Kategorientheorie

Andreas Kriegl
email:andreas.kriegl@univie.ac.at

250363, SS 2008, Mo. 13^{15}-14^{45}, Di. $12^{05} - 12^{50}$ D 1.03 im UZA 4

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & RX_i \arrow[rr, "RX_f"] & & RX_{i'} \arrow[r] & \cdots \\
& & RX_\infty \arrow[ul, "Rp_i"'] \arrow[ur, "Rp_{i'}"] & & \\
& A \arrow[uu, "f_i"] \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[uurr, "f_{i'}"'] \arrow[rr, dotted, "\eta_A"'] & & RLA \arrow[ul, dotted, "Rg"'] \arrow[uull, dotted, "Rg_i"] \arrow[uu, dotted, "Rg_{i'}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Inhaltsverzeichnis

0. Einleitung 2
1. Grundbegriffe 2
2. Spezielle Morphismen 20
3. Limiten 31
4. Adjungierte Funktoren 68
5. Algebraische Kategorien 96
6. Reflektive Teilkategorien 108
7. Kartesisch abgeschlossen Kategorien, Topoi 113

Literaturverzeichnis 117

Index 119

0. Einleitung

Worum handelt es sich bei der Kategorientheorie?
Im wesentlichen ist es eine Sprache die in den vergangenen 50 Jahren dazu entwickelt wurde um besser die Übersicht über die sich immer stärker aufspaltenden Zweige der Mathematik zu behalten. Insbesonders heißt das, daß sie ermöglichen sollte, das Gemeinsame verschiedener Gebiete besser zu erkennen und somit Zusammenhänge zwischen den Gebieten herzustellen. Man denke z.B. an die Begriffe

- Bijektion, Gruppen Isomorphismus, Linearer Isomorphismus zwischen Vektorräumen, Homöomorphimsus, Diffeomorphismus zwischen Mannigfaltigkeiten, ...
- Injektive Abbildung, Untergruppe, Linearer Teilraum, topologischer Teilraum, Untermannigfaltigkeit, ...
- Kartesisches Produkt, Produkt von Gruppen, Produkt von Vektorräumen, Produkttopologie am kartesischen Produkt, ...
- Disjunkte Vereinigung, freies Produkt von Gruppen, Direkte Summe von Vektorräumen, ...
- Freie Gruppe, freier Vektorraum, diskrete Topologie, Kompaktifizierung, Vervollständigung, ...

So wie die andere große Sprache der Mathematik, die Mengenlehre, ist und war die Kategorientheorie von großen Teilen des Establishments der Mathematik ziemlich angefeindet. Und zwar einerseits natürlich weil revolutionäre neue Ideen immer Zeit benötigen um sich durchzusetzen, andererseits weil die Kategorientheorie natürlich einen höheren Abstraktionsgrad als die übrige Mathematik benötigt, denn die Objekte, mit denen sie sich beschäftigt, sind die mathematischen Theorien selbst, und schließlich verführt natürlich jede Sprache dazu in ihr zu sprechen nur des Sprechens wegen und ohne darauf zu achten, daß die Worte auch eine Bedeutung haben sollten. Um nicht in diese Falle zu tappen, möchte ich diese Einführung in das kategorielle Denken so gestalten, daß ich als zentrale Anwendung die Funktionalanalysis (linear und nicht lineare) im Auge behalten werde. Vorkenntnisse aus der Funktionalanalysis und anderen mathematischen Gebieten sollten eigentlich nicht wirklich nötig sein, allerdings werde ich manche Sätze (wie z.B. Hahn-Banach) nur formulieren und interpretieren aber hier keinen Beweis dazu geben.

Andreas Kriegl, Wien, 2008.02.25.

Dennis Westra verdanke ich eine ausführliche Tippfehlerliste, die ich in dieser Auflage berücksichtigt habe.

Andreas Kriegl, Wien, 2008.10.01

1. Grundbegriffe

Nun womit beschäftigen sich mathematische Gebiete. Zumeist sind die Objekte die untersucht werden Mengen die mit gewissen Strukturen versehen sind, als da z.B. sind algebraische Strukturen wir (Gruppe, Ring, Körper, Vektorraum, Algebra, ...), topologische Strukturen (Metrik, Topologie, Konvergenzstruktur, ...) oder Kombinationen von diesen (topologische Gruppe, angeordneter Körper, topologischer Vektorraum, ...). In den entsprechenden Theorien werden die jeweils gleichartigen Objekte mittels Abbildungen, die die Strukturen erhalten miteinander verglichen, also z.B. mittels Gruppen-Homomorphismen, linearen Abbildungen zwischen Vektorräumen, Kontraktionen (oder stetigen Abbildungen) zwischen metrischen Räumen, stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen, und stetig linearen Abbildungen zwischen topologischen Vektorräumen. Wenn wir in der Kategorientheorie die verschiedenen Gebiete mit einander vergleichen wollen, dann sind somit die Gebiete selbst unsere Anschauungsobjekte und wir müssen die Objekte (und auch die Morphismen) jener Theorien zu einem neuen Objekt zusammenfassen. Die Sprache mit der wir üblicherweise in der Mathematik Dinge zu neuen zusammenfassen ist die Mengenlehre. Da wir diese benutzen wollen, sollten wir uns ein wenig mit dieser anderen großen Sprache (der Mengenlehre) auseinandersetzen.

1.1 Mengenlehre

In der (naiven) Mengenlehre fordert man die Extensionalität, d.h. daß zwei Mengen genau dann gleich sind, wenn sie die gleichen Elemente enthalten, d.h.

$$M_1 = M_2 \Leftrightarrow \forall x : (x \in M_1 \Leftrightarrow x \in M_2),$$

sowie das Komprähensionsaxiom, daß erlaubt zu jeder Aussage $A(x)$ mit der freien Variable x die (wegen Extensionalität eindeutig bestimmte) Menge

$$\{x : A(x)\}$$

bilden, die durch

$$y \in \{x : A(x)\} :\Leftrightarrow A(y)$$

beschrieben wird. Insbesonders können wir damit die üblichen Konstruktionen studieren:

1. $\emptyset := \{x : x \neq x\}$; $\mathcal{U} := \{x : x = x\}$;
2. $\{a\} := \{y : y = a\}$;
3. $\{a, b\} := \{y : y = a \vee y = b\}$;
4. $(a, b) := \{\{a\}, \{a, b\}\}$, (nach [21], siehe auch [Hausdorff1912] $(a, b) := \{\{a, 0\}, \{b, 1\}\}$ und [27] $(a, b) := \{\{\{a\}, \emptyset\}, \{\{b\}\}\}$);
5. $\bigcup X := \{y : \exists x \in X : y \in x\}$;
6. $\bigcup_{A(x)} T_x := \{y : \exists x : A(x) \wedge y \in T_x\} = \bigcup\{T_x : A(x)\}$, mit $\{T_x : A(x)\} := \{y : \exists x : (A(x) \wedge y = T_x)\}$;
7. $a \cup b := \bigcup\{a, b\}$;
8. $\bigcap X := \{y : \forall x \in X : y \in x\}$;
9. $\bigcap_{A(x)} T_x := \{y : \forall x : A(x) \Rightarrow y \in T_x\} = \bigcap\{T_x : A(x)\}$
10. $a \cap b := \bigcap\{a, b\}$;
11. $\mathcal{P}(a) := \{y : y \subseteq a\}$, wobei $y \subseteq a :\Leftrightarrow \forall x : (x \in y \Rightarrow x \in a)$;
12. $f \circ g := \{(x, z) : \exists y : (x, y) \in g \wedge (y, z) \in f\}$;
13. $1_A := \{(a, a) : a \in A\}$;
14. $f^{-1} := \{(x, y) : (y, x) \in f\}$;
15. $f|_a := \{(x, y) \in f : x \in a\}$;
16. $f[a] := \{y : \exists x \in a : (x, y) \in f\}$;
17. $a \times b := \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$;
18. $f : A \to B :\Leftrightarrow f \subseteq A \times B \wedge \forall x \in A ! \exists y \in B : (x, y) \in f$;
19. $\prod_{A(x)} T_x := \Big\{f : \{x : A(x)\} \to \bigcup_{A(x)} T_x : \forall x : (A(x) \Rightarrow f(x) \in T_x)\Big\}$;
20. $A \cong B :\Leftrightarrow \exists f : A \to B \exists g : B \to A : g \circ f = 1_A, f \circ g = 1_B$.

Es folgt:

$$(x,y) = (x',y') \Leftrightarrow (x = x') \wedge (y = y')$$
$$\bigcup \mathcal{P}x = x, \quad x \subseteq \mathcal{P}\bigcup x, \quad \mathcal{P}x \ncong x$$
$$\mathcal{U} = \bigcup \mathcal{U} = \bigcap \emptyset = \mathcal{P}\mathcal{U}$$

Beweis. Es ist $(x,y) \subseteq (x',y')$, genau dann wenn $\{\{x\},\{x,y\}\} \subseteq \{\{x'\},\{x',y'\}\}$. Also $\{\{x\},\{x,y\}\} \subseteq \{\{x'\},\{x',y'\}\} = \{\{x'\}\}$ falls $x' = y'$, d.h. $\{x\} = \{x'\} = \{x,y\}$, also $x = x' = y$. Und andernfalls ist $x' \neq y'$, also $\{x\} \neq \{x',y'\}$ und somit $\{x\} = \{x'\}$, d.h. $x = x'$ und andererseits $\{x,y\} = \{x'\}$ oder $\{x,y\} = \{x',y'\}$, also $y = x'$ oder $y = y'$. Zusammengefaßt folgt also $x = x' = y = y'$ oder $x = x' = y \neq y'$ oder ($x = x'$ und $y = y'$). Gilt auch die umgekehrte Inklusion, so kann der 2.Fall nicht eintreten, denn $x = y$ hat analog $x' = x = y'$ zur Folge.

Es ist $\mathcal{P}x \ncong x$, denn andernfalls gäbe es ein surjektives(!) $f : x \to \mathcal{P}x$. Dann ist $b := \{y \in x : y \notin f(y)\} \subseteq x$ und somit existiert ein $a \in x$ mit $f(a) = b$. Angenommen $a \in b$, dann ist $a \in b = \{y \in x : y \notin f(y)\}$, also $a \notin f(a) = b$. Aber auch $a \notin b$ ist nicht möglich, denn $a \notin b = \{y \in x : y \notin f(y)\}$ hat $a \in f(a) = b$ zur Folge, ein Widerspruch.

$$\bigcup \mathcal{P}x = \{a : \exists b \in \mathcal{P}x : a \in b\} = \{a : \exists b : a \in b \subseteq x\} = \{a : a \in x\} = x,$$
$$\text{(setze } b := x)$$
$$x \subseteq \mathcal{P}\bigcup x, \text{ da } y \in x \Rightarrow y \subseteq \bigcup x \Rightarrow y \in \mathcal{P}\bigcup x$$
$$\bigcup \mathcal{U} = \{a : \exists b \in \mathcal{U} : a \in b\} = \mathcal{U},$$
$$\bigcap \emptyset = \{a : \forall b \in \emptyset : a \in b\} = \{a : a = a\} = \mathcal{U}$$
$$\mathcal{P}\mathcal{U} = \{a : a \subseteq \mathcal{U}\} = \{a : a = a\} = \mathcal{U} \quad \square$$

Wir könnten also naiv die für die Kategorientheorie benötigte Menge aller Gruppen oder die aller Vektorräume bilden. Aber $U \ncong \mathcal{P}\mathcal{U} = \mathcal{U}$ liefert einen Widerspruch, wie auch die Russelmenge $\mathcal{R} := \{x : x \notin x\}$, für welche die Frage "$\mathcal{R} \in \mathcal{R}$?" sofort auf einen Widerspruch führt:

$$\mathcal{R} \in \mathcal{R} = \{x : x \notin x\} \Rightarrow \mathcal{R} \notin \mathcal{R}, \quad \mathcal{R} \notin \mathcal{R} = \{x : x \notin x\} \Rightarrow \mathcal{R} \in \mathcal{R}, \text{ Widerspruch.}$$

Russell führte 1908 eine Typentheorie ein um diese Paradoxien loszuwerden. Dieser Ansatz ist aber sehr umständlich. In der Mengenlehre von Zermelo (1908), Fraenkel und Skolem (1922) (ZFS), hingegen modifiziert man das Komprähensionsaxiom zu einen Aussonderungsaxiom. Wenn $A(x)$ eine Aussage ist und x eine Menge, dann existiert

$$y := \{z \in x : A(z)\}, \text{ d.h. } z \in y \Leftrightarrow (z \in x \wedge A(z)).$$

Die Existenz vieler der üblichen Konstruktionen, wie leere Menge, Vereinigung, Potenzmenge, Bildmenge ... muß man dann allerdings explizit fordern.
Weder die Menge $\mathcal{R}$ darf in (ZFS) existieren noch die Menge $\mathcal{U} := \{x : x = x\}$ aller Mengen, denn andernfalls wäre $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{U}$ selbst eine Menge. Auch die lineare Algebra können wir nicht in ihrer Gesamtheit behandeln, denn zu jeder Menge X und Grundkörper $\mathbb{K}$ existiert der freie $\mathbb{K}$-Vektorraum $F(X)$ aller Abbildungen $f : X \to \mathbb{K}$, die fast überall verschwinden betrachten (für $\mathbb{K} = \mathbb{Z}_2$ ist $F(X) \cong \mathcal{P}X$). Es wäre F eine injektive Abbildung von $\mathcal{U}$ in die Menge aller Vektorräume, denn die charakteristischen Funktionen $e_x := \chi_{\{x\}}$ mit $x \in X$ bilden eine Basis von $F(X)$ und somit ist $F(X_1) \cong F(X_2)$ als Vektorräume, genau dann, wenn $X_1 \cong X_2$ als

Mengen. Wir können aus $F(X)$ sogar X zurückgewinnen, denn für jedes $f \in F(X)$ (z.B. $f = 0$) gilt $X = \operatorname{dom} f$. Wären also $\{X : X \text{ ist Vektorraum}\}$ eine Menge so auch die Teilmenge der freien Vektorräume und damit auch die isomorphe Menge $\mathcal{U}$ aller Mengen.
Die klassische Mengenlehre ZFS erlaubt uns also nicht die meisten mathematischen Gebiete als Ganzes zu betrachten.

Moderne Mengenlehre ist heute Klassentheorie. Dabei unterscheidet man zwei Typen von Mengen. Einerseits die kleinen Mengen (oder kurz Mengen), die selbst als Elemente auftreten können, und andererseits die großen Mengen (oder Unmengen, oder Klassen) die das nicht können. Die Axiome (neben den prädikatenlogischen) sehen dann wie folgt aus: Neben der Gleichheits-Relation “$=$” hat man die Relation des Elementseins “$\in$” für die folgendes gefordert wird:

Ext: Extensionalität:

$$x = y \Leftrightarrow \forall z : (z \in x \Leftrightarrow z \in y)$$

Komp: Komprähension: Wenn A ein Ausdruck (der Mengenlehre) mit einer freien Variable ist, dann gilt:

$$\exists x \forall y : (y \in x \Leftrightarrow A(y) \wedge \operatorname{Mg}(y)),$$

wobei $\operatorname{Mg}(y) :\Leftrightarrow \exists z : y \in z$, als y ist eine (kleine) Menge gelesen wird. Wenn man in den Aussagen A alle quantifizierten Variablen durch $\forall x : \operatorname{Mg}(x) \Rightarrow \dots$ und $\exists x : \operatorname{Mg}(x) \wedge \dots$ ersetzt, so erhält man die Gödel-Bernays-Neumann Mengenlehre (1925–1937). Wir werden diese Einschränkung nicht machen und damit die Morse-Kelley-Tarski (MKT) Mengenlehre (1955–1965) zugrunde legen.
Wegen (Ext) ist obiges x im Komprähensionsaxiom eindeutig und wird als $\{y : A(y)\}$ bezeichnet. Wir können damit die Konstruktionen 1–20 durchführen und erhalten zumindest Klassen. Insbesonders können wir die Klasse $\mathcal{U} := \{x : x = x\}$ bilden.

Leer: Leere Menge:

$$\operatorname{Mg}(\emptyset), \text{ wobei } \emptyset := \{x : x \neq x\}.$$

Dies wir benötigt, damit wenigstens eine Menge existiert.

Teil: Teilmenge:

$$\operatorname{Mg}(x) \wedge (y \subseteq x) \Rightarrow \operatorname{Mg}(y),$$

wobei $y \subseteq x :\Leftrightarrow \forall z : (z \in y \Rightarrow z \in x)$. Es ist nun für $x \neq \emptyset$ der Durchschnitt $\bigcap x$ eine Menge, denn dann existiert ein $y \in x$ und somit ist $\bigcap x \subseteq y$ und $\operatorname{Mg}(y)$. Andrereseits ist $\bigcap \emptyset = \mathcal{U}$ keine Menge.

Verein: Vereinigung:

$$\operatorname{Mg}(x) \Rightarrow \operatorname{Mg}\left(\bigcup x\right),$$

wobei $\bigcup x := \{y : \exists z : y \in z \wedge z \in x\}$. Wir können in MKT auch die Klasse $\bigcup_{A(x)} T_x$ aus 6 bilden, wobei die x und auch die T_x echte Klassen sein dürfen, also $\{T_x : A(x)\}$ durchaus leer sein kann.

Pot: Potenzmenge:

$$\operatorname{Mg}(x) \Rightarrow \operatorname{Mg}(\mathcal{P}(x)),$$

wobei $\mathcal{P}(x) := \{y : y \subseteq x\}$. Man beachte, daß wegen $x = \bigcup \mathcal{P} x$ und $x \subseteq \mathcal{P} \bigcup x$ dieses Axiom zur Umkehrung von (Verein) äquivalent ist.

Insbesonders haben wir damit die Mengen $0 := \emptyset$, $1 := \{0\} = \{\emptyset\} = \mathcal{P}(\emptyset)$ und $2 = \{0,1\} = \{\emptyset,\{\emptyset\}\} = \mathcal{P}(1)$.

Ers: Ersetzung:

$$\mathrm{Mg}(X) \wedge \forall x \in X : \mathrm{Mg}(T_x) \Rightarrow \mathrm{Mg}(\{T_x : x \in X\}),$$

wobei T_x ein Term ist, d.h. $T_x = \{y : A(x,y)\}$ für eine Aussage A mit zwei freien Variablen, und $\{T_x : B(x)\} := \{y : \exists x : B(x) \wedge (y = T_x)\}$.
Insbesonders können wir für Mengen a und b nun $\{a,b\}$ als Menge bilden, wenn wir als $X := 2$ und $T_0 := a$, $T_1 := b$ setzen, d.h. $A(x,y) :\Leftrightarrow (x = 0 \Rightarrow y = a) \wedge (x = 1 \Rightarrow y = b)$.
Damit ist für Mengen a und b auch $a \cup b := \bigcup\{a,b\}$ eine Menge und folglich können wir die natürlichen Zahlen als

$$0 := \emptyset,\ 1 := \{0\},\ 2 := \{0,1\},\ \dots\ , n+1 := n \cup \{n\}$$

definieren. Es gilt $\mathrm{Mg}(\emptyset)$ und $\mathrm{Mg}(n) \Rightarrow \mathrm{Mg}(n+1)$, denn $n+1 = n \cup \{n\}$. Also sind alle natürlichen Zahlen Mengen.
$a \cup b := \bigcup\{a,b\}$ ist nur für Mengen a, b sinnvoll; Für Klassen definiert man $a \cup b := \bigcup_{x=a \vee x=b} x$. Diese Definition funktioniert nicht in GBN.
Aus (Ers) und (Leer) folgt (Teil), denn wenn $\emptyset \neq Y \subseteq X$ und $\mathrm{Mg}(X)$, dann ist $Y := \{T_x : x \in X\}$, wobei

$$T_x := \begin{cases} x & \text{für } x \in Y \\ y_0 & \text{sonst} \end{cases},$$

wobei $y_0 \in Y$ fix gewählt ist.

Unendl: Unendlichkeit

$$\mathrm{Mg}(\mathbb{N}),\ \text{wobei } \mathbb{N} := \bigcap_{\mathrm{Ind}(x)} x$$

und x induktiv heißt ($\mathrm{Ind}(x)$), falls $\emptyset \in x$ und $y \in x \Rightarrow y+1 := y \cup \{y\} \in x$. Um diesen Durchschnitt aufschreiben zu können benötigt man MKT, In GBN muß man statt dessen die Existenz einer induktiven Menge fordern.
Allgemeiner heißt eine Menge α heißt Ordinalzahl, wenn α transitiv (d.h. mit $x \in y \in \alpha$ auch $x \in \alpha$ gilt), und α bezüglich "$\in$" wohlgeordnet ist (d.h. linear geordnet und jede Teilmenge besitzt ein minimales Element). Insbesonders ist jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ und auch $\mathbb{N}$ selbst eine Ordinalzahl. Für Ordinalzahlen α definiert man die Nachfolger-Ordinalzahl durch $\alpha + 1 := \alpha \cup \{\alpha\}$. Ordinalzahlen, die nicht Nachfolger sind heißen Limesordinalzahlen. Man kann transfinite Induktion und Rekursion über die Ordinalzahlen machen, wobei der Induktionschritt von der Aussage für alle $\beta < \alpha$ (d.h. $\beta \in \alpha$, oder äquivalent $\beta \subset \alpha$) auf die für α ist. Mit $\mathcal{ON}$ bezeichnen wir die (wohlgeordnete) Klasse der Ordinalzahlen.

Ausw: Auswahlaxiom:

$$\mathrm{Mg}(x) \wedge \emptyset \notin x \Rightarrow \exists f : x \to \bigcup x, \quad \forall y \in x : f(y) \in y,$$

wobei $f : X \to Y :\Leftrightarrow f \subseteq X \times Y; (x,y_1),(x,y_2) \in f \Rightarrow y_1 = y_2; \forall x \in X \exists y \in Y : (x,y) \in f$.
Dabei ist

$$(x,y) := \Big\{\{\{a\}\} : a \in x\Big\} \cup \Big\{\mathcal{P}(\{b\}) : b \in y\Big\}$$

und $X \times Y := \{(x,y) : x \in X, y \in Y\}$. Wir haben dazu die Definition von Paarmengen aus 4 geändert, damit sie, wie wir gleich sehen werden, auch für Klassen x und y etwas sinnvolles liefert (beachte: $\{x\} \neq \emptyset \Leftrightarrow \mathrm{Mg}(x)$).

Behauptung: $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)$.

Beweis. Es seien folgende Operationen definiert:

$$\begin{aligned} Q(x) &:= \{\{\{a\}\} : a \in x\} \\ Q'(x) &:= \{\mathcal{P}(\{a\}) : a \in x\} \\ R(y) &:= \{a : \{\{a\}\} \in y\} \\ R'(y) &:= \{a : \mathcal{P}(\{a\}) \in y\} \end{aligned}$$

Dann ist $(x,y) = Q(x) \cup Q'(y)$ und es gilt:

$$R(Q(x)) = x, \quad R'(Q'(x)) = x, \quad R(Q'(x)) = \emptyset, \quad R'(Q(x)) = \emptyset,$$
$$R(x \cup y) = R(x) \cup R(y), \quad R'(x \cup y) = R'(x) \cup R'(y),$$

denn es ist offensichtlich $Q(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$, $Q'(x) \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{P}(x))$ und umgekehrt $R(x) \subseteq \bigcup\bigcup x$, $R'(x) \subseteq \bigcup\bigcup x$. Somit ist $R(Q(x)) \subseteq \bigcup\bigcup \mathcal{P}\mathcal{P}x = x$ und umgekehrt folgt aus $y \in x$, daß $\{\{y\}\} \in Q(x)$ und somit $y \in RQx$. Weiters gilt:

$$y \in RQ'x \Rightarrow \{\{y\}\} \in Q'x \Rightarrow \exists a \in x : \{\{y\}\} = \mathcal{P}(\{a\}) = \{\emptyset, \{a\}\},$$

ein Widerspruch. Ähnlich zeigt man $R'Q'x = x$ und $R'Qx = \emptyset$. Die beiden verbleibenden Relationen sind offensichtlich. Somit ist $x = R(Q(x) \cup Q'(y)) = R((x,y))$ und $y = R'(Q(x) \cup Q'(y)) = R'((x,y))$. □

1.2 Lemma.

1. $\mathrm{Mg}(x) \wedge \mathrm{Mg}(y) \Leftrightarrow \mathrm{Mg}((x,y))$;
2. $\mathrm{Mg}(X) \wedge \mathrm{Mg}(Y) \Rightarrow \mathrm{Mg}(X \times Y)$, *da* $X \times Y \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\bigcup(X \cup Y)$;
3. $\mathrm{Fkt}(f) \Rightarrow (\mathrm{Mg}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Mg}(\mathrm{dom}(f)))$, *da* $\mathrm{pr}_1 : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \supseteq f \to \mathrm{dom}(f) := \{x : \exists y : (x,y) \in f\} \subseteq \mathcal{U}$ *eine Bijektion ist;*
4. $\mathrm{Mg}(X) \wedge \mathrm{Mg}(Y) \Rightarrow \mathrm{Mg}(\mathrm{Abb}(X,Y))$, *wobei* $\mathrm{Abb}(X,Y) := \{f : f : X \to Y\}$;
5. $\mathrm{Abb}(\emptyset, Y) = \{\emptyset\}$; $\mathrm{Abb}(X,Y) = \emptyset \Leftrightarrow (Y = \emptyset \wedge X \neq \emptyset) \vee (\neg\,\mathrm{Mg}(X))$;
6. *Allgemeiner* $\prod_{A(x)} T_x = \emptyset \Leftrightarrow \neg\,\mathrm{Mg}(\{x : A(x)\}) \vee (\exists x : A(x) \wedge T_x = \emptyset)$;
7. $\mathrm{Mg}(\{x : A(x)\}) \wedge \forall x : (A(x) \Rightarrow \mathrm{Mg}(T_x)) \Rightarrow \mathrm{Mg}(\bigcup_{A(x)} T_x)$,
   da dann $\bigcup_{A(x)} T_x = \bigcup\{T_x : A(x)\}$;
8. $\mathrm{Mg}(\{x : A(x)\}) \wedge \forall x : (A(x) \Rightarrow \mathrm{Mg}(T_x)) \Rightarrow \mathrm{Mg}(\prod_{A(x)} T_x)$,
   da $\prod_{A(x)} T_x \subseteq \mathrm{Abb}(\{x : A(x)\}, \bigcup_{A(x)} T_x)$;

Beweis. 1.

$$(x,y) = Qx \cup Q'y \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}x \cup \mathcal{P}\mathcal{P}y, \quad x = R((x,y)) \subseteq \bigcup\bigcup(x,y)$$
$$\text{und } y = R'((x,y)) \subseteq \bigcup\bigcup(x,y)$$

2.

$$\begin{aligned} x \in X \Rightarrow x \subseteq \bigcup X \subseteq \bigcup(X \cup Y) &\Rightarrow Qx \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}x \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}\Big(\bigcup(X \cup Y)\Big) \\ &\Rightarrow (x,y) = Qx \cup Q'y \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}\Big(\bigcup(X \cup Y)\Big) \\ &\Rightarrow (x,y) \in \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\Big(\bigcup(X \cup Y)\Big) \Rightarrow X \times Y \subseteq \mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{P}\Big(\bigcup(X \cup Y)\Big) \end{aligned}$$

$\boxed{4}$.

$$f : X \to Y \Rightarrow f \subseteq X \times Y \Rightarrow f \in \mathcal{P}(X \times Y) \Rightarrow \mathrm{Abb}(X, Y) \subseteq \mathcal{P}(X \times Y).$$

$\boxed{5}$. Klarerweise existiert kein $f : X \to Y$ falls $X \neq \emptyset$ und $Y = \emptyset$. Falls $\neg\,\mathrm{Mg}(X)$ so ist $\neg\,\mathrm{Mg}(f)$ für jedes $f : X \to Y$, also $\mathrm{Abb}(X, Y) = \emptyset$.

Umgekehrt sei $\mathrm{Abb}(X, Y) = \emptyset$ und $\mathrm{Mg}(X)$. Dann ist $X \neq \emptyset$ (da $\emptyset \in \mathrm{Abb}(\emptyset, Y)$) und somit $Y = \emptyset$, da andernfalls konstante Funktionen in $\mathrm{Abb}(X, Y)$ existieren.

$\boxed{6}$. Für jedes $f \in \prod_{A(x)} T_x$ gilt $f \cong \{x : A(x)\}$, also ist $\prod_{A(x)} T_x = \emptyset$ für $\neg\,\mathrm{Mg}(\{x : A(x)\})$. Gleiches gilt falls ein x existiert mit $A(x)$ und $T_x = \emptyset$, denn dann wäre $f(x) \in T_x$.

Umgekehrt, sei $\{x : A(x)\}$ eine Menge für welche kein $f : \{x : A(x)\} \to \bigcup_{A(x)} T_x$ existiert mit $\forall x : A(x) \Rightarrow f(x) \in T_x$. Wegen dem Auswahlaxiom muß somit ein x existieren mit $A(x)$ und $T_x = \emptyset$.

$\boxed{7}$.

$$\bigcup_{A(x)} T_x = \{y : \exists x : A(x) \wedge y \in T_x\}$$

$$\begin{aligned} \bigcup\{T_x : A(x)\} &= \bigcup\Big\{z : \exists x : (A(x) \wedge z = T_x)\Big\} \\ &= \Big\{y : \exists z : \exists x : A(x) \wedge z = T_x \wedge y \in z\Big\} \\ &= \Big\{y : \exists x : A(x) \wedge y \in T_x\Big\} \end{aligned}$$

$$B := \{x : A(x)\},\ \mathrm{Mg}(A) \Rightarrow \mathrm{Mg}(\{T_x : x \in B\}) \Rightarrow \mathrm{Mg}\Big(\bigcup(\{T_x : A(x)\})\Big).$$

$\boxed{8}$.

$$\begin{aligned} &\boxed{7} \Rightarrow \mathrm{Mg}(\bigcup_{A(x)} T_x) \\ &\boxed{4} \Rightarrow \mathrm{Mg}\Big(\mathrm{Abb}(\{x : A(x)\}, \bigcup_{A(x)} T_x)\Big) \prod_{A(x)} T_x \subseteq \mathrm{Abb}\Big(\{x : A(x)\}, \bigcup_{A(x)} T_x\Big) \\ &\Rightarrow \mathrm{Mg}\Big(\prod_{A(x)} T_x\Big) \end{aligned}$$

□

Man kann Funktionen auch wie folgt definieren:

- $\mathrm{Rel(f)} :\Leftrightarrow f \subseteq \mathcal{U} \times \mathcal{U}$;
- $\mathrm{Fkt(f)} :\Leftrightarrow \mathrm{Rel}(f) \wedge f \circ f^{-1} \subseteq 1 := \{(x, x) : x \in \mathcal{U}\}$;
- $\mathrm{dom}(f) := \{x : \exists y : (x, y) \in f\}$ für $\mathrm{Fkt}(f)$;
- $f[X] := \{y : \exists x \in X : (x, y) \in f\}$;
- Für $\mathrm{Fkt}(f)$ und $x \in \mathrm{dom}(f)$ ist $f(x)$ ist als das eindeutige y mit $(x, y) \in f$ definiert;
- $f(x) = \bigcup f[\{x\}]$, denn

$$\bigcup f[\{x\}] = \{z : \exists y \in f[\{x\}] : z \in y\} = \big\{z : \exists y : (x, y) \in f \wedge z \in y\big\} = f(x).$$

- $f : X \to Y :\Leftrightarrow \mathrm{Fkt}(f) \wedge \mathrm{dom}(f) = X \wedge f[X] \subseteq Y$;

Wir werden anstelle von (Ausw) das stärkere Axiom der globalen Auswahl verlangen.

GlobAusw: $\exists f : \mathcal{U} \to \mathcal{U} \forall \emptyset \neq x \in \mathcal{U} : f(x) \in x$, d.h. wir können in jeder Klasse aus jeder nichtleeren Menge ein Element auswählen.

Ein weiteres übliches Axiom ist jenes der WOHLFUNDIERTHEIT:

Wohlfund: $\mathcal{W} = \mathcal{U}$,

dabei ist $W : \mathcal{ON} \to \mathcal{U}$ rekursiv durch $W_0 := \emptyset$, $W_{\alpha+1} := \mathcal{P}(W_\alpha)$ und $W_\beta := \bigcup_{\alpha<\beta} W_\alpha$ für Limesordinalzahlen β definiert. Dann ist W_α eine Menge für jede Ordinalzahl α und $\mathcal{W} := \bigcup_{\alpha\in\mathcal{ON}} W_\alpha$ die Klasse der wohlfundierten Mengen. Auf $\mathcal{W}$ ist die Abbildung $\operatorname{rank} : \mathcal{W} \to \mathcal{ON}$ definiert durch

$$\operatorname{rank}(x) := \min\{\alpha \in \mathcal{ON} : x \in W_{\alpha+1}\}.$$

Beh.: W_α ist transitiv.

Beweis. Transfinite Induktion: Sei W_β transitiv für alle $\beta < \alpha$. Dann ist W_α transitiv: Falls $\alpha = \beta + 1$ und $y \in x \in W_\alpha = \mathcal{P}(W_\beta)$, so ist $y \in x \subseteq W_\beta$ und damit $y \in W_\alpha = \mathcal{P}(W_\beta)$, denn $z \in y \Rightarrow z \in y \in W_\beta \xRightarrow{W_\beta \text{ transitiv}} z \in W_\beta$. Andernfalls ist $W_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta$ und aus $y \in x \in W_\alpha$ folgt $\exists \beta < \alpha$: $y \in x \in W_\beta \xRightarrow{W_\beta \text{ transitiv}} y \in W_\beta \subseteq W_\alpha$. □

Beh.: $\alpha \mapsto W_\alpha$ ist monoton.

Beweis. $x \in W_\beta \Rightarrow \forall y \in x$: $y \in W_\beta$, also $x \subseteq W_\beta$, d.h. $x \in \mathcal{P}(W_\beta) = W_{\beta+1}$. Ist α eine Limesordinalzahl so ist $W_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta \sup W_\beta$ für alle $\beta < \alpha$. □

Beh.: $\alpha \in W_{\alpha+1}$, genauer $\operatorname{rank}\alpha = \alpha$.

Beweis durch transfinite Induktion. $0 \in 1 = W_1$. Aus $\beta \in W_{\beta+1}$ folgt $\alpha := \beta+1 = \beta\cup\{\beta\} \in W_\alpha \cup \mathcal{P}(W_\alpha) \subseteq W_{\alpha+1}$. Andererseits folgt für Limes-Ordinalzahlen α aus $\beta \in W_{\beta+1} \subseteq W_\alpha$ für alle $\beta < \alpha$, daß $\alpha = \{\beta : \beta < \alpha\} \subseteq W_\alpha$, also $\alpha \in \mathcal{P}(W_\alpha) = W_{\alpha+1}$. Somit ist $\operatorname{rang}(\alpha) < \alpha$. Angenommen $\alpha \in W_\alpha$ mit α minimal. Dann ist $\alpha \neq 0$. Falls $\alpha = \beta + 1$, so ist $\beta \cup \{\beta\} \in \mathcal{P}(W_\beta)$, also $\beta \in \beta \cup \{\beta\} \subseteq W_\beta$, ein Widerspruch. Andernfalls ist α eine Limes-Ordinalzahl und $\alpha \in W_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} W_\beta$, also existiert ein $\beta < \alpha$ mit $\alpha \in W_\beta$, also auch $\beta \in W_\beta$, ebenfalls ein Widerspruch. □

Proposition. *Folgendes Aussagen sind äquivalent:*

1. $\mathcal{W} = \mathcal{U}$*;*
2. $\forall X \neq \emptyset \exists x \in X : x \cap X = \emptyset$*;*
3. $\neg\exists x : \mathbb{N} \to \mathcal{U} \forall n \in \mathbb{N} : x(n+1) \in x(n)$*.*

Weiters haben diese äquivalenten Aussagen $\forall x : x \notin x$ *zur Folge.*

Beweis. ($1\Rightarrow2$) $\emptyset \neq X \subseteq \mathcal{W} \Rightarrow \exists \alpha := \min\{\operatorname{rank}(x) : x \in X\}$. Sei $x \in X$ mit $\operatorname{rank}(x) = \alpha$. Angenommen $\exists x' \in X \cap x$. Dann ist $\operatorname{rank}(x') < \operatorname{rank}(x)$ ein Widerspruch, denn $x' \in x \in W_{\alpha+1} = \mathcal{P}(W_\alpha) \Rightarrow x' \in x \subseteq W_\alpha \Rightarrow x' \in W_{\beta+1}$ für ein $\beta < \alpha$ (wegen der Montonie), also ist $\operatorname{rank}(x') \leq \beta < \alpha$.

($2 \Rightarrow 3$) Angenommen $\dots \in x_{n+1} \in x_n \in \dots \in x_1 \in x_0$. Sei $X := x[\mathbb{N}]$. Wegen (2) ist $X \cap x_n = \emptyset$ für ein $n \in \mathbb{N}$, aber $x_{n+1} \in X \cap \{x_n\}$, ein Widerspruch.

($3 \Rightarrow 1$) Angenommen $\mathcal{W} \neq \mathcal{U}$. Sei $x_0 \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{W}$. Dann ist $x_0 \not\subseteq \mathcal{W}$, andernfalls $\exists \alpha = \sup\{\operatorname{rank}(x_1) : x_1 \in x_0\}$, da $\operatorname{Mg}(x_0)$ und $x_0 \subseteq \mathcal{W}$. Somit wäre $x_0 \subseteq W_{\alpha+1}$, also $x_0 \in W_{\alpha+2} \subseteq \mathcal{W}$. Somit können wir rekursiv eine Folge $x_n \notin \mathcal{W}$ wählen mit $x_{n+1} \in x_n \in \dots \in x_0$, ein Widerspruch.

Die letzte Aussage gilt, denn angenommen $x \in x$. Sei $X := \{x\}$. Dann ist x das einzige Element von X und erfüllt $x \in \{x\} \cap x = X \cap x$. □

1.3 Proposition. *Das globale Auswahlaxiom (zusammen mit jenen der Wohlfundiertheit) impliziert: Für jede Klasse A und Terme $X_a \neq \emptyset$ für alle $a \in A$ existiert eine Abbildung $f : A \to \bigcup_{a\in A} X_a$ mit $f(a) \in X_a$ für alle $a \in A$.*

Grob gesprochen existiert also auch für jede "Klasse von nicht-leeren Klassen" eine Auswahl.

Beweis. Es sei vorerst X_a eine Menge für alle $a \in A$. Sei $g : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ ein globaler Selektor, d.h. $g(x) \in x$ für alle $\emptyset \neq x \in \mathcal{U}$. Sei $A' := \{X_a \times \{a\} : a \in A\}$. Die Zusammensetzung $f : a \mapsto X_a \times \{a\} =: a' \mapsto g(a') \mapsto \mathrm{pr}_1(g(a')) \in X_a$ ist dann das gewünschte f, wobei $\mathrm{pr}_1 : X_a \times \{a\} \to X_a$ gegeben ist durch $(b, a) \mapsto b$.

Seien nun X_a nicht notwendig Mengen. Für $a \in A$ sei $\mu(a) := \min\{\mathrm{rank}(x) : x \in X_a\}$ und $X'_a := \{x' \in X_a : \mathrm{rank}(x') = \mu(a)\} \subseteq W_{\mu(a)+1}$. Dies sind nicht-leere Teilmengen von X_a und somit existiert eine Auswahl. □

Kategorien-Theorie

Wir sind jetzt in der Lage folgende Definition zu geben:

1.4 Definition (Kategorie). Eine Kategorie (engl.: category, franz.: catégorie) $\mathcal{C}$ besteht aus:

1. einer Klasse, deren Elemente Objekte heißen.
2. zu je zwei Objekten A, B eine Menge $\mathcal{C}(A, B)$, deren Elemente Morphismen von A nach B heißen. Man schreibt statt $f \in \mathcal{C}(A, B)$ auch $A \xrightarrow{f} B$. Wir verlangen, daß aus $\mathcal{C}(A, B) \cap \mathcal{C}(A', B') \neq \emptyset$ die Gleichheit $A = A'$ und $B = B'$ folgt, damit wir zu den Morphismen nicht immer dazuschreiben müssen, daß sie von $A \to B$ aufgefaßt werden. Das ist notwendig um von einer injektiven/surjektiven/bijektiven Abbildung sprechen zu können: z.B. $q : t \mapsto t^2$ ist bijektiv von $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, injektiv von $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, surjektiv von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, aber auch wohldefiniert von $H \to H$ für jede Halbgruppe H.
3. zu je drei Objekten A, B und C eine Abbildung $\circ : \mathcal{C}(B, C) \times \mathcal{C}(A, B) \to \mathcal{C}(A, C)$, die Komposition heißt und so daß für
$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$
folgendes Assoziativgesetz gilt $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$.
$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "h\circ g"] & C \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[u, "f"] \arrow[ur, "g\circ f"] \arrow[r, "(h\circ g)\circ f", "h\circ(g\circ f)"'] & D \end{tikzcd}$$
Sowie zu jedem Objekt A ein Morphismus $A \xrightarrow{1_A} A$ mit $1_A \circ f = f$ für alle $f : X \to A$ und $g \circ 1_A = g$ für alle $g : A \to X$.
$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f"'] & A \arrow[d, "1_A"] \arrow[dr, "g"] & \\ & A \arrow[r, "g"'] & Y \end{tikzcd}$$

Wegen $1_A = 1_A \circ 1'_A = 1'_A$ ist 1_A eindeutig bestimmt, und heißt EINHEIT auf A.

Wegen der Existenz der Einheiten kommt es eigentlich nur auf die Morphismen und nicht auf die Objekte an. Man kann also eine Kategorie auch als eine Klassen $\mathcal{C}$ von Morphismen auffassen, zusammen mit einer partiell definierten Abbildung $\circ : \mathcal{C}\times\mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}$, d.h. der Definitionsbereich von $\circ$ ist eine Teilklasse $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{C}\times\mathcal{C}$ (bestehend aus den zusammensetzbaren Morphismen) und $\circ$ ist eine Funktion $\circ : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$. Wir sagen $\exists f \circ g :\Leftrightarrow (f, g) \in \mathcal{D}$ und es gelten die beiden Axiome:

Comp1: Falls $h \circ g$ und $g \circ f$ existiert so auch $(h \circ g) \circ f$.

Comp2: Es existiert $h \circ (g \circ f)$ genau dann, wenn $(h \circ g) \circ f$ es tut, und es ist $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.

Einh: Für alle $f \in \mathcal{C}$ existieren Einheiten e und e' mit $\exists f \circ e, e' \circ f$, wobei e Einheit heißt, falls $\exists g \circ e \Rightarrow g \circ e = g$ und $\exists e \circ h \Rightarrow e \circ h = h$. Man beachte, daß e und e' eindeutig bestimmt sind, denn wenn $\bar{e}$ eine zweite Einheit ist mit $\exists f \circ \bar{e}$. Dann existiert $e \circ \bar{e}$ (da $(f \circ e) \circ \bar{e} = f \circ \bar{e}$ es tut) und somit ist $e = e \circ \bar{e} = \bar{e}$, und analog für e'. Folglich bezeichnen wir e als Domäne $\mathrm{dom}(f)$ und e' als Codomäne $\mathrm{cod}(f)$ von f.

Klein: Für je zwei Einheiten e und e' ist $\{f \in \mathcal{C} : \mathrm{dom}\, f = e, \mathrm{cod}\, f = e'\}$ eine Menge.

Wir schreiben $|\mathcal{C}|$ für die Objekte von $\mathcal{C}$ (die wir bei Bedarf auch mit den Einheiten von $\mathcal{C}$ identifizieren) und $\mathcal{C}(A, B)$ für die Teilmenge von $\mathcal{C}$ aller Morphismen, die Domäne A und Codomäne B besitzen.

1.5 Beispiele.

1. $\underline{Set}$, die Kategorie der Abbildungen zwischen (kleinen!) Mengen.
2. $\underline{Gru}$, die Kategorie der Homomorphismen von Gruppen.
3. $\underline{Ring}$, die Kategorie der Homomorphismen von Ringen.
4. $\underline{K\ddot{o}rp}$, die Kategorie der Homomorphismen zwischen Körpern (automatisch injektiv).
5. $\underline{\mathbb{K}\text{-}Vekt}$, die Kategorie der linearen Abbildungen zwischen $\mathbb{K}$-Vektorräumen für einen Körper $\mathbb{K}$.
6. $\underline{R\text{-}Mod}$, die Kategorie der R-Modul Homomorphismen, für einen Ring R.
7. $\underline{Top}$, die Kategorie der stetigen Abbildungen zwischen topologischen Räumen.
8. $\underline{PO}$, die Kategorie der monotonen Abbildungen zwischen partiell geordneten Mengen.
9. Es sei $(X, \succ)$ eine partiell geordnete Klasse (d.h. $\succ$ ist transitiv und reflexiv). Dann können wir $(X, \succ)$ als Kategorie auffassen, wenn wir die Elemente von X als Objekte nehmen, und für jedes $x \succ y$ einen eindeutigen Morphismus (z.B. (x, y)) wählen. Wegen der Transitivität von $\succ$ ergibt sich das Assoziativgesetz automatisch und die Existenz von Einheiten ist die Reflexivität.
10. Jedes Monoid $(X, \bullet)$ kann als Kategorie mit einem Objekt X und jedem Element $x \in X$ als Endomorphismus $y \mapsto x \bullet y$ diese Objektes auffassen. Die Komposition ist dabei gerade die Multiplikation $\bullet$ des Monoids und die Einheit das neutrale Element.
11. Wenn wir eine beliebige Menge von Morphismen zwischen Objekten gegeben haben. So können wir daraus eine Kategorie bilden. Indem wir die gegebenen Objekte nehmen, für jedes Objekt eine Einheit hinzufügen und für jede endliche Folge zusammensetzbarer Morphismen ein Kompositum hinzufügen. Das ist die freie Kategorie über einen Graphen.

12. Wenn man zwei stetige Abbildungen $f_0, f_1 : X \to Y$ zwischen topologischen Räumen als homotop bezeichnet wenn eine stetige Abbildung $f : X \times I \to Y$ mit $f(\_, j) = f_j$ für $j \in \{0,1\}$ existiert. So erhält man eine Äquivalenzrelation, und die topologischen Räume als Objekte zusammen mit Homotopieklassen stetiger Abbildungen als Morphismen bilden dann ebenfalls eine Kategorie $\underline{Homotop}$.

1.6 Definition. Es sei $\mathcal{A}$ eine Kategorie. Unter einer Unterkategorie (oder auch Teilkategorie), verstehen wir eine Teilklasse von Objekten zusammen mit einer Teilklasse von Morphismen, so daß die Komposition von $\mathcal{A}$ diese Teilklassen zu einer Kategorie macht.

Falls für A, A' in der Teilkategorie $\mathcal{B}$ immer $\mathcal{A}(A, A') = \mathcal{B}(A, A')$ ist, so heißt $\mathcal{B}$ volle Teilkategorie von $\mathcal{A}$.

1.7 Beispiele von Teilkategorien.

1. Die Kategorie $\underline{Haus}$ der stetigen Abbildungen zwischen Hausdorff-Räumen ist eine volle Teilkategorie von $\underline{Top}$, ebenso wie die Kategorie $\underline{Komp}$ der stetigen Abbildungen zwischen kompakten Hausdorff-Räumen eine von $\underline{Haus}$ ist.
2. Die Kategorie $\underline{Gru}$ ist eine volle Teilkategorie von $\underline{Mon}$ der Kategorie von (1-bewahrenden) Homomorphismen zwischen Monoiden und auch von $\underline{HGru}$ der Kategorie der Halbgruppen. Denn die Einheit einer Gruppe ist das eindeutige idempotente Element ($e \cdot e = e \Rightarrow 1 = e \cdot e^{-1} = e \cdot e \cdot e^{-1} = e \cdot 1 = e$), und Idempotente werden erhalten. Hingegen ist $\underline{Mon}$ keine volle Teilkategorie von $\underline{HGru}$.
3. Die Kategorie $\underline{Körp}$ ist eine nicht volle Teilkategorie von $\underline{Ring}$, denn die 0-Abbildungen sind keine Körperhomomorphismen.
4. Die Kategorie $\underline{\mathbb{K}\text{-}VR}$ ist eine volle (echte) Teilkategorie von $\underline{\mathbb{K}\text{-}Mod}$. (Die Wirkung von $\mathbb{K}$ auf einen Modul muß nicht treu sein).
5. Die von der bezüglich $\subseteq$ partiell geordneten Klasse $\mathcal{U}$ erzeugte Kategorie im Sinne von 1.5.9 ist eine (nicht volle) Teilkategorie von $\underline{Set}$.

Um nun verschiedene Kategorien miteinander zu vergleichen benötigen wir folgende

1.8 Definition. Es seine $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Kategorien. Unter einen Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ verstehen wir eine Abbildung die Objekten A von $\mathcal{A}$ Objekte $F(A)$ von $\mathcal{B}$ und Morphismen $f \in \mathcal{A}(A, A')$ Morphismen $F(f) \in \mathcal{B}(F(A), F(A'))$ zuordnet, und zwar so daß er mit Komposition und Einheiten verträglich ist, d.h. $F(1_A) = 1_{F(A)}$ und $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$, bzw.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "g\circ f"] \arrow[dr, "f"'] & & C \\ & B \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd} \quad \Rightarrow \quad \begin{tikzcd} F(A) \arrow[rr, "F(g\circ f)"] \arrow[dr, "F(f)"'] & & F(C) \\ & F(B) \arrow[ur, "F(g)"'] & \end{tikzcd}$$

Da die Objekte A durch ihre entsprechenden Einheiten 1_A beschrieben werden können, genügt es einen Funktor auf der Klasse aller Morphismen zu kennen. Man muß nur verlangen, daß

1. Falls $f \circ g$ existiert, so existiert auch $F(f) \circ F(g)$ und stimmt mit $F(f \circ g)$ überein;
2. Falls e eine Einheit ist, so auch $F(e)$.

Auf Objekten A können wir den Funktor dann durch $1_{F(A)} = F(1_A)$ erweitern. Wenn $\mathcal{A}$ eine KLEINE KATEGORIE (d.h. die Morphismen (und damit auch die Objekte) bilden eine Menge), dann heißt ein Funktor auch ein kommutatives Diagramm.

1.9 Beispiel. 1. Insbesonders haben wir z.B. die folgenden Vergißfunktoren:

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{\text{Körp}} \arrow[r] & \underline{Ring} \arrow[r] & \underline{Gru} \arrow[dr] & \\
 & \underline{\mathbb{K}\text{-}VR} \arrow[r] & \underline{R\text{-}Mod} \arrow[ur] & & \underline{Set} \\
\underline{TVR} \arrow[r] \arrow[ur] & \underline{Haus} \arrow[r] & \underline{Top} \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Natürlich ist die Inklusion einer Teilkategorie ein Funktor.

2. Die Abbildung $\mathcal{P} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ erweitert sich zu einen Funktor $\mathcal{P} : \underline{Set} \to \underline{Set}$ vermöge $\mathcal{P}(f)(a) := f[a]$ für alle $a \in \mathcal{P}(A)$.

3. Die Abbildung $\bigcup : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ kann jedoch nicht zu einen Funktor $\underline{Set} \to \underline{Set}$ erweitert werden, da zwar eine Abbildung $\{1\} \to \{0\}$ existiert nicht aber eine von $1 = \bigcup\{1\}$ nach $0 = \bigcup\{0\}$. Allerdings ist $\bigcup$ monoton bezüglich "$\subseteq$", also definiert sie einen Funktor der Kategorie aus 1.7.5, die zu dieser partiell geordneten Klasse $(\mathcal{U}, \subseteq)$ gehört.

1.10 Definition. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt TREU, wenn $F : \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(F(A), F(A'))$ injektiv ist für alle Objekte A, A' von $\mathcal{A}$.
Er heißt VOLL, wenn $F : \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(F(A), F(A'))$ surjektiv ist für alle Objekte A, A' von $\mathcal{A}$.
Ein ISOMORPHISMUS VON KATEGORIEN ist ein Funktor, der einen inversen Funktor besitzt. D.h. er ist bijektiv auf Objekten und voll und treu.
Ein Funktor heißt EINBETTUNG, wenn er injektiv auf Morphismen ist (oder äquivalent, wenn er injektiv auf Objekten und treu ist). Daß ist genau dann der Fall, wenn sein Bild eine Teilkategorie ist und er einen Isomorphismus auf sein Bild induziert.

Die Komposition von Funktoren ist selbst ein Funktor und die Identität ist ein Funktor. Allerdings können wir falls $\mathcal{A}$ eine echte Klasse ist, nicht die Klasse aller Funktoren von $\mathcal{A}$ nach $\mathcal{B}$ bilden. Somit können wir zwar nicht die Kategorie aller Kategorien bilden, aber zumindest $\underline{CAT}$ die Kategorie aller Funktoren zwischen allen kleinen Kategorien.

Beachte $\{\mathcal{C} : \mathcal{C} \text{ ist Kategorie}\}$ enthält nur kleine Kategorien, beschreibt also keineswegs die Mathematik als ganzes.

1.11 Beispiel. Es sei $\underline{SNR}$ die Kategorie der stetigen linearen Abbildungen zwischen seminormierten Räumen, d.h. Vektorräumen E zusammen mit einer Menge $\mathcal{P}$ von Seminormen, für die mit p_i auch jede Seminorm $p \le p_1 + p_2$ dazugehört. Weiters sei $\underline{LKV}$ die Kategorie der stetigen linearen Abbildungen zwischen lokalkonvexen Vektorräumen, d.h. topologischen Vektorräumen die eine 0-Umgebungsbasis bestehend aus (absolut)konvexen Mengen besitzt.

Dann können wir jeden seminormierten Raum einen lokalkonvexen Vektorraum zuordnen, indem wir den selben Vektorraum nehmen zusammen mit der Topologie die durch die Translate der Bälle von Seminormen erzeugt wird. Bekanntlich liefert dies einen Isomorphismus von Kategorien, siehe [19].

Es gibt aber auch “Funktoren” die die Richtung der Pfeile umdrehen. Z.B. können wir für jede Abbildung $f : A \to B$ eine Abbildung $f^* : \mathcal{P}(B) \to \mathcal{P}(A)$ durch $b \mapsto f^{-1}[b]$ definieren.
Eine Verallgemeinerung dieses Beispiels ist die Bildung des Dualraums. Wir können ja jedem Vektorraum E seinen Dualraum $E^* = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{K})$ zuordnen. Zu jeder linearen Abbildung $f : E_1 \to E_2$ können wir die adjungierte Abbildung $f^* : E_2^* \to E_1^*$ betrachten, die durch $f^*(x_2^*)(x_1) := x_2^*(f(x_1))$ für alle $x_1 \in E_1$ und $x_2^* \in E_2^*$ definiert ist. Es gilt $(1_E)^* = 1_{E^*}$ und $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. Um auch solche “Funktoren” behandeln zu können, könnten wir den Begriff des kontravarianten Funktors einführen, oder wir modifizieren die eine der beiden auftretenden Kategorien, indem wir alle Pfeile umdrehen. Wir wählen den zweiten Weg und definieren:

1.12 Definition. Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann verstehen wir unter der dualen Kategorie $\mathcal{C}^{op}$ die Kategorie mit den gleichen Objekten wie $\mathcal{C}$ und mit $\mathcal{C}^{op}(A, A') := \mathcal{C}(A', A)$, $f \circ^{op} g = g \circ f$ und den gleichen Einheiten wie $\mathcal{C}$.

Dualitätsprinzip

Wir haben natürlich das Metatheorem, daß wenn eine Aussage für alle Kategorien wahr ist, so auch die duale Aussage, die entsteht indem man alle Pfeile umdreht.

Um auch Funktoren in mehreren Variablen zu betrachten benötigen wir das Produkt von Kategorien.

1.13 Definition. Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei Kategorien. Dann ist das Produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ jene Kategorie, die als Objekte Paare (A, B) von Objekten A von $\mathcal{A}$ und B von $\mathcal{B}$ besitzt, als Morphismen $(\mathcal{A} \times \mathcal{B})((A, B), (A', B')) := \mathcal{A}(A, A') \times \mathcal{B}(B, B')$ und wo die Komposition und die Einheiten komponentenweise gegeben sind.

1.14 Bemerkung. Wenn $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ ein Funktor ist, so erhalten wir für jedes Objekt A in $\mathcal{A}$ einen Funktor $F(A, \_) : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ und und für jedes Objekt B in $\mathcal{B}$ eine Funktor $F(\_, B) : \mathcal{A} \to C$ indem wir sie auf Objekten durch $F(A, \_)(B) := F(A, B) =: F(\_, B)(A)$ definieren und auf Morphismen durch $F(A, f) := F(1_A, f)$ und $F(f, B) := F(f, 1_B)$. Wegen der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd}
(A,B) \arrow[r, "(f,1_B)"] \arrow[d, "(1_A,g)"'] \arrow[dr, "(f,g)"] & (A',B) \arrow[d, "(1_{A'},g)"] \\
(A,B') \arrow[r, "(f,1_{B'})"] & (A',B')
\end{tikzcd}$$

haben wir $F(A', g) \circ F(f, B) = F(f, g) = F(f, B') \circ F(A, g)$.
Sind umgekehrt für jedes Objekt A in $\mathcal{A}$ und B in $\mathcal{B}$ Funktoren $L_A : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ und $R_B : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ gegeben die $L_A(B) = R_B(A)$ und $L_{A'}(g) \circ R_B(f) = R_{B'}(f) \circ L_A(g)$ erfüllen, dann ist durch $F(A, B) := L_A(B) = R_B(A)$ und $F(f, g) := L_{A'}(g) \circ R_B(f) = R_{B'}(f) \circ L_A(g)$ ein eindeutig bestimmter Funktor $F : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ mit

$F(A,\_) = L_A$ und $F(\_,B) := R_B$ definiert, denn

$$\begin{tikzcd}
F(A,B) \arrow[r, "F(f,B)"] \arrow[dr, "F(f,g)"'] & F(A',B) \arrow[r, "F(f',B)"] \arrow[d, "F(A',g)"] & F(A'',B) \arrow[d, "F(A'',g)"] \\
& F(A',B') \arrow[r, "F(f',B')"] \arrow[dr, "F(f',g')"'] & F(A'',B') \arrow[d, "F(A'',g')"] \\
& & F(A'',B'')
\end{tikzcd}$$

1.15 Beispiel. Es ist das kartesische Produkt $\times : \underline{Set} \times \underline{Set} \to \underline{Set}$ ein Funktor. Nicht jedoch $\cap : \underline{Set} \times \underline{Set} \to \underline{Set}$, denn wenn $A, B \neq \emptyset$ so gewählt werden, daß $A \cap B = \emptyset$, dann ist $\underline{Set}(A\cap A, A\cap B) = \underline{Set}(A, \emptyset) = \emptyset$ aber $(\underline{Set}\times\underline{Set})((A,A),(A,B)) \neq \emptyset$.

1.16 Der Hom-Funktor. Für jede Kategorie $\mathcal{C}$ haben wir eine Funktor $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \underline{Set}$, den sogenannten HOM-FUNKTOR, welcher (A,B) auf $\mathcal{C}(A,B)$ abbildet, und Morphismen $f : A' \to A$ und $g : B \to B'$ in $\mathcal{C}$ auf $\mathcal{C}(f,g) : \mathcal{C}(A,B) \to \mathcal{C}(A',B')$, $h \mapsto g \circ h \circ f$ abbildet.

Wenn wir eine Variable festhalten, so erhalten wir Funktoren $\mathcal{C}(A,\_) : \mathcal{C} \to \underline{Set}$ und $\mathcal{C}(\_,B) : \mathcal{C}^{op} \to \underline{Set}$. Man bezeichnet $\mathcal{C}(A,g) = \mathcal{C}(1_A,g)$ auch als g_* und $\mathcal{C}(f,B) = \mathcal{C}(f,1_B)$ auch als f^*.

Es kommutiert

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(A,B) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "g_*"] \arrow[dr, "\mathcal{C}(f,g)"] & \mathcal{C}(A',B) \arrow[d, "g_*"] \\
\mathcal{C}(A,B') \arrow[r, "f^*"] & \mathcal{C}(A',B')
\end{tikzcd}$$

1.17 Bemerkung. Ein Kategorie $\mathcal{A}$ heißt KONKRET, wenn sie einen (ausgezeichneten) treuen Funktor nach $\underline{Set}$ besitzt.

Eine Kategorie genau dann konkret ist, wenn sie sich in $\underline{Set}$ einbetten (siehe 1.10) läßt:
In der Tat können wir aus einen treuen Funktor $V : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ eine Einbettung F konstruieren durch $F(A) := V(A) \times \{A\}$ und $F(f) := f \times \{(A,A')\}$ für $f : A \to A'$.

Wir können weiters $\underline{Set}$ voll einbetten nach $\underline{CAT}$, indem wir jeder Menge X die (diskrete) Kategorie mit Objektenmenge X und nur den Identitäten auf $x \in X$ zuordnen. Den Abbildungen $f : X \to X'$ entsprechen dann genau die Funktoren der zugehörigen diskreten Kategorien.

Umgekehrt können wir auch $\underline{CAT}$ in $\underline{Set}$ einbetten, indem wir jeder kleinen Kategorie $\mathcal{C}$ ihre Morphismenmenge zuordnen. Jeder Funktor ist gerade eine Abbildung auf den Morphismenmengen.

Weiters können wir auch $\underline{Set}$ in viele konkrete Kategorien einbetten, indem wir (später noch ausführlich zu behandelnde) freie Objekte verwenden:
Z.B. ist $F : \underline{Set} \to \underline{Top}$ gegeben durch $X \mapsto (X, \mathcal{P}(X))$ und $f \mapsto f$.
Oder $F : \underline{Set} \to \underline{AGru}$ ist gegeben durch $X \mapsto \{f : X \to \mathbb{Z} | f(x) = 0 \text{ fast immer }\}$ (der freien Abelschen Gruppe). Und $f : X \to X'$ wir die lineare Ausdehnung $F(f) : F(X) \to F(X')$ zugeordnet. Genauso definiert man $F : \underline{Set} \to \underline{VR}$ indem man $\mathbb{Z}$ durch den Grundkörper ersetzt.
Eine Einbettung von $\underline{Set} \to \underline{SNR}$ erhält man indem man den freien Vektorraum

$F(X)$ mit der Menge aller Seminormen versieht (das ist dann die feinste lokalkonvexe Topologie auf dem $F(X)$).

Um wiederum Funktoren miteinander zu vergleichen benötigen wir schließlich noch natürliche Transformationen:

1.18 Definition. Es seien $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwei Funktoren. Unter einer NATÜRLICHEN TRANSFORMATION $\varphi : F \to G$ verstehen wir eine Abbildung, die jedem Objekt A von $\mathcal{A}$ einen $\mathcal{B}$-Morphismus $\varphi_A \in \mathcal{B}(F(A), G(A))$ so zuordnet, daß für alle $\mathcal{A}$-Morphismen $f : A \to A'$ folgendes Diagramm kommutiert:

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\varphi_A"'] & F(A') \arrow[d, "\varphi_{A'}"'] \\ G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(A') \end{tikzcd}$$

1.19 Beispiel. Es definiert die Abbildung $\delta : E \to E^{**}$, $x \mapsto (x' \mapsto x'(x))$ für alle Vektorräume E eine natürliche Transformation von der Identität in die Bidualisierung $\underline{VR} \to \underline{VR}^{op} \to \underline{VR}$.

Weiters haben wir folgenden natürlichen Isomorphismus $\eta : \mathcal{P} \cong \underline{Set}(\_, 2) : \underline{Set}^{op} \to \underline{Set}$, gegeben durch

$$\eta_A : \mathcal{P}(A) \ni B \mapsto \chi_B|_A \left(x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in B \setminus A \end{cases} \right)$$

Beachte dabei, daß eine natürliche Transformation die aus lauter Isomorphismen besteht NATÜRLICHER ISOMORPHISMUS genannt wird.

1.20 Beispiel. Man kann natürliche Transformationen $\eta : F \to F'$ und $\eta' : F' \to F''$ komponentenweise zusammensetzen um eine Transformation $\eta' \circ \eta : F \to F''$ zuerhalten, die durch $(\eta' \circ \eta)_A := \eta'_A \circ \eta_A$ definiert ist. Weiters hat man die identische Transformation $1|_F : F \to F$ die komponentenweise aus den Einheiten $1_{F(A)}$ besteht. Auf diese Weise können wir die Kategorie $\underline{FUN}$ bilden, die als Objekte Funktoren zwischen kleinen Kategorien hat und als Morphismen natürliche Transformationen zwischen diesen Funktoren.

Weiters können wir für jede kleine Kategorie $\mathcal{A}$ und beliebige Kategorie $\mathcal{B}$, die Kategorie $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}$ bilden, die als Objekte alle Funktoren $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ hat und als Morphismen $\mathcal{B}^{\mathcal{A}}(F, G)$ die natürlichen Transformationen von F nach G.

1.21 Bemerkung. Wir haben neben der "vertikalen" Komposition $\sigma \circ \tau$ von natürlichen Transformationen $\tau : F \to F'$ und $\sigma : F' \to F''$ auch eine HORIZONTALE KOMPOSITION $\sigma * \tau$ von natürlichen Transformationen zusammensetzbarer Funktoren $\tau : F \to F'$ und $\sigma : G \to G'$. Da τ_A ein $\mathcal{B}$-Morphismus ist, kommutiert

$$\begin{tikzcd} (G \circ F)(A) \arrow[r, "\sigma_{F(A)}"] \arrow[d, "G(\tau_A)"] \arrow[dr, dotted, "(\sigma\star\tau)_A"] & (G' \circ F)(A) \arrow[d, "G'(\tau_A)"] \\ (G \circ F')(A) \arrow[r, "\sigma_{F'(A)}"] & (G' \circ F')(A) \end{tikzcd}$$

Und wir können die Diagonale als $(\sigma \star \tau)_A$ definieren. Man zeigt leicht, daß auch diese Komposition assoziativ ist und als Einheiten die natürlichen Transformationen $1_{1_\mathcal{A}} : 1_\mathcal{A} \to 1_\mathcal{A}$ zwischen den identischen Funktoren hat. Auf diese Weise erhalten wir die Kategorie $\underline{NAT}$, die als Objekte kleine Kategorien hat, als Morphismen die natürlichen Transformationen von Funktoren zwischen diesen Kategorien und $\star$ als Komposition hat.

Falls folgende Situation vorliegt

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "F"] \arrow[dr, phantom, "\downarrow\tau"] & \bullet \arrow[r, "G"] \arrow[dr, phantom, "\downarrow\sigma"] & \bullet \\
\bullet \arrow[r, "F'"] \arrow[dr, phantom, "\downarrow\tau'"] & \bullet \arrow[r, "G'"] \arrow[dr, phantom, "\downarrow\sigma'"] & \bullet \\
\bullet \arrow[r, "F''"] & \bullet \arrow[r, "G''"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

so gilt

$$(\sigma' \circ \sigma) \star (\tau' \circ \tau) = (\sigma' \star \tau') \circ (\sigma \star \tau):$$

$$\begin{tikzcd}
(G \circ F)(A) \arrow[r, "\tau_{F(A)}"] \arrow[d, "G(\sigma_A)"] \arrow[dr, dotted, "(\sigma\star\tau)_A"] & (G' \circ F)(A) \arrow[r, "\tau'_{F(A)}"] \arrow[d, "G'(\sigma_A)"] & (G'' \circ F)(A) \arrow[d, "G''(\sigma_A)"] \\
(G \circ F')(A) \arrow[r, "\tau_{F'(A)}"] \arrow[d, "G(\sigma'_A)"] & (G' \circ F')(A) \arrow[r, "\tau'_{F'(A)}"] \arrow[d, "G'(\sigma'_A)"] \arrow[dr, dotted, "(\sigma'\star\tau')_A"] & (G'' \circ F')(A) \arrow[d, "G''(\sigma'_A)"] \\
(G \circ F'')(A) \arrow[r, "\tau_{F''(A)}"] & (G' \circ F'')(A) \arrow[r, "\tau'_{F''(A)}"] & (G'' \circ F'')(A)
\end{tikzcd}$$

Beachte die Bezeichnungsweise $\sigma \star F := \sigma \star 1_F$ und $G \star \tau := 1_G \star \tau$ mit welcher $(\sigma \star F)_A = \sigma_{F(A)}$ und $(G \star \tau)_A = G(\tau_A)$ gilt.

Wir wollen nun den Begriff isomorpher Kategorien abschwächen.

1.22 Theorem. *Es sei $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor. Dann sind äquivalent:*

1. *Es existiert eine Funktor $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ und natürliche Isomorphismen $\varepsilon : 1_{\mathcal{A}} \to R \circ L$ und $\eta : L \circ R \to 1_{\mathcal{B}}$.*
2. *L ist voll, treu und dicht (d.h. für jedes Objekt B von $\mathcal{B}$ existiert ein Objekt A von $\mathcal{A}$ mit $L(A) \cong B$).*

Es können dabei die natürlichen Transformationen ε und η so gewählt werden, daß die Beziehungen $(L\star\varepsilon) = (\eta\star L)^{-1}$ und $R\star\eta = (\varepsilon\star R)^{-1}$ gelten, d.h. $L(\varepsilon_A) = \eta^{-1}_{L(A)}$ und $R(\eta_B) = \varepsilon^{-1}_{R(B)}$ oder als Diagramme

$$\begin{tikzcd}
LA \arrow[rr, "1_{LA}"] \arrow[dr, "L(\varepsilon_A)"'] & & LA \\
& LRLA \arrow[ur, "\eta_{LA}"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& RLRB \arrow[dr, "R(\eta_B)"] & \\
RB \arrow[ur, "\varepsilon_{RB}"] \arrow[rr, "1_{RB}"] & & RB
\end{tikzcd}$$

Ein Funktor L mit diesen Eigenschaften heißt Äquivalenz.

Beweis. $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{2}$ L ist treu, denn seien $f_i : A \to A'$ für $i \in \{0, 1\}$ zwei Morphismen mit $L(f_0) = L(f_1)$. Betrachte

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varepsilon_A", "\cong"'] \arrow[d, "f_i"] & R(L(A)) \arrow[d, "R(L(f_0))=R(L(f_1))"] \\
A' \arrow[r, "\varepsilon_{A'}", "\cong"'] & R(L(A'))
\end{tikzcd}$$

Aus Symmetriegründen von 1 folgt ebenso R ist treu.
L ist dicht, denn $B \cong 1_{\mathcal{B}}(B) \cong L(R(B))$.
L ist voll, denn sei $g : L(A) \to L(A')$. Dann betrachte

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\varepsilon_A", "\cong"'] \arrow[d, dotted, "f"] & R(L(A)) \arrow[d, "R(L(f))=R(g)"] \\
A' \arrow[r, "\varepsilon_{A'}", "\cong"'] & R(L(A'))
\end{tikzcd}$$

Da R treu ist, folgt $L(f) = g$.
2 $\Rightarrow$ 1 Nach 1.3 existiert eine Klasse $\mathcal{A}_0$ von Repräsentanten der Isomorphieklassen von Objekten von $\mathcal{A}$. Also existiert für jedes Objekt B von $\mathcal{B}$ ein eindeutiges $A \in \mathcal{A}_0$ mit $L(A) \cong B$. Wir setzen $R(B) := A$. Für jedes B wählen wie einen Isomorphismus $\eta_B : L(R(B)) \to B$. Für jeden Homomorphismus $g : B \to B'$ definieren wir $R(g) := f$ durch

$$\begin{tikzcd}
L(R(B)) \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[d, dotted, "L(f)"] & B \arrow[d, "g"] \\
L(R(B')) \arrow[r, "\eta_{B'}"] & B'
\end{tikzcd}$$

Offensichtlich bewahrt R Identitäten und Kompositionen und $\eta : L \circ R \to 1_{\mathcal{B}}$ ist ein natürlicher Isomorphismus.
Wir definieren ε_A durch $L(\varepsilon_A) := \eta^{-1}_{L(A)}$. Dann kommutiert

$$\begin{tikzcd}
L(A) \arrow[r, "\eta^{-1}_{LA}", "L(\varepsilon_A)"'] \arrow[d, "L(f)"'] & L(R(L(A))) \arrow[d, "(L\circ R\circ L)(f)"] \\
L(A') \arrow[r, "\eta^{-1}_{LA'}", "L(\varepsilon_{A'})"'] & L(R(L(A')))
\end{tikzcd}$$

und durch “Kürzen” des treuen L erhalten wir, daß $\varepsilon_A : 1_{\mathcal{A}} \to R \circ L$ ebenfalls ein natürlicher Isomorphismus ist. Fehlt nur noch die Gleichung $R \star \eta = (\varepsilon \star R)^{-1}$. Sei dazu B ein Objekt von $\mathcal{B}$ und betrachten wir das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
LRLRB \arrow[r, "\eta_{LRB}"] \arrow[d, "\eta_{LRB}"', "LR(\eta_B)"] & LRB \arrow[d, "\eta_B"] \\
LRB \arrow[r, "\cong", "\eta_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Also ist $LR(\eta_B) = \eta_{LRB} = L(\varepsilon^{-1}_{RB})$ und wegen der Treue von L auch $R(\eta_B) = \varepsilon^{-1}_{RB}$. $\square$

1.23 Beispiel. Die Kategorie der endlich dimensionalen Vektorräume ist äquivalent zu jener der Matrizen, wobei einer $m \times n$-Matrix A die übliche lineare Abbildung von $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ zugeordnet wird. Beachte, daß diese Teilkategorie klein ist.

Die Kategorie der endlich dimensionalen Vektorräume ist äquivalent aber nicht isomorph zur dualen Kategorie, wobei der Funktor durch Dualisieren gegeben ist (Nicht jeder endlich dimensionale VR ist ein Dualraum, es ist es nur bis auf Isomorphie).

Die duale Kategorie zu $\underline{Komp}$ ist äquivalent zu jener der kommutativen $\mathbb{C}^*$-Algebren nach Gelfand-Naimark. Die Funktoren sind durch

$$F : K \mapsto (C(K, \mathbb{C}), \|\_\|_\infty) \text{ und}$$
$$G : \mathrm{Alg}(A, \mathbb{C}) \leftarrow\!\shortmid A$$

gegeben und die natürliche Transformation durch $\eta_K : K \to G(F(K))$, $x \mapsto \mathrm{ev}_x$.

Definition. Man nennt eine Kategorie SKELETTAL, wenn isomorphe Objekte schon gleich sind. Unter einen SKELETT EINER KATEGORIE versteht man eine maximale volle skelettale Teilkategorie.

Jede Kategorie besitzt (nach dem globalen Auswahlaxiom) ein Skelett. Je zwei Skelette einer Kategorie sind isomorph. Und jedes Skelett ist äquivalent zur Kategorie. Wir haben eine Projektion auf das Skelett.

1.24 Über die Namensgebung.

1. Kategorie ... Kant's kategorischer Imperativ: "Handle stets so, daß die Maxime deines Willens zugleich als Prinzip einer allgemeinen Gesetzgebung gelten können."
2. Funktor ... R.Carnap "logische Syntax der Sprache."
3. Natürliche Transformation ... allgemein verwendet.

[**15**] erstes Auftreten von Pfeilen in der relativen Homotopietheorie.
[SteenrodFox1940] implizit Funktoren verwendet.
[5] Kategorien, Funktoren, nat. Transformationen für das universelle Koeffiziententheorem in der Čech-Kohomologie.
[3] Erste Arbeit die sich abstrakt mit Kategorien beschäftigt.

2. Spezielle Morphismen

2.1 Definition. Ein Morphismus $A \xrightarrow{f} B$ in einer Kategorie heißt Isomorphismus, wenn er einen inversen Homomorphismus $A \xleftarrow{g} B$ besitzt, d.h. $g \circ f = 1_A$ und $f \circ g = 1_B$, bzw. als Diagramm

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "1_B"'] & A \arrow[d, "f"] \arrow[dr, "1_A"] & \\ & B \arrow[r, "g"] & A \end{tikzcd}$$

Er heißt Schnitt, wenn er ein Linksinverses besitzt, und Retraktion, wenn er ein Rechtsinverses besitzt.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "1_X"] \arrow[dr, "\text{Schnitt}"'] & & X \\ & Y \arrow[ur, "\text{Retrakt}"'] & \end{tikzcd}$$

Er heißt Monomorphismus, wenn $\alpha = \beta$ aus $f \circ \alpha = f \circ \beta$ folgt. Er heißt Epimorphismus, wenn $\alpha = \beta$ aus $\alpha \circ f = \beta \circ f$ folgt. Er heißt Bimorphismus, wenn er sowohl Mono- als auch Epi-Morphismus ist.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ X \arrow[u, shift left, "\alpha"] \arrow[u, shift right, "\beta"'] \arrow[ur, "f\circ\alpha=f\circ\beta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\alpha\circ f=\beta\circ f"'] & B \arrow[d, shift right, "\alpha"'] \arrow[d, shift left, "\beta"] \\ & Y \end{tikzcd}$$

Eine Kategorie heißt balanziert, wenn jeder Bimorphismus ein Isomorphismus ist.

Ein Morphismus $f : A \to B$ heißt konstant, falls $f\circ\alpha = f\circ\beta$ für alle $\alpha, \beta : X \to A$. Er heißt cokonstant falls $\alpha \circ f = \beta \circ f$ für alle $\alpha, \beta : B \to X$. Ein Morphismus heißt 0-Morphismus, wenn er konstant und cokonstant ist.

2.2 Beispiel. In *Set* und *Top* ist ein Morphismus f genau dann konstant, wenn sein Bild $f[A]$ höchstens ein-elementig ist. Er ist cokonstant, wenn $\mathrm{dom}(f) = \emptyset$.

In *Grp*, *Mon*, *R-Mod*, *VR* sind die konstanten genau die cokonstanten Morphismen und diese sind die Morphismen mit ein-elementigen $f[A]$.

2.3 Lemma.

1. *Jede Retraktion ist ein Epimorphismus.*
2. *Jeder Schnitt ist ein Monomorphismus.*
3. *Die Isomorphismen sind genau die Schnitte, die Epimorphismen sind, oder auch die Retraktionen, die Monomorphismen sind.*
4. *Die Inverse zu einen Isomorphismus ist eindeutig.*
5. *Haben f und g eine der folgenden Eigenschaften, so auch $f \circ g$: Mono, Schnitt, Iso, Epi, Retr.*
6. *Hat $f \circ g$ eine der folgenden Eigenschaften, so auch g: Mono, Schnitt.*
7. *Hat $f \circ g$ eine der folgenden Eigenschaften, so auch f: Epi, Retrakt.*
8. *Funktoren bewahren Schnitte, Retrakte und Isomorphismen.*
9. *Jeder treue Funktor reflektiert Mono's und Epi's.*
10. *Falls $V : \mathcal{C} \to$ Set ein treuer Funktor ist, und eine freies Objekt (siehe 4.38) F von V über $1 = \{0\}$ existiert, so sind die Monos in $\mathcal{C}$ genau die injektiven Morphismen.*

Beweis. $\boxed{1}$, $\boxed{2}$ Es sei $f\circ\alpha = f\circ\beta$ und $g\circ f = 1$. Dann ist $\alpha = g\circ f\circ\alpha = g\circ f\circ\beta = \beta$.

$\boxed{3}$ Es sei f ein Epimorphismus mit linksinversen g. Dann ist $f \circ g \circ f = f \circ 1 = f = 1 \circ f$ und somit $f \circ g = 1$. Also ist g auch ein Rechtsinverses zu f und f somit ein Isomorphismus.

$\boxed{4}$ Da ein Isomorphismus automatisch ein Monomorphismus ist, ist das Rechtsinverse eindeutig.

$\boxed{9}$ Aus $f \circ \alpha = f \circ \beta$ folgt $Vf \circ V\alpha = Vf \circ V\beta$ und somit $V\alpha = V\beta$ da Vf als Mono vorausgesetzt ist. Da V treu ist, ist $\alpha = \beta$, also f ein Mono.

$\boxed{10}$ Sei $F(1)$ das freie Objekt mit einem Erzeuger $0 \in 1$. Sei f ein Mono und $\alpha, \beta \in V(\operatorname{dom} f)$ mit $Vf(\alpha) = Vf(\beta)$. Dann kann $\alpha, \beta : 1 \to V(\operatorname{dom} f)$ aufgefaßt werden. Wegen der universellen Eigenschaft von $F(1)$ existieren Morphismen $\tilde\alpha, \tilde\beta : F(1) \to \operatorname{dom} f$ mit $V(\tilde\alpha) \circ i = \alpha$ und $V(\tilde\beta) \circ i = \beta$, wobei $i : 1 \to V(F(1))$ die Einbettung des Erzeugers ist. Also ist $V(f\circ\tilde\alpha)\circ i = V(f)\circ\alpha = V(f)\circ\beta = V(f\circ\tilde\beta)\circ i$ und wieder wegen der universellen Eigenschaft ist $f \circ \tilde\alpha = f \circ \tilde\beta$, also $\tilde\alpha = \tilde\beta$ und somit auch $\alpha = V(\tilde\alpha) \circ i = V(\tilde\beta) \circ i = \beta$, d.h. Vf ist injektiv. $\square$

2.4 Beispiel. In *Set* sind die Monomorphismen genau die injektiven Abbildungen. Die Schnitte sind genau die injektiven Abbildungen f mit $\operatorname{dom}(f) \neq \emptyset$ zusammen mit $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$. Die Epimorphismen sind genau die surjektiven Abbildungen, und diese sind nach dem Auswahlaxiom genau die Retrakte. Also ist *Set* balanziert. In *Set* ist konstant der übliche Begriff, und cokonstant ist nur die Abbildung $\emptyset : \emptyset \to \emptyset$. In *Gru* und in *VR* sind die 0-Morphismen gerade die konstanten Morphismen.

In den meisten konkreten Kategorien sind die Monomorphismen gerade die injektiven Morphismen. Sei allerdings $\mathcal{C}$ die Kategorie der teilbaren Abelschen Gruppen, d.h. die Gleichung $nx = a$ hat für $a \in G$ und $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ immer eine Lösung x. Dann ist die kanonische Quotientenabbildung $\pi : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein Monomorphismus. Sei $\pi \circ \alpha = \pi \circ \beta$ mit $\alpha \neq \beta$. Also existiert ein $x \in X$ mit $\alpha(x) \neq \beta(x)$ aber $\pi(\alpha(x)) = \pi(\beta(x))$, d.h. $n := \alpha(x) - \beta(x) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Folglich existiert ein y mit $(2n)y = x$ und somit $n = \alpha(x) - \beta(x) = \alpha(2ny) - \beta(2ny) = 2n(\alpha(y) - \beta(y))$, d.h. $\alpha(y) - \beta(y) \notin \mathbb{Z}$, ein Widerspruch.

In vielen algebraischen Kategorien sind die Epimorphismen gerade die surjektiven Homomorphismen, nicht so aber in der Kategorie der torsionsfreien Abelschen Gruppen (d.h. $nx = 0 \Rightarrow n = 0 \vee x = 0$). Es ist nämlich $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ein Epimorphismus. Denn es sei $\alpha = \beta$ auf $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$ und angenommen es gibt $x \in \mathbb{Q}$ mit $\alpha(x) \neq \beta(x)$. Dann existiert ein $0 \neq n \in \mathbb{N}$ mit $nx \in \mathbb{Z}$ und somit ist $0 = \alpha(nx) - \beta(nx) = n(\alpha(x) - \beta(x)) \Rightarrow \alpha(x) = \beta(x)$.

Das gleiche Argument funktioniert auch bei Halbgruppen und Ringen, denn dann ist

$$\begin{aligned}\alpha\Big(\frac{n}{m}\Big) = \alpha\Big(n\cdot\frac{1}{m}\cdot 1\Big) = \alpha(n)\cdot\alpha\Big(\frac{1}{m}\Big)\cdot\alpha(1) &= \beta(n)\cdot\alpha\Big(\frac{1}{m}\Big)\cdot\underbrace{\beta(1)}_{=\beta(m)\cdot\beta\left(\frac{1}{m}\right)}\\ &= \beta(n)\cdot\underbrace{\alpha\Big(\frac{1}{m}\Big)\cdot\alpha(m)}_{=\alpha(1)=\beta(1)}\cdot\beta\Big(\frac{1}{m}\Big) = \beta\Big(n\cdot 1\cdot\frac{1}{m}\Big) = \beta\Big(\frac{n}{m}\Big).\end{aligned}$$

In *Gru* ist jeder Epimorphismus surjektiv: Es genügt dafür zu zeigen, daß für jede Untergruppe H einer Gruppe G eine Gruppe G_1 und zwei Gruppen-Homomorphismen $\alpha, \beta : G \to G_1$ existieren, mit $H = \{x \in G : \alpha(x) = \beta(x)\}$. Denn wenn wir dies für einen Homomorphismus $f : H \to G$ auf $f(H) \subseteq G$ anwenden. So ist $\alpha\circ f = \beta\circ f$

und somit $\alpha = \beta$, d.h. $f(H) = G$.
Wir betrachten dazu die Menge X aller Nebenklassen gH mit $g \in G$ zusammen mit einem neuen Element ∞. Es sei G_1 die Gruppe der Bijektionen auf X und $\pi : X \to X$ jene Bijektion, die ∞ und eH vertauscht und alle anderen Nebenklassen gH fixläßt. Es sei $\alpha : G \to G_1$ gegeben durch

$$\alpha(g)(x) := \begin{cases} gg'H & \text{für } x = g'H \\ \infty & \text{für } x = \infty \end{cases}$$

und $\beta(g) := \pi \circ \alpha(g) \circ \pi^{-1}$. Offensichtlich ist $\alpha : G \to G_1$ ein Gruppen-Homomorphismus und damit auch $\beta : G \to G_1$. Weiters ist $\alpha(g) = \beta(g)$ für $g \in H$, denn $g'H = H \Leftrightarrow \alpha(g)(g'H) = gg'H = H$ und somit ist $\beta(g) \circ \pi := \pi \circ \alpha(g) = \alpha(g) \circ \pi$. Falls $g \notin H$, dann ist $\beta(g)(\pi(g^{-1}H)) := \pi(\alpha(g)(g^{-1}H)) = \pi(H) = \infty$ aber $\alpha(g)(\pi(g^{-1}H)) = gg^{-1}H = H$. Auch $\underline{\mathit{Gru}}$ ist somit balanziert.

In $\underline{\mathit{Gru}}$ ist $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Q}$ ein Monomorphismus, aber kein Schnitt, denn für ein Linksinverses g wäre $2g(1/2) = g(2 \cdot 1/2) = g(1) = 1$, und diese Gleichung hat keine Lösung in $\mathbb{Z}$.
Weiters ist $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ein Epimorphismus, aber keine Retraktion, denn für ein Rechtsinverses g wäre $g([1/2])$ ein Torsionselement, und solche gibt es in $\mathbb{Q}$ nicht.

In $\underline{\mathit{VR}}$ sind die Monomorphismen genau die injektiven Abbildungen und diese sind genau die Schnitte (ergänze eine Basis im Bild). Die Epimorphismen sind genau die surjektiven Abbildungen und diese sind genau die Retrakte (wähle Urbilder einer Basis im Bild).

In $\underline{\mathit{Top}}$ sind die Monomorphismen genau die injektiven stetigen Abbildung (Teste mit konstanten Abbildungen). Diese beschreiben aber nicht ausschließlich Unterobjekte (d.h. versehen mit der Spurtopologie). Nach dem Browerschen Fixpunktsatz ist die Einbettung $S^1 \subseteq \mathbb{D}$ ist kein Schnitt (d.h. besitzt keine Retraktion). Die Epimorphismen in $\underline{\mathit{Top}}$ sind genau die surjektiven stetigen Abbildungen (vergröbere die Topologie auf der Codomäne zur indiskreten Topologie). Diese Kategorie ist also nicht balanziert.

In $\underline{\mathit{Haus}}$ sind die Monomorphismen genauso die injektiven stetigen Abbildungen. Die Epimorphismen allerdings sind die stetigen Abbildungen mit dichten Bild, denn $\alpha = \beta$ auf einer dichten Menge impliziert $\alpha = \beta$ überall für Hausdorffräume, und umgekehrt wenn $f(A) \subseteq B$ nicht dicht ist, dann können wir zwei Kopien von B nehmen und die entsprechenden Punkte in $\overline{f(A)}$ miteinander identifizieren. Beachte, daß die Quotiententopologie in dieser Situation Hausdorff ist.

In $\underline{\mathit{Komp}}$ sind die Monomorphismen genau die injektiven stetigen Abbildungen, und die Epimorphismen die surjektiven stetigen Abbildungen. Da jede injektive stetige Abbildung zwischen kompakten Räumen eine Einbettung ist und jede surjektive stetige Abbildung eine Quotientenabbildung, ist die Kategorie $\underline{\mathit{Komp}}$ balanziert.

2.5 Definition. Ein Monomorphismus $f : A \to B$ heißt EXTREMER MONOMORPHISMUS, wenn aus $f = m \circ e$ mit e Epi (und somit Bimorphismus), folgt daß e ein Iso ist. Dual dazu heißt ein Epimorphismus $f : A \to B$ EXTREMER EPIMORPHISMUS, wenn aus $f = m \circ e$ mit m Mono (und somit Bimorphismus), folgt daß m ein Iso ist.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, tail, "f"] \arrow[dr, two heads, "e"'] & & B \\ & X \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[rr, two heads, "f"] \arrow[dr, "e"'] & & B \\ & X \arrow[ur, tail, "m"'] & \end{tikzcd}$$

Die Idee hinter dieser Definition ist, daß ein Einbettung (in einer topologischen Kategorie) ein Morphismus $f : A \to B$ sein sollte, der zu einen Isomorphismus wird, wenn man seine Codomäne durch das Bild $f(A)$ mit der Spurstruktur (d.h. der gröbst möglichen Struktur) ersetzt. Da wir aber $f(A)$ in einer allgemeinen Kategorie nicht zur Verfügung haben, ersetzen wir $f(A)$ durch irgendein Objekt X über welches f faktorisiert und verlangen dabei, daß die Faktorisierung $e : A \to X$ von f möglichst "surjektiv" also abstrakt ein Epimorphismus ist.

2.6 Lemma.

1. *Die Klasse der extremen Mono's ist die größte Klasse* $\mathcal{M}$ *von Mono's mit* $\mathcal{M} \cap \mathrm{Epi} = \mathrm{Iso}$ *und* $f \circ g \in \mathcal{M} \Rightarrow g \in \mathcal{M}$.
2. *Schnitt* $\Rightarrow$ *extremer Mono* $\Rightarrow$ *Mono.*
3. *Retrakt* $\Rightarrow$ *extremer Epi* $\Rightarrow$ *Epi.*
4. *Iso* $\Leftrightarrow$ *Mono* $\wedge$ *extremer Epi* $\Leftrightarrow$ *extremer Mono* $\wedge$ *Epi.*
5. *Balanziert* $\Leftrightarrow$ *Mono=extremer Mono* $\Leftrightarrow$ *Epi=extremer Epi.*

Beweis. 2, 3 Es sei $g \circ f = 1$ und $f = m \circ e$ mit e Epi. Dann ist $1 = g \circ f = g \circ m \circ e$ und somit e ein Schnitt, also ein Iso nach 2.3.

4 Es sei m ein extremer Mono und ein Epi. Dann ist $m = 1 \circ m$ und somit m ein Iso.

5 ($\Rightarrow$) ist offensichtlich. ($\Leftarrow$) Es sei f ein Bimorphismus. Dann ist f ein Mono=extremer Mono und $f = 1 \circ f$ mit f Epi, also ist f ein Isomorphismus.

1 Nach 4 erfüllt die Klasse $\mathcal{M}$ der extremen Mono's die Bedingung $\mathcal{M} \cap \mathrm{Epi} = \mathrm{Iso}$. Falls $f \circ g$ ein extremer Mono ist, so ist g ein Mono nach 2.3.6. If $g = m \circ e$ mit einem Epi e, dann ist $f \circ g = (f \circ m) \circ e$ und somit e ein Iso, d.h. g ein extremer Mono.

Sei nun $\mathcal{M}$ eine Klasse mit $\mathcal{M} \cap \mathrm{Epi} = \mathrm{Iso}$ und $f \circ g \in \mathcal{M} \Rightarrow g \in \mathcal{M}$. Für $h \in \mathcal{M}$ mit $h = m \circ e$ mit einem Epi e folgt, $e \in \mathcal{M}$ und somit e ein Iso, d.h. h is extremer Mono. □

2.7 Bemerkung. Es sei f ein **surjektiver Morphismus** einer konkreten Kategorie $\mathcal{C}$. Dann ist f ein Epi, da $V : \mathcal{C} \to \underline{Set}$ **treu** ist. Wenn $f = m \circ e$ mit einen Mono m ist, und **jeder Mono injektiv** ist, dann ist m ebenfalls surjektiv, also bijektiv, und wenn V **Isos reflektiert**, was oft der Fall ist, dann ist m ein Iso, also f ein **extremer Epi**.

Umgekehrt sei f ein **extremer Epi**. Falls jeder Morphismus f eine **(injektiv, surjektiv)-Faktorisierung** besitzt, d.h. $f = m \circ e$ mit m injektiver und e surjektiver Morphismus, dann ist m ein Mono (da V **treu** ist) und somit ein Iso, also bijektiv. Folglich ist mit e auch f surjektiv.

Wir werden später versuchen solche Faktorisierungen zu konstruieren.

2.8 Beispiel. $\underline{HGru}$. Die bijektiven Morphismen sind genau die Isomorphismen (V reflektiert Isos) und die injektiven Morphismen sind genau die Monomorphismen (V ist treu und freies Objekt über 1 existiert). Weiters ist das Bild eines Morphismuses selbst eine Halbgruppe. Also sind nach dem obigen die extremen Epis genau die surjektiven Morphismen. Die Kategorie $\underline{HGru}$ ist nicht balanziert, da $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$ ein Bimorphismus ist (aber nicht ein extremer Mono!).

In $\underline{Top}$ sind die extremen Monomorphismen gerade die Einbettungen, denn wenn $f : A \to B$ ein extremer Mono (und damit injektiv) ist, dann betrachten wir die Faktorisierung

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, tail, "f"] \arrow[dr, two heads, "f"'] & & B \\
& f(A) \arrow[ur, hook] &
\end{tikzcd}$$

wobei $f(A)$ die Spurtopologie trage. Dann ist also $f : A \to f(A)$ ein Homöomorphismus und somit eine Einbettung auf sein Bild. Umgekehrt ist mit $f = m \circ e$ auch e eine Einbettung und als Bimorphismus bijektiv, also ein Homöomorphismus.

Die extremen Epimorphismen in $\underline{Top}$ sind gerade die Quotientenabbildungen, denn wenn $f : A \to B$ ein extremer Epi (und damit surjektiv) ist, dann betrachten wir die Faktorisierung

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, two heads] \arrow[dr, two heads] & & B \\
& A/\sim \arrow[ur, tail] &
\end{tikzcd}$$

wobei $\sim$ die Äquivalenz-Relation $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1 = f(x_2)$ ist und $\pi : A \to A/\sim$ die kanonische Quotientenabbildung. Also ist $A/\sim\to B$ ein Homöomorphismus. Umgekehrt sei $f : A \to B$ eine Quotienten-Abbildung. Dann ist mit $f = m \circ e$ auch m eine und somit ein Isomorphismus, wenn m ein Bimorphismus ist.

In $\underline{Haus}$ ändert sich nur bei den extremen Monomorphismen etwas. Diese sind nun nämlich genau die abgeschlossenen Einbettungen, denn die Bimorphismen sind nun die injektiven stetigen Abbildungen mit dichten Bild.

In $\underline{LKV}$ sind die Monomorphismen genau die stetigen injektiven linearen Abbildungen und die Epimorphismen genau die stetig linearen Abbildungen mit dichten Bild. Die extremen Monomorphismen sind die abgeschlossenen linearen Einbettungen und die extremen Epimorphismen die Quotientenabbildungen.

Wenn $f \circ g$ ein extremer Mono ist, so ist es auch g. Allerdings muß die Zusammensetzung extremer Mono's nicht wieder ein solcher sein:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, tail, "g"] \arrow[dr, two heads] & \bullet \arrow[r, tail, "f"] & \bullet \\
& \bullet \arrow[u, dotted, "d", "?"'] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Um weiter zu schließen bräuchten wir einen Morphismus d. Folglich definieren wir:

2.9 Definition. Ein Monomorphismus m heißt STARKER MONO, falls zu jeden Diagramm folgender Form ein diagonaler Morphismus d existiert.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, tail, "m"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "f"] \arrow[r, two heads, "e"'] & \bullet \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dotted, "d"]
\end{tikzcd}$$

Beachte, daß das untere Dreieck genau dann kommutiert, wenn es das obere tut, denn aus $m \circ (d \circ e) = (m \circ d) \circ e = g \circ e = m \circ f$ folgt $d \circ e = f$, weil m ein Mono ist, und umgekehrt. Weiters ist d durch die Kommutativität eindeutig bestimmt, da m ein Mono oder da e ein Epi ist.

Ein Epimorphismus e heißt STARKER EPI, falls zum dualen Diagramm ein diagonaler Morphismus d existiert.

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[d] \arrow[dr, dotted, "d"] & \bullet \arrow[l, two heads, "e"'] \arrow[d] \\ \bullet & \bullet \arrow[l, tail, "m"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, tail, "m"] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "f"] \arrow[r, two heads, "e"'] & \bullet \arrow[u, "g"'] \arrow[ul, dotted, "d"'] \end{tikzcd}$$

Es ist die Zusammensetzung starker Mono's (Epi's) wieder vom gleichen Typ. Und falls $f \circ g$ ein starker Mono (Epi) ist, so ist g ein starker Mono (f ein starker Epi):

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, tail, "g"] & \bullet \arrow[r, tail, "f"] & \bullet \\ \bullet \arrow[u] \arrow[rr, two heads] & & \bullet \arrow[u] \arrow[ull, dotted, "(2)"] \arrow[ul, dotted, "(1)"'] \end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \\ \bullet \arrow[r, tail, "g"] \arrow[urr, tail, "f\circ g"] & \bullet \arrow[ur, "f"] & \\ \bullet \arrow[u] \arrow[r, two heads] & \bullet \arrow[u] \arrow[ul, dotted] \arrow[uur] & \end{tikzcd}$$

Jeder Schnitt ist ein starker Mono und jeder starke Mono ist extrem:

$$\begin{tikzcd} & & \bullet \\ \bullet \arrow[r, tail, "m"'] \arrow[urr, "1"] & \bullet \arrow[ur, dotted, "(1)"] & \\ \bullet \arrow[u] \arrow[r, two heads, "e"'] & \bullet \arrow[u] \arrow[ul, dotted, "(2)"] \arrow[uur, dotted, "(2)"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, tail, "m"] & \bullet \\ \bullet \arrow[u, "1"] \arrow[r, two heads, "r"'] & \bullet \arrow[u] \arrow[ul, dotted, "(1)"] \end{tikzcd}$$

Wir werden später sehen das unter schwachen Bedingungen die extremen Mono's genau die starken sind und die extremen Epi's genau die starken Epi's.

2.10 Definition. Eine Kategorie heißt (EXTREM-)LOKAL KLEIN, falls für jedes Objekt A eine repräsentative Menge von (extremen) Monomorphismen existiert, d.h. jeder Mono ist genau zu einen aus dieser Klasse äquivalent. Dual heißt eine Kategorie (EXTREM-)COLOKAL KLEIN, falls jedes Objekt eine repräsentative Menge von (extremen) Epimorphismen besitzt.

Die meisten konkreten Kategorien sind lokal klein und extrem colokal klein. $\underline{OZ}$ ist nicht colokal klein.

Es seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{M}$ Klassen von Morphismen die unter Komposition abgeschlossen sind. Unter einer $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$-KATEGORIE, versteht man daß jeder Morphismus f eine (bis auf Isomorphie eindeutige) Faktorisierung mit $e \in \mathcal{E}$ und $m \in \mathcal{M}$ zuläßt:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "e"'] & & B \\ & X \arrow[ur, dotted, "m"'] & \end{tikzcd}$$

2.11 Definition. Ein Objekt T heißt TERMINAL falls für jedes Objekt A ein eindeutiger Morphismus $f : A \to T$ existiert. Ein INITIALES OBJEKT ist ein coterminales. Ein Objekt heißt NULLOBJEKT wenn es sowohl initial als auch terminal ist.

Lemma. *Je zwei terminale Objekte sind isomorph.*

2.12 Beispiel. Die Kategorien $\underline{Set}$, $\underline{HGru}$, $\underline{Top}$ haben als terminale Objekte die einpunktigen. $\underline{Körp}$ hat kein terminales Objekt, denn Körpermorphismen gibt es nur zwischen Körper der gleichen Charakteristik. Aber auch die Kategorie $\underline{Körp}_p$ der Körper der Charakteristik p hat kein terminales Objekt, denn ein solches wäre ein größter Körper dieser Charakteristik, da alle Morphismen Mono's sind. Die Kategorie $\underline{Ring+1}$ der Ringe mit 1 hat $\{0\}$ als terminales Objekt, wenn wir für ihre Objekte zulassen, daß die 1 mit der 0 übereinstimmt. Andernfalls hat sie kein terminales Objekt T, denn aus der Existenz eines 1-bewahrenden Ring-Homo's $f : \mathbb{Z}_p \to T$ würde folgen $0 = f(0) = f(p \cdot 1) = p \cdot f(1) = p \cdot 1$ für alle Primzahlen p, ein Widerspruch.

Das einzige initiale Objekte in $\underline{Set}$, $\underline{HGru}$, $\underline{Top}$ ist die leere Menge. $\underline{Körp}$ hat kein initiales Objekt aus den gleichen Gründen wie zuvor. Die Kategorie $\underline{Körp}_p$ hat initiale Objekte, nämlich $\mathbb{Z}_p$ (resp. $\mathbb{Q}$ für $p = 0$). In $\underline{Ring+1}$ ist $\mathbb{Z}$ ein initiales Objekt, denn $n \mapsto n \cdot 1$ ist der eindeutige Morphismus in Ringe mit 1.

Folglich haben die Kategorien $\underline{Set}$, $\underline{HGru}$, $\underline{Ring+1}$, $\underline{Top}$ keine 0-Objekte.

Die Kategorien $\underline{Mon}$, $\underline{Grp}$, $\underline{Ring}$, $\underline{R\text{-}Mod}$, $\underline{VR}$, $\underline{TVR}$, $\underline{LKV}$, $\underline{Ban}$, $\underline{Ban_1}$ haben alle 0-Objekte, und zwar genau die einpunktigen Objekte.

2.13 Bemerkung.

1. Falls f konstant ist, so auch $h \circ f \circ g$.
2. Falls ein terminales Objekt T existiert mit $\mathcal{A}(T, A) \neq \emptyset$, so ist $f : A \to B$ konstant, genau dann wenn er über T faktorisiert.
3. Falls ein Null-Objekt 0 existiert, so sind die konstanten genau die cokonstanten genau die Morphismen die über 0 faktorisieren. □

2.14 Theorem. *Für eine Kategorie sind äquivalent:*

1. *In jedem $\mathcal{C}(A, B)$ existiert ein 0-Homomorphismus;*
2. *In jedem $\mathcal{C}(A, B)$ existiert ein eindeutiger konstanter Homo;*
3. *Es läßt sich kohärent in jedem (A, B) ein Morphismus $0_{A,B}$ auswählen, wobei kohärent heißt, daß $g \circ 0_{A,B} \circ h = 0_{A',B'}$ für alle $h : B' \to B$ und $g : A \to A'$.*

Eine Kategorie mit diesen Eigenschaften heißt punktiert.

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß wenn $f : A \to B$ konstant und $g : A \to B$ cokonstant ist und $\mathcal{C}(B, A) \neq \emptyset$, so ist $f = g$ und somit ein 0-Homo.

Sei $h : B \to A$. Dann ist $f = f \circ 1 \overset{f \text{ const}}{=} f \circ (h \circ g) = (f \circ h) \circ g \overset{g \text{ cokonst}}{=} 1 \circ g = g$.

(1⇒3) Nach obiger Bemerkung gibt es genau einen 0-Homomorphismus $0_{A,B} : A \to B$. Diese Morphismen erfüllen die Kohärenzbedingung.

(3⇒1) Es ist $0_{A,B}$ konstant, denn $0_{A,B} \circ \alpha = 0_{A,B'} = 0_{A,B} \circ \beta$, und ebenso cokonstant, also nach der Bemerkung ein 0-Homo.

(2⇒1) Es sei $f : A \to B$ konstant. Dann ist $\alpha \circ f$ und $\beta \circ f$ konstant, also nach (2) gleich, d.h. f ist auch cokonstant.

(1⇒2) Ein Nullmorphismus $0 : A \to B$ ist der eindeutige konstante Morphismus $A \to B$, denn er ist auch cokonstant, und stimmt nach obiger Bemerkung somit mit jedem konstanten Homo $A \to B$ überein. □

2.15 Proposition. *Eine Kategorie ist genau dann punktiert, wenn sie sich als volle Teilkategorie in eine Kategorie mit 0-Objekt einbetten läßt.*

Beweis. Offensichtlich ist eine Kategorie mit 0-Objekt punktiert, und somit auch jede volle Teilkategorie, denn die treue Inklusion reflektiert konstante und cokonstante Morphismen.

Umgekehrt adjungieren wir zur gegebenen Kategorie $\mathcal{C}$ ein 0-Objekt 0 und eine Einheit darauf, sowie für jedes Objekt von $\mathcal{C}$ genau einen Morphismus $A \to 0$ und genau einen $0 \to A$. Die Zusammensetzung $A \to 0 \to B$ soll dann gerade der eindeutig bestimmte 0-Homomorphismus $A \to B$ sein. □

2.16 Beispiel. Die Kategorien $\underline{\mathit{Grp}}$, $\underline{\mathit{R\text{-}Mod}}$, $\underline{\mathit{VR}}$, $\underline{\mathit{LKV}}$ sind punktiert. $\underline{\mathit{Set}}$, $\underline{\mathit{Top}}$, $\underline{\mathit{HGru}}$ sind es nicht.

2.17 Definition. In der Situation

$$\begin{tikzcd}
& X & \\
\bullet \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, tail, "m"] & & \bullet \arrow[ul, "\tilde f"']
\end{tikzcd}$$

heißt $\tilde f$ Erweiterung (oder auch Fortsetzung) von f. Man sagt, X hat die Erweiterungseigenschaft bezüglich m, wenn zu jedem f eine Erweiterung $\tilde f$ existiert. X heißt injektiv, wenn es die Erweiterungseigenschaft für alle Mono's m hat.

Dual heißt $\tilde f$ Lift (oder Hochhebung) von f, wenn folgendes Diagramm kommutiert

$$\begin{tikzcd}
& X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "\tilde f"] & \\
\bullet & & \bullet \arrow[ll, two heads, "e"]
\end{tikzcd}$$

Man sagt, X hat die Hochhebungseigenschaft bezüglich e, wenn zu jedem f ein Lift $\tilde f$ existiert. X heißt projektiv, wenn es die Hochhebungseigenschaft für alle Epis's e hat.

2.18 Lemma.

1. *Ein Morphismus m hat die Erweiterungseigenschaft für alle Objekte X ⇔ m ist ein Schnitt;*
2. *Ein Morphismus e hat die Hochhebungseigenschaft für alle Objekte X ⇔ e ist eine Retraktion;*
3. *Wenn X projektiv (bzw. injektiv) ist und ein Schnitt $X' \to X$ existiert, so ist auch X' projektiv (bzw. injektiv).*

Beweis. $\boxed{1}$ ($\Rightarrow$) Betrachte

$$\begin{tikzcd} & \bullet & \\ \bullet \arrow[ur, "1"] \arrow[rr, tail, "m"'] & & \bullet \arrow[ul, dotted, "\tilde{1}"'] \end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Es sei e eine Retraktion zu m, dann ist $\tilde{f} := f \circ e$ eine Erweiterung von f.

$\boxed{2}$ ist dual zu $\boxed{1}$.

$\boxed{3}$ Betrachte

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "s"] & & X' \\ & X \arrow[ur, "r"] & \\ A \arrow[uu, "f"] \arrow[ur, dotted, "(1)"] \arrow[rr, tail, "m"'] & & B \arrow[ul, dotted, "(2)"'] \arrow[uu, dotted, "(3)"'] \end{tikzcd}$$

□

2.19 Beispiel. In *VR* ist jedes Objekt injektiv und projektiv, da Mono=Schnitt und Epi=Retrakt.

In *Set* ist ebenfalls jedes Objekt projektiv und alle bis auf $\emptyset$ injektiv, da Epi = Retrakt und Mono=(Schnitt$\vee$Leer). In der Tat wenn $m : \emptyset \to B$ und $f : \emptyset \to X$, dann ist jedes $\tilde{f} : B \to X$ eine Fortsetzung, und wenn $X \neq \emptyset$, so existiert auch so ein $\tilde{f}$.

Jedes kompakte Intervall I und auch $\mathbb{R}$ ist injektiv für extreme Mono's in normalen Räumen nach dem Satz von Tietze-Urysohn. Beachte, daß im Fall $\mathbb{R}$ wir ein $f : A \to \mathbb{R}$ zusammensetzen können mit $\arctan : \mathbb{R} \to I = [-\pi/2, \pi/2]$ und somit eine Erweiterung $\widetilde{\arctan \circ f} : B \to I$ existiert. Da ihr Urbild von $A_0 := I \setminus \arctan[\mathbb{R}]$ abgeschlossen ist, existiert ein $h : B \to I$, welches die charakteristische Funktion $\chi_A : A \cup A_0 \to I$ fortsetzt. Es hat dann $h \cdot \widetilde{\arctan \circ f} : B \to \mathbb{R}$ Werte in $\arctan[\mathbb{R}]$ und somit ist $\tilde{f} := \tan \circ (h \cdot \widetilde{\arctan \circ f})$ die gewünschte Fortsetzung von f.

Der Satz von Hahn-Banach besagt, $\mathbb{K}$ injektiv ist für extreme Mono's.

In *AGru* ist jedes bezüglich $V : \textit{AGru} \to \textit{Set}$ freie Objekt projektiv, denn

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, "i_X"] \arrow[dl, dotted, "(1)"'] \arrow[dr, dotted, "(2)"] & \\ & V(F(X)) \arrow[dl, "V(f)"] \arrow[dr, dotted, "(3)", "V(\tilde{f})"'] & \\ V(A) & & V(B) \arrow[ll, two heads, "V(e)"] \end{tikzcd}$$

Sei umgekehrt X ein projektives Objekt. Dann haben wir

$$\begin{tikzcd} & V(X) \arrow[dl, "1"'] \arrow[dr, dotted, "V(\tilde{1})", "(2)"'] & \\ V(X) & & V(F(V(X))) \arrow[ll, dotted, two heads, "(1)"', "V(\tilde{1})"] \\ & V(X) \arrow[ul, "1"] \arrow[ur, "i_{V(X)}"'] & \end{tikzcd}$$

mit (1) weil $F(V(X))$ ein freies Objekt ist, also ist (1) surjektiv und damit ein Epi; und (2) weil X projektiv ist, also ist X ein Schnitt in $F(V(X))$ und somit selbst frei (nach dem Zorn'schen Lemma, siehe [**9**, 14.5]).

Nun zu den injektiven Objekten in $\underline{AGru}$. Wenn eine Gruppe X injektiv ist, dann betrachten wir den Mono $F(1) = \mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$. Für $c \in X$ haben wir einen eindeutigen Morphismus $f : F(1) \to X$ mit $f(1) = c$ und somit einen Homomorphismus $\tilde{f} : \mathbb{Q} \to X$. Es ist $x := \tilde{f}(1/n)$ eine Lösung von $n \cdot x = c$, also X teilbar.

Umgekehrt [**1**] sei X teilbar und A eine Untergruppe von B und $f : A \to X$ ein Homo. Dann betrachten wir die partiell geordnete Menge aller partiellen Erweiterungen von f, d.h. Homo's f' von Untergruppen $A \subseteq A' < B$ nach X. Nach dem Zorn'schen Lemma gibt es ein maximales Element $f' : A' \to B$. Falls $A' \neq B$, so wählen wir ein $b \in B \setminus A'$. Falls ein $n > 0$ existiert mit $n \cdot b \in A'$, so wählen wir dieses minimal und ein $x \in X$ mit $n \cdot x = f'(n \cdot b)$ und setzen $\tilde{f}(a + k \cdot b) := f'(a) + k \cdot x$. Dann ist $\tilde{f}$ ein Gruppenhomo von $\langle A' \cup \{b\}\rangle \to X$ welcher f fortsetzt, also ein Widerspruch. Andernfalls definieren wir f genauso, wobei diesmal x beliebig gewählt werden kann. Die injektiven Objekte sind also genau die teilbaren.

Diese haben folgende Bedeutung. Man betrachtet lineare Gleichungssysteme der Form

$$\sum_j n_i^j x_j = a_j \text{ mit } n_i^j \in \mathbb{Z},\ x_j, a_j \in X.$$

Wir können die linke Seite $f_i := \sum_j n_i^j x_j$ als Element in der freien Abelschen Gruppe $F(J)$ mit Erzeugern $\{j : j \in J\}$ auffassen. Eine notwendige Bedingung für die Lösbarkeit ist die Kohärenz-Bedingung, daß jede Relation der linken Seiten auch für die rechten Seiten gilt, d.h. $f_j \mapsto a_j$ läßt sich zu einen wohldefinierten Homomorphismus $f : F_0 := \langle f_j : j \in J\rangle \to X$ erweitern. Elemente $x_j \in X$ geben eine Lösung genau dann, wenn der Homomorphismus $F(J) \to X$ der durch $j \mapsto x_j$ induziert wird, eine Erweiterung von f ist. Also genau dann, wenn das folgende Erweiterungsproblem lösbar ist

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
F_0 \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, hook] & & F(J) \arrow[ul, dotted, "\tilde{f}"']
\end{tikzcd}$$

[**10**] Folglich hat jedes kohärente Glgs.-System genau dann eine Lösung, wenn X teilbar ist (beachte, daß $n \cdot x = c$ ein kohärentes System ist).

[**11**] Die Einbettung einer Untergruppe $A < B$ ist genau dann ein Schnitt, wenn jedes System in A welches in B lösbar ist, schon in A lösbar ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) wende den Schnitt auf die Lösungen in B an.
($\Leftarrow$) Wähle ein Inverses zur Abbildung $s : B \to B/A$. Nun betrachte das System $x_u + x_v - x_{u+v} = s(u) + s(v) - s(u+v)$ für alle $u, v \in B/A$. Offensichtlich bilden die $s(u)$ eine Lösung in B, also existiert nach Voraussetzung auch eine Lösung $(x_u)_{u \in B/A}$ in A. Es ist dann $\sigma : u \mapsto x_u - s(u)$ ein Gruppenschnitt $A/B \to B$ und

$p := 1 - \sigma \circ \pi : B \to A \subseteq B$ ein Retrakt.

$$\begin{tikzcd} A & & \\ A \arrow[u, "1"] \arrow[r, "i"'] & B \arrow[ul, "p"'] \arrow[r, "\pi"] & B/A \\ & & B/A \arrow[u, "1"'] \arrow[ul, "\sigma"] \end{tikzcd}$$ □

Jede Gruppe ist Untergruppe einer teilbaren Gruppe:

Beweis. Sei G eine Gruppe, dann ist $F(V(G)) \to G$ ein Epi, und $F(V(G))$ ist Untergruppe einer teilbaren Gruppe D, da $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ es ist. Also ist $G := F(V(G))/N \hookrightarrow D/N$. □

3. Limiten

3.1 Definition. Ein Objekt X_∞ einer Kategorie heißt FINAL oder auch TERMINAL wenn für jedes andere Objekt U genau ein Morphismus $U \to X_\infty$ existiert.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, dotted, "!"] & X_\infty \end{tikzcd}$$

In der dualen Situation heißt ein Objekt INITIAL, Ein Objekt, daß sowohl final als auch initial ist heißt 0-OBJEKT, siehe 2.11.

3.2 Lemma. *Bis auf Isomorphie sind die initialen, die finalen und somit auch die 0-Objekte eindeutig bestimmt.*

Beweis. Wenn X und Y zwei initiale Objekte sind, dann existieren Morphismen $f : X \to Y$, da X initial ist, und $g : Y \to X$ da Y es ist. Deren Zusammensetzung ist die Identität, da nur ein Morphismus $X \to X$ und von $Y \to Y$ existieren darf.

Für finale Objekte folgt das nun durch Dualisieren. □

3.3 Beispiel. In $\underline{Set}$ (oder auch in $\underline{Top}$) ist das einzige initiale Objekte die leere Menge. Die finalen Objekte sind genau die einelementigen. 0-Objekt gibt es keines.

In $\underline{Gru}$ (oder auch $\underline{Ring}$, $\underline{VR}$) sind die 0-Objekte genau die einelementigen.

3.4 Beispiel. In $\underline{Set}$ haben wir die Konstruktionen des kartesischen Produkts $X \times Y$ zweier Mengen X und Y. Es hat folgende universelle Eigenschaft $(\forall U, f_C, f_Y)$ und ist dadurch eindeutig festgelegt.

$$\begin{tikzcd} X & X \times Y \arrow[l, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_Y"] & Y \\ & U \arrow[ul, "f_X"] \arrow[u, dotted, "! \, f"] \arrow[ur, "f_Y"'] & \end{tikzcd}$$

Allgemeiner ist das kartesische Produkt einer Familie (nicht einer Klasse, da die Elemente von $\prod_{i\in I} X_i$ Abbildungen $f : I \to \bigcup_{i\in I} X_i$ sind und somit gleichmächtig mit I, also Klassen wären) $(X_i)_{i\in I}$ von Mengen durch folgende universelle Eigenschaft $(\forall U, f_i)$ charakterisiert:

$$\begin{tikzcd} X_i & \prod_i X_i \arrow[l, "\mathrm{pr}_i"'] \\ & U \arrow[ul, "f_i"] \arrow[u, dotted, "! \, f"'] \end{tikzcd}$$

Definition. Unter dem PRODUKT einer Familie von Objekten X_i in einer Kategorie verstehen wir ein Objekt X_∞ zusammen mit Morphismen $p_i : X_\infty \to X_i$ welches die obige universelle Eigenschaft besitzt.

Beachte das für die leere Familie (d.h. $I = \emptyset$) das Produkt $\prod_{i\in\emptyset} X_i$ gerade terminale Objekte beschreibt.

3.5 Lemma.

1. *Wenn das Produkt $(X \times Y, p_X, p_Y)$ existiert und $\mathcal{C}(X,Y) \neq \emptyset$, dann ist p_X eine Retraktion.*
2. *Wenn für je zwei Objekte X und Y ein Produkt existiert, so läßt sich daraus ein Funktor $\mathcal{C}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$ so bauen, daß die Projektionen auf die beiden Faktoren natürliche Transformationen werden.*

3. *Das Produkt von Schnitten, Retrakten, Iso's, starken/Monos ist von gleicher Art.*
4. *Bildung von Produkten ist assoziativ, d.h. wenn $I = \bigsqcup_{j\in J} I_j$, so ist*

$$\prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j} X_i \cong \prod_{i\in I} X_i$$

5. *Terminale Objekte wirken als neutrale Elemente für die Produktbildung.*

Beachte daß 3 nicht notwendig für extreme Mono's gilt.

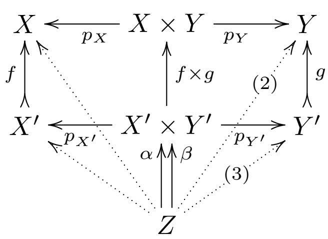
Beweis. 1

$$\begin{tikzcd}
X & X\times Y \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] & Y \\
& X \arrow[ul, "1_X"] \arrow[u, dotted, "(2)"] \arrow[ur, dotted, "(1)"'] &
\end{tikzcd}$$

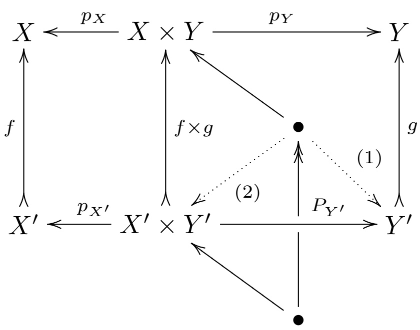
2 Für Objekte X und Y wählen wir unter den Produkten $X \times Y$ jeweils eines aus. Auf Morphismen läßt sich dies wie folgt (eindeutig) erweitern:

$$\begin{tikzcd}
X & X\times Y \arrow[l, "p_X"'] \arrow[r, "p_Y"] & Y \\
X' \arrow[u, "f"] & X'\times Y' \arrow[l, "p_{X'}"'] \arrow[r, "P_{Y'}"] \arrow[u, dotted, "!\ f\times g"] & Y' \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

3 Für Schnitte, Retrakte, Iso's gilt das für jeden Funktor. Für Mono's betrachte man:



Für starke Mono's betrachte man:



4

$$\begin{tikzcd}
X_i & \prod_{i\in I_j} X_i \arrow[l, "p_i"'] & \prod_{j\in J}\prod_{i\in I_j} X_i \arrow[l, "p_j"'] \\
& Z \arrow[ul, "f_i"] \arrow[u, dotted, "!\ f_j"] \arrow[ur, dotted, "!\ f"'] &
\end{tikzcd}$$

□

3.6 Durchschnitte. Wenn X und Y Teilmengen von Z (z.B. $Z = X \cup Y$) sind, dann ist der Durchschnitt durch folgende universelle Eigenschaft ($\forall U, f_X, f_Y$ mit $i_X \circ f_X = i_Y \circ f_Y$) festgelegt:

$$\begin{tikzcd}
 & Z & \\
X \arrow[ur, hook, "i_X"] & X \cap Y \arrow[l, "j_X"'] \arrow[r, "j_Y"] & Y \arrow[ul, hook', "i_Y"'] \\
 & U \arrow[ul, "f_X"] \arrow[u, dotted, "!\ f"] \arrow[ur, "f_Y"'] &
\end{tikzcd}$$

Allgemeiner ist der Durchschnitt einer Klasse $(X_i)_{i \in I}$ von Teilmenge von Z durch folgende universelle Eigenschaft ($\forall U, f_i$ mit $m_i \circ f_i$ unabhängig von i) charakterisiert:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \\
X_i \arrow[ur, hook, "m_i"] & \bigcap_i X_i \arrow[l, "\mathrm{pr}_i"'] \arrow[u] \\
 & U \arrow[ul, "f_i"] \arrow[u, dotted, "!\ f"']
\end{tikzcd}$$

Man beachte, daß selbst wenn Durchschnitte beliebiger Mengen existieren, nicht notwendiger Weise Durchschnitte von Klassen existieren. In der Tat in $\underline{OZ}^{op}$ ist der Durchschnitt von $A \subseteq OZ$ gerade das Supremum (d.h. Vereinigung) der $\alpha \in A$. Ein solches existiert für jede Teilmenge A, aber nicht für die Klasse $A = OZ$.

Lemma.

1. *Wenn alle m_i starke/Mono's sind, so auch der Durchschnitt $m := \bigcap_i m_i$.*
2. *Es sei $\mathcal{M}$ eine Klasse von Mono's mit gleicher Codomäne und $\mathcal{M}_0$ eine* initiale *Teilklasse von $\mathcal{M}$, d.h. für jedes $m \in \mathcal{M}$ existiert ein $m_0 \in \mathcal{M}_0$, welches über m faktorisiert. Falls $\bigcap \mathcal{M}_0$ existiert so auch $\bigcap \mathcal{M}$ und die beiden sind isomorph.*
3. *Es sei $\mathcal{C}$ lokal klein, und der Durchschnitt jeder Menge von Mono's mit gleicher Codomäne existiere, so existiert auch der Durchschnitt jeder Klasse von Monos.*

Beweis. 1 Für Mono's betrachte man:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X_i \arrow[ur, "m_i"] & \bigcap_i X_i \arrow[l, "p_i"'] \arrow[u, "m"] & \\
 & & Z \arrow[ul, shift left, "\beta"'] \arrow[ul, shift right, "\alpha"] \arrow[uul, dotted, "(1)"'] \arrow[ull, dotted, "(2)"]
\end{tikzcd}$$

Für starke Monos betrachte man:

$$\begin{tikzcd}
 & X & \\
X_i \arrow[ur, tail, "m_i"] & & \bullet \arrow[ul] \arrow[ll, dotted, "(1)"] \arrow[dl, dotted, "(2)"'] \\
 & \bigcap_i X_i \arrow[uu, tail, "m"] \arrow[ul] & \bullet \arrow[l] \arrow[u, two heads, "e"']
\end{tikzcd}$$

$\boxed{2}$

$$\begin{tikzcd}
X & & \\
 & \bullet \arrow[ul, tail, "m"'] & \bigcap \mathcal{M}_0 \arrow[l, dotted, "p_m"', "(1)"] \arrow[dl] \\
 & \bullet \arrow[uul, tail, "m_0"] \arrow[u, dotted, "p_{m_0}"', "(1)"] & Z \arrow[l] \arrow[ul] \arrow[u, dotted, "(2)"']
\end{tikzcd}$$

$\boxed{3}$ Es genügt nach (2) den Durchschnitt einer repräsentativen Teilmenge $\mathcal{M}_0$ von $\mathcal{M}$ zu nehmen. $\square$

3.7 Definition. Wenn in obiger Situation nur ein Morphismus eine Inklusion ist, dann beschreibt das universelle Problem in *Set* das inverse Bild und wir daher auch in einer allgemeinen Kategorie als INVERSES BILD bezeichnet:

$$\begin{tikzcd}
 & Z & \\
X \arrow[ur, "g"] & g^{-1}(Y) \arrow[l, "j_X"'] \arrow[r, "g'"] & Y \arrow[ul, hook, "i_Y"'] \\
 & U \arrow[ul, "f_X"] \arrow[ur, "f_Y"'] \arrow[u, dotted, "! \; f"] &
\end{tikzcd}$$

Lemma.

1. *Es sei $f : X \to Y$ ein Morphismus, $m : Y' \to Y$ ein starker/Mono, und $f^{-1}(m) : f^{-1}(Y') \to X$ ein inverses Bild. Dann ist f^{-1} ein starker/Mono.*
2. *Wenn inverse Bilder existieren, dann sind die extremen Epi's genau die starken Epi's.*

Beweis. $\boxed{1}$ Für Mono's betrachte man:

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] & Y \\
 & X' \arrow[u, "m'"] \arrow[r, "f'"] & Y' \arrow[u, tail, "m"'] \\
\bullet \arrow[uur, bend left] \arrow[ur, shift left, "\alpha"] \arrow[ur, shift right, "\beta"'] \arrow[urr, dotted, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

Für starke Monos betrachte man:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[dr, dotted, "(2)"'] \arrow[drr, dotted, "(1)"] & X \arrow[r, "f"] & Y \\
\bullet \arrow[u, two heads] \arrow[r] & X' \arrow[u, tail, "m'"] \arrow[r, "f'"'] & Y' \arrow[u, tail, "m"']
\end{tikzcd}$$

[2] Betrachte

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, tail, "m"] & & \bullet \\
& PB \arrow[ul] \arrow[dr, tail, "g^{-1}(m)"'] & \\
\bullet \arrow[uu] \arrow[ur, dotted] \arrow[rr, two heads, "e"'] & & \bullet \arrow[uu, "g"']
\end{tikzcd}$$

Dabei ist $g^{-1}(m)$ ein Iso, wenn e ein extremer Epi ist. □

3.8 Definition. Falls beide Morphismen beliebig sind, dann heißt das PULLBACK (oder RÜCKZIEHER, dual RAUSSCHIEBER) auch gefasertes Produkt und wird mit $X \times_Z Y = X \times_{(g_X,Z,g_Y)} Y$ bezeichnet.

$$\begin{tikzcd}
& Z & \\
X \arrow[ur, "g_X"] & X \times_Z Y \arrow[l, "\mathrm{pr}_X"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_Y"] & Y \arrow[ul, "g_Y"'] \\
& U \arrow[ul, "f_X"] \arrow[ur, "f_Y"'] \arrow[u, dotted, "!\ f"] &
\end{tikzcd}$$

Es kann in $\underline{Set}$ wie folgt konstruiert werden:

$$X \times_Z Y = \Big\{(x, y) \in X \times Y : g_X(x) = g_Y(y)\Big\}$$

Beachte, daß damit der Durchschnitt als $\Big\{(x, y) \in X \times Y : x = y\Big\} \cong X \cap Y$ beschreiben wird und das Urbild als $\Big\{(x, y) \in X \times Y : g(x) = y \in Y\Big\} \cong g^{-1}(Y)$.

Lemma.

1. *Das Pullback einer Retraktion ist eine Retraktion.*
2. *Das Pullback eines Epi's ist nicht notwendiger Weise ein Epi.*
3. *Das Aneinanderfügen von Pullbacks liefert Pullbacks. Insbesonders ist* $(g \circ f)^{-1}(m) = f^{-1}(g^{-1}(m))$ *und für* $A' \subseteq A$ *ist* $A' \cap (A \cap B) = A' \cap B$.
4. *Wenn eine Aneinanderfügung von kommutativen Quadraten ein Pullback ist und auch das rechts stehende, so auch das links stehende.*

5. *Ein Morphismus f ist genau dann ein Mono, wenn folgendes Diagramm ein Pullback ist:*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & \bullet \arrow[d, "f"] \\ \bullet \arrow[r, "f"'] & \bullet \end{tikzcd}$$

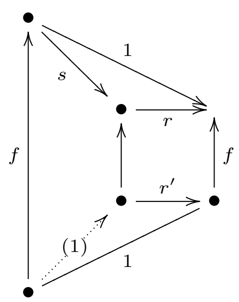
6. *Falls $X \times X$ existiert, so ist ein Morphismus $f : X \to Y$ genau dann konstant, wenn folgendes Diagramm ein Pullback ist:*

$$\begin{tikzcd} X \times X \arrow[r, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_2"'] & X \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

7. *Falls $X \times Z$ und $Y \times Z$ existiert, so ist für jeden Morphismus $f : X \to Y$ folgendes Diagramm ein Pullback:*

$$\begin{tikzcd} X \times Z \arrow[r, "\mathrm{pr}_X"] \arrow[d, "f \times Z"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \times Z \arrow[r, "\mathrm{pr}_Y"] & Y \end{tikzcd}$$

Beweis. $\boxed{1}$

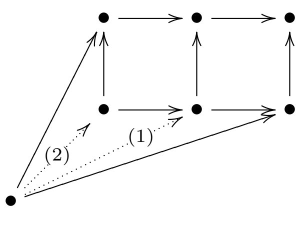


$\boxed{2}$ Es ist

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Q} \arrow[r, hook, two heads] & \mathbb{R} \\ \emptyset \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \{\sqrt{2}\} \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

ein Pullback in <u>*Haus*</u> und die obere horizontale Einbettung ein Epi, die untere jedoch nicht.

$\boxed{3}$



4

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet \\
 & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u] \\
\bullet \arrow[uur] \arrow[ur, dotted, "(1)"] \arrow[urr, dotted, "(2)"] \arrow[urrr] & & &
\end{tikzcd}$$

5

$$\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[r, "f"] & \bullet \\
 & \bullet \arrow[u, "1"'] \arrow[r, "1"] & \bullet \arrow[u, "f"'] \\
\bullet \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, dotted, "(1)"] \arrow[urr, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

6

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[r, "f"] & \bullet \\
 & X \times X \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & X \arrow[u, "f"'] \\
\bullet \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[ur, dotted, "(\alpha{,}\beta)"] \arrow[urr, "\beta"'] & &
\end{tikzcd}$$

7

$$\begin{tikzcd}
Z & Z \times Y \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] & Y \\
 & Z \times X \arrow[ul, "p_1"] \arrow[u, "Z\times f"'] \arrow[r, "p_2"] & X \arrow[u, "f"'] \\
\bullet \arrow[uu, dotted, "(1)"] \arrow[uur] \arrow[ur, dotted, "(2)"] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

3.9 Definition. Ein weitere Spezialfall ist der einer Äquivalenz-Relation, wo die beiden Pfeile übereinstimmen:

$$\begin{tikzcd}
 & Z & \\
X \arrow[ur, "g"] & X \times_Z X \arrow[l, "\mathrm{pr}_1"'] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & X \arrow[ul, "g"'] \\
 & U \arrow[ul, "f_1"] \arrow[u, dotted, "!\, f"] \arrow[ur, "f_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Dann beschreibt $X \times_Z X = \{(x, y) \in X \times X : g(x) = g(y)\}$ die von g erzeugte Äquivalenzrelation, i.e. die Äquivalenzklassen sind gerade die Niveau-Mengen $\{g^{-1}(z) : z \in Z\}$ von g. Ist $\sim$ irgendeine Äquivalenzrelation auf X, dann wird $\sim$ durch die Abbildung $g : X \to X/\sim$ als Pullback beschrieben.

3.10 Definition. Eine verwandte Situation ist die des DIFFERENZKERNS (oder EGALISATORS) $p : X_\infty \to X$ von $\alpha, \beta : X \to Y$ mit folgender universellen Eigenschaft ($\forall U, f_X, f_Y$ mit $\alpha \circ f_X = f_Y = \beta \circ f_X$):

$$\begin{tikzcd}
Y & X \arrow[l, shift left, "\beta"'] \arrow[l, shift right, "\alpha"] & X_\infty \arrow[l, "p"'] \\
& & U \arrow[u, dotted, "!" ', "f"] \arrow[ul, "f_X"] \arrow[ull, bend left, "f_Y"]
\end{tikzcd}$$

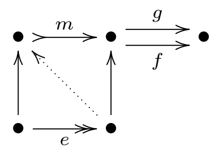
Lemma.

1. *Die Kategorie $\mathcal{A}$ habe Equalizer und $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ sei ein Funktor, der diese bewahrt. Dann ist F genau dann treu, wenn F Epi's reflektiert.*
2. *Jeder Schnitt ist ein Egalisator, und jeder Egalisator ist ein starker Mono. Die Morphismen die sich als Equalizer schreiben lassen werden auch* REGULÄRE MONOMORPHISMEN *genannt.*
3. *Es seien $f : X \to Z$ und $g : Y \to Z$ gegeben und es existiere $(X \times Y, p_X, p_Y)$. Dann existiert das Pullback von f und g genau dann, wenn der Egalisator von $f \circ p_X$ und $g \circ p_Y$ existiert, und die beiden sind isomorph.*
4. *Seien $f, g : X \to Z$ und es existiere $(X \times Z, p_X, p_Y)$. Sei $(X, f), (X, g) : X \to X \times Z$ die Morphismen mit 1. Komponente 1_X und 2. Komponente f bzw. g. Dann existiert der Equalizer von f und g genau dann, wenn der Durchschnitt der beiden Schnitte (X, f) und (X, g) existiert, und die beiden sind isomorph.*
5. *Eine Kategorie hat genau dann Egalisatoren und endliche Produkte, wenn sie Pullbacks und terminale Objekte besitzt, bzw. genau dann wenn sie endliche Produkte und endliche Durchschnitte besitzt.* Wir werden in 3.17 sehen, das dies genau die Existenz endlicher Limiten beschreibt.
6. *Falls Egalisatoren existieren so ist jeder Morphismus der die extremal-Bedingung eines extremen Epi's erfüllt, selbst ein (extremer) Epi.*
7. *Es sei $\mathcal{C}$ stark lokal klein und es existieren Durchschnitte starker Mono's und Egalisatoren. Dann ist jeder extreme Mono schon stark.*
8. *Es sei $\mathcal{C}$ lokal klein und Durchschnitte und Egalisatoren existieren. Dann besitzt jeder Morphismus eine (extrem-Epi,Mono)-Faktorisierung.*
9. *Es sei $\mathcal{C}$ stark lokal klein und es existieren Durchschnitte starker Mono's und Egalisatoren. Dann besitzt jeder Morphismus eine (Epi,stark-Mono)-Faktorisierung.*
10. *Es sei $\mathcal{C}$ lokal klein und Durchschnitte und Egalisatoren existieren. Dann besitzt jeder Morphismus eine (extrem-Epi,Bi,stark-Mono)-Faktorisierung.*

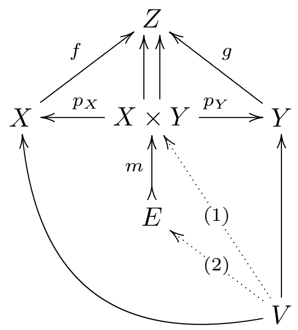
Beweis. 1 Alle treuen Funktoren reflektieren Epi's, denn aus $\alpha \circ f = \beta \circ f$ folgt $F(\alpha) \circ F(f) = F(\beta) \circ F(f)$ und somit $F(\alpha) = F(\beta)$ also $\alpha = \beta$. Umgekehrt sei $F(\alpha) = F(\beta)$ und m der Equalizer von α und β, dann ist nach Voraussetzung $F(m)$ der Equalizer von $F(\alpha) = F(\beta)$, also $F(m)$ ein Iso und somit m ein Epi, also $\alpha = \beta$.

2 Wenn $p \circ m = 1$, dann ist m der Egalisator von 1 und $m \circ p$, denn $1 \circ m = m \circ p \circ m$ und aus $1 \circ f = m \circ p \circ f$ folgt daß $p \circ f$ der eindeutige Morphismus mit $m \circ (p \circ f) = f$ ist.
Wenn $m = \mathrm{Equ}(f, g)$, dann ist m ein Mono, denn aus $m \circ \alpha = m \circ \beta$ folgt wegen

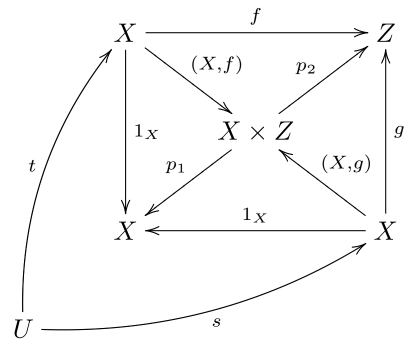
der Limeseigenschaft $\alpha = \beta$. m ist stark, denn



$\boxed{3}$



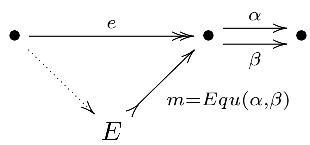
$\boxed{4}$ Offensichtlich sind (X, f) und (X, g) Schnitte mit Retraktion $p_X : X \times Z \to X$.



Ein Objekt U mit zwei Morphismen t und s erfüllt genau dann die Kommmutativitätsbedingung des Durchschnitts $(X, f) \cap (X, g)$, wenn $r = s$ und $f \circ t = g \circ s$ gilt, also für $t = s$ die Kommmutativitätsbedingung des Equalizers $Equ(f, g)$ erfüllt ist.

$\boxed{5}$ (1⇒2) nach $\boxed{3}$, denn das 0-fache Produkt liefert ein terminales Objekt. (1⇐2) nach $\boxed{4}$, denn das zweifache Produkt ist das Pullback der eindeutig bestimmten Morphismen in ein terminales Objekt.
(2⇒3) denn Durchschnitte sind spezielle Pullbacks und Produkte sind Pullbacks der eindeutigen Morphismen in ein terminales Objekt. (3⇒1) denn der Equalizer von f und g kann als Duchschnitt der beiden Schnitte $X \times f, X \times g : X \to X \times Y$ dargestellt werden.

$\boxed{6}$



Dann ist m ein Iso, also $\alpha = \beta$ also e ein Epi.

8 Sei $f : X \to Y$ und $m : D \to Y$ der Durchschnitt aller Mono's $Z \to Y$, über welche f faktorisiert. Dann gilt:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, dotted, "(1)"] \arrow[dd] \arrow[ddr, dotted, "e\ (3)"'] & & Y \\
& Z \arrow[ur, tail] & \\
\bullet \arrow[r, tail, "m'"] & D \arrow[l, dotted, bend left, "p_{mom'}"] \arrow[u, dotted, "(2)"] \arrow[uur, tail, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Nach 6 ist nun e ein extremer Epi.

7 Es sei ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, tail, "m"] & Y \\
X' \arrow[u, "r"] \arrow[r, two heads, "e"] & Y' \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}$$

mit extremen Mono m gegeben. Um eine Diagonale zu konstruieren betrachten wir die Klasse $\mathcal{M}$ aller starken Mono's $m : \bullet \to Y$ über welche m und s faktorisieren. Sei $d : D \to Y$ ihr Durchschnitt. Dann gehört d selbst zu $\mathcal{M}$. Es sei p, q so daß $q \circ g = p \circ g$ und $k := Equ(p, q)$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrrr, tail, "m"] \arrow[dr, dotted] \arrow[drr, dotted, "g"] & & & & Y \\
& E \arrow[r, tail, "k"] & D \arrow[r, shift left, "q"] \arrow[r, shift right, "p"'] \arrow[urr, "d"] & \bullet & \\
X' \arrow[uu, "r"] \arrow[rrrr, two heads, "e"] & & & & Y' \arrow[uu, "s"'] \arrow[ulll, dotted] \arrow[ull, dotted]
\end{tikzcd}$$

Es gehört auch $d \circ k$ zu $\mathcal{M}$, denn m faktorisiert offensichtlich über $d \circ k$, und weil k ein starker Mono ist, faktorisiert auch s über $d \circ k$. Also ist k ein Iso, und somit g ein Epi. Da m ein extremer Mono ist, ist g ein Iso.

9 Sei $f : X \to Y$ ein beliebiger Morphismus. Dann betrachten wir die Klasse $\mathcal{M}$ aller starken Mono's $m : \bullet \to Y$ über welche f faktorisiert. Sei $d : D \to Y$ der Durchschnitt und $e : X \to D$ die zugehörige Faktorisierung. Dann ist e ein Epi, denn aus $\alpha \circ e = \beta \circ e$, folgt für den Egalisator $k : E \to D$ von α und β, daß f über $d \circ k$ faktorisiert, also k ein Iso ist, und somit $\alpha = \beta$, d.h. e ein Epi ist.

10 folgt aus 8 und 9. □

3.11 Beispiel. In $\underline{Top}$ haben wir folgende (stark-Epi,Bi,stark-Mono)-Faktorisierung:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & Y \\
X/\sim_f \arrow[r, tail, two heads, "\tilde{f}"] & f[X] \arrow[u, hook, "m"']
\end{tikzcd}$$

wobei $\sim_f$ die von f erzeugte Äquivalenzrelation $x_1 \sim_f x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$, $\pi : X \to X/\sim_f$ die kanonische Projektion und $X/\sim_f$ die finale (d.h. Quotienten-)Topologie bzgl. π trage. Weiters sei $f[X]$ versehen mit der initialen Topologie bezüglich der Inklusion $m : f[X] \hookrightarrow Y$ und $\tilde{f} : X/_\sim \to f[X]$ die von f induzierte Abbildung $[x] \mapsto f(x)$.

In *Haus* haben wir folgende (stark-Epi,Bi,stark-Mono)-Faktorisierung:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, two heads, "\pi"'] & Y \\ X/\sim_f \arrow[r, tail, two heads, "\tilde{f}"] & \overline{f[X]} \arrow[u, hook, "m"'] \end{tikzcd}$$

3.12 Projektive Limiten

Sei $\ldots X_{n+1} \subseteq X_n \subseteq \ldots \subseteq X_1 \subseteq X_0$, dann wird der Durchschnitt $X_\infty := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$ auch durch folgendes Diagramm beschrieben:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, hook, "f_{n+1}"] & X_{n+1} \arrow[rr, hook, "f_n"] & & X_n \arrow[r, hook, "f_{n-1}"] & \cdots \\ & & X_\infty \arrow[ul, "p_{n+1}"] \arrow[ur, "p_n"'] & & \\ & & U \arrow[uul] \arrow[uur] \arrow[u, dotted, "!"] & & \end{tikzcd}$$

Allgemeiner können wir die Inklusionen durch beliebige Abbildungen ersetzen, oder noch allgemeiner, ein Diagramm X über einer gerichteten Menge $(I, \succ)$ betrachten. Gerichtetheit bedeutet, daß zu $i, i' \in I$ ein $i'' \succ i, i'$ in I existiert. Wir haben also Objekte X_i zu jeden $i \in I$ und für $i \succ i'$ einen eindeutig festgelegten Morphismus $f : X_i \to X_{i'}$, die mit Zusammensetzung verträglich sind. Der PROJEKTIVE (oder auch INVERSE LIMES) $\varprojlim_{i\in I} X_i = X_\infty$ ist dann die Lösung folgenden universellen Problems:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & X_i \arrow[rr, "X_f"] & & X_{i'} \arrow[r] & \cdots \\ & & X_\infty \arrow[ul, "p_i"] \arrow[ur, "p_{i'}"'] & & \\ & & U \arrow[uul] \arrow[uur] \arrow[u, dotted, "!"] & & \end{tikzcd}$$

Er kann in *Set* wie folgt beschrieben werden:

$$\varprojlim_{i\in I} X_i = \Big\{(x_i)_i \in \prod_{i\in I} X_i : i \succ i' \Rightarrow x_i \mapsto x_{i'}\Big\},$$

diese Tupeln $(x_i)_i \in I$ nennt man auch die Fäden.

3.13 Lemma. *Es sei $(I, \succ)$ eine gerichtete Menge und $J \subseteq I$ eine initiale Teilmenge, das soll heißen: für jedes $i \in I$ existiert ein $j \in J$ mit $j \succ i$. Sei $F : \underline{(I, \succ)} \to \mathcal{C}$ ein Funktor. Dann existiert $\varprojlim F$ genau dann, wenn $\varprojlim F|_J$ existiert, und die beiden sind gleich.*

Beweis. Wir beschreiben einen Isomorphismus zwischen den Kategorien von Kegeln (siehe 3.16) über F und $F|_J$:

$$\underline{Keg}(F) \cong \underline{Keg}(F|_J), \quad (f_i)_{i\in I} \mapsto (f_i)_{i\in J}.$$

Zu jedem Kegel $(f_i : i \in I)$ von F assoziieren wir den Teilkegel $(f_i : i \in J)$ von $F|_J$. Umgekehrt konstruieren wir aus einem Kegel $(f_j : j \in J)$ von $F|_J$ wie folgt einen Kegel $(f_i : i \in I)$ von F. Nach Voraussetzung existiert für $i \in I$ ein $j \in J$ mit $j \succ i$. Sei $F_{j,i}$ das Bild des Morphismuses $j \to i$ unter F und $f_i := F_{j,i} \circ f_j$. Diese Definition hängt nicht von der Wahl von j ab, denn sei $j' \succ i$, dann existiert wegen der Gerichtetheit ein i' mit $i' \succ j$ und $i' \succ j'$ und somit wegen der Initialität ein $j'' \succ i'$. Im Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & F(i') \arrow[r, "F_{i',j}"] \arrow[dr] & F(j) \arrow[r, "F_{j,i}"] & F(i) \\
F(j'') \arrow[ur, "F_{j'',i'}"] \arrow[urr, "F_{j'',j}"'] \arrow[drr, "F_{j'',j'}"'] & & & \\
 & X \arrow[ul, "f_{j''}"] \arrow[uur, "f_j"'] \arrow[uurr, dotted, "f_i"] \arrow[r, "f_{j'}"'] & F(j') \arrow[uur, "F_{j',i}"'] &
\end{tikzcd}$$

ist dann

$$F_{j,i} \circ f_j = F_{j,i} \circ F_{j'',j} \circ f_{j''} = F_{j'',i} \circ f_{j''} = F_{j',i} \circ F_{j'',j'} \circ f_{j''} = F_{j',i} \circ f_{j'}$$

Weiters ist $(f_i : i \in I)$ ein Kegel für F, denn sei $i \succ i'$ und $j \succ i$, dann ist $f_{i'} := F_{j,i'} \circ f_j = F_{i,i'} \circ F_{j,i} \circ f_j = F_{i,i'} \circ f_i$. Offensichtlich ist Erweitern gefolgt von Einschränken die Identität. Umgekehrt sei für $i' \in I$ der aus der Einschränkung konstruierte Morphismus f'_i. Dann ist $f'_i := F_{j,i} \circ f_j = f_i$. Also haben wir eine Bijektion auf Kegeln. Auf Morphismen zwischen Kegeln wirken wir mit der Identität. Falls $h : (f_j : j \in J) \to (g_j : j \in J)$ ein Morphismus ist, so auch $h : (f_i : i \in I) \to (g_i : i \in I)$, denn $g_i \circ h = F_{j,i} \circ g_j \circ h = F_{j,i} \circ f_j = f_i$.

$$\begin{tikzcd}
F(j) \arrow[rr, "F_{j,i}"] \arrow[drrr, "F_{j,i'}"'] & & F(i) \arrow[dr, "F_{i,i'}"] & \\
 & Y \arrow[ul, "g_j"] \arrow[ur, "g_i"'] \arrow[rr, "g_{i'}"] & & F(i') \\
 & X \arrow[u, "h"] \arrow[uul, "f_j"] \arrow[uur, "f_i"'] \arrow[urr, "f_{i'}"'] & &
\end{tikzcd}$$

□

3.14 Folgerung. *Es sei $(I, \succ)$ eine gerichtete Menge und $F : \underline{(I, \succ)} \to \mathcal{C}$ ein Funktor.*

1. *Falls $\{i_0\}$ ein maximales Element von $(I, \succ)$ ist, so ist $F(i_0)$ Limes von F.*
2. *Ohne Beschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, daß I ein minimales Element besitzt, denn für $i_0 \in I$ ist $[i_0, \infty) := \{i \in I : i \succ i_0\}$ eine initiale Teilmenge mit kleinsten Element i_0.*
3. *Ist I unendlich abzählbar, so existiert eine monotone Einbettung von $\iota : (\mathbb{N}, \leq) \hookrightarrow (I, \succ)$ mit initialen Bild. Also ist $\varprojlim_I F = \varprojlim_{\mathbb{N}} F \circ \iota$. Anstelle abzählbarer projektiver Limiten genügt also projektive Limiten von Folgen zu betrachten.*

Beweis. $\boxed{1}$ ist offensichtlich, da $\varprojlim F|_{\{i_0\}} = F(i_0)$.

$\boxed{2}$ ist offensichtlich. $\boxed{3}$ Sei $I = \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ und wähle rekursiv $\iota(n)$ mit $\iota(0) = x_0$ und $\iota(n+1) \succ \iota(n)$ und $\iota(n+1) \succ x_n$. □

3.15 Lemma. *Es seien X_i Objekte von $\mathcal{C}$, für welche alle endlichen Produkte $\prod_{i\in F} X_i$ existieren (d.h. $F \subseteq I$ endlich). Dann ist*

$$\prod_{i\in I} X_i \cong \varprojlim_{\substack{F \subseteq I \\ endl.}} \prod_{i\in F} X_i$$

Beweis. Es sei $\tilde{X} : \{F : F \subseteq I,\ \text{endlich.}\} \to \mathcal{C}$ ein Funktor, der auf Objekten F vermöge $\tilde{X}_F := \prod_{i\in F} X_i$ und auf Morphismen $F \supseteq F'$ durch $\tilde{X}_{F,F'} : \tilde{X}_F \to \tilde{X}_{F'}$ durch $\mathrm{pr}_i^{F'} \circ \tilde{X}_{F,F'} = \mathrm{pr}_i^F$ für alle $i \in F'$ gegeben ist. Wir müssen zeigen, daß $\mathrm{Keg}(X) \cong \mathrm{Keg}(\tilde{X})$, wobei die Funktoren durch

$$\Big(Y, (f_i : Y \to X_i)_{i\in I}\Big) \mapsto \Big(Y, ((f_i)_{i\in F} : Y \to \prod_{i\in F} X_i)_F\Big); \quad h \mapsto h$$

$$\Big(Y, (f_{\{i\}} : Y \to X_i \cong \prod_{j\in\{i\}} X_j)_{i\in I}\Big) \leftarrow\!\shortmid \Big(Y, (f_F) : Y \to \prod_{i\in F} X_i\Big)_F); \quad h \leftarrow\!\shortmid h$$

gegeben sind. Sie sind offensichtlich wohldefiniert und invers zueinander. □

3.16 Definition. Allgemeine Limiten. Ganz allgemein können wir zu einen Diagramm, d.h. einen Funktor $X : \mathcal{I} \to \underline{Set}$ auf einer kleinen Kategorie $\mathcal{I}$, den Limes $\lim X$ als Lösung folgenden universellen Problems ($\forall U, f_i$ mit $X_h \circ f_i = f_{i'}$) beschreiben:

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "h"] & i' \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] \cdots \arrow[r] & X_i \arrow[rr, "X_h"] & & X_{i'} \arrow[r] & \cdots \\ & & \lim X \arrow[ul, "p_i"'] \arrow[ur, "p_{i'}"] & & \\ & & U \arrow[uul, "f_i"] \arrow[uur, "f_{i'}"'] \arrow[u, dotted, "!"] & & \end{tikzcd}$$

Wenn wir also ein Objekt U zusammen mit einer Familie von Morphismen $f_i : U \to X_i$ für alle Objekte i von $\mathcal{I}$, welche für jeden Morphismus $h : i \to i'$ in $\mathcal{I}$ die Gleichung $X_h \circ f_i = f_{i'}$ erfüllen einen Kegel über X nennen, dann ist der Limes von X ein Kegel über X, sodaß jeder andere Kegel $(U, (f_i)_i)$ einen eindeutigen Morphismus $f : U \to \lim X$ zuläßt, der für alle Objekte i in $\mathcal{I}$ die Gleichungen $p_i \circ f = f_i$ erfüllt.

Wie zuvor können wir $\lim X$ in $\underline{Set}$ als Teilmenge aller Fäden in $\prod_{i\in I} X_i$ berechnen. D.h. $\lim X = \Big\{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : X_h(x_i) = x_{i'}$ für alle Morphismen $h : i \to i'$ in $\mathcal{I}\Big\}$.

Die Definition des Limes eines Diagramms X in $\underline{Set}$ läßt sich sofort auf Diagramme in beliebigen Kategorien übertragen und wir haben die Spezialfälle von terminalen Objekten ($\mathcal{I} = \emptyset$), Produkten ($\mathcal{I}$ diskrete), Durchschnitten ($\mathcal{I}$ ein Cokegel von Mono's), Inversen Bildern, Äquivalenzrelationen, Pullback's (Rückzieher) ($\mathcal{I}$ zwei Pfeile mit gleicher Codomäne), Egalisatoren (Differenzkerne) ($\mathcal{I}$ zwei Pfeile mit gleicher Domäne und Codomäne), projektive (=inverse) Limiten ($\mathcal{I}$ eine nach unten gerichtete Menge).

Man sagt $\mathcal{I}$-Limiten existieren oder auch $\mathcal{C}$ ist $\mathcal{I}$-VOLLSTÄNDIG, wenn für jeden Funktor $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Limes existiert. Wenn dies für alle kleinen Kategorien $\mathcal{I}$ gilt, so sagt man $\mathcal{C}$ sei VOLLSTÄNDIG.

Für jedes Diagramm $X : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ können wir die Kategorie $\underline{Keg}(X)$ der KEGELN über X betrachten:
Als Objekte haben wir also Paare $(Y, (f_i)_i)$ von Objekten Y in $\mathcal{C}$ und Morphismen $f_i : Y \to X_i$ für alle Objekte $i \in \mathcal{I}$.
Morphismen von $(Y, (f_i)_i)$ nach $(Z, (g_i)_i)$ sind Morphismen $h : Y \to Z$ in $\mathcal{C}$ mit $g_i \circ h = f_i$ für alle i. Ein Limes von X ist dann nichts anders als ein terminales Objekt in $\underline{Keg}(X)$. Es sind sowohl terminale Objekte Spezialfälle von Limiten als auch umgekehrt. Insbesonders sind Limiten bis auf Isomorphie in $\underline{Keg}(X)$ eindeutig.

3.17 Theorem. *Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *Limiten beliebiger endlicher Diagramme existieren;*
2. *Endliche Produkte und 2-fache Egalisatoren existieren;*
3. *Endliche Produkte und 2-fache Durchschnitte (von Schnitten) existieren.*
4. *2-fache Pullbacks und ein terminales Objekt existiert.*

Ebenso sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1'. *Limiten beliebiger Diagramme existieren;*
2'. *Produkte und 2-fache Egalisatoren existieren;*
3'. *Produkte und 2-fache Durchschnitte (von Schnitten) existieren.*
4'. *Endliche Limiten und projektive Limiten existieren.*

Beweis. (1⇒4) ist trivial.

(4⇒3), denn 0-fache Produkte sind terminale Objekte, 1-fache Produkte sind die Objekte selbst, 2-fache Produkte sind PB bezüglich der Abbildungen in ein terminales Objekt und beliebige höhere endliche Produkte können wir rekursiv nach 3.5 berechnen. Weiters sind Durchschnitte spezielle Pullbacks.

(4'⇒3') folgt aus 3.15.

(3⇒2) folgt aus 3.10.4, denn den Egalisatoren $E(f, g)$ können wir als Durchschnitt der Schnitte (X, f) und (X, g) von $X \to X \times Y$ berechnen.

(2 ⇒ 1) Die Idee ist, daß wie in Mengen der allgemeinen Limes als jenes Teilobjekt des Produkts gegeben ist, welches durch die Gleichungen $x_{\mathrm{cod}\,h} = X(h)(x_{\mathrm{dom}\,h})$ mit allen Morphismen h von $\mathcal{I}$ gegeben ist, d.h. als Durchschnitt der Egalisatoren die durch $\mathrm{pr}_{\mathrm{cod}\,h} = X(h) \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{dom}\,h}$ beschrieben werden. Wie üblich kann man aber viele Gleichungen durch eine vektorwertige Gleichung ersetzen, also den Egalisator der beiden Morphismen $\alpha, \beta : \prod_i X_i \to \prod_h X_{\mathrm{cod}\,h}$, welche wegen der universelle Eigenschaft des Produkts $\prod_h X_{\mathrm{cod}\,h}$ wie folgt durch ihre Komponenten gegeben sind:

$$\begin{tikzcd}
 & X_{\mathrm{cod}\,h} \\
\prod_i X_i \arrow[ur, "\mathrm{pr}_{\mathrm{cod}\,h}"] \arrow[r, dotted, shift left, "\alpha"] \arrow[r, dotted, shift right, "\beta"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathrm{dom}\,h}"'] & \prod_h X_{\mathrm{cod}\,h} \arrow[u, "\mathrm{pr}_h"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_h"] \\
X_{\mathrm{dom}\,h} \arrow[r, "X_h"'] & X_{\mathrm{cod}\,h}
\end{tikzcd}$$

Wir müssen nun zeigen, daß $\mathrm{Keg}(\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}}) \cong \mathrm{Keg}(X)$. Die beiden Funktoren sind dabei durch

$$(Y, (f_i)_i : Y \to \prod_{i \in I} X_i) \leftrightarrows (Y, (f_i : Y \to X_i)_i); \quad h \leftrightarrows h$$

geben. Dies sind offensichtlich wohldefinierte zueinander inverse Funktoren, denn

$$\begin{tikzcd}
Y \arrow[r, "f_i"] \arrow[dr, "(f_i)_i"'] & X_i & X_{\mathrm{cod}\, h} \\
& \prod_i X_i \arrow[u, "\mathrm{pr}_i"] \arrow[ur, "\mathrm{pr}_{\mathrm{cod}\, h}"] \arrow[r, dotted, shift left, "\alpha"] \arrow[r, dotted, shift right, "\beta"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\mathrm{dom}\, h}"'] & \prod_h X_{\mathrm{cod}\, h} \arrow[u, "\mathrm{pr}_h"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_h"] \\
& X_{\mathrm{dom}\, h} \arrow[r, "X_h"'] & X_{\mathrm{cod}\, h}
\end{tikzcd}$$

wenn $f : Y \to \prod_i X_i$ ein Kegel von $\overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}}$ ist, dann ist $f_i := \mathrm{pr}_i \circ f$ einen Kegel von X, denn für $h : i \to i'$ in $\mathcal{I}$ ist $X_h \circ f_i = X_h \circ \mathrm{pr}_i \circ f = \mathrm{pr}_h \circ \beta \circ f = \mathrm{pr}_h \circ \alpha \circ f = \mathrm{pr}_{i'} \circ f = f_{i'}$ und umgekehrt gilt für jeden Kegel $(Y, (f_i))$ von X, daß $(f_i) : Y \to \prod_i X_i$ ein Kegel für den Egalisator ist, denn $\mathrm{pr}_h \circ \alpha \circ (f_i) = \mathrm{pr}_{\mathrm{cod}\, h} \circ (f_i) = f_{\mathrm{cod}\, h} = X_h \circ f_{\mathrm{dom}\, h} = X_h \circ \mathrm{pr}_{\mathrm{dom}\, h} \circ (f_i) = \mathrm{pr}_h \circ \beta \circ (f_i)$. $\square$

3.18 Limiten in einigen Beispielen konkreter Kategorien.
Gru: Das kartesische Produkt $\prod_i X_i$ von Gruppen X_i läßt sich auf eindeutige Weise so zu einer Gruppe machen, daß alle Projektionen $\mathrm{pr}_j : \prod_i X_i \to X_j$ Gruppen-Homomorphismen werden, nämlich durch komponentenweise Multiplikation. Mit dieser Struktur hat $\prod_i X_i$ die universelle Eigenschaft des Produkts in *Gru*.
Weiters ist der Durchschnitt von (zwei) Untergruppen einer Gruppe wieder eine Gruppe, also folgt aus 3.17, daß beliebige Limiten existieren und sie wie üblich (d.h. wie in *Set*) berechnet werden können.
Wir werden später noch sehen warum sich Limiten in sehr vielen konkreten Kategorien $\mathcal{C}$ auf diese Weise berechnen lassen, d.h. der Vergißfunktor $V : \mathcal{C} \to$ *Set* stetig ist.

Top: Es gibt eine gröbste Topologie auf dem kartesischen Produkt topologischer Räume X_i, so daß alle Projektionen pr_j stetig werden, nämlich die Produkttopologie, die als Subbasis ihrer offenen Mengen gerade die Urbilder von offenen Mengen unter den Projektionen hat. Offensichtlich erfüllt das Produkt mit dieser Topologie die universelle Eigenschaft. Weiters trägt der Durchschnitt (angeschlossener) Teilräume wieder eine Topologie, nämlich die Spurtopologie (sie hat als Basis der offenen Mengen die Spuren offener Mengen in Z auf $X \cap Y$). Offensichtlich hat sie wieder die universelle Eigenschaft des Durchschnitts. Nach 3.17 lassen sich also Limiten wie in *Set* berechnen, wobei die Topologie die Spurtopologie der Produkttopologie ist.
Es steckt da dahinter, daß initiale Strukturen bezüglich des Vergißfunktors V : *Top* $\to$ *Set* existieren. Dabei versteht man unter einer initialen Quelle (oder Kegel) eine Familie $f_i : X \to X_i$ von Morphismen so daß für jedes Objekt Y und jede Abbildung $g : V(Y) \to V(X)$ mit $f_i \circ g \in V(\mathcal{A}(Y, X_i))$ für alle i auch $g \in V(\mathcal{A}(Y, X))$

liegt.

$$\begin{tikzcd}
& & X \arrow[r, "f_i"] & X_i \\
Y \arrow[urr, dotted, "(3)"] \arrow[urrr, dotted, "(2)"'] & & V(X) \arrow[r, "V(f_i)"] & V(X_i) \\
V(Y) \arrow[urr, "g"] \arrow[urrr, dotted, "(1)"']
\end{tikzcd}$$

Wir sagen dann, daß (X, f_i) eine initiale Quelle über $(V(X), V(f_i))$ ist. Wenn jede Quelle $g_i : Z \to V(X_i)$ eine initiale Quelle über sich besitzt, so sagen wir, daß $\mathcal{A}$ bezüglich $V : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ initiale Strukturen besitzt.

Offensichtlich besitzt $\underline{Top}$ initiale Strukturen bezüglich $V : \underline{Top} \to \underline{Set}$, und der Limes eines Diagramms X in $\underline{Top}$ ist gerade die initiale Quelle über den Kegel $\lim V \circ X$.

Wir könne die beiden obigen Beispiele nun kombinieren um z.z. daß sich Limiten auch in $\underline{TVR}$ und $\underline{LKV}$ auf die übliche Weise berechnen lassen.

$\underline{Ban}$: In $\underline{Ban}$ haben wir endliche Produkte die durch $\prod_i E_i$ mit $x \mapsto \max\{\|x_i\| : i\}$ gegeben sind. Hingegen existieren beliebigen Produkte nicht im allgemeinen: Angenommen es gäbe das Produkt E von abzählbar vielen Faktoren $\mathbb{R}$. Dann wäre $E \cong L(\mathbb{R}, E) \to \prod_{\mathbb{N}} L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ eine stetige Bijektion. Das Bild des Einheitsballs wäre dann eine absorbierende beschränkte Menge die nicht existiert.

Wenn wir aber $\underline{Ban}$ durch die Kategorie $\underline{Ban_1}$ der Kontraktionen (d.h. $\|\_\| \leq 1$) ersetzen, dann existieren beliebige Produkte (und somit Limiten), und zwar ist das Produkt der E_i gerade der Raum $\{(x_i) \in \prod_i X_i : \sup\{\|x_i\| : i \in I\} < \infty\}$.

3.19 Proposition. *Sei $\mathcal{I}$ eine kleine Kategorie, und $\mathcal{C}$ sei $\mathcal{I}$-vollständig. Dann existiert ein Funktor* $\lim : \mathcal{C}^{\mathcal{I}} \to \mathcal{C}$, *s.d. die Projektionen p_i natürliche Transformationen* $\lim \to \mathrm{ev}_i$ *definieren.*

Beweis. Wir definieren lim auf Objekten F von $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$, d.h. Funktoren $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ durch $(\lim)(F) := \lim F$. Für $\mathcal{C}^{\mathcal{I}}$-Morphismen $f : F \to F'$ (d.h. natürliche Transformationen), erhalten wir durch Zusammensetzen mit dem Kegel $p_i : \lim F \to F(i)$ einen Kegel von F' und somit existiert ein eindeutiger Morphismus $f : \lim F \to \lim F'$, s.d. alle p_i natürliche Transformationen werden.

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[dd, "f=(f_i)_i"'] & & F(i') \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dd, "f_{i'}"] & F(i) \arrow[r, equal] \arrow[dd, "f_i"] & \mathrm{ev}_i(F) \arrow[dd, "f_i"] \\
& \lim F \arrow[ur, "p_{i'}"] \arrow[urr, "p_i"'] \arrow[dd, dotted, "! \; \lim_i f_i"] & & & \\
F' & & F'(i') \arrow[r, "F'(f)"] & F'(i) \arrow[r, equal] & \mathrm{ev}_i(F') \\
& \lim F' \arrow[ur, "p'_{i'}"] \arrow[urr, "p'_i"'] & i' \arrow[r, "f"] & i & \square
\end{tikzcd}$$

3.20 Theorem. Iterierte Limiten. *Es sei $F : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ein Funktor, wobei $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ klein sind, und zwar so, daß $F(i, \_) : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ für alle Objekte i in $\mathcal{I}$ einen Limes $(\lim_{\mathcal{J}} F(i, \_), (p^i_j)_j)$ besitzt. Dann existiert ein eindeutig bestimmter Funktor*

$L : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ mit $L(i) = \lim_{\mathcal{J}} F(i, \_)$ und so, daß p_j eine natürliche Transformation $L \to F(\_, j)$ wird.

Dieser Funktor L hat genau dann einen Limes, wenn F einen hat, und es gilt $\lim_{\mathcal{I}} L = \lim_{\mathcal{I}\times\mathcal{J}} F$, oder suggestiver

$$\lim_{i\in\mathcal{I}} \lim_{j\in\mathcal{J}} F(i,j) = \lim_{(i,j)\in\mathcal{I}\times\mathcal{J}} F(i,j).$$

Beweis. L ist ein Funktor: Es sei dazu $f : i \to i'$ ein Morphismus in $\mathcal{I}$. Dann ist $F(f, \_) : F(i, \_) \to F(i', \_)$ eine natürliche Transformation und die Komposition mit dem Kegel $(p^i_j)_j$ liefert einen Kegel für $F(i', \_)$ und somit einen Morphismus $L(f) : \lim_{\mathcal{J}} F(i, \_) \to \lim_{\mathcal{J}} F(i', \_)$.

$$\begin{tikzcd}
\lim_i L(i) \arrow[rrr, "p_{i,j}"] \arrow[dr, "p_i"] \arrow[dddr, "p_{i'}"'] & & & F(i,j) \arrow[r, "F(i,g)"] \arrow[dd, "F(f,j)"] & F(i,j') \arrow[dd, "F(f,j')"] \\
& L(i) \arrow[r, equal] \arrow[dd, dotted, "L(f)"] & \lim_{\mathcal{J}} F(i,_) \arrow[ur, "p^i_j"] \arrow[urr, "p^i_{j'}"'] \arrow[dd, dotted, "! \; \lim_{j\in J} F(f,j)"] & & \\
& & & F(i',j) \arrow[r, "F(i',g)"] & F(i',j') \\
& L(i') \arrow[r, equal] & \lim_{\mathcal{J}} F(i',_) \arrow[ur, "p^{i'}_j"] \arrow[urr, "p^{i'}_{j'}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Bleibt noch zu zeigen, daß $\operatorname{Keg}(L) \cong \operatorname{Keg}(F)$. Die Funktoren sind durch

$$\Big(Y, (p_i)_{i\in I}\Big) \mapsto \Big(Y, (p^i_j \circ p_i)_{i\in I, j\in J}\Big), \quad h \mapsto h$$
$$\Big(Y, ((p_{i,j})_{j\in J})_{i\in I}\Big) \leftarrow\!\shortmid \Big(Y, (p_{i,j})_{i\in I, j\in J}\Big), \quad h \leftarrow\!\shortmid h$$

gegeben. Sie sind offensichtlich wohldefinierte Funktoren und invers zueinander. □

3.21 Folgerungen.
• Produkte kommutieren miteinander, d.h.

$$\prod_{i\in I}\prod_{j\in J} X_{i,j} = \prod_{(i,j)\in I\times J} X_{i,j} = \prod_{j\in J}\prod_{i\in I} X_{i,j}$$

Dies zeigt also die Assoziativität des Produkts, wie wir sie in 3.5 bereits behandelt hatten.
• Produkte kommutieren mit Egalisatoren, d.h.

$$\prod_{i\in I} \operatorname{Equ}(\alpha_i, \beta_i) = \operatorname{Equ}\Big(\prod_{i\in I}\alpha_i, \prod_{i\in I}\beta_i\Big)$$

Wenn wir jeden Monomorphismus m, die sich als Egalisatoren zweier Morphismen schreiben lassen, als REGULÄRE MONO's bezeichnen, so ist zeigt dies also, daß das Produkt regulärer Mono's wieder ein regulärer Mono ist.
• Produkte kommutieren mit Pullbacks, d.h.

$$\prod_{i\in I} \operatorname{PB}(\alpha_i, \beta_i) = \operatorname{PB}\Big(\prod_i \alpha_i, \prod_i \beta_i\Big).$$

Da 3.8.5 ein Morphismus m genau dann ein Mono ist, wenn

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "1"] \arrow[r, "1"'] & \bullet \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}$$

ein Pullback ist, und weil Produkte von Einheiten Einheiten sind, ist ein Produkt von Mono's ein Mono.

• Schließlich kommutieren Pullbacks mit Pullbacks. Wir müssen also ein Produkt zweier Quadrate

$$\begin{tikzcd}
l \arrow[r] & t \\
b \arrow[u] \arrow[r] & r \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

betrachten, d.h. einen Hyperwürfel, oder wenn wir nur die wesentlichen Ecken einzeichne folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
& & & X_{t,t} & & & \\
& X_{t,l} \arrow[urr] & X_{l,t} \arrow[ur] & & X_{r,t} \arrow[ul] & X_{t,r} \arrow[ull] & \\
X_{l,l} \arrow[ur] \arrow[urr] & & X_{r,l} \arrow[ul] \arrow[urr] & PB \arrow[ul, dotted, "(1)"] \arrow[ur, dotted, "(1)"'] & X_{l,r} \arrow[ull] \arrow[ur] & & X_{r,r} \arrow[ul] \arrow[ull] \\
& PB \arrow[ul, dotted, "(1)"] \arrow[ur, dotted, "(1)"'] \arrow[urr, dotted, "(2)"'] & & & & PB \arrow[ull, dotted, "(2)"] \arrow[ul, dotted, "(1)"] \arrow[ur, dotted, "(1)"'] & \\
& & & PB \arrow[ull, dotted, "(3)"] \arrow[urr, dotted, "(3)"'] & & &
\end{tikzcd}$$

Wenn wir den degenerierten Fall betrachten, wo $X_{t,l} = X_{l,t}$ und $X_{t,r} = X_{r,t}$ und die drei oberen kleinen Quadrate Pullbacks sind, so ist das folgende große Quadrat genau dann ein PB, wenn es das unter kleine Quadrat ist.

$$\begin{tikzcd}
& & X_{t,t} & & \\
& X_{l,t} \arrow[ur] & & X_{r,t} \arrow[ul] & \\
X_{l,l} \arrow[ur] & & PB \arrow[ul, dotted, "(1)"] \arrow[ur, dotted, "(1)"'] & & X_{r,r} \arrow[ul] \\
& PB \arrow[ul, dotted, "(1)"] \arrow[ur, dotted, "(2)"'] & & PB \arrow[ul, dotted, "(2)"] \arrow[ur, dotted, "(1)"'] & \\
& & PB \arrow[ul, dotted, "(3)"] \arrow[ur, dotted, "(3)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Wenn wir schließlich noch weiter darauf spezialisieren, daß $X_{t,t} = X_{l,t}$, dann ist das genau die Aussage aus 3.8.3

$$\begin{tikzcd}
& X_{t,t} & & \\
X_{l,l} \arrow[ur] & & X_{r,t} \arrow[ul] & \\
& PB \arrow[ul, dotted, "(1)"] \arrow[ur, dotted, "(2)"'] & & X_{r,r} \arrow[ul] \\
& & PB \arrow[ul, dotted, "(3)"] \arrow[ur, dotted, "(3)"'] &
\end{tikzcd}$$

3.22 Folgerung. Punktweise Limiten. *Es sei $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}}$ ein Funktor. Falls jede Zusammensetzung $\mathrm{ev}_j \circ F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}^{\mathcal{J}} \to \mathcal{C}$ einen Limes besitzt, so auch F, wobei $\lim F$ ein Funktor $\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ist, mit $(\lim F)(j) = \lim(\mathrm{ev}_j \circ F)$.*

Beweis. Wir können F als Funktor $\hat{F} : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ auffassen (!) und den ersten Teil von 3.20 anwenden, um einen Funktor $L : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ mit $L(j) := \lim \hat{F}(\_, j)$ zu erhalten. Für jedes Objekt i in $\mathcal{I}$ haben wir eine natürliche Transformation $L \to \hat{F}(i, \_)$, welche durch die Projektionen $\lim \hat{F}(\_, j) \to \hat{F}(i, j)$ gegeben ist. Es läßt sich leicht nachrechnen, daß dies eine Kegel über F definiert, der sogar ein Limes von F ist.

$$\begin{tikzcd}
L(j) \arrow[d, equal] & & L(j') \arrow[d, equal] & & \\
\lim_{\mathcal{I}} \hat{F}(_, j) \arrow[rr, dotted, "L(g)"] \arrow[dr, "p_{i,j}"] \arrow[ddr, "p_{i',j}"'] & & \lim_{\mathcal{I}} \hat{F}(_, j') \arrow[dr, "p_{i,j'}"] \arrow[ddr, "p_{i',j'}"'] & L \arrow[dr, "p_i"] \arrow[ddr, "p_{i'}"'] & \\
i \arrow[d, "f"] & \hat{F}(i,j) \arrow[rr, "\hat{F}(i,g)"] \arrow[d, "\hat{F}(f,j)"] & & \hat{F}(i,j') \arrow[d, "\hat{F}(f,j')"] & F(i) \arrow[d, "F(f)"] \\
i' & \hat{F}(i',j) \arrow[rr, "\hat{F}(i',g)"] & & \hat{F}(i',j') & F(i') \\
& j \arrow[rr, "g"'] & & j' &
\end{tikzcd}$$

□

3.23 Folgerung. *Falls also $\mathcal{C}$ vollständig ist, so auch $\mathcal{C}^{\mathcal{J}}$. Der Homfunktor $\mathrm{Hom} : \mathcal{I}^{op} \times \mathcal{I} \to \underline{Set}$ induziert eine (volle) Einbettung $\mathrm{Hom}^{\vee} : \mathcal{I} \to \underline{Set}^{\mathcal{I}^{op}}$ in eine vollständig (und covollständige) Kategorie.*

Beweis. Das $\mathrm{Hom}^{\vee} : \mathcal{I} \to \underline{Set}^{\mathcal{I}^{op}}$ eine Einbettung ist, sieht man leicht ein. Das sie auch voll ist wird aus dem Yoneda-Lemma 4.7 folgen. Die Vollständigkeitsaussagen folgen sofort aus 3.22 da $\underline{Set}$ vollständig und covollständig ist. □

Colimiten

3.25 Definition. Es sei $\mathcal{I}$ eine kleine Kategorie. Unter den COLIMES eines Funktors $F : \mathcal{I}^{op} \to \mathcal{C}$ verstehen wir ein initiales Objekt in der Kategorie $Cokeg(F)$ der COKEGELN über F. Diese hat als Objekte Cokegeln, d.h. Objekte Y in $\mathcal{C}$ zusammen mit $\mathcal{C}$-Morphismen $p_i : X_i := F(i) \to Y$ für alle Objekte i in $\mathcal{I}$, s.d.

$$\begin{tikzcd}
 & i \arrow[rr, "h"] & & i' & \\
\cdots & X_i \arrow[l] \arrow[dr, "p_i"] \arrow[ddr, "p'_i"'] & & X_{i'} \arrow[ll, "X_h"'] \arrow[dl, "p_{i'}"'] \arrow[ddl, "p'_{i'}"] & \cdots \arrow[l] \\
 & & Y \arrow[d, "f"] & & \\
 & & Y' & &
\end{tikzcd}$$

und Morphismen $(Y, (p_i)_i) \to (Y', (p'_i)_i)$ sind gerade jene $\mathcal{C}$-Morphismen $f : Y \to Y'$, die alle obigen Dreiecke kommutativ machen.
Ein Colimes $\operatorname{colim} F$ von F hat also folgende universelle Eigenschaft ($\forall U, f_i$ mit $X_h \circ f_{i'} = f_i$)

$$\begin{tikzcd}
 & i \arrow[rr, "h"] & & i' & \\
\cdots & X_i \arrow[l] \arrow[dr, "p_i"] \arrow[ddr, "f_i"'] & & X_{i'} \arrow[ll, "X_h"'] \arrow[dl, "p_{i'}"'] \arrow[ddl, "f_{i'}"] & \cdots \arrow[l] \\
 & & \operatorname{colim} X \arrow[d, dotted, "!"'] & & \\
 & & U & &
\end{tikzcd}$$

Insbesonders heißen die dualen Konstruktionen zu Limiten, terminalen Objekten, Produkten, Egalisatoren, projektiven Limiten (=inversen Limiten), Pullbacks und Durchschnitten wie folgt: Colimiten, initiale Objekte, COPRODUKTE(=SUMMEN), COEGALISATOREN, INDUKTIVE(=DIREKTE) Limiten, PUSHOUTS(=RAUSSCHIEBER) und CODURCHSCHNITTE.

3.26 Beispiele von Summen. Nach 3.17 genügt für die Existenz von allgemeinen Colimiten sicherzustellen, daß Summen und Coegalisatoren existieren, oder auch induktive Limiten, endliche Summen und Codurchschnitte.

In <u>*Set*</u> ist die disjunkt(gemacht)e Vereinigung $\bigsqcup_i X_i := \bigcup_i \{i\} \times X_i$ zusammen mit den Inklusionen $\mathrm{inj}_j : X_j \hookrightarrow \bigsqcup_i X_i$ offensichtlich ein Coprodukt (Daher auch die Bezeichnungsweise $\bigsqcup$).

Ebenso ist in <u>*Top*</u> und in <u>*Haus*</u> die disjunkte Vereinigung zusammen mit der finalen Topologie bezüglich der Inklusionen $X_i \hookrightarrow \bigsqcup_i X_i$ ein Coprodukt.

Für algebraische und analytische Kategorien dürfen wir aber nicht erwarten, daß das Coprodukt als zugrundeliegende Menge das Coprodukt in Mengen hat. In der Tat sieht im Unterschied zu Produkten das Coprodukt in den üblichen Kategorien oft sehr verschieden aus:

In *Hgru*, *Monoid* und *Gru* kann man das Coprodukt (=das freie Produkt) zweier Objekte X und Y wie folgt beschreiben. Man betrachtet die Halbgruppe $F(X \sqcup Y)$ aller endlichen Folgen $(z_1, \dots, z_n)$ in $X \sqcup Y$ (in den letzten beiden Fällen, die leere Folge miteingeschlossen) mit der Aneinanderfügung (Concatenation) der Folgen als assoziative Operation. Wir haben injektive Abbildungen $X, Y \subseteq X \sqcup Y \subseteq F(X \sqcup Y)$. Diese sind aber nicht multiplikativ. Nun betrachten wir die Kongruenzrelation $\sim$ auf $F(X \sqcup Y)$, welche von $(x, x') \sim (xx')$ mit $x, x' \in X$ und $(y, y') \sim (yy')$ mit $y, y' \in Y$ erzeugt wird. Durch möglichst weitgehendes Ausmultiplizieren können wir in jeder Äquivalenzklasse einen eindeutig bestimmten Repräsentanten der Form $(z_1, \dots, z_n)$ finden, wobei alle z_i aus abwechselnden "Komponenten" X oder Y von $X \sqcup Y$ sind und keines eine Einheit ist. Es ist dann $X \coprod Y := X \star Y = F(X \sqcup Y)/\sim$.

In *AGru*, *R-Mod*, *Vekt*, *Ban* und *LKV* stimmt das zweifache Coprodukt überein mit den zweifachen Produkt. Allgemeine Coprodukte sind die direkte Summe (als Teilmenge des direkten Produkts) versehen mit einer feineren Topologie im letzten Fall, und im vorletzten existiert es nicht, denn sonst wäre $L(\coprod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \prod_{\mathbb{N}} L(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ eine stetige Bijektion (siehe Produkte). In Ban_1 hingegen existieren beliebige Coprodukte $\{(x_i) \in \prod_i E_i : \|(x_i)\|_1 := \sum_i \|x_i\| < \infty\}$. Beachte, daß für normierte Räume mit Kontraktionen bereits der Teilraum der Folgen mit endlichen Träger das Coprodukt bildet.

In *kommR-Alg+1* ist das zweifache Coprodukt das Tensorprodukt und in einer partiell geordneten Menge das Infimum (bzw. Supremum), wobei $i \succ i'$ als Morphismus $i \to i'$ (bzw. als $i' \to i$) interpretiert wird.

3.27 Proposition. *Es sei $\mathcal{C}$ eine semi-additive Kategorie, d.h. der Homfunktor $Hom : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathit{Set}$ liftet längs $\mathit{kommMon} \to \mathit{Set}$. Dann sind äquivalent:*

1. *$(X \times Y; p_1, p_2)$ ist ein Produkt von X mit Y;*
2. *Es ist $(X \times Y; p_1, p_2)$ ein Produkt und $(X \times Y, i_1, i_2)$ ein Coprodukt und $p_k \circ i_l = \delta_{k,l}$ für $k, l \in \{1, 2\}$;*
3. *Es ist $(X \times Y; p_1, p_2; i_1, i_2)$ ein Biprodukt, d.h. $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = 1$ und $p_k \circ i_l = \delta_{k,l}$.*

Weiters besitzt eine endlich Produkt-vollständige Kategorie genau dann Biprodukte im Sinn von 2, wenn sie eine eindeutige semiadditive Struktur zuläßt.

Beachte, daß jede semiadditive Kategorie nach 2.14 automatisch punktiert ist, folglich macht $\delta_{k,l}$ auch für $k \neq l$ eine Sinn, nämlich 0.

Beweis. (1⇒3) Wir definieren i_1 und i_2 durch $p_j \circ i_k = \delta_{j,k}$ vermöge der universellen Eigenschaft des Produkts. Dann ist $p_j \circ (i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2) = p_j \circ i_j \circ p_j + 0 = p_j = p_j \circ 1$ und somit $i_1 \circ p_1 + i_2 \circ p_2 = 1$.

(3⇒2) Es genügt 1 zu zeigen. Sei $f_j : X \to X_j$ gegeben. Falls $p_j \circ f = f_j$ ist, so gilt $i_j \circ p_j \circ f = i_j \circ f_j$ und somit $f = \sum_j i_j \circ p_j \circ f = \sum_j i_j \circ f_j$ und wenn wir diese Gleichung als Definition für f verwenden, so ist f der gesuchte Morphismus.

Man definiert die Addition von $f, g : A \to B$ durch

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "\Delta"] & B \\ A \oplus A \arrow[r, "f \oplus g"] & B \oplus B \arrow[u, "\nabla"'] \end{tikzcd}$$

□

3.24 Beispiele für Quotienten. Die übrigen Limiten sollten wohl mittels der dualen Konstruktion zu Teilobjekten also mittels Quotientenbildung erhalten werden. Wir behandeln zuerst Fälle, wo dies leicht geht. Dazu erinnern wir uns, daß wir in 3.9 Kongruenzen $\sim\subseteq X \times X$ als Pullback von Morphismen $f : X \to Y$ definiert haben:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] & Y \\ \sim \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"'] & X \arrow[u, "f"'] \end{tikzcd}$$

In $\underline{Gru}$ ist eine Kongruenz $\sim$ durch $N := \{g \in G : g \sim 1\}$ eindeutig bestimmt, und zwar sind die auftretenden N genau die Normalteiler, denn

$$(x, y) \in PB(f, f) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow f(x^{-1}y) = f(x)^{-1}f(y) = 1 \Leftrightarrow x^{-1}y \in \ker(f).$$

Beachte also, daß $\sim= \mu^{-1}(N)$, wobei $\mu : G \times G \to G$ durch $(g, h) \mapsto g^{-1}h$ gegeben ist.
Der Coegalisator von $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \sim \to X$ sollte gerade die Projektion $\pi : X \to X/\sim$ sein, denn in $\underline{Set}$ gilt: $\pi(x_1) = \pi(x_2) \Leftrightarrow x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow (x_1, x_2) \in\sim$, also ist $\pi(\mathrm{pr}_1(x_1, x_2)) = \pi(x_1) = \pi(x_2) = \pi(\mathrm{pr}_2(x_1, x_2))$ für alle $(x_1, x_2) \in\sim$. Sei $g : X \to Y'$ eine Abbildung mit $g \circ \mathrm{pr}_1 = g \circ \mathrm{pr}_2$ auf $\sim$, dann ist $g(x_1) = g(x_2)$ für alle $x_1 \sim x_2$ und somit ist $\tilde g : [x] := \pi(x) \mapsto g(x)$ die eindeutig bestimmte Abbildung mit $g = \tilde g \circ \pi$.
In algebraischen Kategorien $\mathcal{C}$ trägt $X/\sim$ auf eindeutige Weise die Struktur eines Objekts, s.d. $\pi : X \to X/\sim$ ein Morphismus wird. Der gleiche Beweis zeigt dann, daß π auch Coequalizer in $\mathcal{C}$ ist.
Übrigens ist in dieser Situation (π, π) das Pushout von $(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$, denn wenn $f_1 \circ \mathrm{pr}_1 = f_2 \circ \mathrm{pr}_2$ so auch $f_1 = f_1 \circ \mathrm{pr}_1 \circ \Delta = f_2 \circ \mathrm{pr}_2 \circ \Delta = f_2$ und somit existiert der gewünschte Morphismus $\tilde f : Coequ(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2) \to \mathrm{cod}\, f_1 = \mathrm{cod}\, f_2$.

Für zwei beliebige Morphismen $\alpha, \beta : X \to Y$ bzw. $\alpha : Z \to X$ und $\beta : Z \to Y$ wird aber $\alpha(x) \sim \beta(x)$ keine Äquivalenz-Relation auf Y (bzw. $X \times Y$) beschreiben. Die erzeugte Äquivalenz-Relation, wird keine Kongruenzrelation sein, also müssen wir die erzeugte Kongruenzrelation $\approx$ betrachten, und den Coequalizer (bzw. das Pushout) als $Y/\approx$ bzw. $X \coprod Y/\approx$ ansetzen.

Sei z.B. $f, g : H \to G$ zwei Gruppenhomomorphismen. Dann ist der Coegalisator in $\underline{Gru}$ von f und g durch $G \to G/N$ geben, wobei N der von $\{f(x)^{-1}g(x) : x \in H\}$ erzeugte Normalteiler ist. Wenn f und g Werte in verschiedenen Gruppen haben, dann ist das Pushout (=amalgamierte freie Produkt) gerade $G_1 \star G_2/N$.

In $\underline{Top}$ ist das Pushout von zwei Morphismen $f : A \to X$ und $g : A \to Y$ insbesonders im Fall $f : X \supseteq A \to Y$ für abgeschlossenes A interessant (oder noch spezieller, für $A = S^n \subseteq D^{n+1} = Y$), dann ist $X \coprod_A Y = Y \cup_f X$. Man zeigt (siehe Stöcker-Zieschang,1.3.13+14), daß $Y \subseteq Y \cup_f X$ ein abgeschlossener Teilraum ist und f einen relativen Homöomorphismus induziert.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, hook] \\ X \arrow[r] & Y \cup_f X \end{tikzcd}$$

In $\underline{Haus}$ müssen wir noch Hausdorffizieren.

Induktive Limiten. In Hinblick auf 3.17 können wir aber noch einen anderen Colimes betrachten, wo dieser Übergang zur erzeugten Kongruenz nicht notwendig ist, nämlich den induktiven Limes. In den meisten algebraischen Kategorien können wir ihn als $\bigsqcup_i X_i/\sim$ definieren, wobei $x_i \sim x_{i'} :\Leftrightarrow \exists i'' \succ i, i'$ mit $X_{i'',i}(x_i) = X_{i'',i'}(x_{i'})$.

Beispiel: Es sei $X = \bigcup X_n$ mit $X_n \subseteq X_{n+1}$. Dann ist $X = \varinjlim X_n$ in $\underline{Set}$. In $\underline{Gru}$ ist jede Gruppe der induktive Limes seiner endlich erzeugten Untergruppen. Das Coprodukt ist wegen 3.15 immer der induktive Limes seiner endlichen Teilcoprodukte. Es ist die quasizyklische Gruppe $\mathbb{Z}(p^\infty) = \varinjlim \mathbb{Z}(p^n)$, wobei $\mathbb{Z}(p^n) := \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ als Teilmenge von $S^1 \subseteq \mathbb{C}$ aufgefaßt wird.

In analytischen Kategorien müssen wir dies noch mit der finalen Struktur bezüglich all der Abbildungen $\mathrm{inj}_i : X_i \to \varinjlim X$ versehen. Man beachte, daß diese Topologie für $\underline{LKV}$ anders aussieht als für $\underline{Top}$.

Z.B. sind die Kelley-Räume genau die induktiven Limiten der kompakten Räume in $\underline{Haus}$. Und die (ultra-)bornologischen Vektorräume sind genau die induktiven Limiten von normierten Räumen (Banachräumen) in $\underline{LKV}$.

3.28 Lemma. *Sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie für welche Pullbacks und Pushout existieren. Dann haben wir eine Galoisbeziehung (siehe 4.2) zwischen Kegeln $\mathrm{Keg}(X,Y)$ und Cokegeln $\mathrm{Cokeg}(X,Y)$ die durch PO und umgekehrt PB geben ist. Im Fall $X = Y$ erhalten wir durch Einschränkung auf (p,q) mit $(1,1) \succ (p,q)$ und auf die Kegeln $\Delta : \mathrm{CoKeg}(X) \hookrightarrow \mathrm{CoKeg}(X,X)$ ebenso eine Galoisbeziehung, die einen Isomorphismus zwischen Kongruenzen und regulären Epis liefert.*

Die Quasiordnung auf $\mathrm{Keg}(X,Y)$ ist dabei durch $(Z,(h,k)) \succ (Z',(h',k')) :\Leftrightarrow \exists f : Z \to Z'$ mit $h' \circ f = h$ und $k' \circ f = k$ gegeben und analog für $\mathrm{Cokeg}(X,Y)$.

Beweis. Monotonie und Galois-Eigenschaft folgt sofort aus:

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dr, "t"] \arrow[drr, "t'"] & & \\
\bullet \arrow[r, dotted, "h"] \arrow[urr, "p"] \arrow[drr, "q"'] & \bullet \arrow[ur, "p'"] \arrow[dr, "q'"] & & \bullet \arrow[r, dotted, "k"] & \bullet \\
 & & Y \arrow[ur, "s"] \arrow[urr, "s'"'] & &
\end{tikzcd}$$

Die Einschränkungen sind wohldefiniert, denn $1 : X \rightrightarrows X$ ist ein Kegel eines Kongruenzdiagramms, also ist $(1,1) \succ (p,q)$ und die Umkehrung haben wir oben gezeigt. □

3.29 Folgerung. *Sei ein Quadrat*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "r"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "p"] \arrow[r, "q"'] & \bullet \arrow[u, "s"']
\end{tikzcd}$$

gegeben. Dann sind äquivalent:

1. *Das Quadrat ist ein Doolittle Diagramm (auch kartesisches Quadrat genannt), d.h. zur gleichen Zeit PB als auch PO;*
2. *$(p,q) = PB(r,s)$ und (r,s) ist ein PO;*
3. *(p,q) ist ein PB und $(r,s) = PO(p,q)$.*

Beachte, daß dies nicht zu “(p, q) ist ein PB und (r, s) ist ein PO” äquivalent ist:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "0"] & 0 \\
X \arrow[u, "1"] \arrow[r, "1"'] & X \arrow[u, "0"']
\end{tikzcd}$$

Beweis. (1 $\Rightarrow$ 2, 3) ist offensichtlich.
(2 $\Rightarrow$ 1, analog 3 $\Rightarrow$ 1), denn PO und PB sind inverse Isomorphismen zwischen PB’s und PO’s, also folgt aus $(p, q) = PB(r, s)$, daß $(r, s) = PO(p, q)$. $\square$

3.30 Folgerung. *Sei ein Quadrat*

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "e"] & \bullet \\
\bullet \arrow[u, "p"] \arrow[r, "q"'] & \bullet \arrow[u, "e"']
\end{tikzcd}$$

gegeben. Dann sind äquivalent:

1. *Das Quadrat ist ein Doolittle Diagramm (kartesisches Quadrat), d.h. zur gleichen Zeit PB als auch PO;*
2. $(p, q) = PB(e, e)$ *und* e *ist regulärer Epi;*
3. (p, q) *ist eine Kongruenz und* $e = Coequ(p, q)$.

Beweis. Falls (p, q) eine Kongruenz ist, so gilt $(1, 1) \succ (p, q)$ und dann ist $e = Coequ(p, q)$ genau dann wenn $(e, e) = PO(p, q)$ ist. $\square$

3.31 Bemerkung. Homomorphiesatz. Falls Kongruenzen und Coegalisatoren existieren so können wir jeden Morphismus $f : X \to Y$ als $f = m \circ e$ faktorisieren, wobei e der Coegalisator von $\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2 : \sim \to X$ und $(\sim; \mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$ die durch f bestimmte Kongruenz ist. Offensichtlich ist e ein regulärer Epi. Die Frage ist, ob m ein Mono ist. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Zusammensetzung regulärer Epi’s wieder ein regulärer Epi ist.
($\Leftarrow$) Betrachte

$$\begin{tikzcd}
& & \bullet \\
\bullet \arrow[urr, "f"] \arrow[r, two heads, "e"'] & \bullet \arrow[ur, dotted, "m"] \arrow[r, dashed, two heads, "e'"'] & \bullet \arrow[u, "m'"'] \\
\sim \arrow[u, "\mathrm{pr}_1"] \arrow[r, "\mathrm{pr}_2"] & \bullet \arrow[u, two heads, "e"] \arrow[uur, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

wobei e' der Coegalisator zweier Morphismen α, β ist, die $m \circ \alpha = m \circ \beta$ erfüllen. Dann ist $e' \circ e$ ebenfalls Coegalisator von $(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$: In der Tat ist das Quadrat $(e' \circ e) \circ \mathrm{pr}_1 = (e' \circ e) \circ \mathrm{pr}_2$ ein Doolittlediagramm nach 3.30, denn $(\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_2)$ ist die Kongruenzrelation zu f und somit auch zu $e' \circ e$ und $e' \circ e$ ist ein regulärer Epi nach Voraussetzung. Somit ist e' ein Iso, also $\alpha = \beta$, d.h. m ein Mono.
($\Rightarrow$) Die Zusammensetzung $e_1 \circ e_2$ zweier regulärer Epi’s besitzt nach Voraussetzung eine (regulär-Epi,Mono)-Faktorisierung $m \circ e = e_1 \circ e_2$ und da e_2 ein starker Epi ist gibt es ein d mit $e_1 = m \circ d$ und da e_1 ein extremer Epis ist, ist m ein Iso, d.h. $e \cong e_1 \circ e_2$ ist ein regulärer Epi.

Obiges ist jedenfalls erfüllt, wenn das Pullback eines regulären Epi's ein Epi ist, denn dann betrachte man die folgenden sukzessiven Pullbacks

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, two heads, "e"] & \bullet \arrow[r, "m"] & \bullet \\
PB \arrow[u] \arrow[r, two heads] & PB \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u, "m"'] \\
PB \arrow[u, two heads] \arrow[ur, dotted, two heads] \arrow[r, two heads] & PB \arrow[u] \arrow[r] & \bullet \arrow[u, two heads, "e"']
\end{tikzcd}$$

Das äußerste beschreibt die Kongruenzrelation. Da die Diagonale als Zusammensetzung von Epi's ein Epi ist und $e \circ \mathrm{pr}_1 = e \circ \mathrm{pr}_2$ gilt folgt, daß die inneren Kanten des rechten oberen Pullbacks gleich sind, und somit m ein Mono ist (!).

Da Colimiten zumeist schwer berechenbar sind, versuchen wir nun diese auf eine andere Weise zu erhalten. Beachte dazu, daß in einem vollständigen Verband das Supremum auch als Minimum der oberen Schranken beschrieben werden kann.

Da in einer partiell geordneten Menge, das Supremum einer Teilmenge A mittels dem Infimum als $\sup A = \inf\{x : a \prec x \forall a \in A\}$ berechnet werden kann erhalten wir:

3.32 Theorem. *Es sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{C}$ besitzt beliebige Produkte;*
2. *$\mathcal{C}$ besitzt beliebige Coprodukte;*
3. *$\mathcal{C}$ ist vollständig (d.h. besitzt beliebige Limiten);*
4. *$\mathcal{C}$ ist covollständig (d.h. besitzt beliebige Colimiten);*
5. *$\mathcal{C}$ ist äquivalent zu einem vollständigen Verband.*

Proof. ($5 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$) und ($5 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2$) sind klar.

$\boxed{1} \Rightarrow \boxed{5}$ Wir zeigen zuerst, daß $\mathcal{C}(X, Y)$ höchstens ein Element haben kann: Seien nämlich $f_0 \neq f_1 : X \to Y$. Sei I die Kardinalität der Menge der Morphismen von $\mathcal{C}$. Für jede Teilmenge $A \subseteq I$ definieren wir einen Morphismus $f^A : X \to Y^I := \prod_{i \in I} Y$ durch

$$\mathrm{pr}_i \circ f^A := \begin{cases} f_0 & \text{für } i \notin A \\ f_1 & \text{für } i \in A \end{cases}$$

Diese Morphismen sind paarweise verschieden, denn aus $A_1 \neq A_2$ folgt die Existenz eines $i \in A_1 \cup A_2 \setminus A_1 \cap A_2$. Damit ist $\mathrm{pr}_i \circ f^{A_1} \neq \mathrm{pr}_i \circ f^{A_2}$, ein Widerspruch, denn $|2^I| > |I|$.

Wie wählen aus jeder Isomorphieklasse von Objekten von $\mathcal{C}$ genau eines aus und erhalten ein Skelett $\mathcal{C}_0$ von $\mathcal{C}$, eine volle äquivalente Teilkategorie. Diese ist partiell geordnet, denn aus der Existenz von Morphismen $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ folgt $g \circ f = 1$ und $f \circ g = 1$, also ist $X \cong Y$.

Die Ordnung ist vollständig, denn das Supremum einer Familie $\{X_i : i\}$ ist durch $\prod_i X_i$ gegeben.

$\boxed{2} \Rightarrow \boxed{5}$ folgt aus $\boxed{1} \Rightarrow \boxed{5}$ angewandt auf die duale Kategorie $\mathcal{C}^{op}$. □

Wir wollen nun versuchen ähnliche Ideen auf beliebige Kategorien zu übertragen. Dazu zuerst ein Satz über die Existenz von Coegalisatoren:

3.33 Proposition. *Es sei $\mathcal{C}$ vollständig, lokal klein und extrem colokal klein. Dann besitzt $\mathcal{C}$ Coegalisatoren.*

Beweis. Es seien zwei Morphismen $\alpha, \beta : X \to Y$ gegeben. Weiters sei $\{e_i : i \in I\}$ eine repräsentative Menge von extremen Epis mit $e_i \circ \alpha = e_i \circ \beta$. Nun nehmen wir den Morphismus $(e_i)_i : Y \to \prod_i \mathrm{cod}(e_i)$. Im allgemeinen wird $(e_i)_i$ leider kein Epi mehr sein, aber wir können eine extrem-Epi/Mono Faktorisierung $(e_i)_i = m \circ e$ nehmen, die, wie wir in 3.10.8 gezeigt haben, aus der Vollständigkeit und lokalen Kleinheit folgt. Wir behaupten, daß e der gesuchte Differenzcokern ist.

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[dr, "m"] & \\
X \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & Y \arrow[ur, "e"] \arrow[rr, "(e_i)_i"] \arrow[rrd, "e_i"] \arrow[dr, "e'"] \arrow[dd, "f"'] & & \prod_i Y_i \arrow[d, "\mathrm{pr}_i"] \\
 & & Z' \arrow[dl, "m'"] & Y_i \arrow[l, "\cong"] \\
 & \bullet & &
\end{tikzcd}$$

□

Um allgemeine Colimiten zu konstruieren benötigen wir einige Lemmatas, die initiale Objekte beschreiben:

3.34 Lemma. *Es sei $\mathcal{C}$ vollständig. Dann existiert ein initiales Objekt genau dann wenn eine initiale Menge von Objekten $\{A_i : i \in I\}$ existiert, d.h. für jedes Objekt A existiert ein $i \in I$ und ein Morphismus $A_i \to A$.*

Beweis. ($\Rightarrow$) ist offensichtlich. Wir benötigen nur eine einelementige Menge von Objekten.

($\Leftarrow$) Es sei $A_\infty \hookrightarrow \prod_i A_i$ der Egalisator aller Endo-Morphismen von $\prod_i A_i$. Wir behaupten, daß A_∞ initial ist. Sei also A ein beliebiges Objekt. Dann erhalten wir einen Morphismus $A_\infty \to \prod_i A_i \xrightarrow{\mathrm{pr}_j} A_j \to A$. Bleibt die Eindeutigkeit zu zeigen, d.h. seien $\alpha, \beta : A_\infty \to A$. Dann betrachten wir

$$\begin{tikzcd}
 & E(\alpha,\beta) \arrow[r, tail, "m"] & A_\infty \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] \arrow[d, tail, "\iota"] & A \\
A_\infty \arrow[r, hook, "\iota"] & \prod_i A_i \arrow[u, dotted, "h\ (1)"] \arrow[r, dotted, shift left, "(2)"] \arrow[r, shift right, "1"'] & \prod_i A_i &
\end{tikzcd}$$

(1) existiert, weil $\{A_i\}$ initial ist. Es ist $\iota \circ m \circ (1) \circ \iota = 1 \circ \iota = \iota \circ 1$, da ι Equalizer ist. Also $m \circ (1) \circ \iota = 1$, da ι Mono ist. Also ist m eine Retraktion, und somit ein Iso, d.h. $\alpha = \beta$. □

3.35 Definition. Ein Objekt S heißt SEPARATOR, wenn $\mathrm{Hom}(S, \_)$ treu ist. Allgemeiner versteht man unter einer SEPARATOR-MENGE eine Menge von Objekten S_i, so daß $\alpha = \beta$ aus $\mathcal{C}(S_i, \alpha) = \mathcal{C}(S_i, \beta)$ für alle i folgt. Falls das Produkt einer COSEPARATORMENGE $\{S_i : i \in I\}$ existiert und $\mathcal{C}(A, S_i) \neq \emptyset \forall A$, so ist offensichtlich $S := \prod_i S_i$ ein COSEPARATOR.

Beispiel. Beispiele von Separatoren sind: $\{*\}$ in *Set* und in *Top*, $\mathbb{N}$ in *Monoid* $\mathbb{Z}$ in *Gru* und $\mathbb{K}$ in *K-Vekt*.

Beispiele von Coseparatoren sind: In *Set* genau die mindestens zwei-elementigen Mengen, in *Monoid*, *Gru*, *Ring* und *Körp* existieren sie nicht (da beliebige große einfache (alternierende) Gruppen bzw. Körper existieren), in *Abel* ist $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ oder auch S^1 einer (letzterer auch in *lkpAGru*), in *Top* ist $\{0,1\}$ indiskret einer, *Haus* besitzt keinen (da zu jedem Hausdorffraum X eine regulärer Raum Y existiert, s.d. die einzigen stetigen Abbildungen $Y \to X$ die konstanten sind), in *Komp* ist $[0,1]$ einer, in $T_{3\frac{1}{2}}$ ist $\mathbb{R}$ einer, in *K-Vekt*, *TVR*, *LKV* und in *Ban*$_1$ ist $\mathbb{K}$ einer.

3.36 Lemma. *Es sei $\mathcal{C}$ vollständig, lokal klein und eine Coseparator-Menge existiere. Dann existiert ein initiales Objekt in $\mathcal{C}$.*

Beweis. Es sei $S := \prod_i S_i$ und $\mathcal{M}$ eine repräsentative Menge von Monos mit Werten in S. Wir behaupten, $\{\operatorname{dom} m : m \in \mathcal{M}\}$ ist eine initiale Teilmenge. Sei also A beliebig. Wir bilden das Produkt $\prod_f \operatorname{cod} f$ über alle Morphismen von A in ein S_i. Dann existiert ein wohlbestimmter Morphismus (1)$= m$ mit

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \operatorname{cod} f = S_i \\
\bullet \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & A \arrow[rrru, bend left, "f"] \arrow[r, tail, dotted, "(1)", "m"'] & \prod_f \operatorname{cod} f \arrow[rru, "\mathrm{pr}_f"] & & \\
 & & PB \arrow[ul, dotted, "(3)"] \arrow[rr, tail, dotted, "m'", "(3)"'] & & S = \prod_i S_i \arrow[uu, "\mathrm{pr}_{\operatorname{cod} f}"'] \arrow[llu, dotted, "(2)"'] \\
 & & \operatorname{dom} m'' \arrow[u, "\cong"] \arrow[rru, "m''"'] & &
\end{tikzcd}$$

Es ist m ein Monomorphismus, denn $m \circ \alpha = m \circ \beta$ hat $f \circ \alpha = f \circ \beta$ für alle $f : A \to S_i$ zur Folge und somit $\alpha = \beta$, da die $\{S_i : i \in I\}$ eine Coseparatormenge bilden. Und somit auch m' ein Mono als Pullback nach 3.7, wobei PB das Pullback bezeichnet. Also existiert ein repräsentierendes $m'' \in \mathcal{M}$ und wir erhalten den gewünschten Morphismus $\operatorname{dom} m'' \to A$. □

3.37 Proposition. *Es sei $\mathcal{C}$ vollständig, lokal klein und eine Coseparator-Menge existiere. Dann ist $\mathcal{C}$ covollständig.*

Beweis. Sei $X : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ ein Diagramm. Ein Colimes von X ist ein initiales Objekt in $\operatorname{Cokeg}(X)$. Die Abbildung Spitze : $\operatorname{Cokeg}(X) \to \mathcal{C}$ ist offensichtlich ein treuer Funktor. Sie erzeugt Limiten, d.h. wenn $Y : \mathcal{I} \to \operatorname{Cokeg}(X)$ ein Diagramm ist und $\lim(\text{Spitze} \circ Y)$ der Limes des Bildes in $\mathcal{C}$ ist. Dann existiert auch $\lim Y$ und $\text{Spitze}(\lim Y) = \lim(\text{Spitze} \circ Y)$. In der Tat können wir das Objekt $\lim(\text{Spitze} \circ Y)$ zu eine Cokegel von X ergänzen:

$$\begin{tikzcd}
 & X_j \arrow[r, "X_g"] \arrow[ld, dotted] \arrow[d, "f^i_j"] \arrow[rd] & X_{j'} \arrow[lld, dotted] \arrow[ld] \arrow[d] \\
\lim(\text{Spitze} \circ \text{Y}) \arrow[r] \arrow[rr] & Y_i \arrow[r, "Y_f"'] & Y_{i'}
\end{tikzcd}$$

Also ist $\operatorname{Cokeg}(X)$ vollständig.

Als Coseparatormenge können wir alle Cokegeln verwenden, die ihre Spitze in der Coseparatormenge von $\mathcal{C}$ haben, den mittels jedes Morphismuses f von der Sitze eines Cokegels in eine Coseparatormenge können wir einen Cokegel mit dieser Spitze durch Zusammensetzen machen.

Für die repräsentative Menge von Monos können wir analog vorgehen, denn "Spitze" erhält Pullbacks und somit Mono's nach 3.10 und reflektiert sie auch, da dieser Funktor treu ist. □

3.38 Vertauschbarkeit von Limiten und Colimiten

Es seinen $\mathcal{I}$ und $\mathcal{J}$ kleine Kategorien und $F : \mathcal{I} \times \mathcal{J} \to \underline{Set}$ ein Funktor für welchen sowohl $\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} \lim_{\mathcal{J}} F$ als auch $\lim_{\mathcal{J}} \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F$ existiert. Dann erhalten wir einen Morphismus $\operatorname{colim}_{\mathcal{I}} \lim_{\mathcal{J}} F \to \lim_{\mathcal{J}} \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F$ durch folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd}
 & & & j \arrow[r, "g"] & j' \\
i \arrow[d, "f"] & & \lim_{\mathcal{J}} F(i,_) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dl] & F(i,j) \arrow[r, "F(i,g)"] \arrow[d, "F(f,j)"'] & F(i,j') \arrow[d, "F(f,j')"] \\
i' & & \lim_{\mathcal{J}} F(i',_) \arrow[r] \arrow[dl] \arrow[dd, dotted, "(1)"] & F(i',j) \arrow[r, "F(i',g)"'] \arrow[d] & F(i',j') \arrow[d] \\
 & \operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}} \lim_{j\in\mathcal{J}} F(i,j) \arrow[rr, dotted, "(1)"] \arrow[dr, dotted, "(2)"] & & \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F(_,j) \arrow[r] & \operatorname{colim}_{\mathcal{I}} F(_,j') \\
 & & \lim_{j\in\mathcal{J}} \operatorname{colim}_{i\in\mathcal{I}} F(i,j) \arrow[ur] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

Die Frage ist, ob dies ein Isomorphismus ist.

3.39 Beispiele, daß Produkte und Coprodukte nicht vertauschen.
Wir haben in $\underline{Set}$ folgende assoziativ und distributiv Gesetze:

$$\bigcup_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} X_{i,j} = \bigcup_{(i,j)\in J:=\mathrm{pr}_1^{-1}(\prod_{i\in I} J_i)} X_{i,j} = \bigcup_{j\in\prod_{i\in I} J_i} \bigcup_{i\in I} X_{i,j(i)}$$

$$\bigcap_{i\in I} \bigcap_{j\in J_i} X_{i,j} = \bigcap_{(i,j)\in J:=\mathrm{pr}_1^{-1}(\prod_{i\in I} J_i)} X_{i,j} = \bigcap_{j\in\prod_{i\in I} J_i} \bigcap_{i\in I} X_{i,j(i)}$$

$$\prod_{i\in I} \prod_{j\in J_i} X_{i,j} \cong \prod_{(i,j)\in J:=\mathrm{pr}_1^{-1}(\prod_{i\in I} J_i)} X_{i,j} \ncong \prod_{j\in\prod_{i\in I} J_i} \prod_{i\in I} X_{i,j(i)}$$

$$\bigcup_{i\in I} \bigcap_{j\in J_i} X_{i,j} = \bigcap_{j\in\prod_{i\in I} J_i} \bigcup_{i\in I} X_{i,j(i)}$$

$$\bigcap_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} X_{i,j} = \bigcup_{j\in\prod_{i\in I} J_i} \bigcap_{i\in I} X_{i,j(i)}$$

$$\prod_{i\in I} \bigcup_{j\in J_i} X_{i,j} = \bigcup_{j\in\prod_{i\in I} J_i} \prod_{i\in I} X_{i,j(i)}$$

$$\prod_{i\in I} \bigcap_{j\in J_i} X_{i,j} = \bigcap_{j\in\prod_{i\in I} J_i} \prod_{i\in I} X_{i,j(i)}$$

Dabei gilt das $\not\cong$ aus Kardinalitätsgründen (setze $I = 2 = J_i$). Insbesonders gilt wegen

$$(A_1 \sqcup A_2) \times (B_1 \sqcup B_2) = (A_1 \times B_1) \sqcup (A_1 \times B_2) \sqcup (A_2 \times B_1) \sqcup (A_2 \times B_2) \supset \\ \supset (A_1 \times B_1) \sqcup (A_2 \times B_2)$$

daß in $\underline{Set}$ endliche Produkte nicht mit endlichen Coprodukten kommutieren.

In einer semiadditiven Kategorie hingegen kommutieren endlich Produkte mit endlichen Coprodukten, da sie übereinstimmen und sowohl Produkte als auch Coprodukte untereinander kommutieren.

Für abzählbare stimmt das hingegen nicht, denn sei $E^{\mathbb{N}} = \varprojlim_N E^N$ das Produkt abzählbar vieler Kopien von E und $E^{(\mathbb{N})} = \varinjlim_N E^N$ das Coprodukt abzählbar vieler Kopien von E. Dann ist $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{(\mathbb{N})} \not\cong (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})^{\mathbb{N}}$, siehe [**16**, S.333].

Dies zeigt gleichzeitig, daß weder projektive abzählbare Limiten mit induktive abzählbaren Colimiten noch mit abzählbaren Coprodukten noch induktive abzählbare Colimiten mit abzählbaren Produkten vertauschen.

Beachte aber, daß $(\_) \times X$ costetig ist für jede kartesisch abgeschlossene Kategorie, wie auch $\bigcap$ und $\bigcup$ als links adjungierte, siehe unten.

3.40 Bemerkung. In $\underline{Set}$ (und damit auch in vielen anderen algebraischen Kategorien) kommutieren induktive Limiten und endliche Limiten.

Wir zeigen dies zuerst für terminale Objekte, i.e. $\mathcal{J} = \emptyset$:
Dann ist $\mathcal{I} \times \mathcal{J} = \emptyset$ und somit $\lim_{j\in\mathcal{J}} \varinjlim_{i\in\mathcal{I}} F(i,j)$ sowie $\lim_{j\in\mathcal{J}} F(i,j)$ für alle i terminal, also auch $\varinjlim_{i\in\mathcal{I}} \lim_{j\in\mathcal{J}} F(i,j)$.

Als nächstes für zweifache Produkte:
Dann ist $\varinjlim_{i\in\mathcal{I}} F(i,j) = (\bigsqcup_i F(i,j))/\sim_j$, wobei für $z \in F(i,j)$ und $z' \in F(i',j)$ folgendes gilt:

$$z \sim_j z' \Leftrightarrow \exists i'' \prec i, i' : F(i \to i'', j)(z) = F(i' \to i'', j)(z').$$

Weiters ist $\varinjlim_{i\in\mathcal{I}} \prod_{j=1}^2 F(i,j) = (\bigsqcup_i F(i,1) \times F(i,2))/\sim$, wobei für $(x,y) \in F(i,1) \times F(i,2)$ und $(x',y') \in F(i',1) \times F(i',2)$ folgendes gilt:

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow \exists i'' \prec i, i' : \Big(\prod_{j=1}^2 F(i \to i'', j)\Big)(x,y) = \Big(\prod_{j=1}^2 F(i' \to i'', j)\Big)(x',y').$$

Die kanonische Abbildung ist

$$\varinjlim_{i\in\mathcal{I}} \prod_{j=1}^2 F(i,j) \to \prod_{j=1}^2 \varinjlim_{i\in\mathcal{I}} F(i,j), \quad [(x,y)]_\sim \mapsto ([x]_{\sim_1}, [y]_{\sim_2}).$$

Sie ist surjektiv: Sei also $([x]_{\sim_1}, [y]_{\sim_2}) \in \varinjlim_{i\in\mathcal{I}} F(i,1) \times \varinjlim_{i\in\mathcal{I}} F(i,2)$, d.h. $x \in F(i,1)$ und $y \in F(i',2)$ für gewisse i und i'. Dann existiert ein $i, i' \succ i''$ und wir setzen $x' := F(i \to i'', 1)(x) \in F(i'', 1)$ und $y' := F(i' \to i'', 2) \in F(i'', 2)$. Dann wird $[(x',y')]$ auf $([x'],[y']) = ([x],[y])$ abgebildet.
Sie ist auch injektiv, denn wenn $[x]_{\sim_1} = [x']_{\sim_1}$ und $[y]_{\sim_2} = [y']_{\sim_2}$ mit $(x,y) \in F(i,1) \times F(i,2)$ und $(x',y') \in F(i',1) \times F(i',2)$, dann existiert ein $i'' \prec i, i'$ mit $F(i \to i'', 1)(x) = F(i' \to i'', 1)(x')$ und ähnlich ein i''' für y und y'. Sei schließlich $i'', i''' \succ i''''$, dann erhalten wir, daß $[(x,y)]_\sim = [(x',y')]_\sim$.

Wir zeigen als nächstes, daß direkte Limiten von Mono's wieder Mono's sind:
Sei also $\varphi : F \to G$ eine natürliche Transformation zwischen zwei Funktoren $F, G : \mathcal{I} \to \underline{SET}$ welche aus injektiven Abbildungen besteht. Dann ist $\varinjlim_i \varphi_i : \varinjlim F \to$

$\varinjlim G$ injektiv, denn sei $(\varinjlim_i \varphi_i)([x]) = (\varinjlim_i \varphi_i)([x'])$ mit $x \in F(i)$ und $x' \in F(i')$. Dann ist $[\varphi_i(x_i)] = [\varphi_{i'}(x_{i'})]$ und somit existiert ein $i'' \prec i, i'$ mit $\varphi_{i''}(F(i \to i'')(x_i)) = G(i \to i'')(\varphi_i(x_i)) = G(i' \to i'')(\varphi_{i'}(x_{i'})) = \varphi_{i''}(F(i' \to i'')(x_{i'}))$ und da $\varphi_{i''}$ injektiv vorausgesetzt ist, ist $F(i \to i'')(x_i) = F(i' \to i'')(x_{i'})$ also $[x] = [x']$.

Nun zeigen wir die Vertauschbarkeit mit Pullbacks von $F(i,1) \to F(i,0) \leftarrow F(i,2)$: Da die Pullbacks Teilräume der entsprechenden Produkte sind und auch ihr direkter Limes ein Teilraum des direkten Limes dieser Produkte ist, genügt es zu zeigen, daß die induzierte Abbildung zwischen diesen Teilräumen surjektiv ist. Sei also $([x]_\sim, [y]_\sim)$ ein Element des Pullbacks, und wir dürfen annehmen, daß $x \in F(i,1)$ und $y \in F(i,2)$. Es ist also $[F(i, 1 \to 0)(x)] = [F(i, 2 \to 0)(y)]$, d.h. ein $i \succ i''$ existiert mit $F(i \to i'', 1 \to 0)(x) = F(i \to i'', 2 \to 0)(y)$. Also ist $(x', y') := (F(i \to i'', 1)(x), F(i \to i'', 2)(x))$ im Pullback von $F(i'', 1 \to 0)$ mit $F(i'', 2 \to 0)$ und somit $[(x', y')]_\sim \in \varinjlim_{i \in \mathcal{I}} \lim_{j \in \mathcal{J}} F(i,j)$. Da $([x'], [y']) = ([x], [y])$ sind wir fertig.

Weiters vertauschen projektive Limiten und endliche Coprodukte: Die kanonische Abbildung von

$$h : (\varprojlim X_i) \sqcup (\varprojlim Y_i) \to \varprojlim (X_i \sqcup Y_i)$$

hat offensichtlich disjunkte Bilder auf den beiden Summanden und die beiden Summanden sind injektiv eingebettet als projektiver Limes von Injektionen. Sie ist auch surjektiv, denn o.B.d.A. hat I ein maximales Element i_0 und wenn $(z_i)_i$ ein Faden in $\varprojlim (X_i \sqcup Y_i)$ ist mit $z_{i_0} \in X_{i_0}$, so ist $z_i \in X_i$ für alle $i \succ i_0$ und damit $(z_i)_i$ ein Faden in $\varprojlim X_i$ der durch h auf sich abgebildet wird.

3.41 Bemerkung. Projektive Limiten und endliche Colimiten vertauschen nicht.

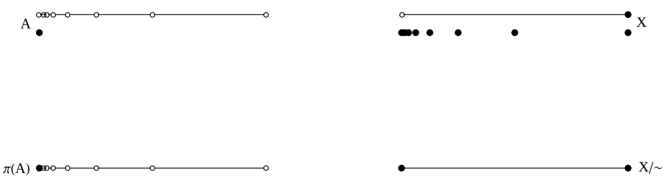
$$\begin{tikzcd}
p^n\mathbb{Z} \arrow[r, hook] & \mathbb{Z} \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \\
p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & \mathbb{Z} \arrow[u, equal] \arrow[r, two heads] & \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[u] & \\
& \varprojlim_n p^n\mathbb{Z} \arrow[ul] \arrow[uul] \arrow[r, dotted, "(1)"] \arrow[d, equal] & \varprojlim_n \mathbb{Z} \arrow[ul] \arrow[uul] \arrow[d, equal] & \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[ul, "q_{n+1}"] \arrow[uul, "q_n"'] \\
\{0\} \arrow[r, equal] & \bigcap_n p^n\mathbb{Z} \arrow[r, dotted, "(1)"] & \mathbb{Z} \arrow[r, dotted, two heads, "(2)"] & \mathbb{Z} \arrow[u, dotted, "(3)"', "h"]
\end{tikzcd}$$

Es ist $\varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ der Ring der p-adischen Zahlen. Dieser Ring ist überabzählbar, denn seine Elemente (=Fäden) stehen in Bijektion zu Folgen $(x_k)_{k \geq 0}$ in $\{0, \dots, p-1\}^{\mathbb{N}}$ vermöge $(x_k)_k \mapsto (\sum_{k<n} x_k \cdot p^k + p^n\mathbb{Z})_n$. Also kann h nicht surjektiv sein. Beachte das dieses Beispiel auch in *HGru*, *Mon*, *Gru*, *AGru* und *Ring* funktioniert.

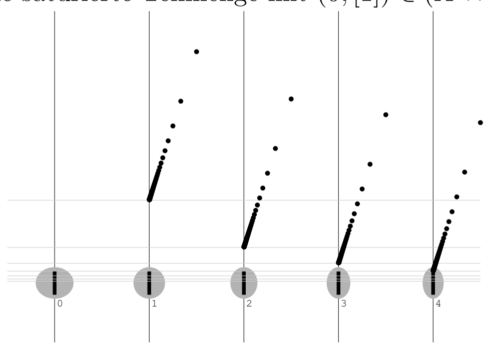
3.43 Nichtstabilität von Epi's unter Limiten. Wir haben in 3.31 gesehen, daß es hilfreich wäre, wenn das Pullback, das Produkt und projektive Limiten von Epi's wieder Epi's wären. In *Set* stimmt das für Pullbacks und Produkte schon, weil die Epi's genau die Retraktionen sind, und Retraktionen nach 3.8.1 und 3.5.3 erhalten bleiben. Also stimmt es auch in jeder konkreten Kategorie wo der Vergißfunktor die entsprechenden Limiten und Epi's erhält.

Andererseits haben wir für PB's von Epi's folgende beiden Gegenbeispiele:
In *Haus* sei $X \subseteq Y$ dicht und $y \in Y \setminus X$. Dann ist das inverse Bild von $\{y\}$ unter der Inklusion $X \subseteq Y$ die leere Menge und die Einschränkung der Inklusion von $\emptyset \to \{y\}$ nicht dicht.

In *Haus* haben wir auch eine Gegenbeispiel für inverse Bilder längs starke Epi's (=Quotientenabbildungen):
Sei $X = (0, \frac{1}{2}] \sqcup \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots; 0\}$, $A := (0, \frac{1}{2}] \setminus \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} \sqcup \{0\}$ und $\sim$ erzeugt von $(x, 0) \sim (x, 1)$. Dann ist die Einschränkung der Quotientenabbildung $\pi : X \to X/\sim$ auf die saturierte Menge A keine Quotientenabbildung nach $\pi[A]$, da sie bijektiv ist und $\{0\}$ isoliert in A und somit in $A/\sim$ aber nicht in $\pi[A]$ mit der Spurtopologie ist.



Für Produkte von (starken) Epi's haben wir folgende Situation:
Das Produkt von dichten Abbildungen ist dicht, aber das (2-fache) Produkt von Quotientenabbildungen nicht notwendig eine Quotientenabbildung:
Wir erinnern uns dazu, daß ein Kelley-Raum, ein Hausdorffraum X ist, welcher die finale Topologie bezüglich seiner kompakten Teilmengen trägt, oder anders ausgedrückt $X = \varinjlim_{K \subseteq X} K$, d.h. $\bigsqcup_{K \subseteq X} K \to X$ ist eine Quotientenabbildung.
Für zwei Kelley-Räume X und Y ist somit $\bigsqcup_{K,L} K \times L \to X \times Y$ genau dann eine Quotientenabbildung, wenn $X \times Y$ ein Kelley-Raum ist. Beachte, daß $\bigsqcup_{K,L} K \times L \to X \times \bigsqcup_L L$ eine Quotientenabbildung ist ($\bigsqcup_L L$ ist lokalkompakt, oder auch L ist kompakt und $(\_) \times L$ erhält Coprodukte). Somit müßte nur $X \times \pi_Y : X \times \bigsqcup_L L \to X \times Y$ eine sein.
($\Leftarrow$) ist nach obengesagten offensichtlich, da die $K \times L$ eine Basis der kompakten Mengen bilden.
($\Rightarrow$) gilt, da Quotienten von Kelleyräumen wieder Kelly sind.
Ein Beispiel dafür ist: $X = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$ und $Y := X/\mathbb{N}$. Dann ist $X \times \pi : X \times X \to X \times Y$ keine Quotientenabbildung, denn $F := \{(\frac{1}{i} + \frac{\pi}{j}, i + \frac{1}{j}) : i, j = 2, 3, \dots\}$ ist eine abgeschlossene saturierte Teilmenge mit $(0, [1]) \in \overline{(X \times \pi)(F)} \setminus (X \times \pi)(F)$.



Ein anderes Beispiel ist der Raum der formalen Laurent-Reihen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. In der Tat $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist metrisierbar, also Folgen-erzeugt und somit auch kompakt erzeugt (er trägt sogar die c^∞-Topologie). $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})} = \varinjlim_{N \in \mathbb{N}} \mathbb{R}^N$, wobei es für die Topologie egal ist ob wir diesen Limes in *Top* oder in *LKV* bilden. Sei nämlich $U \subseteq$ *Top*-$\varinjlim_N \mathbb{R}^N$ offen. Dann können wir rekursiv $\varepsilon_n > 0$, s.d. die konvexe 0-Umgebung $\{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} : |x_n| \leq \varepsilon_n\}$ in U enthalten ist (Benutze, daß $\{(x_n)_{n \leq N} : |x_n| \leq \varepsilon_n\}$ kompakt ist). Als induktiver Limes lokalkompakter Räume ist also auch $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ein Kelley-Raum

(trägt sogar die c^∞-Topologie).
Das Produkt $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ist aber nicht Kelley: Sei nämlich $A := \{(ne_k, \frac{1}{n}e_k) : n, k \in \mathbb{N}\}$. Dann ist $A \cap K$ abgeschlossen für alle kompakten $K \subseteq E$, denn solche sind in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{R}^N \cong \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ enthalten, somit metrisierbar, und aus $(n_i e_{k_i}, \frac{1}{n_i} e_{k_i}) \to (x, y)$ in K folgt daß $i \mapsto k_i$ beschränkt also o.B.d.A. konstant ist und somit auch $i \mapsto n_i$ es ist. Andererseits ist aber A nicht abgeschlossen, denn in der 0-Umgebung $U = \{(x_k)_{k\in\mathbb{Z}} \in E : |x_k| \le \varepsilon_k \text{ for } k > K\}$ liegt $(ne_K, \frac{1}{n}e_K)$ für $n > \frac{1}{\varepsilon_K}$.
Es trägt also $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ die finale Topologie bzgl. der Inklusionen $\mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ aber $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ tut es nicht bzgl. der Inklusionen $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^N \hookrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$. Es ist also $\bigsqcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ eine Quotientenabbildung, ihr Produkt mit $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ aber nicht. Wegen

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \bigsqcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^N \cong \bigsqcup_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^N$$

zeigt dies auch, daß es nicht egal ist ob der Limes $\varinjlim_{N\in\mathbb{N}} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{R}^N$ in $\underline{Top}$ oder in $\underline{LKV}$ gebildet wird.
Hingegen ist in $\underline{LKV}$ das Produkt von Quotientenabbildungen wieder eine Quotientenabbildung, denn diese sind offen nach [**19**, 4.5]: Sei dazu $y = (y_\alpha)_\alpha \in (\prod_\alpha \pi_\alpha)(U)$, wobei $U \subseteq \prod_\alpha F_\alpha$ offen ist. Dann existiert ein Punkt $x = (x_\alpha)_\alpha \in U \cap \prod_\alpha (\pi_\alpha)^{-1}(y_\alpha)$ und somit offene Umgebungen U_α von x_α mit $U_\alpha = E_\alpha$ für fast alle α und mit $\prod_\alpha U_\alpha \subseteq U$. Folglich ist $\prod_\alpha \pi(U_\alpha)$ eine offene Umgebung von y in $(\prod_\alpha \pi_\alpha)(U)$, d.h. letztere Menge ist offen.

3.44 Projektive Limiten von Epi's

Dual zur Aussage, daß induktive Limiten $\varinjlim_i \varphi_i$ von Mono's in $\underline{Set}$ Mono's sind wollen wir nun Situationen studieren, wo $\varprojlim_i \varphi_i$ ein Epis ist und setzen dazu voraus, daß alle Komponenten φ_i Epi's sind:

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[rr, "F_{i,i'}"] \arrow[dd, "\varphi_i"'] & & F(i') \arrow[dd, "\varphi_{i'}"] \\
& \varprojlim F \arrow[ul, "p_i"] \arrow[ur, "p_{i'}"'] \arrow[dl, dotted, "h_i"] \arrow[dr, dotted, "h_{i'}"'] \arrow[dd, dotted, "\varprojlim_i \varphi_i"] & \\
G(i) \arrow[rr, "G_{i,i'}"'] & & G(i') \\
& \varprojlim G \arrow[ul, "q_i"] \arrow[ur, "q_{i'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Ein Spezialfall davon ist ein Kegel $(X, (h_i)_i)$ von G (aufgefaßt als natürlichen Transformation des konstanten Funktors X nach G), der aus lauter Epi's h_i besteht. Und die Frage ist dann ob die induzierte Abbildung $(h_i)_i : X \to \varprojlim G$ ebenfalls ein Epi ist. Es ist dazu notwendig, daß die Projektionen $q_i : \varprojlim G \to G(i)$ alle Epi's sind. Ein solcher projektiver Limes heißt reduzierter projektiver Limes.

Falls wir für einen (reduzierten) projektiven Limes den Spezialfall positiv beantworten können, so folgt daraus auch der allgemeine Fall für reduzierte projektive

Limiten von F, denn:

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[rr, "F_{i,i'}"] \arrow[dd, "\varphi_i"'] & & F(i') \arrow[dd, "\varphi_{i'}"] \\
& \varprojlim F \arrow[ul, "p_i"'] \arrow[ur, "p_{i'}"] \arrow[dl, dotted] \arrow[dr, dotted] \arrow[dd, dotted, "\varprojlim_i \varphi_i"] & \\
G(i) \arrow[rr, "G_{i,i'}"'] & & G(i') \\
& \varprojlim G \arrow[ul, "q_i"] \arrow[ur, "q_{i'}"'] &
\end{tikzcd}$$

3.45 Bemerkung. Falls (Epi,stark-Mono)-Faktorisierungen in der Kategorie $\mathcal{C}$ existieren, so kann jeder projektive Limes als reduzierter projektiver Limes dargestellt werden: (1) wird durch die Faktorisierung gegeben und (2), weil $(1) : F_0(i') \to F(i')$ ein starker Mono ist:

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[rr, "F_{i,i'}"] & & F(i') \\
& \varprojlim F = \varprojlim F_0 \arrow[ul, "f_i"] \arrow[ur, "f_{i'}"'] \arrow[dl, dotted, "(1)"] \arrow[dr, dotted, "(1)"] & \\
F_0(i) \arrow[uu, dotted, "(1)"] \arrow[rr, dotted, "(2)"] & & F_0(i') \arrow[uu, dotted, "(1)"']
\end{tikzcd}$$

$\varprojlim F = \varprojlim F_0$: Falls $F, G : (I, \succ) \to \mathcal{C}$ zwei Funktoren sind und $\mu : F \to G$ eine natürliche Transformation bestehend aus lauter Mono's, und falls ein Kegel über F zusammengesetzt mit μ ein Limes von G ist, so ist er auch ein Limes von F:

$$\begin{tikzcd}
F(i) \arrow[rr, "F_{i,i'}"] \arrow[dd, tail, "\mu_i"'] & & F(i) \arrow[dd, tail, "\mu_{i'}"] \\
& X \arrow[ul, "p_i"] \arrow[ur, "p_{i'}"'] \arrow[dl, "q_i"'] \arrow[dr, "q_{i'}"] & \\
G(i) \arrow[rr, "G_{i,i'}"'] & & G(i')
\end{tikzcd}$$

3.46 Reduzierte projektive Limiten

Es sei $\varprojlim F \xrightarrow{p_i} F(i)$ ein reduzierter projektiver Limes. Beachte daß dann auch die verbindenden Abbildungen $F_{i,i'}$ für $i \succ i'$ ebenfalls Epi's sind.

Umgekehrt: Falls wir den Limes $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} F(n)$ einer Folge von surjektiven Abbildungen $f_n : F(n) \to F(n-1)$ vorliegen haben, so sind die Projektionen $p_n : \varprojlim F \to F(n)$ surjektiv (also $\varprojlim F$ ein reduzierter projektiver Limes), denn wir können für jedes $x_n \in F(n)$ rekursiv x_k mit $k > n$ und $f_k(x_k) := x_{k-1}$ definieren und durch $x_{k-1} := f_k(x_k)$ für $k \le n$ ergänzen. Dann ist $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Faden, der durch p_k auf x_k abgebildet wird.

Falls I überabzählbar ist, so gilt dies nicht mehr allgemein: Sei S überabzählbar, und I die Menge der endlichen Teilmengen $i \subseteq S$, durch $\supseteq$ geordnet. Sei $F(i)$ die Menge der injektiven Abbildungen von $i \to \mathbb{N}$ und $F(i \geq i') : F(i) \to F(i')$ die surjektive Einschränkungsabbildung. Dann ist $\varprojlim_{i\in I} F(i) = \emptyset$, denn wenn $(X, (f_i)_i)$ ein Kegel ist, dann ist $X = \emptyset$, andernfalls wären $f_i(x) : i \to \mathbb{N}$ injektive Abbildungen, die zusammenpassen und somit eine eindeutige (injektive) Abbildung $f : \bigcup_i = S \to \mathbb{N}$ definieren. Das ist aber unmöglich.

Leider induziert aber ein Kegel von Epimorphismen in eine reduzierte Folge in $\underline{Set}$ nicht immer einen Epimorphismus in den projektiven Limes. Beachte dazu den Ring $\varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ der p-adischen Zahlen aus 3.41 und die kanonische Abbildung $\mathbb{Z} \to \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, die aus Kardinaliätsgründen nicht surjektiv ist.

In $\underline{Komp}$ ist der projektive Limes nicht-leerer Räume ebenfalls nicht leer (und insbesonders gilt das für projektive Limiten in $\underline{Set}$ von nicht-leeren endlichen Mengen): Für $i \in I$ sei $A_i := \{(x_j)_j \in \prod_j F(j) : F(i \geq j)(x_j) = x_i \text{ für alle } i \geq j\}$. Dann ist $A_i \neq \emptyset$ (wähle $x_j \in F(j)$ für $i \not\geq j$ beliebig) und kompakt (da abgeschlossen). Für $i \leq i'$ ist $A_i \supseteq A_{i'}$ und somit hat $\{A_i : i \in I\}$ die endliche Durchschnittseigenschaft, also nicht leeren Durchschnitt $\bigcap_{i\in I} A_i = \varprojlim_i F(i)$ im kompakten Raum $\prod_i F(i)$.

Falls in diesem Fall zusätzlich die verbindenden Abbildungen alle surjektiv sind, so auch die Projektionen $\mathrm{pr}_i : \varprojlim F \to F(i)$, denn andernfalls sei $x_0 \in F(i_0) \setminus \mathrm{pr}_{i_0}(\varprojlim F)$ und für $i \geq i_0$ sei $A(i) := F(i \geq i_0)^{-1}(x_{i_0})$. Nach obigen existiert ein $(x_i)_i \in \varprojlim_{i\geq i_0} A(i)$. Wir erweitern dies auf alle i durch $x_i := F(i' \geq i)(x_{i'})$ nach Wahl eines $i' \geq i, i_0$. Wegen der Gerichtetheit hängt x_i nicht von i' ab und definiert ein Element $x \in \varprojlim F$ mit $\mathrm{pr}_{i_0}(x) = x_0$, ein Widerspruch.

In $\underline{Haus}$ hingegen, hat jeder reduzierte projektive Limes die gewünschte Eigenschaft: Wenn alle $f_i : X \to F(i)$ dichtes Bild haben, so auch $(f_i) : X \to \varprojlim_i F(i)$, denn eine (!)Basis der Topologie von $\varprojlim_i F(i)$ ist durch alle Urbilder unter den p_i von Basen in $F(i)$ gegeben. Sei also $y = (y_i) \in \varprojlim_i F(i)$ und $U \subseteq F(i_0)$ offen mit $y \in (p_{i_0})^{-1}(U)$, d.h. $y_{i_0} \in U$. Dann existiert wegen der Dichtheit von $f_{i_0}[X]$ ein $x \in X$ mit $p_{i_0}((f_i)_i(x)) = f_i(x) \in U$. Also ist $(f_i)_i(x) \in p_{i_0}^{-1}(U)$ und hat somit dichtes Bild.

Man erhält daraus auch den entsprechenden Satz für $\underline{LKV}$ und dieser hat folgende Konsequenz (siehe [20, 3.24]): Es sei E ein lokalkonvexer Vektorraum und $\mathcal{P}$ eine Basis von Seminormen. Dann können wir für jedes $p \in \mathcal{P}$ den Raum $E_p := E/\operatorname{Ker}(p)$ mit der von p induzierten Norm $\tilde{p}$ betrachten. Offensichtlich trägt E die initiale Struktur bezüglich der Projektionen $E \to E_p$ diese Projektionen sind surjektiv und bilden einen Kegel des projektiven Systems E_p mit $p \succ p' :\Leftrightarrow p(x) \geq p(x')\forall x$. Wir erhalten also eine Einbettung (benutze in $\underline{Top}$, daß der Limes von starken Monos ein starker Mono ist).
Diese ist im allgemeinen nicht surjektiv. Sei z.B. E der Raum der endlichen Folgen in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ mit den üblichen Seminormen $p_n : x \mapsto \max_{i\leq n} |x_i|$. Dann ist $E_{p_n} = \mathbb{R}^n$ und $\varprojlim_{n\in NN} E_{p_n} = \varprojlim \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ und somit nicht E.
Falls wir nun alle E_p vervollständigen, so erhalten wir ebenfalls ein projektives System und mit den gleichen Argumenten eine Einbettung von E in $\varprojlim_{p\in\mathcal{P}} \widehat{E_p}$. Da alle Projektionen $E \twoheadrightarrow E_p \hookrightarrow \widehat{E_p}$ dichtes Bild haben gilt das auch für die Einbettung $E \to \varprojlim_{p\in\mathcal{P}} \widehat{E_p}$ und da eine projektiver Limes vollständiger Räume vollständig ist, ist jedes vollständige E auf diese Art als Limes beschreibbar.

Vertauschbarkeit von Limiten mit Colimiten in $\underline{Set}$

	$\varprojlim$	$\prod$	$\times$	PB	Eq
$\varinjlim$	$-\boxed{1}$	$-\boxed{1}$	$+\boxed{3.40}$	$+\boxed{3.40}$	$+\boxed{3.40}$
$\coprod$	$-\boxed{1}$	$-\boxed{2}$	$-\boxed{2}$	$-\boxed{2}$	$+\boxed{4}$
$\sqcup$	$+\boxed{3.40}$	$-\boxed{2}$	$-\boxed{2}$	$-\boxed{2}$	$+\boxed{4}$
PO	$-\boxed{6}$	$-\boxed{2}$	$-\boxed{2}$	$-\boxed{2}$	$-\boxed{8}$
$CoEq$	$-\boxed{5}$	$-\boxed{3}$	$-\boxed{3}$	$-\boxed{3}$	$-\boxed{7}$

(1)

$$\begin{aligned}(\varprojlim_n \mathbb{R}^n)^{(\mathbb{N})} &= \varinjlim_n (\mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} = (\mathbb{R}^{\mathbb{N}})^{(\mathbb{N})} \neq \\ \varprojlim_n (\mathbb{R}^n)^{(\mathbb{N})} &= (\varinjlim_n \mathbb{R}^n)^{\mathbb{N}} = (\mathbb{R}^{(\mathbb{N})})^{\mathbb{N}}\end{aligned}$$

(2)

$$(A_{1,1} \sqcup A_{1,2}) \times (A_{2,1} \sqcup A_{2,2}) \supseteq (A_{1,1} \times A_{2,1}) \sqcup (A_{1,2} \times A_{2,2})$$

(3) Es seien f und g die Abbildungen $0 \mapsto 0$ und $0 \mapsto 1$ von $1 = \{0\} \to 2 = \{0,1\}$. Dann ist $\mathrm{CoEq}(f,g) = 2/\sim \cong 1$, wobei $0 \sim 1$. Aber $\mathrm{Coeq}(f\times f, g\times g) = 2\times 2/\sim \cong 3$, wobei $(0,0) \sim (1,1)$.

(4) Es seien $\alpha_i, \beta_i : X_i \to Y_i$ zwei Abbildungen mit Egalisator $\mathrm{Eq}(\alpha_i,\beta_i) \subseteq X_i$. Dann ist der Egalisator $\mathrm{Eq}(\coprod_i \alpha_i, \coprod_i \beta_i) = \{x \in \coprod_i X_i : (\coprod_i \alpha_i)(x) = (\coprod_i \beta_i)(x)\} = \coprod_i \{x \in X_i : \alpha_i(x) = \beta_i(x)\} = \coprod_i \mathrm{Eq}(\alpha_i,\beta_i)$.

(5)

$$\begin{tikzcd}
p^n\mathbb{Z} \arrow[rr, hook] & & \mathbb{Z} \arrow[rr, two heads] & & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} & \\
p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[u, hook] \arrow[rr, hook] & & \mathbb{Z} \arrow[u, equal] \arrow[rr, two heads] & & \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[u, two heads] & \\
& \varprojlim_n p^n\mathbb{Z} \arrow[ul] \arrow[uul] \arrow[rr, dotted, "(1)"] & & \varprojlim_n \mathbb{Z} \arrow[ul] \arrow[uul] & & \varprojlim_n \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \arrow[ul, "q_{n+1}"] \arrow[uul, "q_n"'] \\
\emptyset \arrow[r, equal] & \bigcap_n p^n\mathbb{Z} \arrow[u, equal] \arrow[rr, dotted, "(1)"] & & \mathbb{Z} \arrow[u, equal] \arrow[rr, dotted, two heads, "(2)"] & & \mathbb{Z} \arrow[u, dotted, "h"', "(3)"]
\end{tikzcd}$$

(6) Die durch eine Quotientenabbildung $\pi : G \to G/N$ von Gruppen gegebene Kongruenz kann durch das semidirekte Produkt $N \ltimes G$ mit $\mathrm{pr}_2 : N \times G \to G$ und Multiplikation $\mu : N \times G \to G$ beschrieben werden.

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, hook] & G \arrow[r, two heads, "\pi"] & G/N \\
N \arrow[u, "N"] \arrow[r, hook, "\mathrm{inj}_2"] & N \times G \arrow[u, "\mu"] \arrow[r, two heads, "\mathrm{pr}_2"] & G \arrow[u, two heads, "\pi"]
\end{tikzcd}$$

In der Tat ist $(\pi \circ \mathrm{pr}_2)(n,g) = [g] = g \cdot N = N \cdot g = n \cdot N \cdot g = n \cdot g \cdot N = [n \cdot g] = (\pi \circ mu)(n,g)$ (es wäre hier günstiger $N\backslash G := \{N \cdot g : g \in G\}$ zu verwenden). Falls nun H eine Gruppe mit Morphismen $p_1, p_2 : H \to G$ welche $\pi \circ p_1 = \pi \circ p_2$ erfüllen ist, so ist $p(h) := (p_1(h)p_2(h)^{-1}, p_2(h))$ der eindeutige Morphismus $p : H \to G \times N$ mit $\mu \circ p = p_1$ und $\mathrm{pr}_2 \circ p = p_2$. Dies zeigt, daß $N \times G$ das Pullback in $\underline{Set}$ ist. Um es nun auch als Pullback in $\underline{Gru}$ zu erhalten müssen wir die Multiplikation auf

$N \times G$ so definieren, daß pr_2 und μ Gruppen-Homomorphismen werden. Sei also $(n, g) \cdot (n', g') = (n'', g'')$. Dann ist

$$\begin{aligned}
g'' &= \mathrm{pr}_2(n'', g'') = \mathrm{pr}_2((n, g) \cdot (n', g')) = \mathrm{pr}_2(n, g) \cdot \mathrm{pr}_2(n', g') = \\
&= g \cdot g' \quad \text{und} \\
n'' &= \mu(n'', g'') \cdot (g'')^{-1} = \mu((n, g) \cdot (n', g')) \cdot (g'')^{-1} = \\
&= \mu(n, g) \cdot \mu(n', g') \cdot (g')^{-1} \cdot g^{-1} = n \cdot g \cdot n' \cdot g' \cdot (g')^{-1} \cdot g^{-1} = n \cdot \rho(g)(n'),
\end{aligned}$$

wobei der Gruppen-Homo $\rho : G \to \mathrm{Aut}(N)$ durch $\rho(g)(n) := g \cdot n \cdot g^{-1}$ gegeben ist. Die induzierte Abbildung $p : H \to N \ltimes_\rho G$ ist ein Gruppen-Homo, denn

$$\begin{aligned}
p(h) \cdot p(h') &= (p_1(h) \cdot p_2(h)^{-1}, p_2(h)) \cdot (p_1(h') \cdot p_2(h')^{-1}, p_2(h')) \\
&= (p_1(h) \cdot p_2(h)^{-1} \cdot p_2(h) \cdot p_1(h') \cdot p_2(h')^{-1} \cdot p_2(h)^{-1}, p_2(h) \cdot p_2(h')) \\
&= (p_1(h) \cdot p_1(h') \cdot p_2(h')^{-1} \cdot p_2(h)^{-1}, p_2(h) \cdot p_2(h')) \\
&= (p_1(h \cdot h') \cdot p_2(h \cdot h')^{-1}, p_2(h \cdot h')) \\
&= p(h \cdot h').
\end{aligned}$$

Es ist also das semidirekte Produkt $N \ltimes_\rho G$, das Pullback in <u>*Gru*</u>.
Betrachte nun für Abelsche Gruppen folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
p^n\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathbb{Z} \arrow[rr, two heads, "\pi"] & & \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} \\
p^{n+1}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[u] \arrow[r, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathbb{Z} \arrow[u] \arrow[rr, two heads, "\pi"] & & \mathbb{Z}/p^{n+1}\mathbb{Z} \arrow[u] \\
& & & J(p) \arrow[u] \\
\{0\} \oplus \mathbb{Z} \arrow[uu] \arrow[r, shift left, "\mu"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{pr}_1"'] & \mathbb{Z} \arrow[uu] \arrow[r, two heads, "\pi"] & \mathbb{Z} \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}$$

(7)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] & & A \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "1"'] \arrow[d, shift right, "1"'] \arrow[d, shift left, "0"] & A \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \\
A \arrow[rr, "1"] \arrow[d] & & A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dd] & 0 \arrow[dd] \\
A \arrow[dr, dotted] & & & \\
& 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 0
\end{tikzcd}$$

(8)

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr] \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] & & A \ltimes A \arrow[r, shift left, "0"] \arrow[r, shift right, "1"'] \arrow[d, shift right, "\mu"'] \arrow[d, shift left, "0"] & A \ltimes A \arrow[d, shift left] \arrow[d, shift right] \\
A \arrow[rr, "1"] \arrow[d] & & A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[dd] & 0 \arrow[dd] \\
A \arrow[dr, dotted] & & & \\
& 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & 0
\end{tikzcd}$$

4. Adjungierte Funktoren

4.1 Galois-Beziehungen

4.2 Proposition. Grundlegendes über Galoisbeziehungen. *Es seien $L : A \to B$ und $R : B \to A$ monotone Abbildungen zwischen zwei quasi (oder sogar partiell) geordnete Klassen $(A, \preceq)$ und $(B, \preceq)$. Dann gilt*

$$\begin{aligned} &\forall a \in A, b \in B : (La \preceq b \Leftrightarrow a \preceq Rb) \\ \Longleftrightarrow\quad &\forall a \in A : (a \preceq RLa) \text{ und } \forall b \in B : (LRb \preceq b). \end{aligned}$$

Unter diesen äquivalenten Bedingungen sagt man, daß (L, R) eine Galoisbeziehung *bildet und man nennt L den* Linksadjungierten *und R den* Rechtsadjungierten.

Für Galoisbeziehungen (L, R) gilt

1. *L und R induzieren eine Äquivalenz der zu den Bildern $L(A)$ und $R(B)$ induzierten quasi geordneten Klassen (und Kategorien). Falls die Klassen sogar partiell geordnet sind, so ist*
$$R(A) = \{b \in B : (L \circ R)(b) = b\} \text{ und } L(A) = \{a \in A : (R \circ L)(a) = a\}$$
und die Äquivalenz eine Isomorphie.
2. *Es ist L costetig (d.h. erhält Suprema) und R ist stetig (d.h. erhält Infima).*
3. *Es ist $Rb \approx \max\{a : La \preceq b\}$, wobei $\approx$ die von der Quasiordnung induzierte Äquivalenzrelation (also die Isomorphie in der assoziierten Kategorie) ist, d.h. $x \approx x' :\Leftrightarrow x \preceq x'$ und $x' \preceq x$.*
4. *Es ist $La \approx \min\{b : a \preceq Rb\}$.*

Umgekehrt, sei eine monotone Abbildung $L : A \to B$ gegeben. Falls L costetig ist und $Rb := \sup\{a \in A : La \preceq b\}$ existiert, so definiert R eine monotone Abbildung und (L, R) ist eine Galoisbeziehung.

Falls L und R antiton sind, so können wir eine der beiden Ordnungen umdrehen und erhalten (falls wir das mit B tuen) die Bedingungen:

5. *$b \preceq La \Leftrightarrow a \preceq Rb$.*
6. *$a \preceq RLa$ und $b \preceq LRb$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.*
7. *L und R transformieren Colimiten in Limiten.*
8. *$Rb := \max\{a \in A : b \preceq La\}$, $La := \max\{b \in B : a \preceq Rb\}$.*

bzw. (falls wir die Ordnung von A umdrehen):

5. *$La \preceq b \Leftrightarrow Rb \preceq a$.*
6. *$RLa \preceq a$ und $LRb \preceq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$.*
7. *L und R transformieren Limiten in Colimiten.*
8. *$Rb := \min\{a \in A : La \preceq b\}$, $La := \min\{b \in B : Rb \preceq a\}$.*

Beachte dabei, daß eine Relation $\preceq$ Quasiordnung genannt wird, wenn sie transitiv ($a \preceq a' \preceq a'' \Rightarrow a \preceq a''$) und reflexiv ($a \preceq a$) ist. Sie heißt partielle Ordnung wenn sie zusätzlich antisymmetrisch ($a \preceq a'$, $a' \preceq a \Rightarrow a = a'$) ist.

Beweis. ($\Rightarrow$) Setze $b := La$ und verwende ($\Rightarrow$) und erhalte $a \preceq RLa$. Ebenso ergibt $a := Rb$ und ($\Leftarrow$) die Aussage $LRb \preceq b$.
($\Leftarrow$) Die Monotonie von R liefert aus $La \preceq b$ die Ungleichung $a \preceq RLa \preceq Rb$. Umgekehrt folgt aus der Monotonie von L und $a \preceq Rb$ die Ungleichung $La \preceq LRb \preceq b$.

$\boxed{1}$ Es ist $Rb \preceq RL(Rb) = R(LRb) \preceq Rb$ und $La \preceq L(RLa) = LR(La) \preceq La$. Falls die Klassen partiell geordnet sind, so folgt $RLRb = Rb$ und $LRLa = La$, also ist $LA = \{b : LRb = b\}$ und $RB = \{a : RLa = a\}$.

$\boxed{2}$ Wegen der Monotonie ist $La \preceq L(\sup \mathcal{A})$ für alle $a \in \mathcal{A} \subseteq A$, also ist $L(\sup \mathcal{A})$ eine obere Schranke von $L(\mathcal{A})$. Sei b eine andere obere Schranke, d.h. $\forall a \in \mathcal{A}$: $La \preceq b$. Dann ist $a \preceq Rb$ für diese a, also $\sup \mathcal{A} \preceq Rb$ und somit $L(\sup \mathcal{A}) \preceq b$, d.h. $L(\sup \mathcal{A}) \approx \sup L(\mathcal{A})$.
Die Stetigkeitsaussage für R gilt aus Dualitätsgründen (Es ist auch $(R, L) : B^{op} \rightleftarrows A^{op}$ eine Galoisbeziehung).

$\boxed{3}$ Es sei $b \in B$. Dann gilt $a \preceq Rb$ für alle $a \in A$ mit $La \preceq b$. Also ist $\sup\{a \in A : La \preceq b\} \preceq Rb$. Andererseits ist $L(Rb) \preceq b$, d.h. $a := Rb \in \{a \in A : La \preceq b\}$. Also ist

$$Rb = \max\{a \in A : La \preceq b\}.$$

Sei nun $Rb := \sup\{a \in A : La \preceq b\}$ sofern dieses Supremum existiert Dann ist $LRb \preceq L(\sup\{a \in A : La \preceq b\}) \approx \sup\{La \in A : La \preceq b\} \preceq b$ und somit $Rb = \max\{a \in A : La \preceq b\}$. Folglich ist $La \preceq b \Leftrightarrow a \preceq Rb$ und offensichtlich ist R monoton, also (L, R) eine Galoisbeziehung. □

Beispiele für Galoisbeziehungen sind:

Funktor	Dom	Cod	stetig L-Adj.	co-st. R-Adj.
$\mathcal{P}$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	$\bigcup$ $\boxed{9}$	— $\boxed{10}$
$\bigcup$	$\mathcal{U}$	$\mathcal{U}$	— $\boxed{11}$	$\mathcal{P} = [\emptyset, \_]$ $\boxed{9}$
$\bigcap$	$(\emptyset, A]$	$\mathcal{U}^{op}$	— $\boxed{12}$	$[\_, A]$ $\boxed{13}$
Inkl	$\mathcal{P}(A)$	$\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{U}$	— $\boxed{14}$	$(\_) \cap A$ $\boxed{15}$
$(\_) \cap A$	$\mathcal{P}(B)$	$\mathcal{P}(A)$	Inkl $\boxed{15}$	$(\_) \cup \tilde{A}$ $\boxed{16}$
$(\_) \cap A$	$\mathcal{P}(B)$	$\mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{U}$	— $\boxed{17}$	$(\_) \cup \tilde{A}$ $\boxed{18}$
$(\_) \cup A$	$\mathcal{U} \supseteq \mathcal{P}(B)$	$\mathcal{P}(B)$	$(\_) \cap \tilde{A}$ $\boxed{19}$	— $\boxed{20}$
$(\_) \cup A$	$\mathcal{P}(B)$	$[A, B]$	$(\_) \cap \tilde{A}$ $\boxed{19}$	Inkl $\boxed{21}$
Inkl	$[A, B]$	$\mathcal{P}(B)$	$(\_) \cup A$ $\boxed{21}$	— $\boxed{22}$
$f^* := f^{-1}[\_]$	$\mathcal{P}(\operatorname{cod} f)$	$\mathcal{P}(\operatorname{dom} f)$	$f_* := f[\_]$ $\boxed{23}$	$f_\sharp$ $\boxed{24}$
$f_* := f[\_]$	$\mathcal{P}(\operatorname{dom} f)$	$\mathcal{P}(\operatorname{cod} f)$	— $\boxed{25}$	$f^* := f^{-1}[\_]$ $\boxed{23}$
$f_\sharp$	$\mathcal{P}(\operatorname{dom} f)$	$\mathcal{P}(\operatorname{cod} f)$	$f^* := f^{-1}[\_]$ $\boxed{24}$	— $\boxed{26}$
Inkl	$\operatorname{Frml}(\dots)$	$\operatorname{Frml}(x, \dots)$	$\exists x$ $\boxed{27}$	$\forall x$ $\boxed{28}$
$\forall x$	$\operatorname{Frml}(x, \dots)$	$\operatorname{Frml}(\dots)$	Inkl $\boxed{28}$	— $\boxed{29}$
$\exists x$	$\operatorname{Frml}(x, \dots)$	$\operatorname{Frml}(\dots)$	— $\boxed{30}$	Inkl $\boxed{27}$

wobei $A \subseteq B$ und $\tilde{A} := B \setminus A$, $f_\sharp(x) := \{y \in \operatorname{cod} f : f^{-1}[y] \subseteq x\}$, $\operatorname{Frml}(x, \dots)$ ist die Menge der Aussagen mit $x, \dots$ als möglichen freien Variablen und zwar quasigeordnet bezüglich "$\Rightarrow$".
In der Tat gilt:

(9) $\bigcup X \subseteq Y \Leftrightarrow X \subseteq \mathcal{P}Y$ oder $\bigcup \mathcal{P}Y = Y,\ X \subseteq \mathcal{P}\bigcup X$, siehe auch $\boxed{1.1}$

(10) $\{0,1\} \in \mathcal{P}(\{0\} \cup \{1\}) \setminus \mathcal{P}(\{0\}) \cup \mathcal{P}(\{1\})$

(11) $\bigcup\{1\} \cap \{2\} = 0 \neq 1 = 1 \cap 2 = \bigcup\{1\} \cap \bigcup\{2\}$

(12) $\bigcap\{a,b\} \cup \bigcap\{a,c\} = \emptyset \neq a = \bigcap\{a,b\} \cap \{a,c\}$,
falls a, b, c paarweise disjunkt und $a \neq \emptyset$

(13) $Y \subseteq \bigcap X \Leftrightarrow \forall x : (x \in X \Rightarrow Y \subseteq x) \Leftrightarrow X \subseteq \{y \in A : Y \subseteq y\}$.
Beachte, daß wir dazu $\bigcap$ auf $X \in \mathcal{P}(A)$ einschränken müssen;
Und damit $\bigcap$ Mengen liefert, müssen wir $\emptyset$ aus seiner Domäne entfernen.

(14) $\mathcal{P}(A)$- $\inf \emptyset = A$ aber $\mathcal{U}$- $\inf \emptyset = \mathcal{U}$

(15) $y \subseteq x \cap A \Leftrightarrow y \subseteq x$ und $y \subseteq A$

(16) $x \cap A \subseteq y \Leftrightarrow x \subseteq y \cup \tilde{A}$.
Damit $\tilde{A}$ als Menge Sinn macht, müssen wir uns auf $\mathcal{P}(B)$ beschränken.

(17) $\inf \emptyset \cap A = A \neq B = \inf \emptyset$

(18) $\mathcal{P}(B) \underset{\cup \tilde{A}}{\overset{\cap A}{\rightleftarrows}} \mathcal{P}(A) \underset{\cap A}{\overset{\text{inkl}}{\rightleftarrows}} \mathcal{U}$
und $(x \cap A) \cup \tilde{A} = x \cup \tilde{A}$

(19) In $\boxed{18}$ ersetzen wir A durch $\tilde{A}$.

(20) $(\sup \emptyset) \cup A = A \neq \emptyset = \sup \emptyset$

(21) $x \cup A \subseteq y \Leftrightarrow x \subseteq y$ und $A \subseteq y$,
Hier müssen wir uns auf $[A, B]$ einschränken.

(22) A ist initial in $[A, B]$ aber nicht in $[\emptyset, B]$

(23) $x \subseteq f^{-1}[y] \Leftrightarrow f[x] \subseteq y$

(24) $f^{-1}[Y] \subseteq X \Leftrightarrow \forall y : (y \in Y \Rightarrow f^{-1}[y] := f^{-1}[\{y\}] \subseteq X) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow Y \subseteq f_\sharp(X) := \{y : \forall x : (f(x) = y \Rightarrow x \in X)\}$

(25) $f[X \cap Y] \neq f[X] \cap f[Y]$ für $X := \{1\},\ Y := \{-1\},\ f(t) := t^2$

(26) $f_\sharp(\{-1\} \cup \{1\}) = \{1\} \neq \emptyset = f_\sharp(\{-1\}) \cup f_\sharp(\{1\})$
für $X := \{1\},\ Y := \{-1\},\ f(t) := t^2$

(27) $(B(\dots) \Leftarrow \exists x : A(x, \dots) \Leftrightarrow (B(\dots) \Leftarrow A(x, \dots))$,
denn beide Seiten sind genau dann falsch, wenn B falsch ist und $A(x, \dots)$ für ein x wahr ist.
Das folgt auch aus $\boxed{28}$, da
$\exists x : B \Leftrightarrow \neg\forall x : \neg B$ und $(\neg A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow A)$.

(28) $(B(\dots) \Rightarrow \forall x : A(x, \dots) \Leftrightarrow (B(\dots) \Rightarrow A(x, \dots))$,
denn $\forall x : A(x, \dots)$ ist genau dann wahr, wenn $A(x, \dots)$ für beliebiges x wahr ist und B hat x nicht als freie Variable.

(29) $\forall x : (x = 0) \vee (x \neq 0) \Leftrightarrow \curlyvee \not\Leftrightarrow \curlywedge \Leftrightarrow (\forall x : x = 0) \vee (\forall x : x \neq 0)$

(30) $\exists x : (x = 0) \wedge (x \neq 0) \Leftrightarrow \curlywedge \not\Leftrightarrow \curlyvee \Leftrightarrow (\exists x : x = 0) \wedge (\exists x : x \neq 0)$

Weitere monotone Galoisbeziehungen sind:

35. Pullback und Pushout.

36. Kongruenz und Coequalizer.
37. Kern und Cokern.
38. Bild und Urbild von Unterobjekten.
39. Die Inklusion von den offenen Teilmengen in allen hat als rechts-Adjungierte "das Innere nehmen".
40. Die Inklusion der abgeschlossenen Teilmengen in allen hat als links-Adjungierte "das Äußere nehmen".
41. cbs und lkv eines fixen Vektorraums.

35 and 36 haben wir bereits in 3.28 gesehen.

37. Wir setzen voraus, daß die Kategorie ein 0-Objekt besitzt. Dann ist einerseits $PB(f,0) = \operatorname{Ker} f$ und andererseits $PO(g,0) = \operatorname{Coker} f$.

38. Falls inverse Bilder und $(Epi, stark\text{-}Mono)$ Faktorisierungen in $\mathcal{C}$ existieren, so erhalten wir für jedes $f : X \to Y$ eine Galois-Beziehung zwischen starken Unterobjekten von X und solchen von Y:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "f"] & & & Y \\
& f^{-1}[Y'] \arrow[ul, tail, "f^{-1}(m)"'] \arrow[r, tail] & Y' \arrow[ur, tail, "m"] & \\
f^{-1}[Y''] \arrow[uu, tail, "f^{-1}(m')"] \arrow[ur, dotted, tail] \arrow[rrr, tail] & & & Y'' \arrow[uu, tail, "m'"'] \arrow[ul, tail]
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "f"] & & & Y \\
& X' \arrow[ul, tail, "m"'] \arrow[r, two heads] & f[X'] \arrow[ur, tail, "f[m]"] & \\
X'' \arrow[uu, tail, "m'"] \arrow[ur, tail] \arrow[rrr, two heads] & & & f[X''] \arrow[uu, tail, "f[m']"'] \arrow[ul, dotted, tail]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] & & Y \\
& f^{-1}(f[X']) \arrow[ul, tail, "f^{-1}(f[m])"'] \arrow[dr] & \\
X' \arrow[uu, tail, "m"] \arrow[ur, dotted, tail] \arrow[rr, two heads] & & f[X'] \arrow[uu, tail, "f[m]"']
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] & & Y \\
& f[f^{-1}(Y')] \arrow[ur, tail, "f[f^{-1}(m)]"] \arrow[dr, dotted, tail] & \\
f^{-1}(Y') \arrow[uu, tail, "f^{-1}(m)"] \arrow[ur, two heads] \arrow[rr] & & Y' \arrow[uu, tail, "m"']
\end{tikzcd}$$

39. Es sei $\mathcal{O} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Menge der offenen Mengen einer Topologie auf X. Dann gilt für $U \in \mathcal{O}$ und $M \subseteq X$:

$$U \subseteq M \Leftrightarrow U \subseteq M^o, \text{ dem Inneren von } M.$$

40. Es sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ die Menge der abgeschlossenen Mengen einer Topologie auf X. Dann gilt für $A \in \mathcal{A}$ und $M \subseteq X$:

$$A \supseteq M \Leftrightarrow A \supseteq \overline{M}, \text{ dem Äußeren von } M.$$

41. Auf einem fixen Vektorraum X betrachten wir die Menge $\mathrm{LK}(X)$ aller lokalkonvexen Topologien auf X sowie die Menge $\mathrm{KB}(X)$ aller konvexer Bornologien auf X. Dabei versteht man unter einer Bornologie auf einer Menge X eine Teilmenge $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ (bestehend aus den sogenannten beschränkten Mengen) mit folgenden Eigenschaften:

42. $\forall x \in X : \{x\} \in \mathcal{B}$;
43. $B_1, B_2 \in \mathcal{B} \Rightarrow B_1 \cup B_2 \in \mathcal{B}$;
44. $B \in \mathcal{B}, B' \subseteq B \Rightarrow B' \in \mathcal{B}$.

Unter einer beschränkten Abbildung f zwischen bornologischen Räumen $(X, \mathcal{B})$ und $(X', \mathcal{B}')$ versteht man eine Abbildung $f : X \to X'$, welche $B \in \mathcal{B} \Rightarrow f(B) \in \mathcal{B}'$ erfüllt. Die entsprechende Kategorie bezeichnen wir mit <u>*Born*</u>. Unter einer konvexen Bornologie auf einem Vektorraum X verstehen wir eine Bornologie die zusätzlich folgendes erfüllt:

45. Die Addition $X \times X \to X$ und die Skalarmultiplikation $\mathbb{K} \times X \to X$ sind beschränkt;
46. $B \in \mathcal{B} \Rightarrow \langle B \rangle_{abs.konv.} \in \mathcal{B}$.

Wir ordnen die beiden Mengen $\mathrm{LK}(X)$ und $\mathrm{KB}(X)$ durch

$$\mathcal{B} \preceq \mathcal{B}' :\Leftrightarrow 1 : (X, \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{B}') \text{ ist beschränkt} \Leftrightarrow \mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}';$$
$$\mathcal{U} \preceq \mathcal{U}' :\Leftrightarrow 1 : (X, \mathcal{U}) \to (X, \mathcal{U}') \text{ ist stetig} \Leftrightarrow \mathcal{U} \supseteq \mathcal{U}';$$

Dann haben wir eine Galoisbeziehung, welche durch

$$R(\mathcal{U}) := \{B : B \text{ wird durch alle } U \in \mathcal{U} \text{ absorbiert}\}$$
$$L(\mathcal{B}) := \{U : U \text{ absorbiert alle } B \in \mathcal{B}\},$$

denn offensichtlich ist L und R monoton, und $\mathcal{B} \subseteq RL\mathcal{B}$ und $\mathcal{U} \subseteq LR\mathcal{U}$, i.e. $\mathcal{B} \preceq RL\mathcal{B}$ und $LR\mathcal{U} \preceq \mathcal{U}$.

Antitone Galoisbeziehungen sind:

47. Menge von Formeln einer formalen Sprache und Klassen(!) von Strukturen der formalen Sprache entsprechen sich durch Mod und Gült. Die Fixpunkte heißen Modelle bzw. axiomatisierbare Strukturen.
48. Es wirke eine Gruppe G auf einer Menge X, dann haben wir durch Fix eine Galoisbeziehung zwischen Teilmengen von G und Teilmengen von X. Genauer: $\mathrm{Fix}(H) := \{x \in X : gx = x \forall g \in H\}$ und $\mathrm{Fox}(Y) := \{g \in G : gx = x \forall x \in Y\}$, und es ist $H \subseteq \mathrm{Fox}(\mathrm{Fix}(H))$ als auch $Y \subseteq \mathrm{Fix}(\mathrm{Fox}(Y))$.
49. Speziell K ein Körper und $G := \mathrm{Aut}(K)$. Dann kann man die Einschränkung von Fix und Fox auf Untergruppen von G und auf Teilkörper von K betrachten. Schränkt man weiter auf die endlichen Untergruppen und auf die endlichen Galoiserweiterungen (d.h. normal und separabel) ein so erhält man eine Bijektion. Ist f ein Polynom mit Koeffizienten in K, dann ist

$f(x) = 0$ genau dann mittels Radikale auflösbar, wenn die Galoisgruppe des Zerfällungskörpers von f als Gruppe auflösbar ist.
50. Galoisbeziehung zwischen Teilmengen einer Menge X und Mengen $\mathbb{R}$-wertiger Funktionen auf X.
51. Speziell in der algebraischen Geometrie betrachtet man die Galoisbeziehung zwischen Idealen von Polynomen und abgeschlossenen Teilmengen.
52. In der Funktionalanalysis die Bipolarität und als Spezialfall das orthogonale Komplement. Genauer: Sei $\langle \_, \_ \rangle : E \times F \to \mathbb{K}$ nicht degeneriert. Dann ist $(\_)^o : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ durch $A^o := \{y : |\langle x, y\rangle| \leq 1 \forall x \in A\}$ und ${}^o(\_) : \mathcal{P}(E) \leftarrow \mathcal{P}(F)$ durch ${}^oB := \{x : |\langle x, y\rangle| \leq 1 \forall y \in B\}$ definiert und es gilt: $A \subseteq ({}^oA)^o$. Falls A ein Teilraum ist, dann ist $A^o := \{y : \langle x, y\rangle = 0 \forall x \in A\} =: A^\perp$.
53. Dualität für konvexe Funktionen: $\langle \_, \_ \rangle$ sei eine duale Paarung $F \times G \to \mathbb{R}$. Sei $f : F \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ mit $f \neq +\infty$, $f^* : G \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ist gegeben durch $f^*(z) := \sup\{\langle y, z\rangle - f(y) : y \in F\}$.
54. Galoisbeziehung zwischen Topologien und Mengen reell-wertiger Funktionen; $\mathcal{X} \mapsto C((X, \mathcal{X}), \mathbb{R})$, $\mathcal{F} \mapsto$ initiale Topologie von $\mathcal{F}$.

47. Für eine gegebene formale Sprache 1. Stufe, d.h. aller sinnvollen Ausdrücke die sich mittels der logischen Junktoren $\wedge, \vee, \neg, \Rightarrow, \Leftrightarrow$, der Quantoren $\forall, \exists$, der Gleichheit $=$ und zusätzlichen Symbolen für fixe Relationen und Funktionen (in mehreren Variablen) bilden lassen, können wir die Menge alle Teilmengen von aller Formeln Frml partiell mittels Inklusion geordnet betrachten. Ebenso können wir Strukturen für diese Sprache betrachten, d.h. Mengen X zusammen mit wirklichen Relationen und Funktionen auf X für jedes entsprechende Symbol.

Für eine Menge $\mathcal{F}$ von Formeln bezeichnen wir mit $\mathrm{Mod}(\mathcal{F})$ alle jene Strukturen die, die alle Aussagen aus $\mathcal{F}$ bei entsprechender Interpretation der Symbole erfüllen. Umgekehrt bezeichnen wir für eine Klasse $\mathcal{S}$ von Strukturen mit $\mathrm{Gült}(\mathcal{S})$ die Menge all jener Formeln, die in allen Strukturen aus $\mathcal{S}$ gelten. Dann sind offensichtlich Mod und Gült antiton, und es gilt $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Gült}(\mathrm{Mod}(\mathcal{F}))$ und $\mathcal{S} \subseteq \mathrm{Mod}(\mathrm{Gült}(\mathcal{S}))$, d.h. wir haben eine Galoisbeziehung $(\mathrm{Mod}, \mathrm{Gült})$. Man sagt, daß eine Formel F aus einer Menge von Formeln $\mathcal{F}$ folgt ($\mathcal{F} \vDash F$) falls $F \in \mathrm{Gült}(\mathrm{Mod}(\mathcal{F}))$; $\mathcal{F}$ heißt Theorie, wenn $\mathcal{F} = \mathrm{Gült}(\mathrm{Mod}(\mathcal{F}))$; und eine Klasse von Modellen $\mathcal{S}$ heißt axiomatisierbar, wenn $\mathcal{S} = \mathrm{Mod}(\mathrm{Gült}(\mathcal{S}))$; $\mathcal{F}$ heißt widerspruchsfrei, wenn $\mathrm{Mod}(F) \neq \emptyset$.

48. Offensichtlich ist Fix und Fox antiton, und die Galoisbedingung gilt.

49. Ist die klassische Galoisbeziehung.

50. Jeder Teilmenge $Z \subseteq X$ ordnen wir die Teilmenge $Z^o := \{f \in \mathbb{R}^X : f|_Z = 0\} \subseteq \mathrm{Set}(X, \mathbb{R})$ zu, und umgekehrt jeder Teilmenge $\mathcal{F} \subseteq \mathrm{Set}(X, \mathbb{R})$ die Teilmenge $\mathcal{F}_o := \{x \in X : f(x) = 0 \forall f \in \mathcal{F}\}$. Dann bilden $((\_)^o, (\_)_o)$ offensichtlich eine Galoisbeziehung.

51. Für $X = \mathbb{K}^n$ erhält die grundlegende Galoisbeziehung der algebraischen Geometrie, wenn man $\mathrm{Abb}(X, \mathbb{K})$ durch $K[x_1, \dots, x_n]$ ersetzt. Die Fixpunkte sind dabei die Zariski-abgeschlossenen Mengen und die Ideale von Polynomen.

52. Dies ist die klassische Bipolarität der Funktionalanalysis. Die Fixpunkte sind genau die absolut konvexen schwach-abgeschlossenen Teilmengen.

53. Falls $f_1 \leq f_2$ ist, dann ist $\langle z, y\rangle - f_1(y) \geq \langle z, y\rangle - f_2(y)$ und somit $f_1^*(z) \geq f_2^*(z)$. Wählen wir insbesonders $f(x) := c + \langle x, b\rangle$, so erhalten wir $f^*(y) = +\infty$ für $y \neq b$ und $f^*(b) = -c$. Also müssen wir erlauben, daß f Werte in $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ hat. Damit aber f^* nicht auch den Werte $-\infty$ annimmt, müssen wir $f \neq +\infty$ voraussetzen. Es ist $f^* \neq +\infty$ ist, d.h. $f^* \leq g$ für ein g der Form $g(y) = +\infty$ für

$y \neq b$ und $g(b) = -c \neq +\infty$, wegen $f^* \leq g \Leftrightarrow g^* \leq f$ äquivalent zu $c + \langle \_, b\rangle \leq f$. In der Tat gilt:

$$\begin{aligned}\forall z : f^*(z) \leq g(z) &\Leftrightarrow \forall z, y : \langle z, y\rangle - f(y) \leq g(z)\\ &\Leftrightarrow \forall z, y : \langle z, y\rangle - g(z) \leq f(y)\\ &\Leftrightarrow \forall y : g^*(y) \leq f(y).\end{aligned}$$

Also erhalten wir eine Galoisbeziehung zwischen Funktionen auf F und auf G die Werte in $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ haben und nach unten durch affine Geraden beschränkt sind. Es zeigt sich, daß die Fixpunkte genau die konvexen schwach nach unten halbstetigen Funktionen sind, denn $z \mapsto \langle z, y\rangle - f(y)$ ist stetig und linear, und folglich ist das Supremum f^* nach unten halbstetig und konvex. Umgekehrt wenn f konvex und nach unten halbstetig ist, dann ist es das Supremum aller stetigen affinen Funktionale $c+\langle \_, b\rangle$, die es dominiert, und das ist genau der Fall wenn $f^*(b) \leq -c$. Also ist $f^{**}(y) = \sup\{\langle z, y\rangle - f^*(z) : z \in G\} \geq \langle b, y\rangle + c$ und somit $f = f^{**}$.

Es besteht ein Zusammenhang zum Differenzieren, denn wenn $\gamma : \mathbb{R} \to \{t : t \geq 0\}$ konvex und nach unten halbstetig ist, dann gilt $\lim_{t\searrow 0} \frac{\gamma(t)}{t} = 0 \Leftrightarrow \gamma^*(s) > 0 \forall s > 0$. In der Tat gilt

$$\lim_{t\searrow 0} \frac{\gamma(t)}{t} = 0 \Leftrightarrow \forall s > 0 \exists t : \gamma(t) < ts \Leftrightarrow \gamma^*(s) \geq 0$$

Als Konsequenz ergibt sich, daß eine konvexe Funktion f auf einen Banachraum genau dann Fréchet differenzierbar ist bei a mit Ableitung $b := f'(x)$ wenn eine konvexe nicht-negative Funktion γ existiert, mit $\gamma(0) = 0$ und $\lim_{t\to 0} \frac{\gamma(t)}{t} = 0$, s.d.

$$f(a + h) \leq f(a) + \langle f'(a), h\rangle + \gamma(\|h\|).$$

In der Tat wenn $f(a + h) \leq f(a) + \langle b, h\rangle + \gamma(\|h\|)$, dann gilt

$$\frac{f(a + t\,h) - f(a)}{t} \leq \langle b, h\rangle + \frac{\gamma(t\,\|h\|)}{t},$$

und somit $f'(a)(h) \leq \langle b, h\rangle$. Da $h \mapsto f'(a)(h)$ sub-linear ist und lineare Funktionale minimal unter den sublinearen sind, haben wir Gleichheit. Wegen Konvexität gilt

$$\frac{f(a + t\,h) - f(a)}{t} \geq \langle b, h\rangle = f'(a)(h).$$

Somit ist f Fréchet-differenzierbar bei a mit Ableitung $f'(a)(h) = \langle b, h\rangle$, da der Restterm durch $\gamma(\|h\|)$ beschränkt ist und $\frac{\gamma(\|h\|)}{\|h\|} \to 0$ für $\|h\| \to 0$ erfüllt.

Umgekehrt sei f Fréchet-differenzierbar bei a mit Ableitung b. Dann gilt

$$\frac{|f(a + h) - f(a) - \langle b, h\rangle|}{\|h\|} \to 0 \text{ for } h \to 0$$

und wegen Konvexität

$$g(h) := f(a + h) - f(a) - \langle b, h\rangle \geq 0$$

Sei $\gamma(t) := \sup\{g(u) : \|u\| = |t|\}$. Da g konvex ist, ist auch γ konvex und offensichtlich $\gamma(t) \in [0, +\infty]$, $\gamma(0) = 0$ und $\frac{\gamma(t)}{t} \to 0$ für $t \to 0$. Dies ist die gewünschte Funktion.

54 ist offensichtlich. Fixpunkte sind die vollständig regulären Topologien.

Allgemeine Adjunktionen

4.3 Galoisbeziehung als natürlicher Isomorphismus. Wir wollen das Konzept der Galoisbeziehung nun auf Funktoren zwischen beliebigen Kategorien übertragen. Für quasigeordnete Mengen A haben wir daß $\underline{A}(a,a') \neq \emptyset \Leftrightarrow a \preceq a'$ und dann ist $f \in \underline{A}(a,a')$ eindeutig festgelegt. Die Beziehung $La \preceq b \Leftrightarrow a \preceq Rb$ kann also auch als Bijektion $\underline{B}(La,b) \cong \underline{A}(a,Rb)$ aufgefaßt werden. Wenn wir $\underline{B}(L\_,\_), \underline{A}(\_,R\_) : \underline{A}^{op} \times \underline{B} \to \underline{Set}$ als Funktoren interpretieren, dann ist dieser Isomorphismus eine natürliche Transformation, denn aus $a \succeq a'$ und $b \preceq b'$ folgt für $\mathcal{B}(La,b) \neq \emptyset$:

$$\begin{array}{ccc} (La \preceq b) & \longrightarrow & (a \preceq Rb) \\ \downarrow & & \downarrow \\ (La' \preceq b') & \longrightarrow & (a' \preceq Rb') \end{array}$$

Und falls $\mathcal{B}(La,b) = \emptyset$, so ist nichts zu zeigen.

4.4 Definition (Adjunktion). Für Funktoren $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ zwischen beliebigen Kategorien definieren wir entsprechend daß (L,R) eine ADJUNKTION ist, falls ein natürlicher Isomorphismus φ zwischen den beiden Funktoren $\mathcal{B}(L\_,\_), \mathcal{A}(\_,R\_) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} \to \underline{Set}$ existiert. Man sagt dann, daß L der LINKSADJUNGIERTE und R der RECHSTADJUNGIERTE ist.

Bemerkungen.

1. Für quasi-geordnete Mengen $(X,\preceq)$ und $(Y,\preceq)$ ist $(X,\preceq) \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} (Y,\preceq)$ genau dann eine adjungierte Situation, wenn (L,R) eine Galois-Beziehung bilden.
   $(\Rightarrow)$ Da $La \preceq b \Leftrightarrow \emptyset \neq \mathcal{B}(La,b) \cong \mathcal{A}(a,Rb) \Leftrightarrow a \preceq Rb$.
   $(\Leftarrow)$ siehe oben.
2. Es sei (L,R) ein adjungiertes Paar. Dann haben wir:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B}(La,b) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{A}(a,Rb) \\ \| & & \| \\ \mathcal{B}^{op}(b,La) & & \mathcal{A}^{op}(Rb,a) \end{array}$$

   Folglich bilden auch (R,L) eine Adjunktion $\mathcal{B}^{op} \rightleftarrows \mathcal{A}^{op}$.
   Wenn wir nur $\mathcal{A}$ oder $\mathcal{B}$ dualisieren, so erhalten wir kontravariante Funktoren, die

$$\mathcal{B}^{op}(b,La) \cong \mathcal{A}(a,Rb) \text{ bzw. } \mathcal{B}(La,b) \cong \mathcal{A}^{op}(Rb,a)$$

   erfüllen.

4.5 Beispiel. Kartesische Abgeschlossenheit. Es sei $Z^Y := \underline{Set}(Y,Z)$. Dann ist $Z \mapsto Z^Y$ der Funktor $\underline{Set}(Y,\_)$ mit $k \mapsto k^Y := k_*$. Die beiden Abbildungen

$$(\_)^\vee : \underline{Set}(X \times Y, Z) \to \underline{Set}(X, Z^Y)$$
$$(\_)^\wedge : \underline{Set}(X \times Y, Z) \leftarrow \underline{Set}(X, Z^Y)$$

definiert durch

$$\check{f}(x)(y) := f(x,y) \quad \hat{g}(x,y) := g(x)(y)$$

definieren einen natürlichen Isomorphismus $\underline{Set}(.\times Y, ..) \cong \underline{Set}(., (..)^Y)$. Daß sie invers zueinander sind, ist offensichtlich, und die Natürlichkeit ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}
&\text{Für } h : X' \to X, \quad k : Z \to Z', \quad f : X \times Y \to Z, \quad x' \in X', \quad y \in Y \\
\underline{Set}(h, k^Y)(\check{f})(x')(y) &= (k_* \circ \check{f} \circ h)(x')(y) = k_*(\check{f}(h(x')))(y) = \\
&= (k \circ \check{f}(h(x')))(y) = k(\check{f}(h(x'))(y)) = k(f(h(x'), y)) \\
(\underline{Set}(h \times Y, k)(f))^\vee(x')(y) &= (k \circ f \circ (h \times Y))^\vee(x')(y) = \\
&= (k \circ f \circ (h \times Y))(x', y) = k(f(h(x'), y))
\end{aligned}$$

Funktor	Dom	Cod	stetig L-Adj.	co-stetig R-Adj.
$\mathrm{Abb}(X, \_)$	$\underline{Set}$	$\underline{Set}$	$(\_) \times X$ $\boxed{1}$	$-$ $\boxed{2}$
$\mathrm{Abb}(\_, Y)$	$\underline{Set}$	$\underline{Set}^{op}$	$-$ $\boxed{3}$	$\underline{Abb}^{op}(Y, \_)$ $\boxed{4}$

(1) $\mathrm{Abb}(Y \times X, Z) \cong \mathrm{Abb}(Y, \mathrm{Abb}(X, Z))$

(2) $\mathrm{Abb}(2, 1 \sqcup 1) \cong 2^2 \not\cong 1^2 + 1^2 \cong \mathrm{Abb}(2,1) \sqcup \mathrm{Abb}(2,1)$

(3) $\mathrm{Abb}(1 \times 1, 1) \cong 1^1 \not\cong 1^1 + 1^1 = \mathrm{Abb}(1,1) \sqcup \mathrm{Abb}(1,1)$

(4) $\mathrm{Abb}(X, \mathrm{Abb}^{op}(Y, Z)) \cong \mathrm{Abb}^{op}(\mathrm{Abb}(X, Y), Z)$

4.6 Darstellbare Funktoren. Es sei $\varphi_{a,b} : \mathcal{B}(La, b) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(a, Rb)$ eine Adjunktion. Durch Einschränkung erhalten wir für fixes a in $\mathcal{A}$ einen natürlichen Isomorphismus

$$\varphi_a : \mathcal{B}(La, \_) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(a, R(\_)) =: F(\_) : \mathcal{B} \to \underline{Set}.$$

Dies führt uns zur folgenden Definition, wobei wir $\mathcal{B}$ in $\mathcal{A}$ umgetauft haben.

Definition. Ein Funktor $F : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ heißt DARSTELLBAR :⇔ Es gibt ein Objekt $a \in \mathcal{A}$ und einen natürlichen Isomorphismus $\mathcal{A}(a, \_) \cong F$. Man sagt auch a stellt den Funktor F dar.

Es gilt somit das

Lemma. Adjunktion liefert darstellbare Funktoren.
Es sei $\varphi_{a,b} : \mathcal{B}(La, b) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(a, Rb)$ eine Adjunktion. Dann wird für jedes Objekt a von $\mathcal{A}$ der Funktor $F(\_) := \mathcal{A}(a, R(\_)) : \mathcal{B} \to \underline{Set}$ durch $b := La$ dargestellt, wobei der natürliche Isomorphismus $\mathcal{B}(La, \_) \xrightarrow[\cong]{} F(\_)$ durch $(\varphi_{a,b})_b$ gegeben ist. □

4.7 Yoneda Isomorphismus. Wir müssen folglich natürliche Transformationen $\varphi : \mathcal{A}(a, \_) \to F(\_)$ studieren. Insbesonders haben wir $\eta := \varphi_a(1_a) \in F(a)$. Wir behaupten, daß dadurch φ schon eindeutig bestimmt ist. Sei also a' beliebig und

$f \in \mathcal{A}(a, a')$. Dann betrachten wir folgendes Diagramm:

$$
\begin{tikzcd}
 & 1_a \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ddd, mapsto] \arrow[dr, hook] & & & \eta \arrow[ddd, mapsto] \arrow[dl, hook'] \\
a \arrow[d, "f"] & & \mathcal{A}(a,a) \arrow[r, "\varphi_a"] \arrow[d, "\mathcal{A}(a,f)=f_*"'] & F(a) \arrow[d, "F(f)"] & \\
a' & & \mathcal{A}(a,a') \arrow[r, "\varphi_{a'}"] & F(a') & \\
 & f \arrow[rrr, mapsto] \arrow[ur, hook] & & & F(f)(\eta)=\varphi_{a'}(f) \arrow[ul, hook']
\end{tikzcd}
$$

Dies zeigt einen Teil des folgenden Lemmas:

Yoneda Lemma. *Es sei $F : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ ein Funktor. Dann ist jede natürliche Transformation $\varphi : \mathcal{A}(a, \_) \to F$ bereits durch den Wert $\varphi_a(1_a) \in F(a)$ ihrer Komponente φ_a auf $1_a \in \mathcal{A}(a, a)$ eindeutig bestimmt. Wären die folgenden Konstrukte Klassen, dann könnten wir das auch wie folgt formulieren:*

$$
\left.\begin{array}{cl} \operatorname{nat.Transf}(\mathcal{A}(a,\_), F) & \to Fa \\ \varphi & \mapsto \varphi_a(1_a) \end{array}\right\} \text{ ist eine Bijektion}
$$

Beweis. Die "Umkehrabbildung" ist $Fa \ni \eta \mapsto \varphi \in \operatorname{nat.Transf}(\mathcal{A}(a, \_), F)$, mit $\varphi_{a'} : \mathcal{A}(a, a') \to F(a')$ gegeben durch $f \mapsto (Ff)(\eta) \in F(a')$.
Es ist das so definierte φ eine natürliche Transformation, denn für $g : a' \to a''$ gilt:

$$
\left.\begin{array}{rl} (\varphi_{a''} \circ g_*)(f) = \varphi_{a''}(g \circ f) = F(g \circ f)(\eta) & = \\ (F(g) \circ \varphi_{a'})(f) = F(g)(\varphi_{a'}(f)) = F(g)(F(f)(\eta)) & = \end{array}\right] =
$$

$$
\begin{tikzcd}
a \arrow[dr, "f"] \arrow[ddr, "g\circ f"'] & \\
 & a \arrow[d, "g"] \\
 & a''
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{A}(a,a) \arrow[rrr, "\varphi_a"] \arrow[dr, "f_*"] \arrow[ddr, "(g\circ f)_*"'] & & & F(a) \arrow[dl, "F(f)"'] \arrow[ddl, "F(g\circ f)"] \\
 & \mathcal{A}(a,a') \arrow[r, "\varphi_{a'}"] \arrow[d, "g_*"] & F(a') \arrow[d, "F(g)"'] & \\
 & \mathcal{A}(a,a'') \arrow[r, "\varphi_{a''}"] & F(a'') &
\end{tikzcd}
$$

Die Zusammensetzungen sind die Identität, denn

$$
\begin{aligned}
&\varphi_a(1_a) = (F(1_a))(\eta) = 1_{F(a)}(\eta) = \eta \\
&\qquad \text{für } \eta \in Fa \text{ und zugeordneten } \varphi. \\
&\varphi_{a'}(f) = \varphi_{a'}(f_*(1_a)) = F(f)(\varphi_a(1_a)) = F(f)(\eta) \\
&\qquad \text{für } \varphi : \mathcal{A}(a, \_) \to F \text{ und zugeordneten } \eta \in Fa. \qquad \square
\end{aligned}
$$

4.8 Folgerung. *Für kleine Kategorien $\mathcal{A}$ ist der Funktor $\check{\operatorname{Hom}} : \mathcal{A}^{op} \to \underline{Set}^{\mathcal{A}}$ eine volle Einbettung.*

Beweis. Es stehen die natürlichen Transformationen $\varphi : \mathcal{A}(a, \_) \to \mathcal{A}(a', \_) =: F(\_)$ in bijektiver Beziehung zu $\eta := \varphi_a(1_a) \in \mathcal{A}(a', a)$ vermöge $\varphi_{a''}(f) = F(f)(\eta) = f \circ \eta = \eta^*(f)$. $\square$

4.9 Definition. Wir wollen auch die Darstellbarkeit durch die Initialität eines gewissen Objektes ausdrücken.

Sei $F : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ ein Funktor. Dann hat die Pfeilkategorie $\overrightarrow{\{*\}F}$ als Objekte beliebige Objekte von $\mathcal{A}$ zusammen mit ausgezeichneten Elementen $x \in F(a)$ und als Morphismen $\mathcal{A}$-Morphismen, deren Bild unter F die ausgezeichneten Elemente aufeinander abbilden.

Siehe 4.19 für eine Verallgemeinerung davon.

Lemma. Darstellende Objekte sind initial in der Komma-Kategorie. *Ein Funktor $F : \mathcal{B} \to \underline{Set}$ wird genau dann durch ein Objekt b dargestellt, wenn ein initiales Objekt (η, b) in der Pfeilkategorie $\overrightarrow{\{*\}F}$ (also ein $\eta \in F(b)$) existiert. Dabei is $\eta := \varphi_b(1_b) \in F(b)$, wobei $\varphi : \mathcal{B}(b, \_) \to F$ den natürlichen Isomorphismus bezeichnet und umgekehrt ist φ durch $\varphi_{b'}(f) := F(f)(\eta)$ gegeben.*

Beweis.
Nach Definition stellt Objekt b in $\mathcal{B}$ den Funktor F genau dann dar, wenn ein natürlicher Isomorphismus $\varphi : \mathcal{B}(b, \_) \xrightarrow{\cong} F$ existiert. Nach dem Yoneda-Lemma 4.7 sind die natürlichen Transformation φ eindeutig durch $\eta := \varphi_b(1_b) \in F(b)$ festgelegt. Es ist φ genau dann ein Isomorphismus, wenn $\varphi_{b'} : \mathcal{B}(b, b') \to F(b')$ für alle b' bijektiv ist, d.h. für alle $y \in F(b')$ existiert ein eindeutiger Morphismus $f : b \to b'$ mit $y = \varphi_{b'}(f) = F(f)(\eta)$, also ist (η, b) ein initiales Objekt in $\overrightarrow{\{*\}F}$.

$$\begin{tikzcd} \eta \arrow[d, mapsto, "F(f)"'] & \in & F(b) \arrow[d, dotted, "F(f)"'] \\ y & \in & F(b') \end{tikzcd} \qquad \square$$

4.12 Beispiele darstellbarer Vergißfunktoren.

$$\begin{aligned} \underline{HGru} \to \underline{Set}, &\quad \mathbb{N}^* := \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ \underline{Mon} \to \underline{Set}, &\quad \mathbb{N} \\ \underline{Gru} \to \underline{Set}, &\quad \mathbb{Z} \\ \underline{Ring} \to \underline{Set}, &\quad \mathbb{Z}[x] \\ \underline{R\text{-}Mod} \to \underline{Set}, &\quad R \\ \underline{Top} \to \underline{Set}, &\quad \{*\} \end{aligned}$$

4.10 Folgerung. Eindeutigkeit darstellender Objekte. *Das darstellende Objekt eines darstellbaren Funktors $F : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

2.Beweis. Direkt kann man das auch wie folgt sehen: Seien a und a' zwei Objekte die F darstellen. Dann haben wir einen natürlichen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{A}(a, \_) \cong F \cong \mathcal{A}(a', \_)$. Es entspricht insbesonders $1_a \in \mathcal{A}(a, a)$ ein Morphismus $g := \varphi_a(1_a) \in \mathcal{A}(a', a)$ und $1_{a'} \in \mathcal{A}(a', a')$ ein Morphismus $f := \varphi_{a'}^{-1}(1_{a'}) \in \mathcal{A}(a, a')$. Wir behaupten, daß f und g invers zueinander sind:

$$\begin{aligned} f \circ g &= f_*(g) = f_*(\varphi_a(1_a)) = \varphi_{a'}(f_*(1_a)) = \varphi_{a'}(f) = 1_{a'} \\ g \circ f &= g_*(f) = g_*(\varphi_{a'}^{-1}(1_{a'})) = \varphi_{a'}^{-1}(g_*(1_{a'})) = \varphi_{a'}^{-1}(g) = 1_a. \quad \square \end{aligned}$$

4.11 Limiten-Berechnung via Hom-Funktor.
Man beachte weiters, daß Homfunktoren $\mathcal{A}(a,\_)$ immer Limiten erhalten, denn nach Definition gilt, daß

$$\mathcal{A}(a, \lim F) \cong \{(f_i : a \to F(i))_i : F(h) \circ f_{\operatorname{dom} h} = f_{\operatorname{cod} h}\} = \lim \mathcal{A}(a, F(\_)).$$

Somit ist dies eine notwendige Voraussetzung für die Darstellbarkeit eines Funktors.

Lemma. *Es sei $X : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ ein Diagramm in $\mathcal{A}$. Dann ist ein Kegel über X genau dann ein Limes von X in $\mathcal{A}$ wenn, für alle a in $\mathcal{A}$ das Bild unter $\mathcal{A}(a,\_)$ ein Limes von $\mathcal{A}(a, X(\_))$ in $\underline{Set}$ ist.*

Beweis. Eine Familie $(g_i : a \to X(i))_i$ ist genau dann ein Kegel von X, wenn $g_{i'} = X(f) \circ g_i = X(f)_*(g_i)$ für alle $\mathcal{I}$-Morphismen $f : i \to i'$ ist, d.h. wenn $(g_i)_i$ ein Faden für $\mathcal{A}(a, X(\_))$ ist. Folglich ist $\mathcal{A}(a, X_\infty)$ genau dann der Limes von $\mathcal{A}(a, X(\_))$, wenn die Elemente von $\mathcal{A}(a, X_\infty)$ genau den Fäden für $\mathcal{A}(a, X(\_))$ und somit genau denn Kegeln von X mit Spitze a entsprechen. Dies ist aber genau die universelle Eigenschaft des Limes $\lim X$. □

4.14 Bemerkung. Stetigkeit adjungierter Funktoren.
Es sei $\varphi_{a,b} : \mathcal{B}(La, b) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(a, Rb)$ eine Adjunktion. Durch Einschränkung erhalten wir für fixes a in $\mathcal{A}$ einen natürlichen Isomorphismus $\varphi_{a,\_} : \mathcal{B}(La,\_) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(a, R(\_)) : \mathcal{B} \to \underline{Set}$. Es sind also die Funktoren $F(\_) := \mathcal{A}(a, R(\_)) : \mathcal{B} \to \underline{Set}$ für alle a darstellbar und somit stetig. Nach Lemma 4.11 ist damit aber auch R stetig, und aus Dualitätsgründen ist L costetig, also gilt:

Proposition. *Es sei $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ein Rechtsadjungierter. Dann erhält R Limiten.*

2. Beweis. Es sei $X : \mathcal{I} \to \mathcal{B}$ ein Diagramm und $(X_\infty, (p_i)_i)$ sei ein Limes von X in $\mathcal{B}$.

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & X_i \arrow[rr, "X_f"] & & X_{i'} \arrow[r] & \cdots \\
& LRX_i \arrow[u, "\varepsilon_{X_i}"] & X_\infty \arrow[ul, "p_i"'] \arrow[ur, "p_{i'}"] & LRX_{i'} \arrow[u, "\varepsilon_{X_{i'}}"'] & \\
& & LA \arrow[ul, "Lf_i"] \arrow[ur, "Lf_{i'}"'] \arrow[u, dotted, "!\, g"] \arrow[uul, dotted, "g_i"] \arrow[uur, dotted, "g_{i'}"'] & &
\end{tikzcd}$$

Die Behauptung ergibt sich nun wie folgt:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & RX_i \arrow[rr, "RX_f"] & & RX_{i'} \arrow[r] & \cdots \\
& & RX_\infty \arrow[ul, "Rp_i"'] \arrow[ur, "Rp_{i'}"] & & \\
& A \arrow[uu, "f_i"] \arrow[uurr, "f_{i'}"] \arrow[ur, dotted, "f"] \arrow[rr, "\eta_A"] & & RLA \arrow[uu, "Rg_{i'}"'] \arrow[uull, "Rg_i"] \arrow[ul, dotted, "Rg"'] &
\end{tikzcd}$$

□

4.13 Dreiecksgleichungen einer Adjunktion.
Es sei $\varphi_{a,b} : \mathcal{B}(La, b) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(a, Rb)$ eine Adjunktion. Durch Einschränkung erhalten wir für fixes a in $\mathcal{A}$ einen natürlichen Isomorphismus $\varphi_{a,\_} : \mathcal{B}(La,\_) \xrightarrow{\cong} F(\_) :=$

$\mathcal{A}(a, R(\_)) : \mathcal{B} \to \underline{Set}$. Nach dem Yoneda-Lemma [4.7] ist die natürliche Transformation $\varphi_{a,\_} = (\varphi_{a,b})_b$ durch $\eta_a := \varphi_{a,La}(1_{La}) \in F(La) = \mathcal{A}(a, RLa)$ wie folgt eindeutig bestimmt:

$$\varphi_{a,b}(f) \overset{4.7}{=\!=} F(f)(\eta_a) = \mathcal{A}(a, Rf)(\eta_a) = R(f)_*(\eta_a) = R(f) \circ \eta_a \text{ für } f \in \mathcal{B}(La, b).$$

Weiters formen die $\eta_a \in F(La) = \mathcal{A}(a, RLa)$ eine natürliche Transformation $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to R \circ L$, die sogenannte Einheit der Adjunktion, denn dazu betrachte man für $f : a \to a'$:

$$\begin{tikzcd}
1_{La} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[dd, mapsto] & & & \eta_a \arrow[dd, mapsto] \\
& \mathcal{B}(La, La) \arrow[r, "\varphi_{a,La}"] \arrow[d, "(Lf)_*"] & \mathcal{A}(a, RLa) \arrow[d, "(RLf)_*"] & \\
Lf & \mathcal{B}(La, La') \arrow[r, "\varphi_{a,La'}"] & \mathcal{A}(a, RLa') & RLf \circ \eta_a = \eta_{a'} \circ f \\
& \mathcal{B}(La', La') \arrow[r, "\varphi_{a',La'}"] \arrow[u, "(Lf)^*"] & \mathcal{A}(a', RLa') \arrow[u, "f^*"] & \\
1_{La'} \arrow[rrr, mapsto] \arrow[uu, mapsto] & & & \eta'_a \arrow[uu, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Dies entspricht der Aussage $a \preceq RLa$ einer Galoisbeziehung.

Da genauso $\varphi^{-1} : \mathcal{A}(a, Rb) \to \mathcal{B}(La, b)$ eine Adjunktion (R^{op}, L^{op}) beschreibt, folgt ebenso, daß durch $\varepsilon_b := \varphi^{-1}_{Rb,b}(1_{Rb}) \in \mathcal{B}(LRb, b) \cong \mathcal{A}(Rb, Rb)$ eine natürliche Transformation $\varepsilon : L \circ R \to 1_{\mathcal{B}}$, die sogenannte Coeinheit der Adjunktion, definiert ist. Dies entspricht der Aussage $LRb \preceq b$ einer Galoisbeziehung.

Der Aussage $RLR \approx R$ einer Galoisbeziehung entspricht nun die sogenannte eine Dreiecksgleichung der Adjunktion

$$R(\varepsilon_b) \circ \eta_{Rb} = 1_{Rb} : Rb \to RLRb \to Rb,$$

denn $\varphi_{Rb,b} : \mathcal{B}(LRb, b) \to \mathcal{A}(Rb, Rb)$ ist nach obigen durch $\varphi_{Rb,b}(f) := R(f) \circ \eta_{Rb} : Rb \to RL(Rb) = R(LRb) \to R(b)$ geben. Da $f := \varepsilon_b$ durch $\varphi_{Rb,b}(\varepsilon_b) = 1_{Rb}$ definiert ist, gilt das Gewünschte

$$(R \star \varepsilon) \circ (\eta \star R) = 1_R.$$

Aus Dualitätsgründen gilt ebenso die andere Dreiecksgleichung der Adjunktion

$$\varepsilon_{La} \circ L(\eta_a) = 1_{La} : La \to LRLa \to La, \text{ bzw.}$$
$$(\varepsilon \star L) \circ (L \star \eta) = 1_L.$$

Zusammengefaßt:

Lemma. *Es sei $\varphi_{a,b} : \mathcal{B}(La, b) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(a, Rb)$ eine Adjunktion. Dann werden durch $\eta_a := \varphi_{a,La}(1_{La})$ und $\varepsilon_b := \varphi^{-1}_{Rb,b}(1_{Rb})$ natürliche Transformationen*

$$\eta : 1_{\mathcal{A}} \to R \circ L \quad \text{und} \quad \varepsilon : L \circ R \to 1_{\mathcal{B}}$$

definiert welche die Dreiecksgleichungen

$$(R \star \varepsilon) \circ (\eta \star R) = 1_R \quad \text{und} \quad (\varepsilon \star L) \circ (L \star \eta) = 1_L$$

erfüllen. □

$$\mathcal{B}(La,b) \xrightarrow[\cong]{\quad\varphi\quad} \mathcal{A}(a,Rb)$$

$$b := La \qquad La \xrightarrow{1_{La}} La \;\overset{\varphi}{\longmapsto}\; a \xrightarrow{\varepsilon_a} RLa$$

$$a := Rb \qquad LRb \xrightarrow{\eta_b} b \;\overset{\varphi^{-1}}{\longleftarrow\!\shortmid}\; Rb \xrightarrow{1_{Rb}} Rb$$

$$\begin{tikzcd}
La \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "Lg"'] & b & \overset{\varphi}{\longmapsto} & a \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta_a"'] & Rb \\
& LRb \arrow[u, "\varepsilon_b"'] & & RLa \arrow[ur, "Rf"'] &
\end{tikzcd}$$

4.15 Bemerkung. Adjunktion mittels Einheit und Coeinheit.
Umgekehrt, seien natürliche Transformationen $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to R \circ L$ und $\varepsilon : L \circ R \to 1_{\mathcal{B}}$ gegeben, welche

$$(R \star \varepsilon) \circ (\eta \star R) = 1_R \text{ und } (\varepsilon \star L) \circ (L \star \eta) = 1_L$$

erfüllen (siehe 1.21). Wir definieren $\varphi_{a,b} : \mathcal{B}(La,b) \to \mathcal{A}(a,Rb)$ durch

$$\varphi_{a,b}(f) := R(f) \circ \eta_a,$$

und $\varphi_{a,b}^{-1} : \mathcal{A}(a,Rb) \to \mathcal{B}(La,b)$ durch

$$\varphi_{a,b}^{-1}(g) := \varepsilon_b \circ L(g).$$

Dann ist

$$(\varphi^{-1} \circ \varphi)(f) = \varepsilon_b \circ L(R(f) \circ \eta_a) = \varepsilon_b \circ LRf \circ L\eta_a = f \circ \varepsilon_{La} \circ L\eta_a = f$$

und

$$(\varphi \circ \varphi^{-1})(g) = R(\varepsilon_b \circ Lg) \circ \eta_a = R\varepsilon_b \circ RLg \circ \eta_a = g.$$

Betrachte dazu auch folgende Diagramme:

$$\begin{tikzcd}
La \arrow[r, "1_{La}"] \arrow[dr, "L\eta_a"'] & La \arrow[r, "f"] & b \\
& LRLa \arrow[u, "\varepsilon_{La}"] \arrow[r, "LRf"'] & LRb \arrow[u, "\varepsilon_b"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Rb & Rb \arrow[l, "1_{Rb}"'] \arrow[d, "\eta_{Rb}"] & a \arrow[l, "g"'] \arrow[d, "\eta_a"] \\
& RLRb \arrow[ul, "R\varepsilon_b"] & RLa \arrow[l, "RLg"]
\end{tikzcd}$$

Daß φ eine natürliche Transformation ist zeigt folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
a & b \arrow[d, "k"] \\
a' \arrow[u, "h"] & b'
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
f \arrow[rrr, mapsto] \arrow[dr, hook] \arrow[ddd, mapsto] & & & R(f) \circ \eta_a \arrow[dll, hook'] \arrow[dd, mapsto] \\
& \mathcal{B}(La,b) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\mathcal{B}(Lh,k)"'] & \mathcal{A}(a,Rb) \arrow[d, "\mathcal{A}(h,Rk)"] & \\
& \mathcal{B}(La',b') \arrow[r, "\varphi"'] & \mathcal{A}(a',Rb') & Rk \circ Rf \circ \eta_a \circ h \arrow[l, hook'] \arrow[d, equal] \\
k \circ f \circ Lh \arrow[ur, hook] \arrow[rr, mapsto] & & R(k \circ f \circ Lh) \circ \eta_{a'} \arrow[u, hook] \arrow[r, phantom, "="] & Rk \circ Rf \circ RLh \circ \eta_{a'}
\end{tikzcd}$$

Dies zeigt also die

Proposition. *Es seien $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ zwei Funktoren. Dann ist (L, R) ein adjungiertes Paar (vermöge dem natürlichen Isomorphismus φ) genau dann, wenn natürliche Transformationen $\eta : 1_{\mathcal{A}} \to R \circ L$ und $\varepsilon : L \circ R \to 1_{\mathcal{B}}$ existieren mit*

$$(R \star \varepsilon) \circ (\eta \star R) = 1_R \text{ und } (\varepsilon \star L) \circ (L \star \eta) = 1_L.$$

Dabei ist φ durch $\varphi_{a,b}(f) := R(f) \circ \eta_a$ und $\varphi^{-1}_{a,b}(g) = \varepsilon_b \circ L(g)$ gegeben, η durch $\eta_a := \varphi_{a,La}(1_{La})$ und ε durch $\varepsilon_b := \varphi^{-1}_{Rb,b}(1_{Rb})$. □

4.16 Folgerung. Äquivalenz als Adjunktion. *Es sei (L, R) eine Äquivalenz, dann ist (L, R) eine Adjunktion mit natürlichen Isomorphismen η als Einheit und ε als Coeinheit (gegeben durch 1.22). Weiters ist auch (R, L) eine Adjunktion mit Einheit ε^{-1} und Coeinheit η^{-1}. Insbesonders sind also Äquivalenzen L und R sowohl stetig als auch costetig.* □

4.17. Adjungierte Funktoren mit zusätzlichen Eigenschaften.
Es stellt sich die Frage, welche Eigenschaften von R sich in Eigenschaften der Coeinheit ε übersetzen lassen. Es gilt:

Proposition. *Es sei (L, R) eine Adjunktion mit Einheit η und Coeinheit ε. Dann gilt:*

1. *R ist treu $\Leftrightarrow$ $\forall b$: ε_b ist Epi.*
2. *R ist voll $\Leftrightarrow$ $\forall b$: ε_b ist Schnitt.*

1^{op}. *L ist treu $\Leftrightarrow$ $\forall a$: η_a ist Mono.*
2^{op}. *L ist voll $\Leftrightarrow$ $\forall a$: η_a ist Retrakt.*

Wir werden diese Fragen noch genauer behandeln, wenn wir in 6 reflektive Teilkategorien betrachten.

Beweis. 1 Es ist $\varepsilon_b : LRb \to b$ genau dann ein Epi, wenn $(\varepsilon_b)^* : \mathcal{B}(b, b') \to \mathcal{B}(LRb, b')$ injektiv ist. Da aber $\varphi_{Rb,b'} : \mathcal{B}(LRb, b') \to \mathcal{A}(Rb, Rb')$ bijektiv ist und $\varphi_{Rb,b} \circ (\varepsilon_b)^* : g \mapsto \varphi_{Rb,b}((\varepsilon_b)^*(g)) = R(g \circ \varepsilon_b) \circ \eta_{Rb} = Rg$ erfüllt, ist dies äquivalent mit “R ist treu”.

2 ($\Rightarrow$) Wir suchen eine Retraktion $\rho : b \to LRb$ zu $\varepsilon_b : LRb \to b$. Weil R voll ist, existiert ein ρ mit $R(\rho) = \eta_{Rb} : Rb \to RLRb$. Bleibt zu zeigen, daß $\rho \circ \varepsilon_b = 1_{LRb}$ oder äquivalent nach Anwenden von φ, daß $\eta_{Rb} = \varphi(1_{LRb}) = \varphi(\rho \circ \varepsilon_b) = R(\rho) \circ R(\varepsilon_b) \circ \eta_{Rb} = R(\rho)$.
($\Leftarrow$) Sei $f : Rb \to Rb'$ beliebig und ρ eine Retraktion zu $\varepsilon_b : LRb \to b$, d.h. $\rho \circ \varepsilon_b = 1_{LRb}$. Also ist $\eta_{Rb} = \varphi_{Rb,LRb}(1_{LRb}) = \varphi_{Rb,LRb}(\rho \circ \varepsilon_b) = R(\rho) \circ R(\varepsilon_b) \circ \eta_{Rb} = R(\rho)$. Damit gilt für $g := \varepsilon_{b'} \circ Lf \circ \rho : b \to LRb \to LRb' \to b'$, daß $Rg = R(\varepsilon_{b'}) \circ RLf \circ R(\rho) = R(\varepsilon_{b'}) \circ RLf \circ \eta_{Rb} = R(\varepsilon_{b'}) \circ \eta_{Rb'} \circ f = f$ ist, d.h. R ist voll. □

4.18 Proposition. Zusammensetzen von Adjunktionen.
Es seien $\mathcal{A} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \underset{R'}{\overset{L'}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}$ zwei Adjunktionen durch natürliche Isomorphismen φ und φ' und mit Einheiten η und η' und Coeinheiten ε und ε' gegeben. Dann ist auch $\mathcal{A} \underset{R \circ R'}{\overset{L' \circ L}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}$ eine Adjunktion, welche durch folgenden natürlichen Isomorphismus gegeben ist

$$\mathcal{C}(L'La, c) \xrightarrow{\varphi'_{La,c}} \mathcal{B}(La, R'c) \xrightarrow{\varphi_{a,R'c}} \mathcal{A}(a, RR'c)$$

und als Einheit $(R \star \eta' \star L) \circ \eta$ und als Coeinheiten $\varepsilon' \circ (L' \star \varepsilon \star R')$ hat.

Beweis. Offensichtlich ist obige Zusammensetzung von φ mit φ' ein natürlicher Isomorphismus, und somit $(L' \circ L, R \circ R')$ ein adjungiertes Paar. Die Einheit ist dann durch das Bild von $1_{L'La} \in \mathcal{C}(L'La, L'La)$ geben, und somit durch $R(\eta'_{La}) \circ \eta_a = ((R \star \eta' \star L) \circ \eta)_a$. Aus Dualität folgt die entsprechende Aussage für die Coeinheit. □

4.19 Universelle Pfeile. Es sei $\varphi : \mathcal{B}(La, b) \cong \mathcal{A}(a, Rb)$ eine Adjunktion. Dann ist φ nach 4.13 durch $\varphi(f) := R(f) \circ \eta_a$ mit $\eta_a := \varphi(1_{La})$ gegeben. Es ist somit (η, La) ein universeller Pfeil für R im folgenden Sinn:

Definition.
Es sei $R : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor und b ein Objekt von $\mathcal{B}$.

Dann heißt ein Paar (η, a) universeller Pfeil für b bzgl. R $\Leftrightarrow$ η ist ein $\mathcal{B}$-Morphismus $b \to R(a)$ und für jeden $\mathcal{B}$-Morphismus $f : b \to R(a')$ existiert ein eindeutiger $\mathcal{A}$-Morphismus $\bar f : a \to a'$ mit $R(\bar f) \circ \eta = f$, d.h.

$$\begin{tikzcd} & R(a) \arrow[dd, dotted, "R(!\ \bar f)"] \\ b \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & R(a') \end{tikzcd}$$

Mit anderen Worten: Für alle a' ist die Abbildung $\varphi : \mathcal{A}(a, a') \to \mathcal{B}(b, Ra')$, $g \mapsto Rg \circ \eta$ ist eine Bijektion, bzw. $\mathcal{B}(b, R(\_))$ durch a vermöge η dargestellt (cf. 4.23).

Dual dazu versteht man unter einen universellen Copfeil für $L : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ über a in $\mathcal{A}$ einen $\mathcal{A}$-Morphismus $\varepsilon : L(b) \to a$ für ein b in $\mathcal{B}$ mit

$$\begin{tikzcd} & L(b) \arrow[dl, "\varepsilon"'] \\ a & \\ & L(b') \arrow[ul, "g"] \arrow[uu, dotted, "L(!\ \bar g)"'] \end{tikzcd}$$

Die Pfeilkategorie (Kommakategorie) $\overrightarrow{bR}$ hat als Objekte Paare (η, a) mit $\mathcal{B}$-Morphismen $\eta : b \to R(a)$ und als Morphismen von (η, a) nach (η', a') die $\mathcal{A}$-Morphismen $f : a \to a'$ mit

$$\begin{tikzcd} & R(a) \arrow[dd, "R(f)"] \\ b \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] & \\ & R(a') \end{tikzcd}$$

Bemerkung. *Es ist also (η, a) genau dann ein universeller Pfeil für b bzgl. R, wenn (η, a) initial in $\overrightarrow{bR}$ ist.*

Insbesonders sind universelle Pfeile bis auf Isomorphie (in der Pfeilkategorie) eindeutig bestimmt. □

4.21 Darstellbare Funktoren versus universelle Pfeile.
Beachte, daß für $F : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ die Pfeilkategorien $\overrightarrow{\{*\}F}$ aus 4.19 zu jener aus 4.9

isomorph ist vermöge $(\eta : \{*\} \to F(a)) \mapsto (\eta(*) \in F(a))$:

$$\begin{tikzcd} \eta \arrow[dd, mapsto] & \in & F(a) \arrow[dd, "F(f)"] & & F(a) \arrow[dd, "F(f)"] \\ & & & \{*\} \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "\eta'"'] & \\ \eta' & \in & F(a') & & F(a') \end{tikzcd}$$

Somit besagt 4.9:

Lemma.
Ein Funktor $F : \mathcal{B} \to \underline{Set}$ wird genau dann durch ein Objekt b dargestellt, wenn ein universeller Pfeil (η, b) für $\{*\}$ bzgl. F existiert. Dabei ist $\eta : * \mapsto \varphi_b(1_b) \in F(b)$, wobei $\varphi : \mathcal{B}(b, \_) \to F$ den natürlichen Isomorphismus bezeichnet und umgekehrt ist φ durch $\varphi_{b'}(f) := F(f)(\eta)$ gegeben. □

4.20 Beispiel. Der freie Vektorraum. Es sei B eine Menge. Dann existiert ein Vektorraum A (der freie Vektorraum über B) und eine Abbildung $\eta : B \to A$ (die, die Elemente von B auf die Erzeuger von A abbildet), sodaß für jede Abbildung $f : B \to A'$ in einen Vektorraum A' eine eindeutige lineare Abbildung $\bar f : A \to A'$ existiert mit $\bar f \circ \eta = f$. Um das kategoriell zu formulieren benötigen wir den Vergißfunktor $V : \underline{VR} \to \underline{Set}$. Dann sind $\eta : B \to V(A)$ und $f : B \to V(A')$ beide $\underline{Set}$-Morphismen und $\bar f : A \to A'$ ein $\underline{VR}$-Morphismus. Und die Kommutativität folgenden Diagramms ist gegeben:

$$\begin{tikzcd} & V(A) \arrow[dd, dotted, "V(!\bar f)"] \\ B \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "f"'] & \\ & V(A') \end{tikzcd}$$

Ein Beispiel eines universellen Copfeils ist die Identität von X mit der diskreten Topologie nach X mit der gegebenen Topologie. Ein anderes ist die Inklusion der Torsionsuntergruppe einer Abelschen Gruppe in diese.

4.22 Lemma. Isomorphie von Pfeilkategorien.
Sei $R : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor, b ein Objekt von $\mathcal{B}$ und $F : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ gegeben durch $F(\_) := \mathcal{B}(b, R(\_))$. Dann ist ein Isomorphismus von Pfeilkategorien $\overrightarrow{\{*\}F} \xrightarrow{\cong} \overrightarrow{bR}$ gegeben durch $(\eta \in F(a)) \mapsto (\eta : b \to R(a))$ auf Objekten und der Identität auf Morphismen.

Beweis.

$$\begin{tikzcd} \eta \arrow[dd, mapsto] & \in & F(a') \arrow[r, equal] \arrow[dd, "F(f)"] & \mathcal{B}(b, R(a')) \arrow[dd, "R(f)_*"] & & R(a') \arrow[dd, "R(f)"] \\ & & & & b \arrow[ur, "\eta"] \arrow[dr, "R(f)\circ\eta"'] & \\ F(f)(\eta) & \in & F(a'') \arrow[r, equal] & \mathcal{B}(b, R(a'')) & & R(a'') \end{tikzcd}$$

□

4.23 Corollary. Darstellungen via universeller Pfeile.
Sei $R : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein Funktor und b ein Objekt von $\mathcal{B}$. Dann ist ein Paar (η, a) genau dann ein universeller Pfeil für b bzgl. R, wenn $\mathcal{B}(b, R(\_)) : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ durch a darstellbar ist.

Dabei ist $\eta := \varphi_a(1_a) \in \mathcal{B}(b, Ra)$, wobei $\varphi : \mathcal{A}(a, \_) \to \mathcal{B}(b, R(\_))$ den natürlichen Isomorphismus bezeichnet. Und umgekehrt ist dieser durch $\varphi_{a'}(f) := R(f) \circ \eta$ gegeben.

Insbesonders liefert jede Adjunktion $\varphi : \mathcal{B}(La, b) \cong \mathcal{A}(a, Rb)$ nach 4.6 Darstellungen von $\mathcal{A}(a, R(\_)) =: F(\_)$ durch La und somit auch universelle Pfeile $\eta_a : a \to R(La)$ für a über R.

Beweis. Nach 4.21 und 4.9 ist $F(\_) := \mathcal{B}(b, R(\_)) : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ genau dann durch a darstellbar, wenn ein universeller Pfeil $\eta : \{*\} \to F(a)$, also ein initiales Objekt (η, a) in $\overrightarrow{\{*\}F} \cong \overrightarrow{bR}$ existiert, dies sind nach 4.19 genau die universellen Pfeile $(\eta, R(a))$ von b bzgl. R. $\square$

4.25 Theorem. Charakterisierung adjungierter Funktoren.
Folgende Aussagen für einen Funktor $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ sind äquivalent:

1. *$\forall a \in |\mathcal{A}|$ gibt es einen universellen Pfeil (η_a, La) für a bzgl. R;*
2. *$\forall a \in |\mathcal{A}|$ ist $\mathcal{A}(a, R(\_)) : \mathcal{B} \to \underline{Set}$ darstellbar;*
3. *Es gibt einen Funktor $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und zwei natürliche Transformationen $\eta : 1 \to R \circ L$ und $\varepsilon : L \circ R \to 1$ mit*

$$\begin{tikzcd} La \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "L\eta_a"'] & & La \\ & LRLa \arrow[ur, "\varepsilon_{La}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Rb \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\eta_{Rb}"'] & & Rb \\ & RLRb \arrow[ur, "R\varepsilon_b"'] & \end{tikzcd}$$

4. *Es gibt einen Funktor $L : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ und einen natürlichen Isomorphismus $\varphi : \mathcal{B}(L\_, \_) \xrightarrow{\cong} \mathcal{A}(\_, R\_) : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{B} \to \underline{Set}$.*

Man nennt dies eine adjungierte Situation. Der Funktor L heißt linksadjungierter, R heißt rechtsadjungierter, η ist die Einheit der Adjunktion und ε die Coeinheit.

Beweis. (2 $\Leftrightarrow$ 1) ist 4.23.

(4 $\Leftrightarrow$ 3) ist 4.15.

(4 $\Rightarrow$ 2) ist klar, siehe 4.6.

(1 $\Rightarrow$ 3) Wir erweitern L zu einem Funktor durch folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[d, "g"'] & RLa \arrow[d, dotted, "R(Lg)"] \\ a' \arrow[r, "\eta_{a'}"] & RLa' \end{tikzcd}$$

Per Definition wird damit $\eta : 1 \to RL$ zu einer natürlichen Transformation.
Die Coeinheit $\varepsilon_b : LRb \to b$ definieren wir gerade so, daß die eine Dreiecksgleichung gilt:

$$\begin{tikzcd} Rb \arrow[r, "\eta_{Rb}"] \arrow[dr, "1"'] & RLRb \arrow[d, dotted, "R(\varepsilon_b)"] \\ & Rb \end{tikzcd}$$

Dann ist ε eine natürliche Transformation, denn

$$\begin{tikzcd}
 & Rb' \arrow[r, "\eta_{Rb'}"] & RLRb' \arrow[d, "R\varepsilon_{b'}"] \\
Rb \arrow[ur, "Rf"] \arrow[r, "\eta_{Rb}"] \arrow[dr, "1"'] & RLRb \arrow[ur, "RLRf"] \arrow[d, "R\varepsilon_b"] & Rb' \\
 & Rb \arrow[ur, "Rf"'] &
\end{tikzcd}$$

und zweite Dreiecksgleichung $\varepsilon_{La} \circ L\eta_a = 1_{La}$ ergibt sich aus

$$\begin{tikzcd}
 & a \arrow[r, "\eta_a"] \arrow[dl, "\eta_a"'] & RLa \arrow[dl, "RL\eta_a"'] \arrow[ddl, "1"] \\
RLa \arrow[r, "\eta_{RLa}"] \arrow[dr, "1"'] & RLRLa \arrow[d, "R\varepsilon_{La}"'] & \\
 & RLa &
\end{tikzcd}$$

Dabei kommutieren die links oberen Parallelogramme, da η eine natürliche Transformation ist, und folglich kommutiert das jeweils rechte Polygon zusammengesetzt mit η und damit auch nach Weglassen von R. $\square$

4.24 Bemerkung. Colimes als universeller Pfeil.
Es sei $X : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ ein Diagramm. Dann betrachten wir den Funktor $\mathrm{konst} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$, welcher jedes Objekt c von $\mathcal{C}$ auf das konstante Diagramm konst_c abbildet und jeden Morphismus f auf die natürliche Transformation mit Komponenten f. Den Cokegeln $(c, (f_i)_i)$ über X entsprechen dann eindeutig die natürlichen Transformation $(f_i)_i$ von X nach konst_c. Wir erhalten also einen Isomorphismus $\mathrm{Cokeg}(X) \cong \overrightarrow{X\ \mathrm{konst}}$.

$$\begin{tikzcd}
i \arrow[dd, "f"] & X(i) \arrow[r, "f_i"] \arrow[dd, "X(f)"'] & \mathrm{konst}_c(i) \arrow[dd, "\mathrm{id}"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}"] & \\
 & & & c \\
i' & X(i') \arrow[r, "f_{i'}"] & \mathrm{konst}_c(i') \arrow[ur, "\mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

Da die Colimiten von X genau die initialen Objekte von $\mathrm{Cokeg}(X)$ sind gilt also

Lemma. *Die Colimiten von X entsprechen genau den universellen Pfeilen für X über $\mathrm{konst} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{I}}$. Dual gilt: Jeder Limes ein universeller Copfeil.* $\square$

Existenz von Adjunktionen

4.26 Darstellungssätze. *Es sei $\mathcal{A}$ vollständig und $F : \mathcal{A} \to \underline{\mathrm{Set}}$ erhalte Limiten. Dann ist F darstellbar falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

General: *Es existiert eine Lösungsmenge,*
d.h. eine initiale Menge von Objekten in $\overrightarrow{\{*\}F}$.
Special: *Es ist $\mathcal{A}$ lokal klein und besitzt eine Coseparatormenge (siehe* *3.35**).*

Beweis. Wegen 4.9 müssen wir ein initiales Objekt in der Pfeilkategorie $\overrightarrow{\{*\}F}$ finden. Wir wenden dazu die Sätze 3.34 und 3.36 an.

Es ist $\overrightarrow{bF}$ vollständig, da $\mathcal{A}$ vollständig ist und $F : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ Limiten erhält:
Sei nämlich X ein Diagramm über $\mathcal{I}$ in $\overrightarrow{bF}$

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[rr] \arrow[d, dotted, "! \ (1)"] \arrow[ddl, bend right, "X(i)"'] \arrow[ddr, "X(i')"] & & F(a) \arrow[dll, dotted, "(2)\ !"'] \arrow[ddl, "f_{i'}"] \\
 & F(\lim X_0) \arrow[dl, "F(p_i)"'] \arrow[dr, "F(p_{i'})"] & & \\
F(X_0(i)) \arrow[rr, "F(X_0(h))"] & & F(X_0(i')) &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
X_0(i) \arrow[rr, "X_0(h)"] & & X_0(i') \\
 & \lim X_0 \arrow[ul, "p_i"] \arrow[ur, "p_{i'}"'] &
\end{tikzcd}$$

Wobei (1) existiert, da F stetig ist, und ebenso (2).

Es ist $\overrightarrow{bF}$ lokal klein, wenn $\mathcal{A}$ es ist, da $\overrightarrow{bF} \to \mathcal{A}$ Limiten erhält (und sogar erzeugt), wie wir gerade gesehen haben: In der Tat sei h ein Mono in $\overrightarrow{bF}$, dann ist $(1, 1)$ ein Pullback von (h, h) in $\overrightarrow{bF}$ und somit auch in $\mathcal{A}$, da $\overrightarrow{bF} \to \mathcal{A}$ stetig ist, also ist h ein Mono in $\mathcal{A}$. Die Umkehrung ist offensichtlich, da $\overrightarrow{bF} \to \mathcal{A}$ treu ist.
Wir können somit aus einer repräsentativen Menge von Mono's m in $\mathcal{A}$ eine in $\overrightarrow{bF}$ erhalten, indem wir alle Faktorisierungen der folgenden Form verwenden:

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dl, dotted] \arrow[dr] & \\
F(a') \arrow[rr, tail, "F(m)"] & & F(a)
\end{tikzcd}$$

Es existiert eine Coseparatormenge in $\overrightarrow{bF}$, wenn eine in $\mathcal{A}$ existiert. In der Tat sei S eine Coseparatormenge in $\mathcal{A}$ und $S' := \{b \to F(s) : s \in S\}$. Dann ist S' eine Coseparatormenge, denn für $\overrightarrow{bF}$-Morphismen $\alpha \neq \beta : (\eta, F(a)) \to (\eta', F(a'))$ existiert ein $\mathcal{A}$-Morphismus $f : a' \to s$ in ein $s \in S$ mit $f \circ \alpha \neq f \circ \beta$. Somit ist $f : (\eta', F(a')) \to (F(f) \circ \eta', F(s))$ ein separierender Morphismus in $\overrightarrow{bF}$:

$$\begin{tikzcd}
 & b \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[d, "\eta'"] \arrow[dr, "F(f)\circ\eta'"] & \\
F(a) \arrow[r, shift left, "F(\alpha)"] \arrow[r, shift right, "F(\beta)"'] & F(a') \arrow[r, "F(f)"'] & F(s)
\end{tikzcd}$$

□

4.27 Adjungierte-Funktoren Theorem. *Es sei $\mathcal{B}$ vollständig und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ erhalte Limiten. Dann ist R ein Rechtsadjungierter, falls eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt ist:*

GAFT. *Für alle a in $\mathcal{A}$ existiert eine Lösungsmenge, d.h. eine initiale Menge von Objekten in $\overrightarrow{aR}$.*

SAFT. *Es ist $\mathcal{B}$ lokal klein und besitze eine Coseparatormenge.*

Beweis. Verwende entweder, daß nach 4.25 R genau dann ein Rechtsadjungierter ist, wenn $F(\_) := \mathcal{A}(a, R(\_)) : \mathcal{B} \to \underline{Set}$ darstellbar ist für alle a in $\mathcal{A}$, und nach 4.22 eine initiale Menge von Objekten von $\overrightarrow{aR}$ genau einer solchen von $\overrightarrow{\{*\}F}$ entspricht; oder genau dann wenn ein initiales Objekt in $\overrightarrow{aR}$ existiert und wende nun den selben Beweis wie für 4.26 an. □

Wir wollen noch eine kanonische Möglichkeit angeben eine Lösungsmenge zu finden, dazu folgende

4.28 Definition. Es sei $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ ein Funktor und a ein Objekt von $\mathcal{A}$. Dann sagt man, daß a das Objekt b von $\mathcal{B}$ R-ERZEUGT, falls ein $\mathcal{A}$-Morphismus $\eta : a \to R(b)$ existiert, s.d. $R(\alpha) \circ \eta = R(\beta) \circ \eta \Rightarrow \alpha = \beta$. Ist $R = 1$, so bedeutet dies gerade, daß η ein Epi ist.

Gilt zusätzlich, daß aus $R(m) \circ \eta' = \eta$ mit Mono m folgt, daß m ein Iso ist, so sagt man, daß a das Objekt b EXTREM R-ERZEUGT.

$$\begin{tikzcd}
& R(b') \arrow[d, tail, "R(m)"] \\
a \arrow[ur, "\eta'"] \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr] & R(b) \arrow[d, shift right, "R(\beta)"'] \arrow[d, shift left, "R(\alpha)"] \\
& R(b'')
\end{tikzcd}$$

Ist $R = 1$, so bedeutet dies gerade, daß η ein extremer Epi ist.

Beispiel. es sei $R : \underline{Gru} \to \underline{Set}$ der Vergißfunktor. Beachte dabei, daß eine Abbildung $f : X \to R(G)$ genau dann R-erzeugend ist, wenn G als Gruppe von $f(X)$ erzeugt wird (siehe 2.4). Er ist dann sogar extrem R-erzeugend. Gleiches gilt für $\underline{R\text{-}Mod}$. Für $\underline{HGru}$, $\underline{Mon}$ und $\underline{Ring}$ ist $f : X \to R(A)$ genau dann erzeugend ist, wenn $\langle f(X)\rangle \to A$ ein (nicht nowtwendig surjektiver) Epimorphismus ist, siehe 2.4. Somit ist f genau dann extrem R-erzeugend, wenn $A = \langle f(X)\rangle$ gilt.

4.29 Lemma. *Es sei $\eta : a \to R(b)$ ein R-universeller Pfeil. Dann wird b durch η extrem R-erzeugt.*

Beweis. Aus der Eindeutigkeitsaussage eines universellen Pfeils folgt sofort, daß b durch η R-erzeugt wird. Für die Extremheit betrachte nun:

$$\begin{tikzcd}
& R(b) \arrow[d, dotted, "R(\ )"] \\
a \arrow[ur, "\eta"] \arrow[r, "\eta'"] \arrow[dr, "\eta"'] & R(b') \arrow[d, tail, "R(m)"] \\
& R(b)
\end{tikzcd}$$

Die Eindeutigkeitsaussage liefert, daß m eine Retraktion und somit ein Isomorphismus ist. □

4.30 Lemma. *Es besitze $\mathcal{B}$ Egalisatoren und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ erhalte diese. Falls $\eta : a \to R(b)$ die extremal-Bedingung eines extrem R-erzeugenden Morphismuses besitzt, so ist η extrem R-erzeugend. Vgl. 3.10.6.*

Beweis. Sei nämlich $R(\alpha)\circ\eta = R(\beta)\circ\eta$, und $m : b' \to b$ der Equalizer von α und β. Dann ist $R(m)$ der Equalizer von $R(\alpha)$ und $R(\beta)$ und somit existiert ein $\eta' : a \to R(b')$ mit $\eta = R(m)\circ\eta'$. Wegen Extremalität von η ist m ein Iso, und somit $\alpha = \beta$.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rr, "\eta"] \arrow[dr, dotted, "\eta'"'] & & R(b) \arrow[r, shift left, "R(\alpha)"] \arrow[r, shift right, "R(\beta)"'] & R(b'') \\
& R(b') \arrow[ur, tail, "R(m)"'] & &
\end{tikzcd}$$
□

4.31 Lemma. *Es sei $\mathcal{B}$ lokal klein, besitze Durchschnitte und Egalisatoren und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ bewahre beide. Dann besitzt jeder Morphismus $\eta : a \to R(b)$ eine (extrem R-erzeugend,Mono)-Faktorisierung. Vgl. 3.10.8.*

Beweis. Es sei $\mathcal{M}$ eine repräsentative Klasse von Mono's $m : \operatorname{dom} m \to b$ über welche $\eta : a \to R(b)$ faktorisiert. Sei $\mu : \bigcap_{m\in\mathcal{M}} \operatorname{dom} m \to b$ deren Durchschnitt. Dann faktorisiert $\eta : a \to R(b)$ mittels einem $\eta' : a \to R(\bigcap \operatorname{dom} m)$ über $R(\mu)$. Wir behaupten, daß η' extrem R-erzeugend ist und dafür genügt es nach 4.30 die extremal-Bedingung zu überprüfen. Sei also $\eta' = R(m')\circ\eta''$ eine Faktorisierung mittels eines Mono's m'. Dann existiert ein zu $\mu\circ m'$ äquivalenter Mono m und somit ein Morphismus $p_m : \bigcap \operatorname{dom} m'' \to \operatorname{dom} m \cong \operatorname{dom} m'$ mit $\mu\circ m'\circ p_m = \mu$, d.h. $m'\circ p_m = 1$. Also ist m' eine Retraktion und somit ein Iso.

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[rrr, "\eta"] \arrow[drr] \arrow[dd, "\eta''"'] \arrow[ddr, dotted, "\eta'"] & & & R(b) \\
& & R(\operatorname{dom} m) \arrow[ur, tail, "R(m)"] & \\
R(\operatorname{dom} m') \arrow[r, tail, "R(m')"'] & \bigcap R(\operatorname{dom} m) \arrow[r, equal] & & R(\bigcap \operatorname{dom} m) \arrow[ul, "R(p_m)"'] \arrow[uu, "R(\mu)"']
\end{tikzcd}$$
□

4.32 Zweites adjungiertes Funktor-Theorem. *Es sei $\mathcal{B}$ vollständig, lokal klein und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ erhalte Limiten. Falls jedes $\mathcal{A}$ Objekt nur eine Menge von nicht isomorphen $\mathcal{B}$ Objekten extrem R-erzeugt, so ist R ein rechts-Adjungierter.*

Beweis. Wir verwenden das GAFT 4.27 und müssen folglich nur zeigen, daß eine Lösungsmenge existiert. Nach 4.31 besitzt jeder Morphismus $\eta : a \to R(b)$ eine (extrem-R-erzeugende,Mono)-Faktorisierung und wegen der vorausgesetzen Kleinheitsbedingung dürfen wir annehmen, daß der extrem-R-erzeugende Teil zu einer fixen Menge von Morphismen $\eta' : a \to R(b')$ gehört. Folglich bilden diese eine initiale Menge von Objekten in $\overrightarrow{aR}$. □

4.33 Umkehrung. Wir können auch zeigen, daß für vollständige, lokal kleine und extrem colokal kleine Kategorien $\mathcal{B}$ ein Funktor $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ genau dann ein Rechtsadjungierter ist, wenn er stetig ist und jedes $\mathcal{A}$-Objekt nur eine Menge von nicht isomorphen $\mathcal{B}$ Objekten extrem R-erzeugt:

Beweis. Sei $\mathcal{B}_0$ eine repräsentative Klasse von Objekten in $\mathcal{B}$ die durch a extrem R-erzeugt werden, d.h. für jedes Objekt $b \in \mathcal{B}_0$ existiert ein extrem R-erzeugender Morphismus $\eta_b : a \to R(b)$. Sei $\eta : a \to R(L(a))$ der universelle Pfeil. Folglich existiert ein eindeutiger $\mathcal{B}$-Morphismus $f_b : L(a) \to b$ mit $R(f_b)\circ\eta = \eta_b$. Wir behaupten, daß f_b ein extremer Epi ist. Dafür müssen wir wegen 4.30 nur die extremal-Bedingung nachprüfen. Sei also $f_b = m \circ g$ mit einem Mono m. Dann ist $\eta_b = R(m) \circ R(g) \circ \eta$ und da η_b extrem R-erzeugend ist, ist m ein Iso. Da $\mathcal{B}$ extrem colokal klein ist, kann $\mathcal{B}_0$ nur eine Menge sein. □

4.34 Sandwich-Theorem. *Es seien Funktoren wie folgt gegeben*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{B} \arrow[rr, "R"] \arrow[dr, "V"'] & & \mathcal{A} \arrow[dl, "U"] \\ & \mathcal{C} & \end{tikzcd}$$

Falls $\mathcal{B}$ vollständig, lokal klein und colokal klein ist, R Limiten erhält, U treu und V ein Rechtsadjungierter ist, so ist auch R ein Rechtsadjungierter.

Beweis. Wir verifizieren die Voraussetzungen des 2.ten adjungierten Funktor-Theorems 4.32, d.h. daß jedes a nur eine Menge von nicht isomorphen $\mathcal{B}$-Objekten (extrem) R-erzeugt. Sei also $\mathcal{B}_0$ eine Klasse solcher nicht isomorpher Objekte in $\mathcal{B}$, d.h. für jedes $b \in \mathcal{B}_0$ existiert ein R-erzeugender Morphismus $\eta_b : a \to R(b)$. Sei $\eta : U(a) \to V(b_0) = U(R(b_0))$ ein universeller Pfeil für V. Für jedes $b \in \mathcal{B}_0$ existiert also ein $\bar{\eta}_b : b_0 \to b$ mit

$$\begin{tikzcd} U(a) \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, "U(\eta_b)"'] & V(b_0) \arrow[d, dotted, "V(\bar{\eta}_b)"'] & \\ U(R(b)) \arrow[r, equal] & V(b) \arrow[r, shift left, "V(\alpha)"] \arrow[r, shift right, "V(\beta)"'] & V(b') \end{tikzcd}$$

Wir behaupten, daß $\bar{\eta}_b : b_0 \to b$ ein Epi ist. Sei also $\alpha \circ \bar{\eta}_b = \beta \circ \bar{\eta}_b$. Dann ist $U(R(\alpha) \circ \eta_b) = V(\alpha) \circ V(\bar{\eta}_b) \circ \eta = V(\beta) \circ V(\bar{\eta}_b) \circ \eta = U(R(\beta) \circ \eta_b)$, d.h. $R(\alpha) \circ \eta_b = R(\beta) \circ \eta_b$, da U treu ist, und somit $\alpha = \beta$, da η_b R-erzeugend ist.

Da $\mathcal{B}$ colokal klein ist, ist $\mathcal{B}_0$ eine Menge. □

4.35 Gegenbeispiele. Sei $\mathcal{B}$ die duale Kategorie zur partiell geordneten Klasse aller Ordinalzahlen und sei $\mathcal{A}$ die Kategorie mit einen einzigen Morphismus und $R : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ der einzige (konstante) Funktor. Dann ist

1. $\mathcal{B}$ vollständig (Supremum), colokal klein ($\{\alpha : \alpha \succ \beta\}$ ist eine Menge) und hat einen Coseparator (nämlich 0);
2. Jedes Objekt in $\mathcal{A}$ extrem R-erzeugt höchstens eine Menge (die leere Menge) von $\mathcal{B}$-Objekten;
3. R erhält Limiten;
4. R ist kein Rechtsadjungierter.

Es ist also die Bedingung "lokal klein" im SAFT und im 2^{ten}AFT notwendig.

4.36 Beispiel der freien Gruppe. Die Kategorie <u>*Gru*</u> ist vollständig und lokal klein (da Mono's genau die injektiven Morphismen sind) und der Vergißfunktor bewahrt Limiten. Um zu zeigen, daß er ein Rechtsadjungierter ist, können wir das SAFT 4.26 nicht anweden, da <u>*Gru*</u> nach 3.35 keine Coseparatormenge besitzt. Wegen dem 2.AFT 4.32 genügt es aber zu zeigen, daß jede Menge nur eine Menge von nicht isomorphen Gruppen erzeugt. Jede von einer Menge X erzeugte Gruppe G kann als Bild aller Worte mit Buchstaben aus $X \times \{\pm 1\}$ betrachtet werden, wird also bis auf Bijektionen durch eine Äquivalenzrelationen auf $\bigsqcup_{n \in \mathbb{N}} (X \times \{\pm 1\})^n$

beschrieben. Die Anzahl der möglichen Strukturen auf einer Menge G ist ebenfalls nach oben durch $|G^{G\times G}|$ beschränkt.

4.37 Weitere Beispiele von Adjunktionen.
Die freie Halbgruppe über einer Menge.
Die freie Gruppe über einer Menge.
Der freie R-Modul über einer Menge.
Die freie R-Algebra über einer Menge.
Der freie kommutative Ring $\mathbb{Z}[B]$ über einer Menge B.
Der freie (=diskrete) topologische Raum über einer Menge: 3.35
Die diskret partiell geordnete Menge über einer Menge.
Die Stone-Čech Kompaktifizierung eines topologischen Raums: 3.35.
Die Hewitt Realkompaktifizierung eines topologischen Raums: 3.35.
Die Kelleyfizierung eines topologischen Raums.
Die Kurvifizierung eines topologischen Raums.
Die Vervollständigung eines metrischen Raums.
Die Vervollständigung eines uniformen Raums.
Die Vervollständigung eines normierten Raums.
Die Vervollständigung eines lokalkonvexen Raums: 3.35.
Die Gruppe der Quotienten einer Halbgruppe: 4.34.
Der Quotientenkörper eines Rings.
Die Abelisierung einer Gruppe: 4.34.
Die Torsionsuntergruppe einer abelschen Gruppe.
Der torsionsfreie Anteil einer abelschen Gruppe: 4.34.
Die partiell geordnete Menge zu einer quasi-geordneten Menge.
Die lokalkonvexe Topologie zu einem topologischen Vektorraum.
Der Homfunktor und das Produkt mit einer Menge oder einem lokalkompakten Raum: 3.35.
Der Homfunktor und das Tensorprodukt von R-Moduln (mit kommutativen R): 3.35.
Das projektive Tensorprodukt von normierten Räumen: 3.35.

Freie Objekte

4.38 Definition. Es sei $R : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ ein Funktor. Unter einem (R-)FREIEN OBJEKT über einer Menge X versteht man ein Objekt A in $\mathcal{A}$ zusammen mit eine Abbildung $\mu : X \to R(A)$ (die Insertion der ERZEUGER $x \in X$ in A), welche ein universeller Pfeil bzgl. R ist.

1. Ein Objekt A ist frei über der leeren Menge genau dann, wenn es initial ist.
2. Es ist frei über einer einelementigen Menge, wenn es R darstellt nach 4.23.
3. R ist rechtsadjugiert, genau dann wenn freie Objekte jeder Menge existieren nach 4.25.

4. Falls also Copotenzen in $\mathcal{A}$ existieren, dann ist R ein Rechtsadjungierter genau dann wenn er darstellbar ist.

$$\begin{tikzcd}
\{x\} \arrow[r] \arrow[d, hook] & RL(1) \arrow[d, "i_x"] \arrow[dd, dotted, bend left=60, "(2)"] \\
X \arrow[r, dotted, "(1)"] \arrow[dr] & \coprod_X RL(1) \arrow[d, dotted, "(3)"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

5. Falls das freie Objekt A über irgend einer nicht-leeren Menge X existiert, so ist R stetig: Falls $\mu : X \to R(A)$ ein universeller Pfeil ist, dann ist $\mathrm{Abb}(X, RA') \cong \mathcal{A}(A, A')$, d.h. $\mathrm{Abb}(X, R(\_))$ ist darstellbar und somit stetig. Wegen $X \neq \emptyset$ reflektiert $\mathrm{Abb}(X, \_)$ Limiten nach 4.39, also muß R sie bewahren.
6. Da in *Set* jede Menge X das Coprodukt $\coprod_{x \in X} \{x\}$ ist, ist R genau dann ein Rechtsadjungierter, wenn er durch ein Objekt A dargestellt wird, für welches beliebige Copotenzen existieren.

4.39 Lemma. *Falls jedes Objekt A von $\mathcal{A}$ ein Retrakt einer Copotenz von S ist, dann reflektiert $\mathcal{A}(S, \_)$ Limiten.*
Falls $S \neq \emptyset$ ist, so erhält und reflektiert $\mathrm{Abb}(S, \_)$ *Limiten.*

Beweis. Es sei $X : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ ein Diagramm und $(A, (l_i : A \to X(i)))$ so, daß $(\mathcal{A}(S, A), (\mathcal{A}(S, l_i))_i)$ ein Limes von $\mathcal{A}(S, \_) \circ X : \mathcal{I} \to \underline{Set}$ ist. Es ist $\mathcal{A}(S, \_)$ treu, da nach Voraussetzung S ein Separator ist (In der Tat seien $\alpha, \beta : A \to A'$ und $p : \coprod_J S \to A$ eine Retraktion. Es sei $p_j := p \circ \mathrm{inj}_j : S \to \coprod_J S \to A$ und $\alpha \circ p_j = \beta \circ p_j$ für alle $j \in J$. Dann ist $\alpha \circ p = \beta \circ p$ und da p ein Epi ist auch $\alpha = \beta$). Also ist $(A, (l_i : A \to X(i)))$ ein Kegel für X, weil treue Funktoren die Kommutativität von Diagrammen reflektieren.

Es sei $(A', (l'_i : A' \to X(i)))$ ein zweiter Kegel für X. Dann existiert eine eindeutige Abbildung $h : \mathcal{A}(S, A') \to \mathcal{A}(S, A)$ mit $\mathcal{A}(S, l_i) \circ h = \mathcal{A}(S, l'_i)$. Für jedes $f : S \to A'$ kommutiert somit $l'_i \circ f = (l'_i)_*(f) = ((l_i)_* \circ h)(f) = l_i \circ h(f)$. Nach Voraussetzung ist A' ein Retrakt von $\coprod_{J'} S$ via Retraktion p' mit Schnitt s'. Folglich ist $l'_i \circ (p' \circ \mathrm{inj}_j) = l_i \circ h(p' \circ \mathrm{inj}_j)$ und nach der universellen Eigenschaft von $\coprod_{J'} S$ existiert ein eindeutiger Morphismus $h' : \coprod_{J'} S \to A$ mit $h' \circ \mathrm{inj}_j = h(p' \circ \mathrm{inj}_j)$. Es kommutiert

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[rr, "1_{A'}"] \arrow[dr, "s'"'] \arrow[ddd, dotted, "(2)"'] & & A' \arrow[ddd, "l'_i"] \\
& \coprod_{J'} S \arrow[ur, "p'"'] \arrow[ddl, dotted, "h'"', "(1)"] & \\
& S \arrow[u, "\mathrm{inj}_j"'] \arrow[dl, "h(p' \circ \mathrm{inj}_j)"] & \\
A \arrow[rr, "l_i"'] & & X(i)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
S \arrow[d, "\mathrm{inj}_j"'] \arrow[dr] & \\
\coprod_J S \arrow[r, dotted] \arrow[d, "p"'] & A' \\
A \arrow[ur, shift left, "\alpha"] \arrow[ur, shift right, "\beta"'] &
\end{tikzcd}$$

wegen der Colimes-Eigenschaft von $\coprod_{J'} S$. Da h eindeutig ist und $\mathcal{A}(S, \_)$ treu ist, ist $h' \circ s'$ der eindeutige Morphismus, der das äußere Rechteck kommutativ macht. Also ist (A, l_i) ein Limes von X.

Der zweite Teil folgt sofort, denn $A \cong \coprod_{a\in A}\{a\}$ ist ein Retrakt von $\coprod_A S$ vermöge $\coprod_{a\in A} \mathrm{const}_a$. $\square$

4.40 Lemma. *Sei $R : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ treu. Dann ist jedes freie Objekt über einer nicht leeren Menge ein Separator.*

Beweis. Betrachte für $X \neq \emptyset$ (also Separator in $\underline{Set}$) das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] \arrow[dr, "\forall"] & R(A) \arrow[d, dotted, "R(\ )"] \\ R(A'') & R(A') \arrow[l, shift right, "R(\beta)"'] \arrow[l, shift left, "R(\alpha)"] \end{tikzcd}$$ $\square$

4.41 Beispiel. Es sei $\mathcal{A}$ die Kategorie der Vektorräume über einen Körper $\mathbb{K}$. Dann ist ein Objekt A genau dann frei über einer Menge X vermöge einer Abbildung η, wenn η die Menge X injektiv auf eine Basis von A abbildet. Jedes Objekt ist somit frei, die universellen Pfeile sind injektiv, und zwei (freie) Objekte sind genau dann isomorph, wenn ihre Erzeugendensysteme gleichmächtig sind. Wir wollen im folgenden nun untersuchen, was davon allgemeingültig ist.

Die Insertion der Generatoren muß nicht immer injektiv sein. Denn sei $\mathcal{A}$ die volle Teilkategorie von $\underline{Set}$ die nur aus der leeren und den einpunktigen Mengen besteht dann ist ein freies Objekt über nicht leeren Mengen gerade $\{*\}$.

4.42 Lemma. *Es besitze $\mathcal{A}$ ein Objekt, mit $|R(A)| > 1$. Dann ist die Insertionsabbildung der Generatoren in ein freies Objekt injektiv.*

Beweis. Es sei $\eta : X \to R(A)$ eine solche Insertionsabbildung. Falls $\eta(x_1) = \eta(x_2)$ ist, dann gilt für alle $f : X \to R(A')$ mit $|R(A')| > 1$, daß $f = R(f') \circ \eta$ für einen Morphismus $f' : A \to A'$ und somit ist $f(x_1) = f(x_2)$, also $x_1 = x_2$. $\square$

4.43 Proposition. *Es sei $R : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ ein Funktor und es existiere ein Objekt A mit $1 < |R(A)| < \infty$. Falls $\eta : X \to R(A')$ ein universeller Pfeil ist und $\mu : Y \to R(A')$ R-erzeugend ist, dann ist $|X| \leq |Y|$.*
Insbesonders sind freie Objekte in dieser Situation nur dann isomorph, wenn die erzeugenden Mengen es sind.

Beweis.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr] & R(A') \arrow[d, "R(\ )"] & Y \arrow[l, "\mu"'] \arrow[dl] \\ & R(A) & \end{tikzcd}$$

Da μ R-erzeugend ist, ist die Abbildung $g \mapsto R(g) \circ \mu$, $\mathcal{A}(A', A) \to \underline{Set}(Y, R(A))$ injektiv, d.h. $|\mathcal{A}(A', A)| \leq |\underline{Set}(Y, R(A))| = |R(A)|^{|Y|}$. Da η universell ist, ist $\mathcal{A}(A', A) \cong \underline{Set}(X, R(A))$ und somit ist

$$|R(A)|^{|X|} = |\underline{Set}(X, R(A))| \cong |\mathcal{A}(A', A)| \leq |\underline{Set}(Y, R(A))| \cong |R(A)|^{|Y|}$$

und wegen $1 < |R(A)| < \infty$ ist $|X| \leq |Y|$.
Der zweite Teil folgt direkt. $\square$

4.44 Gegenbeispiel von Jónsson-Tarski. Es sei $\mathcal{A}$ die Kategorie, deren Objekte Mengen A mit 3 Operationen $\cdot : A \times A \to A$, $l : A \to A$ und $r : A \to A$ mit

$l(x\cdot y)=x$, $r(x\cdot y)=y$, $l(x)\cdot r(x)=x$, und deren Morphismen mit diesen Operationen verträgliche Abbildungen der zugrundeliegenden Mengen sind. Beachte, daß notwendigerweise $\cdot : A\times A\to A$ eine Bijektion mit Inverser $(l,r): A\to A\times A$ ist.

Es ist $R:\mathcal{A}\to \underline{Set}$ nach dem 2.AFT 4.32 ein Rechtsadjungierter, denn Limiten berechnen sich offensichtlich wie in $\underline{Set}$ und jede Menge X extrem R-erzeugt nur eine Menge nicht isomorpher Objekte A, denn dann muß $\langle f(X)\rangle = A$ sein, wobei $\langle f(X)\rangle = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ mit $A_0 := f(X)$, $A_{n+1} = \mu(A_n\times A_n)\cup l(A_n)\cup r(A_n)\cup A_n$.

Wegen $A\times A\cong A$ ist auch $\underline{Set}(M\sqcup 1, A)\cong \underline{Set}(M,A)\times A\cong \underline{Set}(M,A)\times A\times A\cong \underline{Set}(M\sqcup 2, A)$. Explizit ist dieser Isomorphismus durch $f\mapsto \overline{f}$, mit $\overline{f}|_M := f|_M$, $\overline{f}(0) := l(f(0))$ und $\overline{f}(1) := r(f(0))$ gegeben, mit inverser Abbildung $\underline{g}\mapsfrom g$, mit $\underline{g}|_M := g|_M$ und $\underline{g}(0) := f(0)\cdot f(1)$, gegeben.
Es gilt, daß $\eta : M\sqcup 1\to A$ genau dann universell ist, wenn $\overline{\eta} : M\sqcup 2\to A$ es ist, denn $\overline{(f\circ\eta)} = f\circ\overline{\eta}$ für jeden Morphismus $f : A\to A'$.

$$\begin{tikzcd}
 & \underline{Set}(M\sqcup 1, A') \arrow[dd, "\overline{(_)}"] \\
\mathcal{A}(A,A') \arrow[ur, "\eta^*"] \arrow[dr, "\overline{\eta}^*"'] & \\
 & \underline{Set}(M\sqcup 2, A')
\end{tikzcd}$$

Folglich sind die freien Objekte über alle endlichen nicht-leeren Mengen isomorph. Wie sehen sie wirklich aus?

Im allgemeinen müssen freie Objekte nicht projektiv (siehe 2.17) sein, wie das Beispiel der diskreten Räume unter den Hausdorffräumen zeigt, siehe 2.4. Hingegen gilt:

4.45 Lemma. *Jedes freie Objekt ist projektiv bezüglich jener Morphismen e, für die $R(e)$ surjektiv ist.*
Falls freie Objekte über jeder Menge existieren, so sind die bzgl. surjektiver Abbildungen projektive Objekte genau die Retrakte freier Objekte und jedes Objekt ist surjektives Bild eines freien Objekts. Falls R treu ist, so kann die letztere Surjektion als Epimorphismus gewählt werden.

Beweis. Es sei $\eta : X\to R(A)$ R-universell. Es sei $f : A\to A''$ ein Morphismus und $e : A'\to A''$ so daß $R(e)$ surjektiv ist. Dann betrachte

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\eta"] \arrow[d, dotted, "(1)"'] & R(A) \arrow[dl, dotted, "(2)"', "R(\tilde{f})"] \arrow[d, "R(f)"] \\
R(A') \arrow[r, two heads, "R(e)"'] & R(A'')
\end{tikzcd}$$

Sei nun A ein Retrakt eines freien und damit für Surjektionen projektiven Objekts A'. Sei $e : A''\to A'''$ ein Morphismus mit $R(e)$ surjektiv und $f : A\to A'''$ ein

Morphismus. Dann betrachte

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[dr, two heads, "r"] \arrow[dd, dotted, "(1)"] & A \arrow[l, tail, "s"'] \arrow[d, "1"] \\
 & A \arrow[d, "f"] \\
A'' \arrow[r, "e"] & A'''
\end{tikzcd}$$

Sei nun A beliebig, $X := R(A)$ und $\eta : X \to R(A')$ ein universeller Pfeil. Dann besitzt $R(1_A) : X \to R(A)$ eine Faktorisierung $R(1_A) = R(\tilde{1}) \circ \eta$ und somit ist $\tilde{1} : A' \to A$ ein Morphismus mit $R(\tilde{1})$ ist Retraktion und somit surjektiv.

$$\begin{tikzcd}
X = R(A) \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "R(1)"'] & R(A') \arrow[d, "R(\tilde{1})"] \\
 & R(A)
\end{tikzcd}$$

Sei schließlich umgekehrt A projektiv für Surjektionen. Nach dem vorigen Statement existiert ein Morphismus $e : A' \to A$ mit freien A' und $R(e)$ surjektiv. Folglich kann $1_A : A \to A$ längs e geliftet werden, d.h. $e : A' \to A$ ist eine Retraktion. □

4.46 Beispiel. Es sei $\mathcal{A}$ die Kategorie der Gruppen und $R : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ der übliche Vergißfunktor. Dann kann man zeigen, daß Untergruppen freier Gruppen selbst wieder frei sind. Allerdings ist jede endlich erzeugte freie Gruppe eine Untergruppe der freien Gruppe mit 2 Erzeugern.

5. Algebraische Kategorien

5.1 Definition. Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt ALGEBRAISCH, falls sie Coequalizer besitzt und ein treuer rechtsadjungierter Funktor $R : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ existiert, welcher reguläre Epi's erhält und reflektiert.

5.2 Lemma. *Es sei $(\mathcal{A}, R)$ algebraisch. Dann gilt:*

1. *f ist Mono $\Leftrightarrow$ $R(f)$ ist injektiv.*
2. *f ist regulärer Epi $\Leftrightarrow$ $R(f)$ ist surjektiv.*
3. *f ist Iso $\Leftrightarrow$ $R(f)$ ist bijektiv.*
4. *$\mathcal{A}$ ist lokal klein und regulär colokal klein.*
5. *$\mathcal{A}$ ist vollständig und R erhält und reflektiert Limiten.*
6. *$\mathcal{A}$ hat eindeutige (reg.Epi,Mono)-Faktorisierungen und R erhält und reflektiert diese. Insbesonders sind die extremen Epi's genau die regulären und Pullbacks und Zusammensetzungen solcher Morphismen sind wieder solche.*
7. *$\mathcal{A}$ ist covollständig.*

Beweis. 1 Da R rechtsadjungiert ist, ist R stetig und somit erhält R Mono's. Als treuer Funktor reflektiert er diese.

2 Nach Definition erhält und reflektiert R reguläre Epis.

3 ist eine Kombination von 1 und 2.

4 Jede konkrete Kategorie ist regulär colokal klein, denn jeder reguläre Epi $e : A \to A'$ liefert eine Äquivalenz-Relation $\sim_e$ auf $R(A)$ definiert durch $x \sim_e y \Leftrightarrow R(e)(x) = R(e)(y)$. Diese Zuordnung ist injektiv in dem Sinn, daß $\sim_e = \sim_{e'} \Rightarrow e \cong e'$, denn wenn $e = Coequ(p, q)$ ist, dann ist $e' \circ p = e' \circ q$, da $R(e') \circ R(p) = R(e') \circ R(q)$ wegen $(R(p)(z), R(q)(z)) \in \sim_e \subseteq \sim_{e'}$, und somit existiert ein eindeutiger Morphismus h mit $h \circ e = e'$.

Da $\underline{Set}$ lokal klein ist und R Mono's erhält genügt zu zeigen, daß aus $R(m) \cong R(m')$ auch $m \cong m'$ folgt. Dies folgt aus dem folgenden Lemma 5.3.

5. Wir zeigen zuerst, daß R Limiten reflektiert. Sei dazu $X : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ ein Diagramm und $(A, p_i : A \to X(i))$ so, daß $(R(A), R(p_i))$ der Limes von $R \circ X$ ist. Da R treu ist, ist (A, p_i) ein Kegel von X. Sei (A', p'_i) ein weiterer Kegel. Dann existiert eine Abbildung $h : R(A') \to R(A)$ mit $R(p'_i) = R(p_i) \circ h$. Nach 5.3 (leicht verallgemeinert) existiert ein eindeutiger Morphismus $\tilde{h} : A' \to A$ mit $R(\tilde{h}) = h$. Da R treu ist, ist $p_i \circ \tilde{h} = p'_i$.

Da R rechtsadjungierter ist erhält R auch Limiten. Bleibt nur noch die Vollständigkeit zu zeigen: Sei also $X : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ ein Diagramm, sei (L, l_i) der Limes von $R \circ X$, sei $\eta : L \to R(A)$ ein universeller Pfeil und sei $\tilde{l}_i$ gegeben durch $R(\tilde{l}_i) \circ \eta = l_i$. Für $f : i \to i'$ betrachte:

$$\begin{tikzcd}
 & & & R(X(i)) \arrow[dd, "R(X(f))"] \\
L \arrow[r, "\eta"] \arrow[urrr, "l_i"] \arrow[drrr, "l_{i'}"'] & R(A) \arrow[r, dotted, "h"] \arrow[urr, "R(\tilde{l}_i)"] \arrow[drr, "R(\tilde{l}_{i'})"'] & L \arrow[ur, "l_i"'] \arrow[dr, "l_{i'}"] & \\
 & & & R(X(i'))
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X(i) \arrow[dd, "X(f)"] \\
A \arrow[ur, "\tilde{l}_i"] \arrow[dr, "\tilde{l}_{i'}"'] & \\
 & X(i')
\end{tikzcd}$$

Also ist $(A,\tilde{l}_i)$ ein Kegel für X. Damit existiert eine Abbildung $h : R(A) \to L$ mit $R(\tilde{l}_i) = l_i \circ h$ und aus $l_i \circ h \circ \eta = R(\tilde{l}_i) \circ \eta = l_i = l_i \circ 1$ erhalten wir $h \circ \eta = 1$ und damit, daß h surjektiv ist und damit ein regulärer Epi ist. Folglich muß h der Coequalizer eines Paars von Abbildungen $\alpha, \beta : M \to R(A)$ sein. Sei $\eta' : M \to R(A')$ ein universeller Pfeil und $R(\tilde{\alpha}) \circ \eta' = \alpha$, $R(\tilde{\beta}) \circ \eta' = \beta$. Es sei $e := Coequ(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta})$. Dann folgt aus $R(e) \circ \alpha = R(e) \circ R(\tilde{\alpha}) \circ \eta = \cdots = R(e) \circ \beta$, daß eine eindeutige Funktion $k : L \to R(\operatorname{cod} e)$ existiert mit $R(e) = k \circ h$. Da $R(e)$ surjektiv ist, gilt gleiches auch für k. Weiters ist

$$R(\tilde{l}_i \circ \tilde{\alpha}) \circ \eta' = R(\tilde{l}_i) \circ \alpha = l_i \circ h \circ \alpha = \cdots = R(\tilde{l}_i \circ \tilde{\beta}) \circ \eta'.$$

Also existiert ein eindeutiger Morphismus $q_i : \operatorname{cod} e \to X(i)$ mit $\tilde{l}_i = q_i \circ e$. Die q_i bilden ein Kegel über X, da die $\tilde{l}_i$ einen Kegel bilden und e ein Epi ist.

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\eta'"] \arrow[dr, shift left, "\alpha"] \arrow[dr, shift right, "\beta"'] & R(A') \arrow[d, shift right, "R(\tilde{\beta})"'] \arrow[d, shift left, "R(\tilde{\alpha})"] & \\
L \arrow[r, "\eta"] \arrow[ddd, "l_i"'] & R(A) \arrow[d, "R(e)"] \arrow[dddl, "R(\tilde{l}_i)"'] \arrow[dddr, "h"] & \\
& R(e) \arrow[ddl, dotted, "(2)\, R(q_i)"] & \\
& & \\
R(X(i)) & & L \arrow[ll, "l_i"] \arrow[uul, dotted, "(1)\, k"']
\end{tikzcd}$$

Aus

$$R(q_i) \circ k \circ h = R(q_i) \circ R(e) = R(q_i \circ e) = R(\tilde{l}_i) = l_i \circ h$$

folgt $R(q_i) \circ k = l_i$, da h surjektiv ist. Aus der Limes-Eigenschaft von (L, l_i) und da k ein Epi ist folgt, daß k ein Iso sein muß. Somit ist $(R(\operatorname{cod} e), R(q_i))$ ein Limes von $R \circ X$ und da R Limiten reflektiert ist $(\operatorname{cod} e, q_i)$ ein Limes von X.

$\boxed{6}$. Sei f ein Morphismus und (p, q) die von f erzeugte Kongruenz-Relation. Sei e der Coegalisator von (p, q). Dann existiert ein eindeutiger Morphismus m mit $m \circ e = f$. Bleibt zu zeigen, daß m ein Mono ist.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "f"] & \bullet \\
PB \arrow[u, "p"] \arrow[r, "q"'] & \bullet \arrow[u, "f"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "q"'] & \bullet \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[dr, "f"'] & Coequ(p,q) \arrow[d, "m"] \\
& & \bullet
\end{tikzcd}$$

Wir haben in $\boxed{3.31}$ gesehen, daß m genau dann ein Mono ist, wenn die Zusammensetzung regulärer Epi's wieder ein regulärer Epi ist. Da dies für surjektive Abbildungen gilt, ist das erfüllt. Offensichtlich bewahrt R diese Faktorisierung. Umgekehrt reflektiert R reguläre Epi's und Mono's und somit die Faktorisierung.

$\boxed{7}$. Nach Definition hat $\mathcal{A}$ Coequalizer. Bleibt zu zeigen, daß $\mathcal{A}$ Coprodukte besitzt, d.h. nach $\boxed{4.24}$ daß der Funktor $\operatorname{konst} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}^I$ ein rechtsadjungierter ist. Da er offensichtlich stetig ist und $\mathcal{A}$ vollständig und lokal klein ist, genügt es die Lösungsmengenbedingung des 2.AFT $\boxed{4.32}$ nachzuprüfen. Sei also (A_i) ein Objekt in $\mathcal{A}^I$ und $\eta : \coprod_i R(A_i) \to R(A)$ ein universeller Pfeil. Falls $(p_i : A_i \to A')$ extrem konst-erzeugend ist, dann muß A' ein regulärer Quotient von A sein (solche gibt es nur eine Menge nicht isomorpher, da $\mathcal{A}$ regulär colokal klein ist): Betrachte dazu

$$
\begin{tikzcd}
R(A_i) \arrow[r, "R(p_i)"] \arrow[dd, "\mathrm{inj}_i"'] \arrow[rrd, dotted, "h_i", "(4)"'] & R(A') & \\
& & R(A'') \arrow[ul, dotted, "R(m)"', "(3)"] \\
\coprod_i R(A_i) \arrow[r, "\eta"'] \arrow[uur, dotted, "p"', "(1)"] & R(A) \arrow[uu, dotted, "R(\tilde{p})", "(2)"'] \arrow[ur, dotted, "R(e)"', "(3)"] &
\end{tikzcd}
$$

Nach 5.3 existiert ein eindeutiger Morphismus h_i mit $R(h_i) = R(e) \circ \eta \circ \mathrm{inj}_i$. Da R treu ist, ist $p_i = m \circ h_i$ ein Faktorisierung und da m ein Mono und (p_i) extrem konst-erzeugend ist, muß m ein Iso sein, d.h. $\tilde{p}$ ist ein regulärer Epi (e). $\square$

5.3 Lemma. *Es sei $(\mathcal{A}, R)$ algebraisch.*

1. *Falls f ein regulärer Epi ist, so daß folgendes Diagramm kommutiert*

$$
\begin{tikzcd}
R(a) \arrow[r, two heads, "R(f)"] \arrow[d, "R(f')"'] & R(a') \arrow[dl, "h"] \\
R(a'') &
\end{tikzcd}
$$

   dann existiert ein eindeutiges $\tilde{h}$ mit $R(\tilde{h}) = h$.

2. *Falls f ein Mono ist, so daß folgendes Diagramm kommutiert*

$$
\begin{tikzcd}
R(a) & R(a') \arrow[l, tail, "R(f)"'] \\
R(a'') \arrow[u, "R(f')"] \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

   dann existiert ein eindeutiges $\tilde{h}$ mit $R(\tilde{h}) = h$.

Beweis. 1 Da f ein regulärer Epi ist, ist f der Coequalizer eines Paars α, β. Dann ist $R(f' \circ \alpha) = R(f') \circ R(\alpha) = h \circ R(f) \circ R(\alpha) = h \circ R(f \circ \alpha) = \cdots = R(f' \circ \beta)$, und da R treu ist gilt $f' \circ \alpha = f' \circ \beta$. Folglich existiert ein eindeutiger Morphismus $\tilde{h}$ mit $f' = \tilde{h} \circ f$. Da $R(f)$ surjektiv ist, folgt aus $R(\tilde{h}) \circ R(f) = R(f') = h \circ R(f)$ daß $R(\tilde{h}) = h$ ist. Eindeutigkeit folgt daraus, daß R treu ist.

2 Für die duale Situation gehen wir wie folgt vor: In der Tat sei $h : R(\operatorname{dom} f') \to R(\operatorname{cod} f)$ eine Abbildung mit $R(f) \circ h = R(f')$ und sei $\eta : R(\operatorname{dom} f') \to R(A)$ universeller Pfeil. Dann betrachte

$$
\begin{tikzcd}
R(a'') \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[dd, "1"'] & & R(a') \arrow[dd, "R(f)"] \\
& R(A) \arrow[ur, dotted, "R(\tilde{h})"'] \arrow[dl, dotted, "R(\tilde{1})"] & \\
R(a'') \arrow[rr, "R(f')"'] & & R(a)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\tilde{h}"] \arrow[d, "\tilde{1}"'] & a' \arrow[d, "f"] \\
a'' \arrow[r, "f'"] & a
\end{tikzcd}
$$

So $R(f) \circ h \circ R(\tilde{1}) = R(f' \circ \tilde{1}) = R(f \circ \tilde{h}) = R(f) \circ R(\tilde{h})$ und da $R(f)$ ein Mono ist, ist $h \circ R(\tilde{1}) = R(\tilde{h})$. Da $\tilde{1}$ eine Retraktion ist und R reguläre Epi's reflektiert, ist $\tilde{1}$ ein regulärer Epi und somit ist h im Bild von R nach dem ersten Teil. □

5.4 Theorem. *Es sei $R : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ treu. Dann ist $(\mathcal{A}, R)$ algebraisch, genau dann wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:*

1. *$\mathcal{A}$ ist vollständig und R erhält Limiten.*
2. *$\mathcal{A}$ ist lokal klein und extrem colokal klein.*
3. *R erhält reguläre Epi's und reflektiert Iso's.*
4. *Jede Menge extrem R-erzeugt nur eine Menge nicht isomorpher Objekte.*

Beweis. ($\Rightarrow$) folgt aus der Umkehrung des 2.AFT 4.33 und 5.2.

($\Leftarrow$) 1+2+4 $\xRightarrow{\text{2.AFT}=4.32}$ R ist Rechtsadjungiert.

1+2 $\overset{3.33}{\Rightarrow}$ $\exists$ Coequalizer.

3 $\Rightarrow$ R erhält reguläre Epi's.

$\mathcal{A}$ besitzt $(reg.Epi, Mono)$-Faktorisierungen, wie wir schon im Beweis von 5.2.6 gesehen haben: Wir betrachten die Faktorisierung $f = m \circ e$, wobei $e := Coeq(p, q)$ und $(p, q) = PB(f, f)$ ist. Wir betrachten das Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "R(f)"] \arrow[dr, "R(e)"'] & & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur, "R(m)"] & \\
\bullet \arrow[uu, "R(p)"] \arrow[rr, "R(q)"'] & & \bullet \arrow[uu, "R(f)"'] \arrow[ul, "R(e)"]
\end{tikzcd}$$

Da R Pullback's erhält ist sowohl das Quadrat als auch das linke untere Viereck ein Pullback. Da R reguläre Epi's erhält ist $R(e)$ surjektiv und somit $R(e) \cong \mathrm{Coeq}(R(p), R(q))$, denn sei $h \circ R(p) = h \circ R(q)$, d.h. $h(x_1) = h(x_2)$ für alle (x_1, x_2) mit $f(x_1) = f(x_2)$, also insbesonders für $e(x_1) = e(x_2)$ da $f = m \circ e$. Somit existiert eine Abbildung k mit $h = k \circ e$. Wegen der Surjektivität von e ist k eindeutig. Daraus folgt (siehe 3.31), daß $R(m)$ injektiv ist. Da R als treuer Funktor Mono's reflektiert ist m ein Mono.

R reflektiert reguläre Epi's: Sei nämlich $R(f)$ surjektiv und $f = m \circ e$ eine (regulär Epi,Mono)-Faktorisierung. Dann ist auch $R(m)$ surjektiv und da R PB erhält auch injektiv, somit bijektiv. Da R Iso's reflektiert ist m ein Iso und somit $f \cong e$ ein regulärer Epi. □

5.5 Beispiel. Algebraisch sind:
$\underline{Set}$, $\underline{HGru}$, $\underline{Gru}$, $\underline{Ring}$, $\underline{R\text{-}Mod}$, $\underline{R\text{-}Alg}$, $\underline{TorsFreiAGru}$, $\underline{C^*\text{-}Alg}$ mit dem Einheitsscheiben-Funktor, $\underline{Komp}$, $\underline{KompAGru}$, $\underline{0\text{-}dimensionaleRäume}$.

Nicht algebraisch sind:

- $\underline{Top}$, da nicht iso-refl,
- $\underline{Haus}$, da nicht iso-refl (alles sonst ist erfüllt),
- $\underline{Körp}$, da kein terminales Objekt,
- $\underline{TorsAGru}$, da nicht Produkt-stetig,
- $\underline{VollstVerb}$, da kein rechts-Adjungierter nach [**12**] siehe auch [**18**]

5.6 Definition. Eine punktierte (siehe 2.14) Kategorie $\mathcal{A}$ heißt

- NORMAL, falls sie Kerne, Cokerne und $(Epi, Mono)$-Faktoriserungen besitzt und jeder Mono ein normaler Mono ist. Dabei versteht man unter den KERN eines Homos f den Equalizer von f mit 0 und analog unter den COKERN den entsprechenden Coequalizer. Ein Morphismus heißt NORMALER MONO falls er Kern eines Morphismuses ist. Er ist dann insbesonders ein (regulärer) Mono. Entsprechend heißt ein Morphismus NORMALER EPI falls er Cokern eines Morphismuses ist. Er ist dann insbesonders ein (regulärer) Epi.
- CONORMAL, falls sie Kerne, Cokerne und $(Epi, Mono)$-Faktoriserungen besitzt und jeder Epi ein normaler Epi ist.
- EXAKT, falls sie normal und conormal ist.

5.7 Beispiele. Wir haben folgende Beispiele, wobei $\underline{pSet}$ die Kategorie der punktierten Mengen also $\overrightarrow{\{*\}1_{\underline{Set}}}$ bezeichnet:

Kategorie	normal	conormal
R-Mod	+	+
Gru	−	+
pSet	+	−
Mon	−	−

5.8 Lemma. *Es besitze $\mathcal{A}$ Kerne und Cokerne. Falls $f = m \circ e$ und e normaler Epi ist, dann existiert ein eindeutiges k mit $\operatorname{Cok}(\operatorname{Ker} f) = k \circ e$.*

Beweis. Aus $f = m \circ e$ folgt $f \circ \operatorname{Ker} e = m \circ e \circ \operatorname{Ker} e = 0$ und somit existiert ein h mit $\operatorname{Ker} e = \operatorname{Ker} f \circ h$.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, dotted, "h"'] \arrow[dr, "\operatorname{Ker} e"] & & \\
{} \arrow[r, "\operatorname{Ker} f"'] & {} \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "e"] \arrow[d, "\operatorname{Cok}(\operatorname{Ker} f)"'] & {} \\
& {} & {} \arrow[u, "m"'] \arrow[l, dotted, "k"]
\end{tikzcd}$$

Somit ist $\operatorname{Cok}(\operatorname{Ker} f) \circ \operatorname{Ker} e = \operatorname{Cok}(\operatorname{Ker} f) \circ \operatorname{Ker} f \circ h = 0$ also existiert wegen $e = \operatorname{Cok}(\operatorname{Ker} e)$ ein eindeutiges k mit $k \circ e = \operatorname{Cok}(\operatorname{Ker} f)$. □

5.9 Theorem. *Es besitzte $\mathcal{A}$ Kerne, Cokerne und jeder Epi sei ein normaler Epi. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{A}$ ist conormal (d.h. besitzt (Epi,Mono)-Faktorisierungen);*
2. $\operatorname{Ker} f = 0 \Rightarrow f$ *Mono;*
3. $f = m \circ \operatorname{Cok}(\operatorname{Ker}(f)) \Rightarrow m$ *Mono;*
4. *$\mathcal{A}$ besitzt eindeutige (normal-Epi,Mono)-Faktorisierungen;*
5. *Die Kongruenzrelation von f sind genau jene von* $\operatorname{Cok}(\operatorname{Ker}(f))$.

Beweis. (1⇒2) Sei $\operatorname{Ker} f = 0$ und $f = m \circ e$ eine (Epi,Mono)-Faktorisierung. Nach 5.8 existiert ein eindeutiges k mit $k \circ e = \operatorname{Cok}(\operatorname{Ker} f) = \operatorname{Cok} 0 = 1$, also ist e ein Schnitt und damit ein Iso.

(2⇒3) Sei $f = m \circ \operatorname{Cok}(\operatorname{Ker}(f))$ und $\bar{m}$ der eindeutige Morphismus mit $m = \bar{m} \circ \operatorname{Cok}(\operatorname{Ker} m)$.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\operatorname{Cok}(\operatorname{Ker} f)"'] & {} \\
{} \arrow[ur, "m"] \arrow[r, "\operatorname{Cok}(\operatorname{Ker} m)"'] & {} \arrow[u, dotted, "\bar{m}"']
\end{tikzcd}$$

Es ist $g := \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, m) \circ \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, f)$ ein Epi, also ein normaler Epi mit $f = \bar{m} \circ g$ und somit existiert nach 5.8 ein eindeutiges k mit $\mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, f) = k \circ g = k \circ \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, m) \circ \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, f)$. Da $\mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, f)$ ein Epi ist, ist $1 = k \circ \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, m)$, also $\mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, m)$ ein Schnitt und damit ein Iso also $\mathrm{Ker}\, m = 0$. Nach 2 ist also m ein Mono.

(3⇒4) Jedes f hat offensichtlich die Faktorisierung $f = m \circ \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, f)$ und nach 3 ist m ein Mono. Die Eindeutigkeit folgt, da normale Epis stark sind.

(4⇒1) ist offensichtlich.

(3⇒5) Wir haben die Faktorisierung $f = m \circ \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, f)$ mit einem Mono m nach 3. Dann entsprechen aber Kongruenzen von f jenen von $\mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, f)$:

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[rr, "\mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, f)"] \arrow[dr, "f"] & & {} \arrow[dl, "m"'] \\ & {} & \\ {} \arrow[uu, "p"] \arrow[rr, "q"'] & & {} \arrow[ul, "f"] \arrow[uu, "\mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, f)"'] \end{tikzcd}$$

(5⇒2) Sei $\mathrm{Ker}\, f = 0$. Dann ist $\mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, f) = 1$ und somit $(1, 1)$ Kongruenzrelation von $\mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, f)$ also auch von f, d.h. f ist Mono. □

5.10 Folgerung. *Es besitzte $\mathcal{A}$ Kerne und Cokerne. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{A}$ ist conormal;*
2. *$\mathcal{A}$ ist balanziert und besitzt eindeutige (normal-Epi,Mono)-Faktorisierungen.*

Beweis. (1⇒2) Nach Definition 5.6 ist jeder Mono normal also extrem, d.h. die Kategorie ist balanziert. Wegen 5.9.4 besitzt sie eindeutige (normal-Epi,Mono)-Faktorisierungen.

(1⇐2) denn Epis sind extreme Epis wegen der Balanziertheit und in ihrer (normal-Epi,Mono)-Faktorisierung der Mono somit ein Iso, also sind sie sogar normal. 5.9 liefert nun das Gewünschte. □

5.11 Definition. Falls $\mathcal{A}$ eindeutige $(Epi, Mono)$-Faktorisierungen besitzt, und $f = m \circ e$ so eine ist, dann heißt $\mathrm{Im}\, f :\cong m$ das (bis auf Isomorphie eindeutige) Bild von f und $\mathrm{Coim}\, f :\cong e$ das (ebenso eindeutige) Cobild von f.

5.12 Proposition. *Es sei $\mathcal{A}$ exakt. Dann gilt*

1. *$\mathcal{A}$ besitzt eindeutige $(Epi, Mono)$-Faktorisierungen. Weiters ist* $\mathrm{Im}(f) \cong \mathrm{Ker}(\mathrm{Cok}(f))$ *und* $\mathrm{Coim}(f) \cong \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}(f))$.
2. *f Mono* $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = 0 \Leftrightarrow f \cong \mathrm{Im}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Coim}(f) = 1$.
3. *f Epi* $\Leftrightarrow \mathrm{Cok}\, f = 0 \Leftrightarrow f \cong \mathrm{Coim}(f) \Leftrightarrow \mathrm{Im}(f) = 1$.
4. *f Iso* $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = 0 = \mathrm{Cok}(f)$.

Beweis. (1) Nach Definition 5.9.4 besitzt $\mathcal{A}$ eindeutige (normal-Epi,Mono)-Faktorisierungen die laut Beweis durch $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}(\mathrm{Cok}\, f)$ gegeben sind und nach Definition sind die Epis die normalen-Epis. Die dualen Resultate liefern $\mathrm{Coim}\, f = \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, f)$ für die idente (Epi,normal-Mono)-Faktorisierung.

(2) Aus 5.9.2 folgt f Mono $\Leftrightarrow \mathrm{Ker}\, f = 0$. ($\Rightarrow$) Sei $(K, k) = \mathrm{Ker}\, m$. Dann ist $m \circ k = 0 = m \circ 0$ also $k = 0$.

$\operatorname{Ker} f = 0$ ist weiter äquivalent zu $\operatorname{Coim} f \overset{\boxed{1}}{=\!=} \operatorname{Cok}(\operatorname{Ker} f) = \operatorname{Cok} 0 = 1$, und schließlich zu $\operatorname{Im}(f) \overset{\boxed{1}}{=\!=} f$.

(3) ist dual zu 2.

(4) folgt aus 2 und 3. □

5.13 Proposition. *Für punktierte Kategorien $\mathcal{A}$ sind equivalent*

- *$\mathcal{A}$ ist exakt;*
- *$\mathcal{A}$ besitzt (eindeutige) (normal-Epi,normal-Mono)-Faktorisierungen.*

Beweis. ($\Downarrow$) folgt aus 5.12.

($\Uparrow$) Eindeutigkeit folgt da stark-Epis. Wegen Dualität genügt zu zeigen, daß $\mathcal{A}$ Kerne besitzt und jeder Mono normal ist. Sei $f = m \circ e$ eine (normal-Epi,normal-Mono)-Faktorisierung, also $e = \operatorname{Cok} g$ für ein g. Sei $g = \bar{m} \circ \bar{e}$ seine (normal-Epi,normal-Mono)-Faktorisierung.

Wir behaupten $\bar{m} = \operatorname{Ker} f$:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "\bar e"'] & & \bullet \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e"', "\operatorname{Cok} g"] & & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur, "\bar m"'] & & \bullet \arrow[ur, "m"'] &
\end{tikzcd}$$

Da $\bar{e}$ Epi ist $e = \operatorname{Cok} g = \operatorname{Cok}(\bar{m} \circ \bar{e}) = \operatorname{Cok} \bar{m}$. Da $\bar{m}$ ein normaler Mono ist, ist (wegen der Galoisbeziehung) $\bar{m} = \operatorname{Ker}(\operatorname{Cok} \bar{m}) = \operatorname{Ker} e = \operatorname{Ker}(m \circ e) = \operatorname{Ker} f$.

Sei f ein Mono und $f = m \circ e$ eine (normal-Epi,normal-Mono)-Faktorisierung. Dann ist e ein Epi und somit ein Iso, also f normaler Mono. □

5.14 Proposition. *$\mathcal{A}$ besitze Kerne und Coegalisatoren. Falls jeder Epi normaler Epi ist, so ist $\mathcal{A}$ conormal.*

Beweis. Es genügt 5.9.2 zu zeigen. Angenommen $\operatorname{Ker} f = 0$ und $f \circ \alpha = f \circ \beta$. Sei $e = \operatorname{Coeq}(\alpha, \beta)$. Somit ist $f = h \circ e$ und nach 5.8 existiert ein eindeutiges k mit $k \circ e = \operatorname{Cok}(\operatorname{Ker} f) = \operatorname{Cok} 0 = 1$. Also ist e ein Schnitt und damit ein Iso, also $\alpha = \beta$ und f ein Mono. □

5.15 Proposition. *$\mathcal{A}$ besitze Egalisatoren und Coegalisatoren. Falls jeder Epi normaler Epi und jeder Mono normaler-Mono ist, so ist $\mathcal{A}$ exakt.*

Beweis. Folgt sofort aus 5.14 und deren dualen Aussage. □

5.16 Definition. Es sei $\mathcal{A}$ eine exakte Kategorie. Sei $I \subseteq \mathbb{Z}$ ein Intervall. Dann heißt ein Tupel $(f_i)_{i \in I}$ von Morphismen exakte Sequenz falls $\operatorname{cod} f_n = \operatorname{dom}(f_{n+1})$ und $\operatorname{Im}(f_n) \cong \operatorname{Ker}(f_{n+1})$ für alle $n, n+1 \in I$ gilt.

5.17 Proposition. *Es seien f und g Morphismen in einer exakten Kategorie.*

- *f ist Mono $\Leftrightarrow 0 \to \bullet \xrightarrow{f} \bullet$ ist exakt.*
- *f ist Epi $\Leftrightarrow \bullet \xrightarrow{f} \bullet \to 0$ ist exakt.*
- *$f \cong \operatorname{Ker}(g) \Leftrightarrow 0 \to \bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$ ist exakt.*
- *$g \cong \operatorname{Cok}(f) \Leftrightarrow \bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet \to 0$ ist exakt.*
- *f ist Iso $\Leftrightarrow 0 \to \bullet \xrightarrow{f} \bullet \to 0$ ist exakt.*
- *$f = 0 \Leftrightarrow \bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{1} \bullet$ ist exakt $\Leftrightarrow \bullet \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{f} \bullet$ ist exakt.*

- *$A = 0 \Leftrightarrow A \xrightarrow{1} A \xrightarrow{1} A$ ist exakt.*
- *$0 \to \bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet \to 0$ ist exakt $\Leftrightarrow$ f Mono und $g \cong \mathrm{Cok}(f)$ $\Leftrightarrow$ g Epi und $f \cong \mathrm{Ker}(f)$.*

Beweis. Für $\bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$ ist equivalent

(a) $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$, d.h. die Sequenz ist exakt;
(b) $\mathrm{Cok}\, f = \mathrm{Coim}\, g$;
(c) $g \circ f = 0$ und $\mathrm{Cok}(f) \circ \mathrm{Ker}\, g = 0$.

(a⇒b) Nach $\boxed{5.12}$ ist $\mathrm{Ker}(\mathrm{Cok}\, f) = \mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g$ und somit

$$\mathrm{Cok}\, f = \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}(\mathrm{Cok}\, f)) = \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, g) = \mathrm{Coim}\, g.$$

(b⇒c)

$$\begin{aligned} g \circ f &= \mathrm{Im}\, g \circ \mathrm{Coim}\, g \circ f = \mathrm{Im}\, g \circ \mathrm{Cok}\, f \circ f = \mathrm{Im}\, g \circ 0 = 0 \\ \mathrm{Cok}\, f \circ \mathrm{Ker}\, g &= \mathrm{Coim}\, g \circ \mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Cok}(\mathrm{Ker}\, g) \circ \mathrm{Ker}\, g = 0 \end{aligned}$$

(c⇒a) Aus $g \circ f = 0$ folgt $g \circ \mathrm{Im}\, f \circ \mathrm{Coim}\, f = g \circ f = 0 = 0 \circ \mathrm{Coim}\, f$ und somit $g \circ \mathrm{Im}\, f = 0$. Also existiert ein h mit $\mathrm{Im}\, f = \mathrm{Ker}\, g \circ h$, d.h. $\mathrm{Im}\, f \preceq \mathrm{Ker}\, g$. Ebenso folgt aus $\mathrm{Cok}\, f \circ \mathrm{Ker}\, g = 0$ die Existenz eines k mit $\mathrm{Ker}\, g = \mathrm{Ker}(\mathrm{Cok}\, f) \circ k = \mathrm{Im}\, f \circ k$ und somit $\mathrm{Ker}\, g \preceq \mathrm{Im}\, f$, also $\mathrm{Ker}\, g \cong \mathrm{Im}\, f$.

Die Proposition folgt nun daraus. □

Bemerkung. In exakten Kategorien kann man das 9-er Lemma zeigen und auch den ersten Noetherschen Isomorphiesatz.

9-er Lemma:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \bullet \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Falls alle Spalten und Zeilen exakt sind und das Diagram kommutiert, so lassen sich Morphismen so finden, daß die erste Zeile exakt wird und das ganze Diagram kommutiert.

Erster Noethersche Isomorphiesatz:

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
& \bullet \arrow[r, equal] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, dotted] & \bullet \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bullet \arrow[r, dotted] \arrow[d] & Q \arrow[r, dotted] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
& 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Fals die erste Spalte und die mittlere Zeile exakt sind. So lassen sich ein Objekt Q und die punktierten Pfeile so finden, daß auch die übrigen Spalten und Zeilen exakt sind.

5.18 Definition. Eine Kategorie heißt Abelsch falls sie exakt ist und endliche Biprodukte besitzt.

Beispiele Abelscher Kategorien sind: $\underline{R\text{-Mod}}$, $\underline{\text{kompAbelGru}}$, $\underline{\text{endlAbelGru}}$.

5.19 Proposition. *Es sei $\mathcal{A}$ exakt und besitze endliche Produkte (oder Coprodukte). Dann ist $\mathcal{A}$ Abelsch genau dann wenn es eine (eindeutige) additive Struktur besitzt, d.h. der Homfunktor $Hom : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \to \underline{Set}$ liftet längs $\underline{AGru} \to \underline{Set}$.*

Beweis. Wegen 3.27 genügt es zu zeigen, daß die semi-additive Struktur additiv ist, d.h. $\operatorname{Hom}(a, b)$ additive Inverse besitzt. Sei also $f : A \to B$ und $h : A \oplus B \to A \oplus B$ gegeben durch $\operatorname{pr}_A \circ h \circ \operatorname{inj}_A = 1$, $\operatorname{pr}_A \circ h \circ \operatorname{inj}_B = 0$, $\operatorname{pr}_B \circ h \circ \operatorname{inj}_A = f$ und $\operatorname{pr}_B \circ h \circ \operatorname{inj}_B = 1$. Sei $k = \operatorname{Ker} h$. Dann ist $0 = h \circ k$ und somit $0 = \operatorname{pr}_A \circ h \circ k = \operatorname{pr}_A \circ k$ und $0 = \operatorname{pr}_B \circ h \circ k = f \circ \operatorname{pr}_A \circ k + \operatorname{pr}_B \circ k = \operatorname{pr}_B \circ k$, d.h. $k = 0$.

$$\begin{tikzcd}
 & A & A \oplus B \arrow[l, "\operatorname{pr}_A"'] \arrow[d, "\operatorname{pr}_B"] \\
 & A \oplus B \arrow[u, "(1{,}0)"] \arrow[r, "(f{,}1)"'] \arrow[ur, dotted, "h"] & B \\
\bullet \arrow[uur, bend left, "0"] \arrow[urr, bend right, "0"'] \arrow[ur, dotted, "k"] & &
\end{tikzcd}$$

Für $c = \operatorname{Cok} h$ erhalten wir $0 = c \circ h \circ \operatorname{inj}_B = c \circ \operatorname{inj}_B$ und $0 = c \circ h \circ \operatorname{inj}_A = c \circ (1, f) = c \circ \operatorname{inj}_A + c \circ \operatorname{inj}_B \circ f = c \circ \operatorname{inj}_A$ und somit $c = 0$.

Somit ist h ein Isomorphismus. Es ist $1_A = \operatorname{pr}_A \circ \operatorname{inj}_A = \operatorname{pr}_A \circ h \circ h^{-1} \circ \operatorname{inj}_A = \operatorname{pr}_A \circ h^{-1} \circ \operatorname{inj}_A$ und wegen $1_{A\oplus B} = \operatorname{inj}_A \circ \operatorname{pr}_A + \operatorname{inj}_B \circ \operatorname{pr}_B$ ist dies weiter

$$\operatorname{pr}_A \circ (\operatorname{inj}_A \circ \operatorname{pr}_A + \operatorname{inj}_B \circ \operatorname{pr}_B) \circ h^{-1} \circ \operatorname{inj}_A = \operatorname{pr}_A \circ h^{-1} \circ \operatorname{inj}_A + 0.$$

Sei $g := \operatorname{pr}_B \circ h^{-1} \circ \operatorname{inj}_A$. Dann ist

$$\begin{aligned}
0 &= \operatorname{pr}_B \circ \operatorname{inj}_A = \operatorname{pr}_B \circ h \circ h^{-1} \circ \operatorname{inj}_A = (f, 1_B) \circ h^{-1} \circ \operatorname{inj}_A \\
&= (f, 1_B) \circ 1 \circ h^{-1} \circ \operatorname{inj}_A = (f, 1_B) \circ (\operatorname{inj}_A \circ \operatorname{pr}_A + \operatorname{inj}_B \circ \operatorname{pr}_B) \circ h^{-1} \circ \operatorname{inj}_A \\
&= f \circ \operatorname{pr}_A \circ h^{-1} \circ \operatorname{inj}_A + \operatorname{pr}_B \circ h^{-1} \circ \operatorname{inj}_A \\
&= f \circ 1_A + g = f + g \quad \square
\end{aligned}$$

5.20 Proposition. *Jede Abelsche Kategorie ist endlich vollständig und endlich covollständig.*

Beweis. Nach Definition hat $\mathcal{A}$ endliche Produkte und Coprodukte und da $\mathcal{A}$ exakt ist auch Kerne und Cokerne und da additiv auch Equalizer und Coequalizer. $\square$

5.21 Proposition. *Eine Kategorie ist genau dann Abelsch, wenn sie Pullbacks, Pushouts und ein 0-Objekt besitzt und jeder Mono normaler Mono und jeder Epi normaler Epi ist.*

Beweis. ($\Rightarrow$) gilt da Abelsche Kategorien endlich vollständig und covollständig sind nach 5.20. Weiters ist der Kern jedes Monos m ein 0-Objekt: Sei $(K, k) = \operatorname{Ker} m$. Dann ist $m \circ k = 0 = m \circ 0$ also $k = 0$. Somit ist K terminal, denn der einzige Morphismus von einen beliebigen Objekt nach K ist der 0-Morphismus. Andererseits ist K auch initial, denn der einzige Morphismus von K in ein beliebiges Objekt ist der eindeutige konstante Morphismus.

($\Leftarrow$) Nach 3.17 ist $\mathcal{A}$ endlich vollständig und covollständig und somit exakt nach 5.15. Sei nun A, B in $\mathcal{A}$ und $h : A \coprod B \to A \prod B$ der kanonische Morphismus.

Dann ist $\mathrm{inj}_A = \mathrm{Ker}(0, 1_B) = \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_B \circ h)$, denn inj_A ist ein Schnitt und somit ein normaler Monomorphismus und $(0, 1_B) = \mathrm{Cok}(\mathrm{inj}_A)$.

Analog erhalten wir $\mathrm{inj}_B = \mathrm{Ker}(\mathrm{pr}_A \circ h)$. Sei $k = \mathrm{Ker}\, h$. Aus $\mathrm{pr}_B \circ h \circ k = 0 = \mathrm{pr}_A \circ h \circ k$ folgt somit die Existenz von r und s mit

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, dotted, "s"] \arrow[d, dotted, "r"'] \arrow[dr, "k"] & B \arrow[d, "\mathrm{inj}_B"] \\ A \arrow[r, "\mathrm{inj}_A"'] & A \coprod B \end{tikzcd}$$

Damit ist $k = 0$, denn

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, "0"] \arrow[d, "0"'] & B \arrow[d, "\mathrm{inj}_B"] \\ A \arrow[r, "\mathrm{inj}_A"'] & A \coprod B \end{tikzcd}$$

ist ein Pullback: Seien nämlich $p : C \to A$ und $q : C \to B$ so daß $\mathrm{inj}_A \circ p = \mathrm{inj}_B \circ q$. Dann ist

$$\begin{aligned} p &= (1, 0) \circ \mathrm{inj}_A \circ p = (1, 0) \circ \mathrm{inj}_B \circ q = 0 \circ q = 0 = 0 \circ p \\ &= (0, 1) \circ \mathrm{inj}_A \circ p = (0, 1) \circ \mathrm{inj}_B \circ q = q \end{aligned}$$

und somit der 0-Morphismus der eindeutige Morphismus $h : c \to \bullet$ mit $0 \circ h = p$ und $0 \circ h = q$.

Dual zeigt man, daß $\mathrm{Cok}\, h = 0$ ist. Also ist h ein Isomorphismus und $\mathcal{A}$ besitzt Biprodukte. □

5.22 Theorem. *Es sei $(\mathcal{A}, U)$ eine konkrete Kategorie. Dann ist $(\mathcal{A}, U)$ eine stark finitäre (d.h. induktive Limiten werden erhalten) algebraische Abelsche Kategorie genau dann wenn $(\mathcal{A}, U)$ äquivalent zu $(\underline{Mod\text{-}R}, U)$ für einen Ring R ist.*

Beweis. ($\Leftarrow$) $\underline{\text{Mod-R}}$ ist Abelsch und algebraisch und der Vergißfunkter erhält induktive Limiten.

($\Rightarrow$) Da $(\mathcal{A}, U)$ algebraisch ist, ist U darstellbar durch ein freies Objekt A. Es ist $R := (A, A)$ ein Ring da $\mathcal{A}$ additiv ist und offensichtlich kommutiert

$$\begin{tikzcd} \mathcal{A} \arrow[rr, "\mathcal{A}(A, \_)"] \arrow[dr, "U"'] & & \underline{Mod\text{-}R} \arrow[dl, "V"] \\ & \underline{Set} & \end{tikzcd}$$

Bleibt wegen 1.22 zu zeigen, daß $H := \mathcal{A}(A, \_)$ voll und dicht ist. Da U und V algebraisch sind ist es auch H (d.h. ist Rechstadjungierter und erhält und reflektiert reguläre Epis) nach 4.34 und 5.2 (U und V erhalten und reflektieren reguläre Epis also auch H) und insbesonders treu und erhält (reguläre) Epis.

Es ist $\mathrm{Hom}(A, \_)$ exakt (d.h. erhält kurze exakte Sequenzen): Sei $0 \to B \xrightarrow{f} C \xrightarrow{g} D \to 0$ exakt, also $f \cong \mathrm{Ker}\, g$. Dann ist

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(A, C) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(A, D)$$

exakt: Klarerweise ist f_* injektiv und $g_* \circ f_* = 0$. Sei nun $h \in \mathrm{Hom}(A, C)$ mit $0 = g_*(h) = g \circ h$. Dann faktorisiert h über $\mathrm{Ker}\, g \approx f$, d.h. es existiert ein k mit $h = f \circ k = f_*(k)$. Da H Epis erhält ist somit

$$0 \to \mathrm{Hom}(A, B) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}(A, C) \xrightarrow{g_*} \mathrm{Hom}(A, D) \to 0$$

exakt nach 5.17.

Da $(\mathcal{A}, U)$ finitär ist erhält H Coprodukte :
Die natürliche lineare Abbildung $\iota : \coprod_i H(A_i) \to H(\coprod_i A_i)$ ist injektiv, denn sei $g_i \in H(A_i) = \mathrm{Hom}(A, A_i)$ mit $0 = \iota(\sum_i g_i) = \sum_i \iota(g_i) = \sum_i \mathrm{inj}_i \circ g_i$ dann ist $g_i = 0$. Die Abbildung ι ist auch surjektiv, denn sei $k \in H(\coprod_i A_i)$ dann faktorisiert k über ein endliches Copordukt (da U finitär ist) und somit ist $k = \sum_i \mathrm{inj}_i \circ \mathrm{pr}_i \circ k$ und schließlich $\iota(\sum_i \mathrm{pr}_i \circ k) = k$. Also ist ι ein Isomorphismus.

Um zu zeigen, daß H voll ist betrachten wir für Objekte $X \in \mathcal{A}$ die Klasse $\mathcal{A}_X$ aller Objekte Y, s.d. $H : \mathcal{A}(Y, X) \to \mathrm{Hom}_R(H(Y), H(X))$ surjektiv ist. Nun zeigen wir folgendes

- $A \in \mathcal{A}_X$: Sei $f : H(A) \to H(X)$ linear. Für jedes $h \in R = \mathrm{Hom}(A, A)$ ist
$$H(f(1_A))(h) = f(1_A) \circ h \overset{f \text{ lin.}}{=\!=} f(1_A \circ h) = f(h), \text{ also } H(f(1_A)) = f.$$
- Alle Copotenzen von A liegen in $\mathcal{A}_X$, da H Coprodukte erhält: Sei $g : H(\coprod_I A) \to H(X)$ linear. Da H Coprodukte erhält ist $H(\coprod_I A) = \coprod_I H(A)$. Da $A \in \mathcal{A}_X$ existieren $g_i : A \to X$ mit $H(g_i) = g \circ H(\mathrm{inj}_i)$ und somit ein eindeutig bestimmtes $\bar{g} : \coprod_I A \to X$ mit $\bar{g} \circ \mathrm{inj}_i = g_i$. Somit ist
$$H(\bar{g}) \circ H(\mathrm{inj}_i) = H(\bar{g} \circ \mathrm{inj}_i) = H(g_i) = g \circ H(\mathrm{inj}_i)$$
und somit $H(\bar{g}) = g$.
- Reguläre Quotienten von Elementen aus $\mathcal{A}_X$ gehören zu $\mathcal{A}_X$, da H treu ist und Epi's reflektiert: Sei $q : Y \to Q$ eine regulärer Epi und $Y \in \mathcal{A}_X$. Sei $g : H(Q) \to H(X)$ linear. Nach Voraussetzung existiert ein $\bar{g} : Y \to X$ mit $H(\bar{g}) = g \circ H(q)$. Da H treu ist, existiert ein $\tilde{h} : Q \to X$ mit $H(\bar{g}) = H(\tilde{g}) \circ H(q)$ und da H Epimorphismen erhält ist $H(\tilde{g}) = g$.
- Da jedes Objekt von A Quotient eines freien Objekts ist, ist $\mathcal{A}_X = |\mathcal{A}|$ und somit H voll.

Nun zur Dichtheit: Sei M ein rechter R-Modul. Dann ist M ein regulärer Quotient eines Coprodukts von R, genauer $\exists I, J$ und $\alpha, \beta : \coprod_I R \to \coprod_J R$ und $q : \coprod_J R \to M$ mit $q = \mathrm{Coeq}(\alpha, \beta)$. Da H voll ist und Coprodukte erhält existieren $\mathcal{A}$-Morphismen $\bar{\alpha}, \bar{\beta} : \coprod_I A \to \coprod_J A$ mit $H(\bar{\alpha}) = \alpha$ und $H(\bar{\beta}) = \beta$. Sei $\bar{q}$ der Coegalisator von $\bar{\alpha}$ und $\bar{\beta}$. Da H exakt ist erhält H Coegalisatoren und somit ist $H(\mathrm{cod}\, \bar{q}) \cong M$. □

5.23 Bemerkung. Man kan zeigen, daß kleine Abelsche Kategorien genau jene Kategorien sind, die sich in *AbelGru* exakt (d.h. die Einbettung bewahrt exakte Folgen) einbetten lassen, bzw. genau jene die sich in *R-Mod* für ein R voll und exakt einbetten lassen.

6. Reflektive Teilkategorien

6.1 Definition. Es sei in diesem Abschnitt $I : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ durchwegs eine volle unter Isomorphismen abgeschlossene Kategorie.
Falls die Inklusion ein rechts-Adjungierter ist, dann heißt $\mathcal{A}$ REFLEKTIVE TEILKATEGORIE von $\mathcal{B}$ und L heißt Reflektor.
Falls die Inklusion ein links-Adjungierter ist, dann heißt $\mathcal{A}$ COREFLEKTIVE TEILKATEGORIE von $\mathcal{B}$ und R heißt Coreflektor.
In 4.17 haben wir gesehen, daß wenn ein Rechtsadjungierter voll und treu ist die Coeinheit $\varepsilon : L \circ R \to 1$ ein Iso ist, und wenn ein Linksadjungierter voll und treu ist die Einheit $\eta : 1 \to R \circ L$ ein Iso ist. Bleibt also noch jene Situationen zu behandeln, wo die jeweils andere natürliche Transformation zusätzliche Eigenschaften hat.

Falls $\mathcal{M}$ eine Klasse von Morphismen in $\mathcal{B}$ ist, so heißt $\mathcal{A}$ $\mathcal{M}$-REFLEKTIVE TEILKATEGORIE von $\mathcal{B}$, wenn alle Komponenten der Einheit η in $\mathcal{M}$ liegen. Andererseits heißt $\mathcal{A}$ $\mathcal{M}$-COREFLEKTIVE TEILKATEGORIE von $\mathcal{B}$, wenn alle Komponenten der Coeinheit ε in $\mathcal{M}$ liegen. Insbesonders haben wir die Begriffe MONO-(CO)REFLEKTIV, EPI-(CO)REFLEKTIV und BI-(CO)REFLEKTIV.

6.2 Lemma. *Jede Mono-reflektive Teilkategorie ist Bi-reflektiv.*

Beweis.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta"] \arrow[d] & LB \arrow[dl, shift right, "\alpha"'] \arrow[dl, shift left, "\beta"] \arrow[d, dotted] \\ B' \arrow[r, tail, "\eta'"'] & A' \end{tikzcd}$$

□

6.3 Lemma. *Jeder universelle Pfeil η für $I : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, der ein Schnitt ist, ist schon ein Iso.*

Beweis.

$$\begin{tikzcd} & & A \arrow[dl, dotted, "p"] \arrow[dd, "1"] \\ B \arrow[r, "1"] \arrow[urr, bend left, "\eta"] \arrow[drr, bend right, "\eta"'] & B \arrow[dr, "\eta"] & \\ & & A \end{tikzcd}$$

Also ist η eine Retraktion und somit ein Iso. □

6.3a Lemma. *Eine Teilkategorie mit rechts-adjungierter Inklusion ist genau dann voll (also reflektiv), wenn $1 : A \to A$ für jedes Objekt A in $\mathcal{A}$ ein universeller Pfeil ist.*

Beweis. Es ist $1 : A \to A$ genau dann universell, wenn $1 = 1_* : \mathcal{A}(A, A') \to \mathcal{B}(A, A')$ für alle Objekte A' in $\mathcal{A}$ bijektiv ist, d.h. die Inklusion voll ist. □

6.4 Lemma. *Es sei $R : \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ eine reflektive Teilkategorie. Dann ist $\mathcal{A}$ unter Schnitten und Limiten abgeschlossen.*

Beweis. Sei $m : B \to A$ ein Schnitt mit links-Inversen e und $q := e \circ \eta_A^{-1} \circ Lm$.

$$\begin{tikzcd}
LB \arrow[rrrr, "1"] \arrow[dddrr, bend right, "Lm"'] & & & & LB \\
& B \arrow[ul, "\eta_B"'] \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "m"'] & & B \arrow[ur, "\eta_B"] & \\
& & A \arrow[ur, "e"'] \arrow[d, "\eta_A", "\cong"'] & & \\
& & LA \arrow[uuurr, bend right, "Le"'] & &
\end{tikzcd}$$

Dann ist $q \circ \eta_B = e \circ \eta_A^{-1} \circ Lm \circ \eta_B = e \circ \eta_A^{-1} \circ \eta_A \circ m = 1$, also η_B ein Schnitt, und somit nach 6.3 ein Iso. Also gehört B zu $\mathcal{A}$ wegen der Abgeschlossenheit unter Isomorphien.

Sei nun $X : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ ein Diagramm in $\mathcal{A}$ und $(X_\infty, (p_i)_i)$ der Limes in $\mathcal{B}$. Dann ist $(LX_\infty, (\eta^{-1} \circ Lp_i)_i)$ ein Kegel $\mathcal{A}$, und aus der universellen Eigenschaft des Limes folgt, daß $\eta : X_\infty \to LX_\infty$ ein Schnitt und somit nach 6.3 ein Iso ist, also X_∞ zu $\mathcal{A}$ gehört und somit auch in $\mathcal{A}$ der Limes ist.

$$\begin{tikzcd}
X(j) \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "\eta"] & & X(j) \\
& L(X(j)) \arrow[ur, "\eta^{-1}"'] & \\
& L(X_\infty) \arrow[u, "L(p_j)"'] \arrow[dr, dotted] & \\
X_\infty \arrow[uuu, "p_j"] \arrow[ur, "\eta"] \arrow[rr, "1"'] & & X_\infty \arrow[uuu, "p_j"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

6.5 Bemerkung. Es sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ eine reflektive Teilkategorie mit Reflektor L und $X : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$ ein Diagramm. Dann ist der Limes von X in $\mathcal{B}$ gleich dem in $\mathcal{A}$ da I nach 4.14 stetig sein muß. Der Colimes von X in A ist die Reflexion desselben in $\mathcal{B}$:

$$\begin{tikzcd}
X(j) \arrow[rrr, "X(f)"] \arrow[dr, dotted, "(1)"'] \arrow[drr, "l_j"] \arrow[ddrr, bend right] & & & X(j') \arrow[dl, "l_{j'}"'] \arrow[ddl, bend left] \\
& LB_\infty \arrow[dr, dotted, "(3)"'] & B_\infty \arrow[l, "\eta"] \arrow[d, dotted, "(2)"] & \\
& & A &
\end{tikzcd}$$

6.6 Folgerung. *Es sei $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ reflektiv. Falls $\mathcal{B}$ (co)vollständig ist, so ist es auch $\mathcal{A}$.* $\square$

6.7 Definition. Eine Teilkategorie $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ heißt STARK UNTER LIMITEN ABGESCHLOSSEN, wenn für jedes Diagramm $X : \mathcal{J} \to \mathcal{B}$, welches initial in $\mathcal{A}$ liegt, d.h. $\{j : X(j) \in \mathcal{A}\}$ ist eine initiale Menge von Objekten in $\mathcal{J}$ (also für jedes Objekt j

von $\mathcal{J}$ ein j' von $\mathcal{J}$ existiert mit $\mathcal{J}(j',j) \neq \emptyset$ und $X(j') \in \mathcal{A}$), jeder $\mathcal{B}$-Limes schon in $\mathcal{A}$ liegt.

6.8 Theorem. *Falls $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ epireflektiv ist, dann ist $\mathcal{A}$ stark unter Limiten abgeschlossen.*

Beweis. Sei $X : \mathcal{J} \to \mathcal{B}$ ein Diagramm in $\mathcal{B}$, welches initial in $\mathcal{A}$ liegt, sei $(L,(l_j)_j)$ ein Limes von X in $\mathcal{B}$ und sei $\eta : L \to A$ die Reflexion von L in $\mathcal{A}$. Sei $I := \{i : X(i) \in \mathcal{A}\}$. Für jedes $i \in I$ existiert ein eindeutiger Morphismus $\tilde{l}_i : A \to X(i)$ mit $\tilde{l}_i \circ \eta = l_i$. Für jedes Objekt $j \notin I$ von $\mathcal{J}$ existiert ein $i_j \in I$ und ein Morphismus $f_j : i_j \to j$ und wir setzen $\tilde{l}_j := X(f_j) \circ \tilde{l}_{i_j}$. Da η ein Epi ist, folgt, daß $\tilde{l}_j$ durch $\tilde{l}_j \circ \eta = X(f_j) \circ \tilde{l}_{i_j} \circ \eta = l_j$ wohldefiniert ist, und daß $(A,(\tilde{l}_j))$ ein Kegel für X ist. Also existiert ein eindeutiger Morphismus $h : A \to L$ such daß $l_j \circ h = \tilde{l}_j$ für alle $j \in \mathcal{J}$.

$$\begin{tikzcd}
X(i_j) \arrow[rr, "X(f_j)"] & & X(j) \\
& L \arrow[ul, "l_{i_j}"'] \arrow[ur, "l_j"] \arrow[d, shift right, "\eta"'] & \\
& A \arrow[u, dotted, shift right, "h"'] \arrow[uul, dotted, bend left, "\tilde{l}_{i_j}"] \arrow[uur, dotted, bend right, "\tilde{l}_j"'] &
\end{tikzcd}$$

Somit gilt

$$l_j \circ h \circ \eta = \tilde{l}_j \circ \eta = l_j = l_j \circ 1.$$

Aus der Limes-Eigenschaft folgt $h \circ \eta = 1$. Somit ist η ein Schnitt und damit nach 6.3 ein Iso. Da $\mathcal{A}$ Iso-abgeschlossen ist, gehört L zu $\mathcal{A}$. □

6.9 Theorem. *Es sei $\mathcal{B}$ vollständig, extrem lokal klein, colokal klein und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ sei eine volle, Isomorphie-abgeschlossene Teilkategorie.*

1. *Dann ist $\mathcal{A}$ Epi-reflektiv in $\mathcal{B}$ genau dann, wenn $\mathcal{A}$ unter Produkten und extremen Monos abgeschlossen ist.*
2. *Ist $\mathcal{B}$ sogar lokal klein, dann ist $\mathcal{A}$ genau dann Epi-reflektiv in $\mathcal{B}$, wenn $\mathcal{A}$ stark Limes-abgeschlossen in $\mathcal{B}$ ist.*

Beweis. 1 ($\Rightarrow$) Nach 6.4 ist jede reflektive Teilkategorie unter Limiten abgeschlossen ist. Sei nun $m : B \to A$ ein extremer Mono und A in $\mathcal{A}$. Dann existiert ein f mit

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, tail, "m"] \arrow[dr, "\eta_B"'] & & A \\
& LB \arrow[ur, dotted, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Wegen der extrem-Mono Eigenschaft ist η_B ein Iso, und somit $B \cong LB \in \mathcal{A}$.

($\Leftarrow$) Es sei $\mathcal{E}$ eine repräsentative Menge von Epis $e : B \to \operatorname{cod} e$ mit Codomäne in $\mathcal{A}$. Dann existiert $(e)_{e\in\mathcal{E}} : B \to \prod_{e\in\mathcal{E}} \operatorname{cod} e$. Wegen der Produkt-Abgeschlossenheit ist $\prod_{e\in\mathcal{E}} \operatorname{cod} e$ in $\mathcal{A}$. Wegen 3.10.7 und 3.10.9 können wir diesen Morphismus als $m_B \circ e_B$ faktorisieren, mit e_B Epi und m_B starker Mono. Also ist wegen der extrem-Mono Abgeschlossenheit $LB := \operatorname{cod} e_B = \operatorname{dom} m_B$ in $\mathcal{A}$. Wir behaupten, daß $e_B : B \to LB$ ein universeller Pfeil ist. Sei also $f : B \to A \in |\mathcal{A}|$ beliebig. Dann existiert eine (Epi,stark-Mono)-Faktorisierung $f = m_f \circ e_f$ und wegen der stark-Mono Abgeschlossenheit ist $\operatorname{cod} e_f = \operatorname{dom} m_f$ in $\mathcal{A}$ also dürfen wir annehmen, daß $e_f \in \mathcal{E}$ ist, und somit existiert der gewünschte Morphismus

$$\begin{tikzcd}
& LB \in \mathcal{A} \arrow[d, tail, "m_B"] \\
B \arrow[ur, two heads, "e_B"] \arrow[r] \arrow[dr, two heads, "e_f"'] \arrow[ddr, "f"'] & \prod_e \operatorname{cod} e \in \mathcal{A} \arrow[d, "\mathrm{pr}_{e_f}"] \\
& \operatorname{cod} e_f \in \mathcal{A} \arrow[d, tail, "m_f"] \\
& A
\end{tikzcd}$$

Weil e_B Epi ist, ist dieser Pfeil eindeutig.

2 ($\Leftarrow$) Es sei $\mathcal{M}$ die Klasse aller $\mathcal{A}$-Morphismen, die $\mathcal{B}$-Monos sind. Wir behaupten, daß jeder $\mathcal{B}$-Morphismus $f : B \to A$ mit A in $\mathcal{A}$ eine (Epi,$\mathcal{M}$)-Faktorisierung besitzt:
Da $\mathcal{B}$ lokal klein ist, können wir den Durchschnitt μ aller Monos $\bullet \to A$ aus $\mathcal{M}$ über welche f faktorisiert betrachten. Dann faktorisiert f als $\mu \circ e$. Es ist e ein Epi, denn wenn $\alpha \circ e = \beta \circ e$, dann ist der Equalizer von α und β mit dem üblichen Beweis (z.B. von 3.10.7) ein Iso, also $\alpha = \beta$.

Sei nun $\mathcal{E}$ eine repräsentative Klasse von Epi's $B \to A'$ mit A' in $\mathcal{A}$. Dann bildet $\mathcal{E}$ wegen der Faktorisierungseigenschaft eine Lösungsmenge für B. Da die Inklusion nach Voraussetzung Limiten bewahrt, ist sie nach dem GAFT 4.27 ein rechtsadjungierter, d.h. $\mathcal{A}$ ist reflektiv in $\mathcal{B}$.

Es sei $\eta : B \to A$ die Reflexion und $m \circ e : B \to A' \to A$ ihre (Epi,$\mathcal{M}$)-Faktorisierung. Wegen der universellen Eigenschaft existiert ein $h : A \to A'$ mit $h \circ \eta = e$ und somit $m \circ h \circ \eta = m \circ e = \eta = 1 \circ \eta$, also $m \circ h = 1$. Somit ist m ein Iso und $\eta \cong e$ ein Epi.

$$\begin{tikzcd}
& & A \arrow[dl, dotted, "h"] \arrow[dd, "1"] \\
B \arrow[urr, "\eta"] \arrow[r, "e"] \arrow[drr, "\eta"'] & A' \arrow[dr, "m"] & \\
& & A
\end{tikzcd} \qquad \square$$

6.10 Beispiele epireflektiver Kategorien.

1. $\underline{Abel} \subseteq \underline{Gru}$ mit Abelisierung
2. $\underline{VollstUnif} \subseteq \underline{Unif}$ mit Vervollständigung.
3. $\underline{Komp} \subseteq \underline{Haus}$ mit Stone-Čech-Kompaktifizierung

6.11 Theorem. *Es sei $\mathcal{B}$ covollständig, lokal-klein und colokal klein und $\mathcal{A}$ besitzt einen Separator für $\mathcal{B}$. Dann sind äquivalent:*

1. *$\mathcal{A}$ ist coreflektiv in $\mathcal{B}$;*
2. *$\mathcal{A}$ ist Mono-coreflektiv in $\mathcal{B}$;*
3. *$\mathcal{A}$ ist Bi-coreflektiv in $\mathcal{B}$;*
4. *$\mathcal{A}$ ist stark Colimes abgeschlossen in $\mathcal{B}$;*
5. *$\mathcal{A}$ ist Colimes abgeschlossen;*

6. *$\mathcal{A}$ ist Coprodukt und extrem-Epi abgeschlossen.*

Beweis. Aus Dualitätsgründen folgt aus obigen Resultaten, daß 2 $\Leftrightarrow$ 4 $\Leftrightarrow$ 6.

3 $\Rightarrow$ 2 $\Rightarrow$ 1 und 4 $\Rightarrow$ 5 sind offensichtlich.

1 $\Rightarrow$ 3 Dazu ist wegen 6.2 nur zu zeigen, daß die Coeinheit ε aus Epi's besteht: Wenn S ein Separator in $\mathcal{A}$ für $\mathcal{B}$ ist, dann ist jedes $\mathcal{B}$-Objekt ein Quotient einer Copotenz von S (denn $\coprod_{\mathcal{B}(S,B)} S \to B$ ist ein Epi), welche nach 6.4 zu $\mathcal{A}$ gehört. Also ist $\mathcal{A}$ epi-coreflexiv, denn

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varepsilon"] & B \\ & \coprod S \arrow[u, two heads] \arrow[ul, dotted] \end{tikzcd}$$

5$\Rightarrow$4 Es sei $q : A \to B'$ der Coequalizer von $\alpha, \beta : B \to A$. Wir haben zu zeigen, daß B' zu $\mathcal{A}$ gehört. Es sei S ein Objekt von $\mathcal{A}$, welches für $\mathcal{B}$ separierend ist. Sei $e : \coprod_I S \to B$ ein Epi. Dann ist q auch der Coequalizer von $\alpha \circ e, \beta \circ e : \coprod_I S \to B \to A$. Da $\coprod_I S$ und A zu $\mathcal{A}$ gehören gilt selbiges auch für den Coequalizer B' nach Voraussetzung.

Nun beachte, daß jeder Colimes eines Funktors, der initial in $\mathcal{A}$ liegt, schon also Coequalizer E eines Coprodukts geschrieben werden kann, dessen Domäne zu $\mathcal{A}$ gehört: In der Tat (dual) ist $\lim X = \mathrm{Equ}(\alpha, \alpha')$, wobei α und α' durch folgendes Diagramm definiert sind, vgl. 3.17:

$$\begin{tikzcd} X(\operatorname{dom} h) \arrow[rr, "X(h)"] & & X(\operatorname{cod} h) \\ \prod_{i\in I} X(i) \arrow[u, "\mathrm{pr}_{\operatorname{dom} h}"'] \arrow[rr, shift left, "\alpha"] \arrow[rr, shift right, "\alpha'"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{\operatorname{dom} h'}"] & & \prod_{(h,h'):\operatorname{cod} h = \operatorname{cod} h'} X(\operatorname{cod} h) \arrow[u, "\mathrm{pr}_{(h,h')}"'] \arrow[d, "\mathrm{pr}_{(h,h')}"] \\ X(\operatorname{dom} h') \arrow[rr, "X(h')"] & & X(\operatorname{cod} h') \end{tikzcd}$$

Für jedes $j \in J$ existiert nach Voraussetzung ein $i \in I$ und ein Morphismus $h : i \to j$. Somit können wir $p_j : \mathrm{Equ}(\alpha, \alpha') \to X(j)$ als $X(h) \circ \mathrm{pr}_i |_{\mathrm{Equ}(\alpha,\alpha')}$ definieren. Diese Definition hängt nicht von der Wahl von i und h ab, denn für $h' : i' \to j$ erhalten wir

$$X(h') \circ \mathrm{pr}_{i'} |_{\mathrm{Equ}}(\alpha, \alpha') = \mathrm{pr}_{(h,h')} \circ \alpha' |_{\mathrm{Equ}(\alpha,\alpha')} =$$
$$= \mathrm{pr}_{(h,h')} \circ \alpha |_{\mathrm{Equ}(\alpha,\alpha')} = X(h) \circ \mathrm{pr}_i |_{\mathrm{Equ}}(\alpha, \alpha').$$

Es ist $(\mathrm{Equ}(\alpha, \alpha'), (p_j)_j)$ ein Kegel für X, denn zu $h' : j \to j'$ wählen wir ein i und ein $h : i \to j$ und somit ist

$$X(h') \circ p_j = X(h') \circ X(h) \circ \mathrm{pr}_i |_{\mathrm{Equ}(\alpha,\alpha')} = X(h' \circ h) \circ \mathrm{pr}_i |_{\mathrm{Equ}(\alpha,\alpha')} = p_{j'}.$$

Jeder Kegel (Z, q) des Equalizers definiert einen Kegel für X durch $(Z, (q_j)_j)$, wobei $q_j := X(h) \circ \mathrm{pr}_i \circ q = \mathrm{pr}_{(h,h')} \circ \alpha \circ q$, und umgekehrt. □

6.11a Beispiele.

- Es ist $\underline{KompErz} \hookrightarrow \underline{Top}$ bicoreflektiv.
- Es ist $\underline{BornLCS} \hookrightarrow \underline{LCS}$ bicoreflektiv.
- Es ist $\underline{TorsAGru} \hookrightarrow \underline{AGru}$ mono-coreflektiv.

7. Kartesisch abgeschlossen Kategorien, Topoi

7.1 Definition. Eine Kategorie $\mathcal{A}$ heißt KARTESISCH ABGESCHLOSSEN, wenn sie endlich vollständig ist (oder auch nur endliche Produkte besitzt) und die Funktoren $(\_) \times B$ linksadjungiert sind für alle Objekte B in $\mathcal{A}$.

Wir bezeichnen den rechtsadjungierten R_B zu $(\_) \times B$ als $R_B(C) := C^B$ und wir haben folglich natürliche Transformationen $(\_)^B \times B \to 1$ und $1 \to ((\_) \times B)^B$ mit Komponenten $\varepsilon_{B,C} : C^B \times B \to C$ und $\eta_{A,B} : A \to (A \times B)^B$. Es ist $R : \mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ein Funktor auch in der ersten Variable, da $(\_) \times (\_) : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ ein Bifunktor ist: Sei $f : B \to B'$ ein Morphismus. Dann ist $(\_) \times f : (\_) \times B \to (\_) \times B'$ eine natürliche Transformation, und somit ist durch

$$\begin{tikzcd}
C^B \times B \arrow[r, "\varepsilon_{B,C}"] & C \\
C^{B'} \times B \arrow[u, dotted, "C^f \times B"] \arrow[r, "1 \times f"] & C^{B'} \times B' \arrow[u, "\varepsilon_{B',C}"']
\end{tikzcd}$$

ein Morphismus $C^f : C^{B'} \to C^B$ definiert, und offensichtlich ist $C^{(\_)}$ ein Funktor $\mathcal{A}^{op} \to \mathcal{A}$. Für $f : B \to B'$ und $g : C \to C'$ gilt: $g^B \circ C^f = (C')^f \circ g^{(B')}$, also ist der Rechtsadjungierte ein Bifunktor.

7.2 Lemma. *Es sei $\mathcal{A}$ kartesisch abgeschlossen. Dann ist*

(1) $Z^{X \times Y} \cong (Z^X)^Y$, (2) $(X \times Y)^Z \cong X^Z \times Y^Z$, (3) $X \times T \cong X$, *und* (4) $X^T \cong X$

Proof. $\boxed{1}$ Da $((\_) \times X, (\_)^X)$ und $((\_) \times Y, (\_)^Y)$ adjungiert sind, sind es auch die Zusammensetzungen.
$\boxed{2}$ Da $(\_)^Z$ rechtsadjungiert ist, ist er stetig.
$\boxed{3}$, $\boxed{4}$ da $X \times T \cong X$ gilt, gilt auch für den rechtsadjungierten $(\_)^T \cong (\_)$. □

7.3 Remark. Falls für das terminale Objekt T, der Funktor $V := \mathcal{A}(T, \_) : \mathcal{A} \to \underline{Set}$ treu ist, so gilt:

$$V(X \times Y) = \mathcal{A}(T, X \times Y) \cong \mathcal{A}(T, X) \times \mathcal{A}(T, Y) = V(X) \times V(Y).$$

Weiters ist

$$V(C^B) = \mathcal{A}(T, C^B) \cong \mathcal{A}(T \times B, C) \cong \mathcal{A}(B, C)$$

und $V(\varepsilon) : V(C^B \times B) \to V(C)$ ist bis auf die Inklusion

$$V(C^B \times B) \cong V(C^B) \times V(B) \cong \mathcal{A}(B, C) \times V(B) \hookrightarrow V(C)^{V(B)} \times V(B)$$

gegeben durch,

$$\mathrm{ev} : (f, b) \mapsto f(b).$$

In der Tat sei $f \in V(C^B) = \mathcal{A}(T, C^B)$ und $b \in V(B) = \mathcal{A}(T, B)$. Es sei $(f, b) : T \to C^B \times B$ der assoziierte eindeutige Morphismus. Es ist $\hat{f} = \varepsilon \circ (f \times B) : T \times B \to C^B \times B \to C$. Es ist $\mathrm{pr}_2 : T \times 1 \to 1$ ein natürlicher Isomorphismus und

$$\begin{aligned}
\mathrm{ev}(V(\hat{f} \circ \mathrm{pr}_2^{-1}), b) &= (\hat{f} \circ \mathrm{pr}_2^{-1})_*(b) = \varepsilon \circ (f \times B) \circ \mathrm{pr}_2^{-1} \circ b \\
&= V(\varepsilon)((f \times B) \circ \mathrm{pr}_2^{-1} \circ b) = V(\varepsilon)((f \times B) \circ (T \times b) \circ \mathrm{pr}_2^{-1}) \\
&= V(\varepsilon)((f \times b) \circ \Delta) = V(\varepsilon)(f, b).
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & C^B \times B \arrow[r, "\varepsilon"] & C \\
I \arrow[r, "\Delta"] \arrow[urr, bend left, "{(f,b)}"] \arrow[dr, "1"'] & I \times I \arrow[r, "I\times b"'] \arrow[ur, "f\times b"] \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{pr}_2"] & I \times B \arrow[u, "f\times B"'] \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{pr}_2"] & \\
 & I \arrow[r, "b"'] & B &
\end{tikzcd}$$

7.4 Beispiel. Die Kategorie $\underline{Top}$ ist nicht kartesisch abgeschlossen, denn $(\_) \times X$ erhält nicht reguläre Epi's und somit nicht Colimiten, was er als Linksadjungierter tuen müßte.

Die Kategorie $\underline{KpErz}$ der Kelly-Räume ist kartesisch abgeschlossen. Das Produkt ist die Kellyfizierung des kartesischen Produkts und der Funktionenraum Y^X ist versehen mit der Kellyfizierung der kompakt-offenen Topologie.

Man kann zeigen, daß die Kategorie der lokalkonvexen Vektorräume mit den glatten Abbildungen als Morphismen kartesisch abgeschlossen ist. Dabei heißt eine Abbildung $f : E \to F$ glatt, wenn $f \circ c : \mathbb{R} \to F$ glatt ist für alle glatten Kurven $c : \mathbb{R} \to F$ und für Kurven ist Glattheit wie üblich definiert. Das Produkt ist das übliche kartesische Produkt und der Funktionenraum trägt die initiale lokalkonvexe Struktur bezüglich der $c^* : C^\infty(E, F) \to C^\infty(\mathbb{R}, F)$ und $C^\infty(\mathbb{R}, F)$ die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz jeder Ableitung auf Kompakta.

Bemerkung. Es gibt aber noch andere Situationen, wo der Hom-Funktor intern ist und einen Linksadjungierten besitzt. Sei nämlich $\mathcal{A}$ die Kategorie der Vektorräume. Dann ist $L(E, F)$ selbst ein Vektorraum, und das Tensorprodukt erfüllt $\underline{VR}(E \otimes F, G) \cong \underline{VR}(E, L(F, G))$.

Allgemein heißt eine Kategorie $\mathcal{A}$ symmetrisch monoidal abgeschlossen, wenn ein Funktor $* : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ existiert, der bis auf einen natürlichen Isomorphismus assoziativ ist, und bis auf natürliche Isomorphismen ein beidseitig neutrales Element e besitzt und folgende Diagramme kommutieren

$$\begin{tikzcd}
 & a * (b * (c * d)) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a * ((b * c) * d) \arrow[d] & & (a * b) * (c * d) \arrow[d] \\
(a * (b * c)) * d \arrow[rr] & & ((a * b) * c) * d
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
a * (e * b) \arrow[rr] \arrow[dr] & & (a * e) * b \arrow[dl] \\
 & a * b &
\end{tikzcd}$$

Symmetrie bedeutet, daß $a * b \cong b * a$ in natürlicher (idempotenter) Weise und so daß folgende Diagramme kommutieren:

$$\begin{tikzcd}
b * e \arrow[rr] \arrow[dr] & & e * b \arrow[dl] \\
& b &
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
& a * (b * c) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
a * (c * b) \arrow[d] & & (a * b) * c \arrow[d] \\
(a * c) * b \arrow[dr] & & c * (a * b) \arrow[dl] \\
& (c * a) * b &
\end{tikzcd}$$

Abgeschlossenheit bedeutet, daß $(\_) * a$ einen rechtsadjungierten $(\_)^a$ besitzt. Es ist dann $(a, b) \mapsto b^a$ ein Funktor $\mathcal{A}^{op} \times \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

7.5 Definition. Unter einem Topos versteht man eine kartesisch abgeschlossene Kategorie $\mathcal{A}$ mit einen Klassifizierer für Unterobjekte, d.h. einen Monomorphismus $t : 1 \to 2$ so daß jeder Mono $m : A' \to A$ ein Pullback von t längs eines eindeutigen Morphismuses (der charakteristischen Abbildung) $\chi_m : A \to 2$ ist.

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, dotted] \arrow[d, tail, "m"'] & 1 \arrow[d, tail, "t"] \\
A \arrow[r, "\chi_m"] & 2
\end{tikzcd}$$

Es stehen also Äquivalenz-Klassen von Unterobjekten von A in bijektiver Beziehung zu $\mathcal{A}(A, 2)$.

Es ist einfach zu sehen, daß in jedem Topos

- 1 ein terminales Objekt ist (siehe [**17**, 1.11]),
- Monomorphismen sind regulär (siehe [**17**, 1.21]),
- Epimorphismen sind regulär (siehe [**17**, 1.53]),
- endliche Colimiten existieren (siehe [**17**, 1.36]),
- (Epi,Mono)-Faktorisierungen existieren (siehe [**17**, 1.52]),
- somit jeder Topos eine exakte Kategorie ist,

Topoi sind eine Verallgemeinerung der Kategorie der Mengen und können an deren Stelle als Basis der Mathematik verwendet werden, z.B. besteht eine interne Kategorie aus zwei Objekten $\mathcal{O}$ und $\mathcal{M}$ des Topos und vier Morphismen $d : \mathcal{M} \to \mathcal{O}$, $c : \mathcal{M} \to \mathcal{O}$, $u : \mathcal{O} \to \mathcal{M}$ und $k : \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ welche $d \circ u = 1 = d \circ c$, $d \circ m = d \circ \mathrm{pr}_1$, $c \circ m = c \circ \mathrm{pr}_2$, $m \circ (1 \times m) = m \circ (m \times 1) : \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \times_{\mathcal{O}} \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $m \circ (1 \times u) = m \circ (u \times 1) = 1$. Unter Elementen von Objekten X des Topos verstehen wir Morphismen $1 \to X$.

Jeder Topos hat auch eine interne Logik: Wir können 2 mit einer partiellen Ordnung (den Egalisator von $\mathrm{pr}_1, \wedge : 2 \times 2 \to 2$) und binären Operation $\wedge, \vee, \Rightarrow : 2 \times 2 \to 2$ (den klassizierenden Abbildungen zu $(t, t) : 1 \to 2 \times 2$, zu der Vereinigung von $1 \times t : 2 \times 1 \to 2 \times 2$ und $t \times 1 : 1 \times 2 \to 2 \times 2$, und zum Egalisator von $\mathrm{pr}_1, \wedge : 2 \times 2 \to 2$) sowie den Elementen $t : 1 \to 2$ and $f : 1 \to 2$ (welches als klassifizierendes Objekt von $0 \to 1$ definiert ist) und der einstelligne Operation $\neg : 2 \to 2$ (der klassifizierenden Abbildung zu $f : 1 \to 2$), siehe [**17**, 3.51]) versehen:

7.8 Theorem. *Sei $\mathcal{A}$ ein Topos. Dann ist für jedes Objekt a in $\mathcal{A}$ die Pfeilkategorie $\overrightarrow{\mathcal{A}a}$ selbst ein Topos.*

Beweis. Das Produkt in der Pfeilkatgeorie ist das Pullback. $\square$

7.9 Beispiel. Da Pullbacks von regulären Epi's in $\underline{KompErz}$ i.A. nicht von der gleichen Art sind, kann diese Kategorie nicht lokal kartesisch abgeschlossen sein. Gleiches gilt für die Kategorie der glatten Abbildungen zwischen lokalkonvexen Vektorräumen.

Hingegen ist jeder Grothendieck Topos (d.h. eine Kategorie aller Garben über einer Grothendieck-Topologie, also einer Menge abstrakt definierter Überdeckungen aller Objekte einer kleinen Kategorie) ein Topos in obigen Sinn, siehe [**17**, 1.12].

Literaturverzeichnis

[1] Reinhold Baer. Abelian groups that are direct summands of every containing abelian group. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46:800–806, 1940. 29

[2] S. Eilenberg and N. Steenrod. *Foundations of Algebraic Topology*. Princeton, 1952.

[3] Samuel Eilenberg and Saunders Mac Lane. General theory of natural equivalences. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 58, 1945. 19

[4] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. Group extensions and homology. *Ann. of Math. (2)*, 43:757–831, 1942.

[5] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. Natural isomorphisms in group theory. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 28:537–543, 1942. 19

[6] Samuel Eilenberg and Saunders MacLane. Relations between homology and homotopy groups of spaces. *Ann. of Math. (2)*, 46:480–509, 1945.

[7] Ryszard Engelking. *General Topology*. Heldermann, Berlin, 1989. ISBN: 3-88538-006-4

[8] Peter Freyd. *Abelian categories. An introduction to the theory of functors*. Harper's Series in Modern Mathematics. Harper & Row Publishers, New York, 1964.

[9] László Fuchs. *Infinite abelian groups, Vol. I*, volume Vol. 36 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press, New York-London, 1970. 29

[10] S. Gacsályi. On algebraically closed abelian groups. *Publ. Math. Debrecen*, 2:292–296, 1952. 29

[11] S. Gacsályi. On pure subgroups and direct summands of abelian groups. *Publ. Math. Debrecen*, 4:89–92, 1955. 29

[12] A.W. Hales. On the non-existence of free complete Boolean algebras. *Fundam. Math.*, 54:45–66, 1964. 99

[13] Horst Herrlich and George E. Strecker. *Category theory: an introduction*. Allyn and Bacon Inc., Boston, Mass., 1973. Allyn and Bacon Series in Advanced Mathematics.

[14] Horst Herrlich and George E. Strecker. *Category theory*, volume 1 of *Sigma Series in Pure Mathematics*. Heldermann Verlag, Lemgo, third edition, 2007. An introduction.

[15] W. Hurewicz and N. E. Steenrod. Homotopy relations in fibre spaces. *Proc. nat. Acad. Sci. USA*, 27:60–64, 1941. 19

[16] H. Jarchow. *Locally convex spaces*. Teubner, Stuttgart, 1981. 59

[17] P. T. Johnstone. *Topos theory*. Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], London, 1977. London Mathematical Society Monographs, Vol. 10. 115, 116

[18] Peter T. Johnstone. *Stone spaces*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 3. Cambridge etc.: Cambridge University Press. XXI, 370 p., 1982. 99

[19] A. Kriegl. *Funktional Analysis*. Vorlesung, Univ. Wien, 2006. 13, 62

[20] Andreas Kriegl. Nonlinear functional analysis 1. 1993. 64

[21] C. Kuratowski. Solution d'un problème concernant les images continues d'ensembles de points. *Fundamenta math.*, 2:158–160, 1921. 3

[22] F. William Lawvere. An elementary theory of the category of sets. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 52:1506–1511, 1964.

[23] Saunders Mac Lane. *Kategorien*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.

[24] Saunders MacLane. *Categories for the working mathematician*. Springer-Verlag, New York, 1971. Graduate Texts in Mathematics, Vol. 5.

[25] Gerhard Preuß. *Grundbegriffe der Kategorientheorie*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 1975.

[26] Dana I. Schlomiuk. An elementary theory of the category of topological spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149:259–278, 1970.

[27] N. Wiener. Studies in synthetic logic. *Cambr. Phil. Soc. Proc.*, 18:14–28, 1914. 3

Index

($\mathcal{E},\mathcal{M}$)-Kategorie, 25
(a, b), 3
(x, y), 6
0-Objekt, 31
1_A, 3
$Cokeg(F)$, 50
R-erzeugt, 88
$X \times Y$, 7
$\emptyset$, 3
$\mathcal{I}$-vollständige Kategorie, 44
$\mathcal{M}$-coreflektive Teilkategorie, 108
$\mathcal{M}$-reflektive Teilkategorie, 108
$\mathcal{P}(a)$, 3
$\mathcal{P}(f)(a)$, 13
$\mathcal{P}(x)$, 5
$\mathcal{R}$, 4
$\mathcal{U}$, 3, 4
Abb(X, Y), 7
dom(f), 8
$\overrightarrow{bR}$, 83
$\{T_x : A(x)\}$, 3
$\{T_x : B(x)\}$, 6
$\{a, b\}$, 3
$\{a\}$, 3
$a \cap b$, 3
$a \cup b$, 3
$a \cup b$, 6
$a \times b$, 3
f, $\_a3$
$f[X]$, 8
$f[a]$, 3
$f \circ g$, 3
f^{-1}, 3
(ZFS), 4
(extrem-)colokal klein, 25
(extrem-)lokal klein, 25
Äquivalenz von Kategorien, 17
Äquivalenz-Relation, 37
0-Morphismus, 20

Abelsche Kategorie, 105
Adjunktion, 75
algebraische Kategorie, 96
antisymmetrisch, 68
Auswahlaxiom, 6

balanziert, 20
Bi-(co)reflektiv, 108
Bimorphismus, 20

Codurchschnitte, 50
Coegalisatoren, 50
Coeinheit einer Adjunktion, 80
Cokegeln, 50
Cokern, 100
cokonstant, 20
Colimes, 50
conormale Kategorie, 100
Coprodukte, 50
coreflektive Teilkategorie, 108
Coseparator, 56
Coseparatormenge, 56

darstellbarer Funktor, 76
Differenzkerns, 38
direkte Limiten, 50
Dreiecksgleichung, 80
dreiecksgleichung, 80
dualen Kategorie, 14
Durchschnitt, 33
Durchschnitt einer Klasse, 33

Egalisators, 38
Einbettungvon Kategorien, 13
Einheit, 11
Einheit einer Adjunktion, 80
Epi-(co)reflektiv, 108
Epimorphismus, 20
Ersetzung, 6
Erweiterung, 27
Erweiterungseigenschaft, 27
Erzeuger, 91
exakte Kategorie, 100
Extensionalität, 5
extrem R-erzeugt, 88
extremer Epimorphismus, 22
extremer Monomorphismus, 22

finals Objekt, 31
Fortsetzung, 27
freien Objekt, 91
Funktor, 12

Galoisbeziehung, 68
globalen Auswahl, 8

Hochhebung, 27
Hochhebungseigenschaft, 27
Hom-Funktor, 15
horizontale Komposition von natúrlichen Transformationen, 16

induktive Limiten, 50
initiale, 33
initiales Objekt, 26

initials Objekt, 31
injektivs Objekt, 27
inverse Limes, 41
inverses Bild, 34
Isomorphismus, 20
Isomorphismus von Kategorien, 13

kartesisch abgeschlossene Kategorie, 113
Kategorie, 10
Kegeln, 44
Kern, 100
Klassifizierer für Unterobjekte, 115
kleine Kategorie, 13
Komposition, 10
Komprähension, 5
konkrete Kategorie, 15
konstant, 20

Leere Menge, 5
Lift, 27
Limes, 43
Limesordinalzahlen, 6
Linksadjungierte, 75
Linksadjungierten, 68

MKT, 5
Mono-(co)reflektiv, 108
Monomorphismus, 20
Morphismen, 10

Nachfolger-Ordinalzahl, 6
natürlichen Transformation, 16
natürlicher Isomorphismus, 16
normale Kategorie, 100
normaler Epi, 100
normaler Mono, 100
Nullobjekt, 26

Objekte, 10
Ordinalzahl, 6

partielle Ordnung, 68
Pfeilkategorie, 83
Potenzmenge, 5
Produkt, 31
Produkt von Kategorien, 14
projektive Limit, 41
projektivs Objekt, 27
Pullback, 35
Pushouts, 50

Quasiordnung, 68

Rückzieher, 35
Rausschieber, 35, 50
Rechstadjungierte, 75
Rechtsadjungierten, 68
reduzierter projektiver Limes, 62
reflektive Teilkategorie, 108
reguläre Mono, 47
reguläre Monomorphismen, 38
Retraktion, 20

Schnitt, 20
Separator, 56
Separator-Menge, 56

Skelett einer Kategorie, 19
skelettale Kategorie, 19
stark unter Limiten abgeschlossen, 109
starker Epimorphismus, 25
starker Monomorphismus, 24
Summen, 50

Teilkategorie, 12
Teilmenge, 5
terminals Objekt, 26, 31
Topos, 115
treuer Funktor, 13

Unendlichkeit, 6
universellen Copfeil, 83
universeller Pfeil, 83
Unterkategorie, 12

Vereinigung, 5
voller Funktor, 13
vollständige Kategorie, 44

Wohlfundiertheit, 9