7a](#) konstant -1 und die Ricci-Krümmung

$$\text{Ricci} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

5. Raumformen.

RAUMFORMEN sind Riemann-Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung. Eine gemeinsame Form der Metrik ist

$$g = \frac{1}{1 - \kappa\rho^2} d\rho \otimes d\rho + \rho^2 \cdot (d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2(\vartheta) d\varphi \otimes d\varphi)$$

wobei $0 < \rho, \kappa\rho^2 < 1$, $|\vartheta| < \pi/2$ und $|\varphi| < \pi$ ist. Für den Korahmen

$$r^1 := \rho d\vartheta, \quad r^2 := \sin(\vartheta)\rho d\varphi, \quad r^3 := \frac{1}{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}} d\rho$$

ist die Zusammenhangsmatrix

$$\begin{aligned} \omega &= \begin{pmatrix} 0 & \cos(\vartheta) d\varphi & -\sqrt{1 - \kappa\rho^2} d\vartheta \\ -\cos(\vartheta) d\varphi & 0 & -\sin(\vartheta)\sqrt{1 - \kappa\rho^2} d\varphi \\ \sqrt{1 - \kappa\rho^2} d\vartheta & \sin(\vartheta)\sqrt{1 - \kappa\rho^2} d\varphi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\cot(\vartheta)}{\rho} r^2 & -\frac{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}}{\rho} r^1 \\ -\frac{\cot(\vartheta)}{\rho} r^2 & 0 & -\frac{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}}{\rho} r^2 \\ \frac{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}}{\rho} r^1 & \frac{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}}{\rho} r^2 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die Krümmungsmatrix

$$\begin{aligned} \Omega &= \begin{pmatrix} 0 & -\kappa \sin(\vartheta)\rho^2 d\vartheta \wedge d\varphi & \frac{\kappa\rho}{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}} d\rho \wedge d\vartheta \\ \kappa \sin(\vartheta)\rho^2 d\vartheta \wedge d\varphi & 0 & \frac{\kappa \sin(\vartheta)\rho}{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}} d\rho \wedge d\varphi \\ -\frac{\kappa\rho}{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}} d\rho \wedge d\vartheta & -\frac{\kappa \sin(\vartheta)\rho}{\sqrt{1 - \kappa\rho^2}} d\rho \wedge d\varphi & 0 \end{pmatrix} \\ &= \kappa \cdot \begin{pmatrix} 0 & r^2 \wedge r^1 & r^3 \wedge r^1 \\ r^1 \wedge r^2 & 0 & r^3 \wedge r^2 \\ r^1 \wedge r^3 & r^2 \wedge r^3 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

die nicht verschwindenden Koeffizienten des Riemann-Krümmungstensors

$$R_{122}^1 = R_{133}^1 = R_{233}^2 = \kappa$$

die konstante Schnittkrümmung κ , sowie die Ricci-Krümmung

$$\text{Ricci} = \begin{pmatrix} 2\kappa & 0 & 0 \\ 0 & 2\kappa & 0 \\ 0 & 0 & 2\kappa \end{pmatrix}$$

und die Skalarkrümmung

$$S = 6\kappa.$$

Ähnlich zu [60, 60.3] kann man zeigen, daß jede einfach zusammenhängende vollständige m -dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit mit konstanter Schnittkrümmung K isometrisch isomorph zu \mathbb{R}^m mit der flachen Metrik im Fall $K = 0$, zu $S^m \subseteq \mathbb{R}^{m+1}$ im Fall $K = 1$ und zum hyperbolischen Raum $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^{m-1}$ im Fall $K = -1$ ist.

6. Die Schwarzschild-Metrik.

Die allgemeine Relativitätstheorie wird durch eine LORENTZ-MANNIGFALTIGKEIT (d.h. eine Pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit LORENTZ-METRIK, i.e. mit Signatur $(-, +, +, +)$ (oder äquivalent $(+, -, -, -)$) beschrieben für welche die EINSTEIN'SCHE FELDGLEICHUNG

$$\text{Ricci} - \frac{1}{2} S g = T$$

gilt, wobei g eine LORENTZ-METRIK, S die Skalarkrümmung und T der ENERGIE-IMPULS-TENSOR ist, welcher durch die Masseverteilung beschrieben wird. Für eine C^∞ -Mannigfaltigkeit mit vorgegeben Energie-Impuls-Tensor ist dies eine partielle Differentialgleichung für die Metrik. im Spezialfall $T = 0$ spricht man von der VAKUUM-GLEICHUNG Selbst für die Vakuumgleichung lokal sind nur wenige Lösungen bekannt. Eine ist die SCHWARZSCHILD-METRIK, die sich im Rotations-symmetrischen Zeit-unabhängigen Fall ergibt:

$$g = -h(\rho) dt \otimes dt + \frac{1}{h(\rho)} d\rho \otimes d\rho + \rho^2 d\vartheta \otimes d\vartheta + \rho^2 \sin(\vartheta)^2 d\varphi \otimes d\varphi$$

mit $h(\rho) := 1 - \frac{2M}{\rho}$ für $\rho > 2M$. Dabei nennt man $\rho := 2M$ den SCHWARZSCHILD-RADIUS. Diese Metrik kann im äußeren von langsam rotierenden isolierten Sternen oder bei schwarzen Löchern verwendet werden. Ein orthonormaler Korahmen für diese Metrik ist somit

$$r^1 := \rho d\vartheta, \quad r^2 := \rho \sin(\vartheta) d\varphi, \quad r^3 := \frac{1}{\sqrt{h(\rho)}} d\rho, \quad r^4 := \sqrt{h(\rho)} dt$$

Für die Zusammenhangsmatrix ergibt sich:

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & -\cos(\vartheta) d\varphi & \sqrt{h} d\vartheta & 0 \\ \cos(\vartheta) d\varphi & 0 & \sqrt{h} \sin(\vartheta) d\varphi & 0 \\ -\sqrt{h} d\vartheta & -\sqrt{h} \sin(\vartheta) d\varphi & 0 & -\frac{M}{\rho^2} dt \\ 0 & 0 & \frac{M}{\rho^2} dt & 0 \end{pmatrix}$$

und für die Krümmungsmatrix

$$\Omega = M \begin{pmatrix} 0 & \frac{2 \sin \vartheta}{\rho} d\vartheta \wedge d\varphi & \frac{1}{\sqrt{h\rho^2}} d\rho \wedge d\vartheta & \frac{\sqrt{h}}{\rho^2} dt \wedge d\vartheta \\ -\frac{2 \sin \vartheta}{\rho} d\vartheta \wedge d\varphi & 0 & \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{h\rho^2}} d\rho \wedge d\varphi & \frac{\sqrt{h} \sin \vartheta}{\rho^2} dt \wedge d\varphi \\ -\frac{1}{\sqrt{h\rho^2}} d\rho \wedge d\vartheta & -\frac{\sin \vartheta}{\sqrt{h\rho^2}} d\rho \wedge d\varphi & 0 & -\frac{2}{\rho^3} dt \wedge d\rho \\ -\frac{\sqrt{h}}{\rho^2} dt \wedge d\vartheta & -\frac{\sqrt{h} \sin \vartheta}{\rho^2} dt \wedge d\varphi & \frac{2}{\rho^3} dt \wedge d\rho & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{M}{\rho^3} \begin{pmatrix} 0 & 2r^1 \wedge r^2 & -r^1 \wedge r^3 & -r^1 \wedge r^4 \\ 2r^2 \wedge r^1 & 0 & -r^2 \wedge r^3 & -r^2 \wedge r^4 \\ -r^3 \wedge r^1 & -r^3 \wedge r^2 & 0 & 2r^3 \wedge r^4 \\ -r^4 \wedge r^1 & -r^4 \wedge r^2 & 2r^4 \wedge r^3 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Koeffizienten der Riemann-Metrik im assoziierten orthonormal-Bein $(s_k)_k$ sind nach [66.6a](#)

$$R_{k,l,j}^i = \Omega_j^i(s_k, s_l).$$

Aus der Gestalt von Ω folgt $R_{k,l,j}^i = 0$ für $j \notin \{k, l\}$ oder $i \notin \{k, l\}$ und somit ist $R_{m,l,j}^m = 0$ für $j \neq l$. Ein Blick auf die Spalten von Ω liefert $\sum_m R_{m,j,j}^m = \pm(2 - 1 - 1) = 0$, also ist die Schwarzschild-Metrik Ricci-flach nach [66.6a](#), d.h. Ricci = 0.

7. Die Friedmann-Robertson-Walker-Metrik(en).

Die FRIEDMANN-ROBERTSON-WALKER-METRIK beschreibt ein isotropes (d.h. keine ausgezeichneten Richtungen) homogenes Universum und ist gegeben durch

$$g = dt \otimes dt - h(t)^2 \left(\frac{1}{1 - \kappa \rho^2} d\rho \otimes d\rho + \rho^2 \cdot (d\vartheta \otimes d\vartheta + \sin^2(\vartheta) d\varphi \otimes d\varphi) \right)$$

mit orthonormalen Koein

$$r^1 := dt, \quad r^2 := h(t)\rho d\vartheta, \quad r^3 := h(t)\rho \sin(\vartheta) d\varphi, \quad r^4 := \frac{h(t)}{\sqrt{1-\kappa\rho^2}} d\rho$$

Zusammenhangsmatrix

$$\omega = \begin{pmatrix} 0 & h'\rho d\vartheta & h'\rho \sin \vartheta d\varphi & \frac{h'}{\sqrt{1-\kappa\rho^2}} d\rho \\ -h'\rho d\vartheta & 0 & \cos \vartheta d\varphi & -\sqrt{1-\kappa\rho^2} d\vartheta \\ -h'\rho \sin \vartheta d\varphi & -\cos \vartheta d\varphi & 0 & -\sin \vartheta \sqrt{1-\kappa\rho^2} d\varphi \\ -\frac{h'}{\sqrt{1-\kappa\rho^2}} d\rho & \sqrt{1-\kappa\rho^2} d\vartheta & \sin \vartheta \sqrt{1-\kappa\rho^2} d\varphi & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{h'(t)}{h(t)} r^2 & \frac{h'(t)}{h(t)} r^3 & \frac{h'(t)}{h(t)} r^4 \\ -\frac{h'(t)}{h(t)} r^2 & 0 & \frac{\cot(\vartheta)}{h(t)\rho} r^3 & -\frac{\sqrt{1-\kappa\rho^2}}{h(t)\rho} r^2 \\ -\frac{h'(t)}{h(t)} r^3 & -\frac{\cot(\vartheta)}{h(t)\rho} r^3 & 0 & -\frac{\sqrt{1-\kappa\rho^2}}{h(t)\rho} r^3 \\ -\frac{h'(t)}{h(t)} r^4 & \frac{\sqrt{1-\kappa\rho^2}}{h(t)\rho} r^2 & \frac{\sqrt{1-\kappa\rho^2}}{h(t)\rho} r^3 & 0 \end{pmatrix}$$

und Krümmungsmatrix

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & \frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^2 & \frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^3 & \frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^4 \\ -\frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^2 & 0 & \frac{h'(t)^2 - \kappa}{h(t)^2} r^2 \wedge r^3 & -\frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^2 \wedge r^4 \\ \frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^3 & -\frac{h'(t)^2 - \kappa}{h(t)^2} r^2 \wedge r^3 & 0 & -\frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^3 \wedge r^4 \\ -\frac{h''(t)}{h(t)} r^1 \wedge r^4 & \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^2 \wedge r^4 & \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2} r^3 \wedge r^4 & 0 \end{pmatrix}$$

Die nicht-verschwindenden Koeffizienten des Riemann'schen Krümmungstensors $R_{122}^1 = R_{133}^1 = R_{144}^1 = -\frac{h''(t)}{h(t)}$, $R_{233}^2 = R_{244}^2 = R_{344}^3 = \frac{\kappa - h'(t)^2}{h(t)^2}$ und Ricci-Krümmung

$$\text{Ricci} = \begin{pmatrix} -\frac{3h''}{h} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(\kappa - h'^2)}{h^2} - \frac{h''}{h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2(\kappa - h'^2)}{h^2} - \frac{h''}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{2(\kappa - h'^2)}{h^2} - \frac{h''}{h} \end{pmatrix}$$

und Skalarkrümmung

$$S = \frac{6(\kappa - h'(t)^2)}{h(t)^2} - \frac{6h''(t)}{h(t)}$$

67. Nochmals Jacobi-Felder

67.1 Proposition. Variation der Energie.

Es sei $(c_s)_s$ eine glatte Variation mit fixen Endpunkten einer Kurve $c_0 : [a, b] \rightarrow M$, also $(s, t) \mapsto c_s(t)$ glatt von $\mathbb{R} \times [a, b] \rightarrow M$ mit $s \mapsto c_s(t)$ konstant für $t \in \{a, b\}$. Sei $Y_s(t) := \frac{\partial}{\partial s} c_s(t) \in T_{c_s(t)}M$ und

$$E(c_s) := \frac{1}{2} \int_a^b g(\dot{c}_s, \dot{c}_s) = \frac{1}{2} \int_a^b g_{c_s(t)} \left(\frac{\partial}{\partial t} c_s(t), \frac{\partial}{\partial t} c_s(t) \right) dt.$$

Dann ist

$$(1) \quad \left. \frac{d}{ds} E(c_s) \right|_{s=0} = - \int_a^b g(\nabla_{\dot{c}_0} \dot{c}_0, Y_0)$$

und, falls c_0 eine Geodäte ist, so ist

$$(2) \quad \left(\frac{d}{ds} \right)^2 E(c_s) \Big|_{s=0} = \int_a^b \left(|\nabla_{\dot{c}_0} Y_0|_g^2 - K(\langle \dot{c}_0, Y_0 \rangle) \cdot (|Y_0|_g^2 - g(\dot{c}_0, Y_0)) \right)$$

Beweis.

1. Es sei $X_s(t) := \frac{\partial}{\partial t} c_s(t)$. Dann ist $X = Tc \cdot \frac{\partial}{\partial t}$ und $Y = Tc \cdot \frac{\partial}{\partial s}$ und somit $[X, Y] = Tc \cdot [\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial s}] = 0$. Somit ist $\nabla_Y X - \nabla_X Y \stackrel{[60, 62.4.4]}{=} [X, Y] = 0$. Es folgt somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} E(c_s) &= \frac{1}{2} \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g(X, X) dt = \int_a^b g(\nabla_Y X, X) dt = \int_a^b g(\nabla_X Y, X) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} g(Y, X) dt - \int_a^b g(Y, \nabla_X X) dt = g(Y, X) \Big|_a^b - \int_a^b g(Y, \nabla_X X) dt \end{aligned}$$

und für $s = 0$:

$$\frac{d}{ds} E(c_s) \Big|_{s=0} = 0 - \int_a^b g(Y, \nabla_{\dot{c}_0} \dot{c}_0) dt.$$

2.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds} \right)^2 E(c_s) &= \frac{1}{2} \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial s} \right)^2 g(X, X) dt = \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g(\nabla_Y X, X) dt \\ &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} g(\nabla_X Y, X) dt \\ &= \int_a^b (g(\nabla_Y \nabla_X Y, X) + g(\nabla_X Y, \nabla_Y X)) dt \\ &= \int_a^b (g(\nabla_X \nabla_Y Y, X) + g([\nabla_Y, \nabla_X]Y, X) + g(\nabla_X Y, \nabla_X Y)) dt \\ &= \int_a^b \left(\frac{\partial}{\partial t} g(\nabla_Y Y, X) - g(\nabla_Y Y, \nabla_X X) + \right. \\ &\quad \left. - R(X, Y, Y, X) + g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) \right) dt \\ &= g(\nabla_Y Y, X) \Big|_a^b + \\ &\quad + \int_a^b \left(-g(\nabla_Y Y, \nabla_X X) - R(X, Y, Y, X) + g(\nabla_X Y, \nabla_X Y) \right) dt \end{aligned}$$

und für Geodäten c_0 und $s = 0$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{ds} \right)^2 E(c_s) \Big|_{s=0} &= 0 + \int_a^b \left(-g(\nabla_Y Y, \underbrace{\nabla_X X}_{=0}) - R(X, Y, Y, X) + g(\nabla_X Y, \underbrace{\nabla_X Y}_{\nabla_{\dot{c}_0} Y_0}) \right) \\ &= \int_a^b \left(|\nabla_{\dot{c}_0} Y_0|_g^2 - R(\dot{c}_0, Y_0, Y_0, \dot{c}_0) \right) \end{aligned}$$

und nach [64.7](#) ist

$$R(\dot{c}_0, Y_0, Y_0, \dot{c}_0) = K(\langle \dot{c}_0, Y_0 \rangle) \cdot (|Y_0|_g^2 - g(\dot{c}_0, Y_0)^2)$$

□

Die Hess'sche Form von E (d.h. die symmetrische Bilinearform $E''(c_0)$) ist somit durch die sogenannte INDEXFORM

$$I(Y, Z) := \int_a^b \left(g(\nabla_{\dot{c}_0} Y, \nabla_{\dot{c}_0} Z) - R(\dot{c}_0, Y_0, Z_0, \dot{c}_0) \right)$$

gegeben.

Die JACOBI-DIFFERENTIALGLEICHUNG für Vektorfelder Y längs c ist:

$$\nabla^2 Y + R(Y, \dot{c})\dot{c} = 0.$$

Diese Differentialgleichung ist linear in Y und somit existiert für jede Geodäte $c : [a, b] \rightarrow M$ und $Z_0, Z_1 \in T_{c(a)}M$ ein eindeutig bestimmte Lösung (ein sogenanntes JACOBI-FELD) Y längs c mit $Y(a) = Z_0$ und $\nabla Y(a) = Z_1$. Zwei Parameter a und b heißen KONJUGIERTE PUNKTE AUF EINER GEODÄTE c falls eine Jacobi-Vektorfeld Y mit $Y(a) = 0 = Y(b)$ existiert.

67.2 Lemma.

Sei c nach Bogenlänge parametrisiert. Dann ist c genau dann von lokal minimaler Länge wenn c von lokal minimaler Energie ist.

Beweis. Die Cauchy-Schwartz Ungleichung liefert

$$L(c) = \int_a^b |\dot{c}(t)| dt \leq \left(\int_a^b 1^2 \right)^{1/2} \cdot \left(\int_a^b |\dot{c}(t)|^2 dt \right)^{1/2}$$

also ist $L(c)^2 \leq 2(b-a)E(c)$ und Gleichheit gilt genau dann, wenn c proportional zur Bogenlänge parametrisiert ist.

Es habe c_0 lokal minimale Energie. Nach [67.1](#) ist $\nabla_{\dot{c}_0} \dot{c}_0 = 0$ und nach [60, 57.2](#) somit c_0 proportional zur Bogenlänge parametrisiert also $L(c_0)^2 = 2(b-a)E(c_0)$. Sei c_s eine Variation von c_0 . O.B.d.A. sei c_s proportional zur Bogenlänge parametrisiert und somit ist

$$L(c_0)^2 = 2(b-a)E(c_0) \leq 2(b-a)E(c_s) = L(c_s)^2,$$

also c_0 auch von lokal minimaler Länge.

Sei umgekehrt c_0 von lokal minimaler Länge und o.B.d.A. nach Bogenlänge parametrisiert. Sei c_s eine Variation von c_0 dann gilt:

$$E(c_0) = \frac{L(c_0)^2}{2(b-a)} \leq \frac{L(c_s)^2}{2(b-a)} \leq E(c_s),$$

Also ist c_0 auch von lokal minimaler Energie. □

67.3 Proposition.

Es sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine Geodäte und Y eine Jacobi-Feld längs c und Z irgendein Vektorfeld längs c . Dann ist $I(Y, Z) = g(\nabla_{\dot{c}} Y, Z)|_a^b$

Beweis. Wir multiplizieren die Jacobi-Gleichung mit Z und integrieren sie:

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b \left(g(\nabla^2 Y, Z) + g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Z) \right) \\ &= \int_a^b \left(\frac{d}{dt} g(\nabla Y, Z) - g(\nabla Y, \nabla Z) + \underbrace{g(R(Y, \dot{c})\dot{c}, Z)}_{R(Y, \dots, c, \dots, c, Y)} \right) \\ &\stackrel{\underline{\underline{64.5.1}}, \underline{\underline{64.5.2}}}{=} g(\nabla Y, Z) \Big|_a^b - I(Y, Z) \end{aligned}$$

□

Wir beweisen nun die Umkehrung von [63.6](#):

67.4 Folgerung.

Es sei $c : [a, b] \rightarrow M$ eine nach der Bogenlänge parametrisierte Geodäte. Angenommen es existiert ein konjugierter Punkt t_0 im offenen Interval (a, b) . Dann existiert ein Vektorfeld Z längs c mit $I(Z, Z) < 0$, also ist c nicht von minimaler Länge.

Beweis. Sei Y eine Jacobi-Feld längs c mit $Y(a) = 0 = Y(t_0)$, weiters $V := \chi_{[a, t_0]} Y$ und W ein Vektorfeld längs c mit $W(t_0) = -\nabla Y(t_0)$ und $W(a) = 0$. Seien I_1 und I_2 die Indexformen von $c|_{[a, t_0]}$ und $c|_{[t_0, b]}$. Dann ist

$$I(V, W) = I_1(V, W) + I_2(V, W) = I_1(Y, W) \stackrel{67.3}{=} -|\nabla Y(t_0)|_g^2 < 0$$

und somit

$$I(V + \varepsilon W, V + \varepsilon W) = I(V, V) + 2\varepsilon I(V, W) + \varepsilon^2 I(W, W)$$

$$\stackrel{67.2, 67.1.2}{=} 2\varepsilon I(V, W) + \varepsilon^2 I(W, W) < 0$$

für alle kleinen $\varepsilon > 0$. Für $\delta > 0$ approximieren wir das Vektorfeld $V + \varepsilon W$ durch ein glattes Vektorfeld Z_δ mit $|Y|^2 + |\nabla Z_\delta|^2 \leq C$ welches nur auf $(t_0 - \delta, t_0 + \delta)$ von $V + \varepsilon W$ verschieden ist. Da der Beitrag für $I(V + \varepsilon W, V + \varepsilon W)$ und $I(Z_\delta, Z_\delta)$ auf diesem Interval mit δ gegen 0 konvergiert ist auch $I(Z_\delta, Z_\delta) < 0$ für alle kleinen $\delta > 0$ und somit hat c nicht lokal minimale Energie und damit auch nicht lokal minimale Bogenlänge. □

65. Rückblick auf Krümmungen

Bei ebenen Kurven, haben wir die KRÜMMUNG als die Kraft interpretiert, die notwendig ist, um einen Massenpunkt mit konstanter skalarer Geschwindigkeit auf einer Kurve zu halten.

Bei Hyperflächen im \mathbb{R}^3 haben wir zuerst die NORMALKRÜMMUNG einer Fläche in Richtung ξ als Krümmung der Schnittkurve mit der, von der Flächennormale und ξ aufgespannten Ebene kennengelernt. Dies ist gleichzeitig die Krümmung der Geodäte in Richtung ξ , siehe [\[60, 52.4\]](#). Die kritische Punkte der Normalkrümmung sind die HAUPTKRÜMMUNGEN, deren Produkt die GAUSS-KRÜMMUNG ist.

Bei einer allgemeinen Riemann-Mannigfaltigkeit kann die SCHNITTKRÜMMUNG als die Gauß-Krümmung einer 2-dimensionalen Fläche, welche durch die Exponentialabbildung parametrisiert wird, aufgefaßt werden. Die Riemann-Krümmung ist schließlich das zur Schnittkrümmung gehörige Tensorfeld (i.e. 4-lineare Abbildung).

Aufgaben

1. Glatte Normalität.

Sei M eine parakompakte Hausdorff-Mannigfaltigkeit und $A_0, A_1 \subseteq M$ abgeschlossen und disjunkt. Zeige die Existenz einer glatten Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f|_{A_i} = i$ für $i \in \{0, 1\}$. **Hinweis:** Betrachte die Partition der 1, welche der Überdeckung $\{M \setminus A_0, M \setminus A_1\}$ untergeordnet ist.

2. Dichtheit der glatten Funktionen.

Sei M eine parakompakte Hausdorffmannigfaltigkeit, $g : M \rightarrow \mathbb{R}$ und $\varepsilon : M \rightarrow (0, +\infty)$ stetig. Zeige die Existenz einer glatten Abbildung $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ mit $|h(x) - g(x)| < \varepsilon(x)$ für alle $x \in M$. **Hinweis:** Verwende eine Partition \mathcal{F} der 1, welche der Überdeckung mit den Mengen $U_x := \{y : |g(y) - g(x)| < \varepsilon(y)\}$ für $x \in M$ untergeordnet ist und setze $h(x) := \sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) g(x_f)$, wobei $\text{Trg}(f) \subseteq U_{x_f}$.

3. Spezielle Indizierung der Partition der 1.

Zeige, daß die einer Überdeckung \mathcal{U} untergeordnete Partition \mathcal{F} der 1 als $\mathcal{F} = \{f_U : U \in \mathcal{U}\}$ mit $\text{Trg}(f_U) \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ gewählt werden kann. **Hinweis:** Sei \mathcal{F} irgend eine untergeordnete Partition der 1, d.h. zu $f \in \mathcal{F}$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\text{Trg}(f) \subseteq U$. Wähle zu jedem f so ein U_f und definiere eine neue Partition der 1 durch $f_U := \sum_{f \in \mathcal{F}: U_f=U} f$.

4. Vererbbarkeit von Parakompaktheit auf den Totalraum eines VB.

Es sei $p : E \rightarrow M$ ein C^∞ -Vektorbündel. Zeige, daß wenn M eine parakompakte Hausdorff-Mannigfaltigkeit ist, so gilt gleiches für E . **Hinweis:** Betrachte zuerst triviale Vektorbündel.

5. Einbettungssatz.

Es sei $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ ein Atlas einer glatten m -dimensionalen Mannigfaltigkeit M und $\{f_1, \dots, f_n\}$ eine C^∞ -Partition der 1 mit $\text{Trg} f_i \subseteq \text{Bild}(\varphi_i)$. Betrachte die Abbildung $\Phi : M \rightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)^n$, $x \mapsto (f_i(x), f_i(x) \varphi_i^{-1}(x))_{i=1}^n$. Zeige, daß diese eine glatte Einbettung ist, d.h. eine injektive Immersion, welche ein Homöomorphismus auf ihr Bild ist.

Hinweis: Gib lokale Links-Inverse dazu an.

6. Einbettung des projektiven Raums.

Zeige, daß der Raum \mathbb{P}^n der Geraden im \mathbb{R}^{n+1} in den \mathbb{R}^{2n} einbettbar ist.

Hinweis: Sei $h : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$ gegeben durch

$$\begin{aligned} (x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_n) &\mapsto \left(\sum_{i+j=0; i,j \leq n}^k x_i y_j \right)_{k=0}^{2n} = \\ &= \left(x_0 y_0, x_0 y_1 + x_1 y_0, \dots, \sum_{i=0}^n x_i y_{n-i}, \dots, x_{n-1} y_n + x_n y_{n-1}, x_n y_n \right) \end{aligned}$$

und sei $g : S^n \rightarrow S^{2n}$ gegeben durch $g(x) = \frac{h(x,x)}{|h(x,x)|}$. Dann gilt $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$ (falls $h(x,x) = \lambda^2 h(y,y)$ so ist $h(x+\lambda y, x-\lambda y) = 0$ und damit $x+\lambda y = 0$ oder $x-\lambda y = 0$) und liefert also eine injektive Abbildung $\mathbb{P}^n \rightarrow \{(z_0, \dots, z_{2n}) \in S^{2n} : z_0 \geq 0\}$.

7. Initialität unter Komposition.

Zeige, daß die Zusammensetzung initialer Immersionen eine initiale Immersion ist. Zeige weiters, daß falls die Zusammensetzung $f \circ g$ zweier glatter Abbildungen eine initiale Immersion ist, so auch g .

8. Universelles Vektorbündel.

Zeige, daß $E(k, n) := \{(\varepsilon, v) \in G(k, n) \times \mathbb{R}^n : v \in \varepsilon\} \rightarrow G(k, n)$, $(\varepsilon, v) \mapsto \varepsilon$ ein (das sogenannte universelle) Vektorbündel über der Grassmannmannigfaltigkeit ist. Seine Faser über einen Punkt in $G(k, n)$ also über einer k -Ebene ε im \mathbb{R}^n ist somit gerade diese Ebene. **Hinweis:** Um $E(k, n)$ als Teilvektorbündel von $G(k, s) \times \mathbb{R}^s$ (und damit insbesondere als Mannigfaltigkeit) zu erkennen betrachte die lokal definierte Abbildung $\varphi : G(k, n) \rightarrow GL(n)$,

$$\varphi : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, daß $\varphi(\varepsilon)(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \varepsilon$ ist und somit $(\varepsilon, v) \mapsto (\varepsilon, \varphi(\varepsilon) \cdot v)$ ein lokaler Diffeomorphismus von $G(k, n) \times \mathbb{R}^n$ ist, welcher lokal den Teilraum $G(k, n) \times \mathbb{R}^k \times \{0\}$ auf $E(k, n)$ abbildet.

9. Universalität von $E(k, s) \rightarrow G(k, s)$.

Es sei $p : E \rightarrow M$ ein k -Ebenen Bündel und $f : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$ eine VB-Monomorphismus über id_M . Zeige, daß E isomorph zum Pull-back-Bündel $g^*(E(k, s))$ ist, wobei g die in [26.21] beschriebene klassifizierende Abbildung ist. **Hinweis:** Zeige mittels [26.2], daß die natürliche Abbildung $E \rightarrow M \times_{G(k, s)} E(k, s)$ ein VB-Isomorphismus ist

10. Ein nichtintegrables Teilbündel.

Zeige direkt, daß das in [30.3.3] definierte Teilvektorbündel von $T\mathbb{R}^3$ nicht integrabel ist. **Hinweis:** Bestimme die Lieklammer der beiden erzeugenden Vektorfelder.

11. Blätterung durch Niveauflächen.

Zeige [30.12]: Es sei $f : M \rightarrow N$ glatt und $x \mapsto T_x f$ habe konstanten Rang r . Dann ist $\text{Ker}(Tf) := \bigsqcup_{x \in M} \text{Ker}(T_x f)$ ein integrables Teilvektorbündel und die Zusammenhangskomponenten der Niveauflächen $f^{-1}(q)$ sind die maximalen Integralmannigfaltigkeiten zu $\text{Ker}(Tf)$.

In den folgenden Beispielen [12]-[18] betrachten wir $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ als Riemann-Mannigfaltigkeit mit der von \mathbb{R}^3 geerbten Metrik. Als Karten außerhalb der Pole verwenden wir

- die Kugelkoordinaten $(\vartheta, \varphi) \mapsto (\cos \vartheta \cos \varphi, \cos \vartheta \sin \varphi, \sin \vartheta)$ aus [60, 11.4]
- und die stereographischen Koordinaten $(x, y) \mapsto \frac{1}{x^2+y^2+1}(2x, 2y, x^2+y^2-1)$ aus [60, 11.5].

12.

Betrachte das Geschwindigkeitsfeld $(x, y, z) \mapsto (-y, x, 0)$ am \mathbb{R}^3 , welches der Rotation um die z -Achse entspricht. Drücke die Einschränkung ξ dieses Vektorfelds auf S^2 in den beiden genannten Koordinaten aus.

Führe auch für das Vektorfeld $\eta : (x, y, z) \mapsto (xz, yz, -x^2 - y^2)$ die analoge Rechnung aus.

13.

Beschreibe die Riemann-Metrik von S^2 als 2-fach kontravariantes Tensorfeld in obigen Koordinaten.

14.

Beschreibe die vermöge \sharp zu den Vektorfeldern aus Aufgabe [12](#) gehörenden 1-Formen in obigen Koordinaten.

15.

Beschreibe die Volumsform von S^2 in obigen Koordinaten.

16.

Bestimme das \wedge -Produkt der 1-Formen aus Aufgabe [14](#) und vergleiche es mit der Volumsform aus Aufgabe [15](#).

17.

Bestimme das Pullback der 1-Formen aus Aufgabe [14](#) längs der Abbildung $f : \mathbb{R} \rightarrow S^2, t \mapsto (\sin t, \frac{3}{5} \cos t, \frac{4}{5} \cos t)$.

18.

Bestimme den Hodge-Stern-Operator $\Omega^1(S^2) \rightarrow \Omega^1(S^2)$ in obigen Koordinaten.

19.

Verifiziere den Beweis von $d(f\omega) = df \wedge \omega + f \cdot d\omega$ in 42.7 für $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und $\omega \in \Omega^k(M)$.

20.

Es sei M eine orientierte 3-dimensionale Riemann-Mannigfaltigkeit mit Riemann-Metrik g . Zeige daß $\wedge : \Omega^1(M) \times \Omega^2(M) \rightarrow \Omega^3(M)$ bis auf die natürlichen Isomorphismen $\Omega^2(M) \cong \Omega^1(M) \cong \mathfrak{X}(M)$ und $\Omega^3(M) \cong C^\infty(M, \mathbb{R})$ die Abbildung $(\xi, \eta) \mapsto (x \mapsto g_x(\xi_x, \eta_x))$ ist. Zeige weiters, daß $\xi \times \eta := \flat(*(\sharp\xi \wedge \sharp\eta))$ das punktweise Kreuzprodukt der Vektoren ξ_x und η_x ist.

21.

Verifiziere die Formel $[\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta] = \mathcal{L}_{[\xi, \eta]}$ für $\xi, \eta \in \mathfrak{X}(M)$. **Hinweis:** Siehe den Beweis von [42.7](#).

22.

Nach [42.8](#) muß sich die gradierte Derivation d als $d = \mathcal{L}_K + i_L$ mit eindeutigen $K \in \Omega^*(M; TM)$ und $L \in \Omega^{*+1}(M, TM)$ schreiben lassen. Bestimme diese K und L .

23. $H^*(\mathbb{P})$.

Bestimme die Kohomologie der projektiven Ebene.

Hinweis: Wende die Mayer-Vietoris-Sequenz an auf die Überdeckung durch eine Scheibe und ein Möbiusband (nämlich den Bildern einerseits der nördlichen Hemisphäre und andererseits des Äquatorialbereichs unter der Projektion $S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$).

24. Produktregeln.

Zeige: Für Riemann-Mannigfaltigkeiten M mit $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ und $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{grad}(f \cdot g) &= f \cdot \operatorname{grad} g + g \cdot \operatorname{grad} f \\ \operatorname{div}(f \cdot \xi) &= f \cdot \operatorname{div} \xi + \xi \cdot f = f \cdot \operatorname{div} \xi + \langle \operatorname{grad} f, \xi \rangle \\ \Delta(f \cdot g) &= \Delta f \cdot g + f \cdot \Delta g + 2\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} g \rangle\end{aligned}$$

25. Beispiel 23 revisited.

Bestimme $H^*(\mathbb{P})$ ohne Verwendung von Satz 50.5.

Hinweis: Zeige $\operatorname{incl}^* \neq 0 : H^1(M) \rightarrow H^1(M \cap D)$, wobei M das Möbiusband und D die Scheibe bezeichnet. Verwende dazu die Parametrisierung $\varphi : (\vartheta, t) \mapsto ((1+t \cos \vartheta) \cos(2\vartheta), (1+t \cos \vartheta) \sin(2\vartheta), t \sin \vartheta)$ aus [?, 23.3.5] um ein $\omega \in \Omega^1(M)$ als $\omega := d\vartheta$ zu definieren. Zeige, daß $\int_{S^1} \operatorname{incl}^*(\omega) = 2\pi$ wobei S^1 ein glattes Deformationsretrakt von $M \cap D$ ist.

26. Poincaré Lemma.

Es sei ω eine geschlossene k -Form auf einer offenen (bzgl. 0) sternförmigen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Bestimme eine explizite Formel für η mit $d\eta = \omega$.

Hinweis: Nach dem Beweis des Homotopieaxioms ist $\eta = I_0^1(i_\xi(H^*(\omega)))$ wobei $H : U \times \mathbb{R} \rightarrow U$ die Homotopie $(x, t) \mapsto tx$ und $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ ist.

27. Volumenelement der S^n .

Verwende 48.1.2 um das Volumenelement der S^n als

$$\operatorname{vol}_{S^n} = \operatorname{incl}^* \left(\sum_k (-1)^k x^k dx^0 \wedge \cdots \wedge \overline{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n \right)$$

zu erkennen. Drücke dieses für $n = 2$ in Kugelkoordinaten aus und bestimme die Oberfläche $\int_{S^2} \operatorname{vol}_{S^2}$.

28.

Es seien M und N zwei orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension m und n . Für $\omega \in \Omega_c^m(M)$ und $\eta \in \Omega_c^n(N)$ sei $\omega \wedge \eta := \operatorname{pr}_1^*(\omega) \wedge \operatorname{pr}_2^*(\eta) \in \Omega_c^{m+n}(M \times N)$. Für $f \in C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$ sei $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ definiert durch $g(x) := \int_N f(x, \cdot) \eta$. Zeige:

$$\int_{M \times N} f \cdot \omega \wedge \eta = \int_M g \cdot \omega$$

Jede $m+n$ -Form auf $M \times N$ läßt sich als $f \cdot \omega \wedge \eta$ mit passenden $f \in C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$, $\omega \in \Omega^m(M)$ und $\eta \in \Omega^n(N)$ schreiben.

29.

Für jede Triangulierung einer kompakten 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit gilt:

$$3\alpha_2 = 2\alpha_1, \quad \alpha_1 = 3(\alpha_0 - \chi(M)), \quad \alpha_0(\alpha_0 - 1) \geq 2\alpha_1, \quad \text{und} \quad \alpha_0 \geq \frac{1}{2}(7 + \sqrt{49 - 24\chi(M)})$$

Hinweis: Die erste Gleichung haben wir bereits in [60, 59.5] gezeigt.

30.

Zeige, daß $\alpha_0 \geq 4$, $\alpha_1 \geq 6$ und $\alpha_2 \geq 4$ für S^2 und $\alpha_0 \geq 7$, $\alpha_1 \geq 21$ und $\alpha_2 \geq 14$ für $S^1 \times S^1$. Finde weiters Triangulierungen von S^2 und $S^1 \times S^1$ wo diese Ungleichungen Gleichungen sind.

31.

Bestimme $H_c^k(S^j \times \mathbb{R}^n)$ mittels Induktion nach j unter Verwendung der Mayer-Vietoris Sequenz für kompakte Träger.

32.

Zeige, daß im Beweis von [50.26](#) alle Quadrate für die Anwendung des 5'er Lemmas kommutieren, mit Ausnahme von

$$\begin{array}{ccc} H^{k-1}(U \cap V) & \longrightarrow & H^k(U \cup V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^{l+1}(U \cap V)^* & \longrightarrow & H_c^l(U \cup V)^* \end{array}$$

welches nur bis auf ein Vorzeichen kommutiert. **Hinweis:** Im Beweis von [44.3.4](#) ist $\varphi_U := h_V \varphi$ und $\varphi_V := -h_U \varphi$ die korrekte Definition.

33.

Es sei $p : E \rightarrow M$ ein orientiertes k -Ebenen Bündel über einer orientierten kompakten Mannigfaltigkeit M und U seine Thom-Klasse. Zeige unter Benützung der Poincaré-Dualität Thom's Isomorphie Satz: $H^l(E) \rightarrow H_c^{k+l}(E)$, $[\alpha] \mapsto [\alpha] \cup U$ ist ein Isomorphismus für alle l .

Verwende dies weiter um $U = 0$ für ungerade k zu zeigen und damit auch $\chi(M) = 0$ für ungerade $\dim(M)$. **Hinweis:** Setze $l = k$ und zeige $U \cup U = 0$ wegen der Antikommutativität von \wedge .

34.

Betrachte die konform äquivalente (nach [62.12](#)) vollständige Metrik g_f auf der punktierten Ebene $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ mit Konformitätsfaktor $f(x, y) := 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. Zeige, daß der Einheitskreis eine Geodäte für diese Metrik ist.

35.

Bestimme die konjugierten Punkte auf dem Äquator des Torus. Kann man für Äquatoren auf Drehflächen analog vorgehen?

Literaturverzeichnis

- [1] J. F. Adams. Vector fields on spheres. *Ann. of Math.*, 75:603–632, 1962.
- [2] J.W. Alexander. An example of a simply connected surface bounding a region which is not simply connected. *Proc.Nat.Acad.Sci. USA.*, 10:8–10, 1924.
- [3] C. Bankwitz. über die Fundamentalgruppe des inversen Knotens und des gerichteten Knotens. *Ann.of Math*, 31:129–130, 1930.
- [4] J.L.M. Barosa and A.G. Colares. *Minimal Surfaces in \mathbb{R}^3* . Springer Lecture Notes 1195, 1986.
- [5] A.F. Beardon. *A primer on Riemann Surfaces*. Cambridge Univ.Press, London, 1984.
- [6] M. Berger. *Geometry 1*. Springer, Berlin, 1987.
- [7] M. Berger and B. Gostiaux. *Differential Geometry, Manifolds, Curves, and Surfaces*. Springer, New York, 1987.
- [8] S. Bernstein. Sur un théorème de Géométrie et ses applications aux équations aux dérivées partielles du type elliptique. *Comm.de la Soc.M. Kharkov*, 15:38–45, 1915.
- [9] O. Bonnet. Mémoire sur la théorie générale des surfaces. *Journ. de l'Ecole Polytechn.*, 19:1–146, 1848.
- [10] Th. Bröcker and K. Jänich. *Einführung in die Differentialtopologie*. Springer, Heidelberg, 1973. [12](#), [18](#), [19](#), [24](#)
- [11] Brown. Smooth n -manifolds immerse in $\mathbb{R}^{2n-\alpha(n)}$. *Contemp. Math*, 12:73–79, 1982. [13](#)
- [12] Carathéodory. über die gegenseitigen Beziehungen der Ränder bei konformen Abbildungen des Inneren einer Jordanschen Kurve auf einen Kreis. *Math. Annal.*, 73:305–320, 1913.
- [13] Catalan. *Jornal de Mathém.*, 7:203, 1842.
- [14] S.S. Chern. An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface. *Proc. AMS.*, 6:771–782, 1955.
- [15] S.S. Chern. *Complex manifolds without potential theory*. Van Nostrand, Princeton, 1967. [103](#)
- [16] Cohen. A proof of the immersion conjecture. *Proced. Math. Acad. Soc.*, 79:3390–3392, 1982. [13](#)
- [17] J.H. Conway and N.J.A. Sloane. Four-dimensional lattices with the same theta series. *Int. Math. Res. Not.*, 4:93–96, 1992. [118](#)
- [18] M. Dehn. über die Topologie des dreidimensionalen Raumes. *Math. Ann.*, 69:137–168, 1910.
- [19] J. Dieudonné. *Foundations of Modern Analysis*. Academic Press, New York, 1960.
- [20] Beno Eckmann. Systeme von richtungsfeldern in sphären und stetige lösungen komplexer linearer gleichungen. *Comment. Math. Helv.*, 15:1–26, 1943.
- [21] R. Engelking. *Outline of General Topology*. North-Holland Publ. Comp., Amsterdam, 1968. [6](#)
- [22] H. Federer. *Geometric Measure Theory*. Springer, Berlin, 1969.
- [23] C. Fefferman. The Bergman kernel of biholomorphic mappings of pseudo convex domains. *Inv. Math.*, 26:1–65, 1974.
- [24] G.M. Fischer. On the group of all homeomorphisms of a manifold. *Trans. AMS*, 97:193–212, 1960.
- [25] Gauß. Disquisitiones generales circa superficies curvas. *Comm. Soc. Regiae Sci. Gottingensis Rec.*, 6, 1828.
- [26] Gleason. Groups without small subgroups. *Ann. of Math.*, 56:193–212, 1952.
- [27] Robert E. Gompf. Three exotic \mathbb{R}^4 's and other anomalies. *Journal of Differential Geom.* 18.2, pages 317–328, 1983.
- [28] C. Gordon, D. Webb, and S. Wolpert. Isospectral plane domains and surfaces via riemannian orbifolds. *Invent. Math.*, 110:1–22, 1992. [118](#)
- [29] C. Gordon and E. Wilson. Isospektral deformations of compact solvmanifolds. *J. Diff. Geom.*, 19:241–256, 1984. [118](#)
- [30] C. McA. Gordon and J. Luecke. Knts are determined by their complements. *J.AMS.*, 2:371, 1989.

- [31] Carolyn Gordon, David L. Webb, and Scott Wolpert. One cannot hear the shape of a drum. *Bull. Am. Math. Soc., New Ser.*, 27:134–138, 1992.
- [32] Werner Greub. *Multilinear Algebra*. Springer, 48
- [33] Werner Greub, Stephen Halperin, and Ray Vanstone. *Connections, Curvature and Cohomology I-III*. Academic Press 773, 76, New York, 1972.
- [34] W. Gröbner. *Matrizenrechnung*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1966.
- [35] H.W. Guggenheimer. *Differential Geometry*. Dover Publ., New York, 1963.
- [36] J. Hadamard. Les surfaces à courbures opposées. *J.Math.Pures Appl.*, 4:27–73, 1889. 153
- [37] Haefliger and Reeb. Variétés a une dimension et structures feuilletés de plan. *l'Enseignement Math.*, 2:107–125, 1957. 3
- [38] S. Helgason. *Differential Geometry, Lie Groups and Symmetric Spaces*. Acad. Press, New York, 1978.
- [39] G. Herglotz. über die Starrheit der Eilflächen. *Abh. Math.Sem.Univ.Hamburg*, 15:127–129, 1943.
- [40] D. Hilbert. über Flächen von konstanter Gaußscher Krümmung. *Trans.AMS.*, 2:87–99, 1901.
- [41] S. Hildebrandt. Boundary behaviour of minimal surfaces. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 35:47–82, 1969.
- [42] M.W. Hirsch. *Differential Topology*. Springer, New York, 1976. 12, 13, 14, 18, 24, 88
- [43] H. Hopf and W. Rinow. über den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Flächen. *Math. Ann.*, 116:749–766, 1938.
- [44] Chuan-Chih Hsiung. *A First Course in Differential Geometry*. John Wiley & Sons, New York, 1981.
- [45] I.M. James. Whitehead products and vector fields on spheres. *Proc. Cambridge*, 53:817–820, 1957.
- [46] H. Jarchow. *Locally convex spaces*. Teubner, Stuttgart, 1981. 114
- [47] Joris. Une c^∞ -application non-immersive qui possède la propriété universelle des immersions. *Archiv Math.*, 39:267–277, 1982. 18
- [48] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Amer.Math.Monthly*, 73:1–23, 1966. 117
- [49] M. Kervaire. A manifold which doesn't admit any differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 34:257–270, 1960.
- [50] Michel A. Kervaire. A manifold which doesn't admit a differentiable structure. *Comm. Math. Helv.*, 35:1–14, 1961.
- [51] W. Klingenberg. *Eine Vorlesung über Differentialgeometrie*. Springer, Heidelberg, 1973.
- [52] S. Kobayashi. *On conjugate and cut loci*. The Mathem. Assoc. Am., Englewood Cliffs, N.J., 1967. 151
- [53] S. Kobayashi. *Transformation groups in Differential Geometry*. Springer, Ergebnisse der Math. 70, Berlin, 1972.
- [54] S. Kobayashi and K. Nomizu. *Foundations of Differential Geometry*. Interscience, New York, 1969.
- [55] A. Kriegl. *Topologie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 1999. 5, 145
- [56] A. Kriegl. *Analysis 2*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004. 33, 108
- [57] A. Kriegl. *Analysis 3*. Vorlesung, Univ. Wien, 2004/05. 19, 107, 117
- [58] A. Kriegl. *Funktional Analysis*. Vorlesung, Univ. Wien, 2006.
- [59] A. Kriegl. *Differentialgeometrie*. Univ. Wien, 2007. 23, 111
- [60] A. Kriegl. *Differentialgeometrie 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 2007. 1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 11, 12, 14, 15, 16, 17, 20, 23, 24, 29, 31, 39, 40, 41, 43, 45, 46, 48, 62, 68, 69, 77, 90, 94, 99, 101, 103, 140, 141, 145, 146, 147, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 158, 159, 160, 164, 165, 166, 167, 169, 176, 179, 180, 181, 184, 186
- [61] Andreas Kriegl and Peter W. Michor. *The Convenient Setting of Global Analysis*. Am. Math. Soc., 1997. 143
- [62] Lagrange. *Œuvres Vol. 1*. Gauthier-Villars, Paris, 1868.
- [63] S. Lang. *Differentiable Manifolds*. Addison-Wesley, 1962.
- [64] H. Liebmann. Eine neue Eigenschaft der Kugel. *Nachr. Kgl. Ges. Wiss. Göttingen. Math. Phys.*, pages 44–55, 1899.
- [65] Meusnier. Mémoire sur la courbure des surfaces. *Mémoires des savans étrangers*, 10:477–510, 1776.
- [66] P. Michor. *Riemannsche Differentialgeometrie*. Vorlesung, Univ. Wien, WS 1988/89. 153
- [67] Peter W. Michor. A generalisation of Hamiltonian mechanics. *J. Geometry and Physics*, 2 (2):67–82, 1985. 143
- [68] J. Milnor. On manifolds homeomorphic to the 7-sphere. *Ann. of Math.*, 64:399–405, 1956.
- [69] J. Milnor. Differentiable Structures on Spheres. *Ann. of Math.*, 81:962–972, 1959.
- [70] J. Milnor. Eigenvalues of the Laplace operator on certain mf's. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 51:542, 1964. 118

- [71] Montgomery and Zippin. Small subgroups of finite dimensional groups. *Ann. of Math.*, 56:213–241, 1952.
- [72] B. Morin and J-P. Petit. Let retournement de la sphère. *CRAS.*, 287:767–770, 791–794, 879–882, 1978.
- [73] S. Mukhopadhyaya. New methods in the geometry of a plane arc. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 1:31–37, 1909.
- [74] Munkres. *Elementary Differential Geometry*. 131
- [75] Munkres. Obstruction to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphism. *Ann. of Math.*, 72:521–554, 1960.
- [76] J. Nash. The imbedding problem for Riemannian manifolds. *Ann. of Math.*, 63:20–64, 1956.
- [77] Nomitzu and Ozeki. The existence of complete Riemannian metrics. *Proc. AMS.*, 12:889–891, 1961.
- [78] R. Osserman. Global Properties of minimal surfaces in e^3 and e^n . *Ann. of Math.*, 80:340–364, 1964.
- [79] R. Osserman. *A Survey of Minimal Surfaces*. Van Nostrand, New York, 1969.
- [80] R. Osserman. A proof of regularity everywhere of the classical solution to Plateau’s problem. *Ann. of Math.*, 91:550–569, 1970.
- [81] P. Painlevé. Sur la theorie de la Représentation conforme. *CRAS.*, 112:653–657, 1891.
- [82] C.D. Papakyriakopoulos. On Dehn’s lemma and the asphericity of knots. *Ann. of Math.*, 66:1–26, 1957.
- [83] E. Peschl. *Funktionentheorie*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1967.
- [84] Mary Ellen Rudin. Two nonmetrizable manifolds. *Topology and its Appl.*, 35:137–152, 1990. 5
- [85] H.F. Scherk. Bemerkungen über die kleinste Fläche innerhalb gegebener Grenzen. *Crelles Journal f. reine und angew. Math.*, 13:185–208, 1835.
- [86] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry 1-4*. Publish or Perish, Berkeley, 1979. 5, 33, 48
- [87] J. Stallings. The piecewise-linear structure of euclidean space. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 58:481–488, 1962.
- [88] Toshikazu Sunada. Riemannian coverings and isospectral manifolds. *Ann. Math. (2)*, 121:1985, 169-186. 118
- [89] Taubes. Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds. *J. Diffgeom.*, 25:363–430, 1987.
- [90] J. Tits. *Liesche Gruppen und Algebren*. Springer Hochschultext, Berlin, 1983.
- [91] Trotter. Non-inverible knots exist. *Topology*, 2:341–358, 1964.
- [92] V.S. Varadarajan. *Lie Groups, Lie Algebras and their Representation*. Springer Graduate Text, Berlin, 1984.
- [93] L. Vietoris. Ein einfacher Beweis des Vierscheitelsatzes der ebenen Kurven. *Arch. Math.*, 3:304–306, 1952.
- [94] M.F. Vignéras. Variétés Riemanniennes isospektrales et non isométriques. *Ann. Math.*, 112:21–32, 1980. 118
- [95] R. Walter. *Differentialgeometry*. Bibliographisches Inst., Mannheim, 1978.
- [96] J.W. Warner. *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*. Scott Foresman and Company, Illinois, 1971. 86, 113
- [97] S. Warschawski. über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformen Abbildungen. *Math. Z.*, 35:321–456, 1932.
- [98] Weierstrass. *Monatsber. der Berlin. Akad.*, 1866.
- [99] H. Whitney. *Geometric Integration Theory*. 131
- [100] H. Whitney. The selfintersections of a smooth n -manifold in $2n$ -space. *Annals of Math.*, 45:220–446, 1944. 12, 13, 18
- [101] F. Xavier. The Gauss map of a complete, non-flat minimal surface cannot omit 7 points of the sphere. *Annals of Math.*, 113:211–214, 1981.
- [102] H. Yamabe. On an arcwise connected subgroup of a Liegroup. *Osaka M.J.*, 2:14–15, 1950.
- [103] K. Zindler. über konvexe Gebilde I. *Monatsh. Math. Phys.*, 31:87–102, 1921.