2. Hfb und assoziierte Faserbündel

Definition 2.4. Hfb als Faserbündel mit Lie-Gruppe als Faser. [**Bau09**, S.48+10] Ein G-Hfb ist ein Faserbündel $\pi : P \to M$ mit einer fasertreuen, einfach transitiven rechts-Wirkung der Lie-Gruppe G auf P mit G-äquivarianten Faserbündelkarten.

Beispiel 2.6. Homogene Räume als Hfb. [**Bau09**, S.50+10] Sei G eine Lie-Gruppe, $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Untergruppe und G/H der homogene Raum. Dann ist $G \to G/H$ ein H-Hfb.

Beispiel 2.8. Stiefelmannigfaltigkeit als $O(k)$-Hfb über der Grassmann-Mannigfaltigkeit. [**Bau09**, S.51+10]

Beispiel 2.9. Reperbündel als $\mathrm{GL}(n)$-Hfb. [**Bau09**, S.51+10]
$\mathrm{GL}(M) \to M$, wobei $\mathrm{GL}(M)_x := \{(v_1, \dots, v_m) : (v_1, \dots, v_m) \text{ ist Basis in } T_xM\} \cong \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^m, T_xM)$.

Satz 2.6. Trivialität via globalen Schnitt.

Satz 2.7. Zu Hfb assoziierte Faserbündel. [**Bau09**, S.53+10] *Sei $\pi : P \to M$ ein G-Hfb und G wirke von links auf einer Mannigfaltigkeit F. Dann ist $P \times_G F := (P \times F)/G \to M$ ein Faserbündel mit typischer Faser F, wobei G auf $P \times F$ durch $(p, v) \cdot g = (p \cdot g, g^{-1} \cdot v)$ von rechts wirkt und die Projektion $P \times_G F \to M$ gegeben ist durch $[(p, v)] \mapsto \pi(p)$.*

Definition 2.7. G-äquivariante Schnitte. Sei $\pi : P \to M$ ein G-Hfb und $E := P \times_G F \to M$ das assoziierte Faserbündel bzgl. einer links-Wirkung von G auf F. Für $x \in M$ und $p \in P_x$ sei $[p] : F \to P_x \times_G F = E_x$, $v \mapsto [(p, v)]$ der durch p definierte Faserdiffeomorphismus.
Mit $C^\infty(P, F)^G$ bezeichnet man die glatten G-äquivarianten (d.h. $s(z \cdot g) = g^{-1} \cdot s(z)$) Abbildungen $P \to F$.

Satz 2.9. Glatte Schnitte des assoziierten Bündels. [**Bau09**, S.55+10] *Es ist $C^\infty(M \leftarrow P \times_G F) = \Gamma(E) \cong C^\infty(P, F)^G$.*

Satz 2.11. Vektorbündel sind assoziierte Bündel. [**Bau09**, S.62+10]

1. *Jedes reelle Vektorbündel ist assoziiert zu einem $O(m)$-Hfb.*
2. *Jedes komplexe Vektorbündel vom Rang m ist assoziiert zu einem $U(m)$-Hfb.*

Definition 2.11. λ-Reduktion. [**Bau09**, S.63+10] Sei $\pi : P \to M$ ein G-Hfb und $\lambda : H \to G$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Eine λ-Reduktion von π ist ein H-Hfb $\pi : Q \to M$ zusammen mit einer Faser-erhaltenden glatten Abbildung $f : Q \to P$ die H-äquivariant in folgenden Sinn ist: $f(q \cdot h) = f(q) \cdot \lambda(h)$.

$$\begin{tikzcd} Q \times H \arrow[r, "f\times\lambda"] \arrow[d, "\cdot"] & P \times G \arrow[d, "\cdot"] \\ Q \arrow[r, "f"] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ M \arrow[r, equal] & M \end{tikzcd}$$

Satz 2.14. Existenz von λ-Reduktionen. [**Bau09**, S.66+10] *Ein G-Hfb $\pi : P \to M$ ist genau dann auf eine abgeschlossene Untergruppe $H \subseteq G$ reduzierbar, wenn das assoziierte Faserbündel $\pi : E := P \times_G G/H \to M$ mit typischer Faser G/H einen globalen glatten Schnitt besitzt.*

Satz 2.16. Existenz der Reduktion auf maximal kompakte Untergruppen. [**Bau09**, S.67+10] *Sei G eine zusammenhängende, nicht-kompakte Lie-Gruppe und $\pi : P \to M$ ein G-Hfb. Dann läßt sich P auf jede maximal-kompakte Untergruppe $K \subseteq G$ reduzieren. Z.B. $O(k) \subseteq GL(k)$.*

Satz 2.17. Isomorphie assoziierter Bündel. [**Bau09**, S.68+10] *Sei $\lambda : H \to G$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus und $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ eine Darstellung. Seit $\pi : P \to M$ ein G-Hfb und $Q \to M$ mit f eine λ-Reduktion von P. Dann sind die assoziierten Vektorbündel $P \times_{(G,\rho)} V$ und $Q \times_{(H,\rho\circ\lambda)} V$ isomorph.*

Definition 2.13. λ-Erweiterung. [**Bau09**, S.68+10] Sei $\pi : Q \to M$ ein H-Hfb, $\lambda : H \to G$ ein Lie-Gruppen-Homomorphismus. Dann ist $Q \times_H G \to M$ ein Faserbündel mit typischer Faser G, wobei die Wirkung von H auf G durch links-Multiplikation mit dem λ-Wert gegeben ist. Dieses Bündel heißt λ-Erweiterung von $Q \to M$.

Satz 2.18. Die λ-Erweiterung als Hfb mit Reduktion. [**Bau09**, S.68+10] *Die λ-Erweiterung ist ein G-Hfb und Q ist eine λ-Reduktion vermöge $f : Q \to P := Q \times_H G$, $q \mapsto [(q, e)]$. Jedes Hfb ist isomorph zur Erweiterung jeder λ-Reduktion.*

3. Zusammenhänge in Hfb

Definition. Der VERTIKALE TANGENTIALRAUM $Tv_uP := T_u(P_x) \subseteq T_uP$ für $u \in \pi^{-1}(x)$ einer Submersion $\pi : P \to M$.

Proposition 3.1. [**Bau09**, S.74+10] *$Tv_uP = \ker(T_u\pi)$ und $\mathfrak{g} \cong Tv_uP$ vermöge $X \mapsto \tilde{X}(u) := \frac{d}{dt}|_{t=0}(u \cdot \exp(tX))$.*

Definition 3.1. [**Bau09**, S.75+10] ZUSAMMENHANG auf einem G-Hfb $\pi : P \to M$ ist rechtsinvariantes (d.h. $TR_g(Th_uP) = Th_{u\cdot g}P$) Teilbündel $Th \subseteq TP$ dessen Fasern Komplemente zu TvP.

Definition 3.2. [**Bau09**, S.75+10] Eine ZUSAMMENHANGSFORM auf einem G-Hfb $\pi : P \to M$ ist ein $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ mit $R_g^*A = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ A$ und $A(\tilde{X}) = X$.

Satz 3.2 [**Bau09**, S.75+10]**.** *Zusammenhänge und Zusammenhangsformen auf einem Hfb stehen in Bijektion zueinander vermöge*

$$Th \mapsto (A : u \mapsto A_u(\tilde{X}(u) \oplus Y_h) := X) \quad \forall Y_h \in Th_uP$$
$$A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}) \mapsto (Th : u \mapsto \ker A_u).$$

Satz 3.3 [**Bau09**, S.77+10]**.** *Zusammenhänge und lokale Zusammenhangsformen auf einem Hfb stehen in Bijektion zueinander vermöge*

$$A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g}) \mapsto A^s := s^*(A) \quad \forall s \in C^\infty(U \leftarrow \pi^{-1}(U) \subseteq P)$$
$$(A_i)_i \mapsto A \quad \forall A_i = \mathrm{Ad}(g_{ij}^{-1}) \circ A_j + \mu_{ij} \textit{ mit } \mu_{ij} := g_{ij}^*\mu_G.$$

Beispiel 3.1. Kanonische flache Zusammenhang. [**Bau09**, S.80+10] $Tv_{(x,g)}P = T_{(x,g)}(\{x\} \times G) \cong T_gG$ $Th_{(x,g)}P := T_{(x,g)}(M \times \{\mathfrak{g}\}) \cong T_xM$ mit Zusammenhangsform $A : T_xM \oplus T_gG \ni X + U \mapsto TL_{g^{-1}}Y = \mu_G(Y)$.

Beispiel 3.2. [**Bau09**, S.80+10] **Linksinvariante Zusammenhänge auf reduktiven homogenen Räumen.** Sei $H < G$ abgeschlossene (Lie-)Untergruppe. G/H heißt REDUKTIV, falls $\exists \mathfrak{m}$: $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ mit $\mathrm{Ad}(H)\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}$. $\pi : G \to G/H$ ist H-Hfb. Für $x \in \mathfrak{h}$ ist das fundamentale Vektorfeld $\tilde{X} = TL_gX$. $TvG = TL_g\mathfrak{h} \subseteq T_gG$. $g \mapsto Th_gG := TL_g(\mathfrak{m})$ ist Zusammenhang.

Beispiel 3.4. Zusammenhänge auf dem Reperbündel. [**Bau09**, S.82+10] Die kovarianten Ableitungen auf TM stehen in Bijektion zu den Zusammenhängen am Reperbündel $GL(M)$ vermöge:

$$A = \sum_{ij} \omega_{ij}\, B_{i,j} \mapsto \nabla_X s_k := \sum_i \omega_{ik}(Ts\, X)\, s_i$$
$$(\nabla : s_i \mapsto \sum_j \omega_{ji} \otimes s_j) \mapsto A_s = \sum_{i,j} B_{i,j}$$

Wobei B_{ij} die kanonische Basis von $L(n)$ ist und $s = (s_1, \dots, s_n)$.

Satz 3.4. [**Bau09**, S.84+10] *Jedes Hfb besitzt Zusammenhang.*

Definition 3.3. [**Bau09**, S.86+10] Sei $\pi : P \to M$ ein G-Hfb, $\rho : G \to GL(V)$ eine Darstellung und $E := P \times_G V$ das assoziierte Vb.

Eine k-Form $\omega \in \Omega^k(P, V)$ heißt

- HORIZONTAL, falls $\omega_p(X_1, \dots, X_k) = 0$ falls ein $X_i \in T_pP$ vertikal ist.
- VOM TYP ρ, falls $R_a^*\omega = \rho(a^{-1}) \circ \omega \; \forall a \in G$ (G-äquivariant).

Sei $\Omega^k_{\mathrm{hor}}(P, V)^{(G,\rho)}$ die Menge der horizontalen k-Formen vom Typ ρ. Die Menge aller Zusammenhänge $\mathcal{C}(P)$ ist ein affiner Raum mit $\Omega^1_{\mathrm{hor}}(P, \mathfrak{g})^{G,\mathrm{Ad}}$ als assoziierten Vektorraum.

Satz 3.5. [**Bau09**, S.86+10] $\Omega^k(M, E) \cong_{VR} \Omega^k_{hor}(P, V)^{(G,\rho)}$.

Definition 3.4. [**Bau09**, S.88+10] Sei $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann heißt ein $X^* \in \mathfrak{X}(P)$ HORIZONTALER LIFT von X falls

1. $X^*(p) \in Th_p(P)$
2. $T_p\pi(X^*(p)) = X(\pi(p)) \; \forall p \in P$.

Theorem 3.6. [**Bau09**, S.88+10]

1. *Jedes $X \in \mathfrak{X}(M)$ besitzt einen eindeutigen horizontalen Lift $X^* \in \mathfrak{X}(P)$ und dieser ist rechtsinvariant.*
2. *Jedes horizontale rechtsinvariante Vektorfeld in $\mathfrak{X}(P)$ ist horizontaler Lift eines eindeutig bestimmten Vektorfelds $X \in \mathfrak{X}(M)$.*
3. *Für $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ und $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ist*

$$X^* + Y^* = (X+Y)^*, \quad (fX)^* = (f \circ \pi)X^*, \quad \text{und} \quad [X, Y]^* = \mathrm{pr}_h([X^*, Y^*]).$$

4. *Sei Z ein horizontales und $\tilde{B}$ ein fundamentales Vektorfeld auf P und $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist $[\tilde{B}, Z]$ horizontal und $[\tilde{B}, X^*] = 0$.*

Definition 3.5. [**Bau09**, S.89+10] Ein Weg $\gamma^* : I \to P$ heißt HORIZONTALER LIFT eines Weges $\gamma : I \to M$ falls

1. $\pi \circ \gamma^* = \gamma$
2. $\dot{\gamma}^*(t)$ horizontal $\forall t \in I$.

Satz 3.7. [**Bau09**, S.89+10] *Sei $\gamma : I \to M$ ein Weg, $t_0 \in I$, $u \in P_{\gamma(t_0)}$. Dann existiert ein eindeutiger horizontaler Lift $\gamma^*_u : I \to P$ mit $\gamma^*_u(t_0) = u$.*

Definition 3.6. [**Bau09**, S.90+10] Sei $\gamma : I \to M$ ein Weg. Die Abbildung $P^A_\gamma : P_{\gamma(a)} \to P_{\gamma(b)}$, $u \mapsto \gamma^*_u(b)$ heißt PARALLELVERSCHIEBUNG in P längs γ bzgl. des Zusammenhangs A.

Mit $\mu \star \gamma : [0,1] \to M$ bezeichnen wir die Verkettung von γ gefolgt von μ und mit $\gamma^- : [0,1] \to M$ den verkehrt durchlaufenen Weg.

Satz 3.8. [**Bau09**, S.91+10]

1. *Seien γ und μ verkettbare Wege in M. Dann ist $P^A_{\mu\star\gamma} = P^A_\mu \circ P^A_\gamma$.*
2. *P^A_γ ist ein Diffeomorphismus mit $(P^A_\gamma)^{-1} = P^A_{\gamma^-}$.*
3. *P^A_γ is G-äquivariant, d.h. $P^A_\gamma \circ R_g = R_g \circ P^A_\gamma \; \forall g \in G$.*

Satz 3.9. [**Bau09**, S.92+10] *Sei M zusammenhängend und der Paralleltransport wegunabhängig. Dann ist (P, A) isomorph zum trivialen Hfb $(M \times G, A_0)$ mit dem kanonischen flachen Zusammenhang.*

Die Parallelverschiebung im Hfb P induziert eine Parallelverschiebung in den assoziierten Faserbündeln (mit G-Wirkung auf F) gegeben durch:

$$P_\gamma^{E,A} : [(p, v)] \mapsto [(P_\gamma^A(p), v)].$$

Es ist $P_\gamma^{E,A} = [\gamma^*(b)] \circ [\gamma^*(a)]^{-1}$.

Definition 3.7. [**Bau09**, S.94+10] Eine lineare Abbildung $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ heißt KOVARIANTE ABLEITUNG in A falls

$$\nabla(fe) = df \otimes e + f \cdot \nabla e \text{ für alle } f \in C^\infty(M) \text{ und } e \in \Gamma(E)$$

Das Differential einer horizontalen k-Form muß nicht horizontal sein: Sei $M = \mathbb{R}$, $G = (\mathbb{R}, +)$ und $P = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ das triviale G-Hfb mit dem kanonischen flachen Zusammenhang. Für $f \in C^\infty(P, \mathbb{R})$ ist durch $\omega_{(t,s)} := f(t, s)\, dt$ eine horizontale 1-Form auf P definiert. Deren Differential $d\omega$ ist genau dann horizontal wenn ω geschlossen ist.

Definition 3.8. [**Bau09**, S.95+10] Es sei das durch A INDUZIERTE ABSOLUTE DIFFERENTIAL $D_A : \Omega^k(P, V) \to \Omega^{k+1}(P, V)$ auf P definiert durch

$$(D_A\omega)_p(t_0, \dots, t_k) := d\omega(\mathrm{pr}_h(t_0), \dots, \mathrm{pr}_h(t_k))$$

Satz 3.10. [**Bau09**, S.95+10] *Das durch A induzierte absolute Differential bildet horizontale Differentialformen von Typ ρ auf solche ab. Für $\omega \in \Omega^k_{hor}(P, V)^{(G,\rho)}$ gilt:*

$$D_A\omega = d\omega + \rho_*(A) \wedge \omega,$$

wobei

$$(\rho_*(A) \wedge \omega)(t_0, \dots, t_k) := \sum_{i=0}^{k} \rho_*(A(t_i))(\omega(t_0, \dots, \widehat{t_i}, \dots, t_k))$$

D_A induziert eine lineare Abbildung $d_A : \Omega^k(M, E) \to \Omega^{k+1}(M, E)$ mit $\overline{d_A\omega} = D_A\overline{\omega}$ wobei $\overline{\sigma} \in \Omega^k_{\mathrm{hor}}(P, V)^{(G,\rho)} \cong \Omega^k(M, E) \ni \sigma$ ist.

Definition 3.9. [**Bau09**, S.98+10] Es heißt

$$\nabla^A := d_A|_{\Omega^0(M,E)} : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

die von A INDUZIERTE KOVARIANTE ABLEITUNG auf E.

Satz 3.14. [**Bau09**, S.100+10] *Sei $e \in \Gamma(E)$, $X \in \mathfrak{X}(M)$. Dann ist*

$$(\nabla^A_X e)(x) = \frac{d}{dt}\Big(P^{E,A}_{t,0}\big(e(\gamma(t))\big)\Big)|_{t=0},$$

wobei γ eine Kurve in M mit $\gamma(0) = x$ und $\dot\gamma(0) = X_x$ ist.

Definition 3.10. [**Bau09**, S.101+10] Die 2-Form $F^A := D_A A \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ heißt KRÜMMUNGSFORM von A. Diese ist horizontal und vom Typ Ad. Sei $s : M \supseteq U \to P$ ein lokaler Schnitt. Dann ist $F^s := s^*(F^A) = F^A(Ts(\_), Ts(\_)) \in \Omega^2(U, \mathfrak{g})$ die LOKALE KRÜMMUNGSFORM bzgl. s. Die Transformationsformel lautet:

$$F^\tau = \mathrm{Ad}(g^{-1}) \circ F^s \text{ für } \tau = s \cdot g$$

Sei N eine Mannigfaltigkeit, $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra mit Basis $(a_1, \ldots, a_r)$. Jede k-Form $\omega \in \Omega^k(N, \mathfrak{g})$ läßt sich als $\omega = \sum_i \omega^i a_i$ darstellen mit $\omega^i \in \Omega^k(N)$. Es sei

$$[\omega, \tau] := \sum_{i,j} (\omega^i \wedge \tau^j)[a_i, a_j]_{\mathfrak{g}} \in \Omega^*(N, \mathfrak{g}).$$

Es gilt für $[\_, \_] : \Omega^k(N, \mathfrak{g}) \times \Omega^l(N, \mathfrak{g}) \to \Omega^{k+l}(N, \mathfrak{g})$:

1. $[\omega, \tau] = (-1)^{kl}[\tau, \omega]$.
2. $d[\omega, \tau] = [d\omega, \tau] + (-1)^k[\omega, d\tau]$.
3. $[\omega, \omega](X, Y) = 2[\omega(X), \omega(Y)]_{\mathfrak{g}}$ für $\omega \in \Omega^1(N, \mathfrak{g})$.

Satz 3.15. [**Bau09**, S.102+10] *Sei $F^A \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$ die Krümmungsform des Zusammenhangs. Dann gilt:*

- *Strukturgleichung: $F^A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$.*
- *Bianchi-Identität: $D_A F^A = 0$.*
- *$D_A D_A \omega = \rho_*(F^A) \wedge \omega \ \forall \omega \in \Omega^k_{hor}(P, V)^{(G,\rho)}$.*

$F^A \in \Omega^2_{\mathrm{hor}}(P, \mathfrak{g})^{(G,\rho)} \cong \Omega^2(M, \mathrm{Ad}(P))$. Sei $\rho_* : \mathrm{Ad}(P) \to \mathrm{End}(E, E)$ definiert durch

$$\rho_*(\varphi)e := [(p, \rho_*(X)v)],$$

wobei $\varphi \in \mathrm{Ad}(P)_x$, $e \in E_x$, $p \in P_x$ und somit $\varphi = [(p, X)]$ mit $X \in \mathfrak{g}$ und $e = [(p, v)]$ mit $v \in V$ ist.
Sei $\wedge : \Omega^k(M, \mathrm{Ad}(P)) \times \Omega^l(M, E) \to \Omega^{k+l}(M, E)$ definiert durch

$$(\sigma \wedge \omega)_x(t_1, \ldots, t_{k+l}) := \frac{1}{k!\, l!} \sum_\tau \mathrm{sgn}(\tau) \rho_*(\sigma_x(t_{\tau(1)}, \ldots, t_{\tau(k)}))\, \omega_x(t_{\tau(k+1)}, \ldots, t_{\tau(k+l)}).$$

Satz 3.18. [**Bau09**, S.105+10]

1. *Das vertikale Tangentialbündel $TvP \subseteq TP$ ist involutiv.*
2. *Das horizontale Tangentialbündel $ThP \subseteq TP$ ist genau dann involutiv, wenn $F^A = 0$ ist.*

Für das triviale G-Hfb mit kanonischen flachen Zusammenhang A ist $M \times \{g\}$ die maximale Integralmannigfaltigkeit von ThP, also $F^A = 0$.

Definition 3.11. [**Bau09**, S.105+10] Ein Zusammenhang Th (bzw. A) heißt FLACH, falls $F^A = 0$ ist.

Satz 3.19. [**Bau09**, S.106+10] *Es sind äquivalent:*

1. *A ist flach, d.h. $F^A = 0$.*
2. *Th ist integrierbar.*
3. *Lokal ist P isomorph zum flachen trivialen Hfb.*
4. *Lokal existieren A-horizontale Schnitte.*
5. *Lokal ist die Parallelverschiebung wegunabhängig.*

Satz 3.20. [**Bau09**, S.106+10] *Sei $\pi : P \to M$ ein G-Hfb mit Zusammenhangsform A und einfach zusammenhängenden M. Dann ist $F^A = 0$ genau dann, wenn P isomorph zu flachen trivialen Hfb ist.*

Definition 3.12. [**Bau09**, S.107+10] Sei $\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$ eine kovariante Ableitung auf dem Vb E. Dann ist der KRÜMMUNGSENDOMORPHISMUS $R^\nabla \in \Gamma(\Lambda^2(T^*M) \otimes \mathrm{End}(E,E))$ definiert durch

$$R^\nabla(X,Y) := \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]} \; \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M)$$

Satz 3.21. [**Bau09**, S.107+10] *Sei $p \in P_x$ und $[p] : V \to E_x$ der assoziierte Isomorphismus. Dann gilt:*

$$R_x^{\nabla^A}(X,Y) = [p] \circ \rho_*(F_p^A(X^*,Y^*)) \circ [p]^{-1},$$

wobei $X,Y \in T_xM$ und $X^*,Y^* \in T_pP$ horizontale Lifts sind.

Für $H \in \Omega^k(M,\mathrm{End}(E))$ und $\omega \in \Omega^l(M,E)$ sei

$$(H\wedge\omega)(X_1,\ldots,X_{k+l}) \quad := \frac{1}{k!\,l!}\sum_\tau \mathrm{sgn}(\tau)H(X_{\tau(1)},\ldots)(\omega(X_{\tau(k+1)},\ldots)).$$

Es ist

$$d_A d_A\omega = R^{\nabla^A} \wedge \omega \; \forall \omega \in \Omega^k(M,E)$$

4. Holonomietheorie

Satz 4.1. [**Bau09**, S.119+10] *Sei $\pi : P \to M$ ein G-Hfb, $\lambda : H \to G$ ein Lie-Homo, $(\pi : Q \to M)$ eine λ-Reduktion von P via $f : Q \to P$, A eine Zusammenhangsform auf Q.*
Dann existiert eine eindeutige Zusammenhangsform $\tilde{A}$ auf P mit

$$T_q f(Th_q^A Q) = Th_{f(q)}^{\tilde{A}} P.$$

Weiters gilt:

$$f^*\tilde{A} = \lambda_* \circ A,$$
$$f^*F^{\tilde{A}} = \lambda_* \circ F^A.$$

Definition 4.1. [**Bau09**, S.119+10] $\tilde{A}$ heißt λ-Erweiterung von A und A heißt λ-Reduktion von $\tilde{A}$ (letztere müssen nicht notwendig existieren).

Satz 4.2. [**Bau09**, S.121+10] *Sei $H \subseteq G$ eine abgeschlossene Lie-Untergruppe und G/H reduktiv. Sei P ein G-Hfb und $Q \subseteq P$ eine H-Reduktion. Sei $\tilde{A}$ eine Zusammenhangsform auf P.*
Dann ist $A := \mathrm{pr}_{\mathfrak{h}} \circ \tilde{A}|_{TQ} : TQ \to \mathfrak{h}$ eine Zusammenhangsform auf Q.

Definition 4.2. [**Bau09**, S.122+10] Sei $\pi : P \to M$ ein G-Hfb, M zusammenhängend und A eine Zusammenhangsform. Für Wege $\gamma : [0,1] \to M$ sei $P_\gamma^A : P_{\gamma(0)} \to P_{\gamma(1)}$ der Paralleltransport längs γ. Für $x \in M$ sei

$$\Omega(x) := \{\gamma : \gamma \text{ ist geschlossener Weg in } M \text{ mit } \gamma(1) = x\}$$
$$\Omega_0(x) := \{\gamma \in \Omega(x) : \gamma \text{ ist 0-homotop}\}$$

Für $u \in P_x$ seien die (reduzierte) Holonomiegruppe definiert durch:

$$\mathrm{Hol}_u(A) := \{g \in G : \exists \gamma \in \Omega(x) : P_\gamma^A(u) = ug\}$$
$$\mathrm{Hol}_u^0(A) := \{g \in G : \exists \gamma \in \Omega_0(x) : P_\gamma^A(u) = ug\}$$

Satz 4.3. [**Bau09**, S.122+10] *Es ist $\mathrm{Hol}_u(A)$ eine Lie-Untergruppe von G. Weiters ist $\mathrm{Hol}_u^0(A)$ die Zusammenhangskomponente von $e \in G$. Falls M einfach zusammenhängend ist, so ist $\mathrm{Hol}_u(A)$ zusammenhängend.*

Satz 4.4. Reduktionssatz der Holonomietheorie. [**Bau09**, S.123+10] *Sei* $(\pi : P \to M, G)$ *ein* G*-Hauptfaserbündel mit Zusammenhangsform* A *über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit* M *und* $u \in P$ *ein fixierter Punkt. Es sei* $P^A(u) := \{p \in P : \exists \gamma : [0,1] \to P$ *horizontal von* u *nach* $p\}$*. Dann gilt:*

1. $\pi : P^A(u) \to M$ *ist* $\mathrm{Hol}_u(A)$*-Hfb.*
2. $\pi : P^A(u) \to M$ *ist Reduktion von* P *und der Zusammenhang von* P *reduziert sich darauf.*

Definition 4.3. [**Bau09**, S.123+10] Das $\mathrm{Hol}_u(A)$-Hfb $\pi : P^A(u) \to M$ heißt Holonomiebündel von A durch u.

Definition 4.4. [**Bau09**, S.125+10] Sei $\pi : P \to M$ ein G-Hfb und M zusammenhängend. Ein Zusammenhang A auf P heißt irreduzibel, falls er sich nicht auf eine echte Lie-Untergruppe reduzieren läßt.

In Aufgabe 4.4 wird gezeigt, daß $P^A(u)$ die minimale Reduktion von P ist, also ist A genau dann irreduzibel, wenn $P = P^A(u)$ und $G = \mathrm{Hol}_u(A)$ für alle $u \in P$ gilt.

Satz 4.5. Holonomietheorem von Ambrose und Singer, [**Bau09**, S.125+10]**.** *Sei* $\pi : P \to M$ *ein* G*-Hfb über einer zusammenhängenden Mannigfaltigkeit* M *und* A *eine Zusammenhangsform auf* P *mit der Krümmungsform* $F^A = D_A A$*. Dann gilt für die Lie-Algebra* $\mathfrak{hol}_u(A)$ *der Holonomiegruppe* $\mathrm{Hol}_u(A)$ *von* A *bzgl.* $u \in P$*:*

$$\mathfrak{hol}_u(A) = \mathrm{span}\{F_p^A(X,Y) | p \in P^A(u); X, Y \in Th_p^A P\} \subseteq \mathfrak{g}.$$

Ist G *zusammenhängend und* M *einfach-zusammenhängend, so ist* A *genau dann irreduzibel, wenn*

$$\mathfrak{g} = \mathrm{span}\{F_p^A(X,Y) | p \in P^A(u); X, Y \in Th_p^A P\}.$$

Definition 4.5, [**Bau09**, S.127+10]**.** Sei ∇ eine kovariante Ableitung auf einen vektorbündel $E \to M$.

$$\mathrm{Hol}_x(\nabla) := \{P_\gamma^\nabla | \gamma \in \Omega(x)\} \subseteq GL(E_x)$$
$$\mathrm{Hol}_x^0(\nabla) := \{P_\gamma^\nabla | \gamma \in \Omega_0(x)\} \subseteq GL(E_x)$$

Satz 4.6, [**Bau09**, S.127+10]**.** *Sei* P *ein* G*-Hfb über* M*,* $\rho : G \to GL(V)$ *eine Darstellung von* G *und* $E := P \times_G V$ *das assoziierte Vektorbündel. Sei weiterhin* A *eine Zusammenhangsform auf* P *und* ∇^A *die assoziierte kovariante Ableitung in* E*. Für* $u \in P_x$ *bezeichne* $[u] : V \to E_x$ *den durch* u *gegebenen Faserisomorphismus. Dann gilt für die Holonomiegruppen*

$$\mathrm{Hol}_x(\nabla^A) = [u] \circ \rho(\mathrm{Hol}_u(A)) \circ [u]^{-1}.$$

Insbesondere sind die Holonomiegruppen $\mathrm{Hol}_u(A)$ *und* $\mathrm{Hol}_x(\nabla^A)$ *isomorph, falls* ρ *injektiv ist. Sei* R *der Krümmungsendomorphismus von* ∇^A *und* $P_\gamma := P_\gamma^{\nabla^A}$ *die durch* ∇^A *definierte Parallelverschiebung in* E*. Dann gilt für die Lie-Algebra der Holonomiegruppe* $\mathrm{Hol}_x(\nabla^A)$*:*

$$\mathfrak{hol}_x(\nabla^A) = \mathrm{span}\{P_\gamma \circ R_y^{\nabla^A}(v,w) \circ P_\gamma | v, w \in T_x M, \gamma \text{ ein Weg von } x \text{ nach } y\}.$$

Satz 4.8, Holonomieprinzip [**Bau09**, S.130+10]**.** *Es existiert eine bijektive Abbildung zwischen dem Raum der parallelen Schnitte in E und der Menge der holonomieinvarianten Vektoren in V:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Par}(E, \nabla^E) &\cong \{v \in V | \rho(\mathrm{Hol}_u(A))v = v\} \\ &= \{v \in V | \rho_*(\mathfrak{hol}_u(A))v = 0\}, \textit{ falls } \pi_1(M) = 0.\end{aligned}$$

5. Holonomiegruppen Riemannscher Mannigfaltigkeiten, [Bau09, S.144]

Satz 5.1, [Bau09, S.135+10]. *Die Holonomiegruppe* $\mathrm{Hol}_x(M,g)$ *ist eine Lie-Untergruppe der orthogonalen Gruppe* $O(T_xM, g_x)$*. Die reduzierte Holonomiegruppe* $\mathrm{Hol}_x^0(M,g)$ *ist die Zusammenhangskomponente des 1-Elementes in* $\mathrm{Hol}_x(M,g)$*. Insbesondere ist die Holonomiegruppe einfach-zusammenhängender Mannigfaltigkeiten zusammenhängend.*

Beispiel 5.1, [Bau09, S.135+10]. Die Holonomiegruppe des (pseudo-)Euklidischen Raums ist trivial.

Beispiel 5.2, [Bau09, S.135+10]. Die Holonomiegruppe der S^n ist $SO(T_xS^n)$.

Satz 5.2. Holonomietheorem von Ambrose und Singer, [Bau09, S.137+10]. *Die Lie-Algebra der Holonomiegruppe von* (M,g) *ist gegeben durch*

$$\mathfrak{hol}_x(M,g) = \mathrm{span}\,\{(\gamma^* R^g)_x(v,w) : v,w \in T_xM, \gamma \textit{ ist Weg mit Anfangspunkt } x\}$$

Satz 5.3. Holonomieprinzip, [Bau09, S.138+10]. *Sei* (M,g) *eine zusammenhängende pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit,* $\mathcal{T}$ *ein Tensorbündel über* M *und* $x \in M$*.*

1. *Sei* $T \in \Gamma(\mathcal{T})$ *ein Tensorfeld mit* $\nabla^g T = 0$*. Dann gilt* $\mathrm{Hol}_x(M,g)T(x) = T(x)$*, wobei die Wirkung der Holonomiegruppe auf kanonische Weise auf die Tensoren* T_x *fortsetzt wird.*
2. *Sei* $T_x \in \mathcal{T}_x$ *ein Tensor mit* $\mathrm{Hol}_x(M,g)T_x = T_x$*. Dann existiert genau ein Tensorfeld* $T \in \Gamma(\mathcal{T})$ *mit* $\nabla^g T = 0$ *und* $T(x) = T_x$*. Dieses Tensorfeld erhält man durch Parallelverschiebung von* T_x*, d.h.,* $T(y) := P_\gamma^{\nabla^g}(T_x)$ *, wobei* $y \in M$ *und* γ *eine beliebige Kurve ist, die* x *mit* y *verbindet.*

Satz 5.4, [Bau09, S.139+10].

1. *Sei* $\pi : (\tilde{M}, \tilde{g}) \to (M,g)$ *die universelle semi-Riemannsche Überlagerung von* (M,g) *und* $\tilde{x} \in \tilde{M}$*. Dann gilt*
$$\mathrm{Hol}_{\tilde{x}}^0(\tilde{M},\tilde{g}) = \mathrm{Hol}_{\tilde{x}}(\tilde{M},\tilde{g}) \equiv \mathrm{Hol}_{\pi(\tilde{x})}^0(M,g).$$
2. *Ist* $(M,g) = (M_1,g_1)\times(M_2,g_2)$ *ein semi-Riemannsches Produkt und* $(x_1,x_2) \in M_1 \times M_2$*, dann gilt* $\mathrm{Hol}_{(x_1,x_2)}(M,g) = \mathrm{Hol}_{x_1}(M_1,g_1) \times \mathrm{Hol}_{x_2}(M_2,g_2)$*.*

Definition 5.1, [Bau09, S.140+10]. Die Holonomiedarstellung $\mathrm{Hol}_x(M,g) \to O(T_xM,g)$ heißt IRREDUZIBEL, wenn es keinen echten invarianten Teilraum von T_xM gibt. Sie heißt SCHWACH IRREDUZIBEL, wenn es keinen echten, nichtausgearteten invarianten Teilraum von T_xM gibt.
Für Teilräume $E \subseteq T_xM$ sei $E^\perp := \{v \in T_xM : g_x(v,w) = 0 \forall w \in E\}$.

Definition 5.2, [Bau09, S.141+10]. Eine pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt (SCHWACH) IRREDUZIBEL, falls die Holonomiedarstellung (schwach) irreduzibel ist.

Beispiel 5.4, [Bau09, S.141+10]. Jede pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit konstanter Schnittkrümmung $K \neq 0$ ist irreduzibel.

Beispiel 5.5, [Bau09, S.142+10]. Eine schwach irreduzible nicht irreduzible Mannigfaltigkeit.

Satz 5.5, [Bau09, S.145+10]. *Sei $E \subseteq T_xM$ Holonomie-invariant. Die Holonomiedistribution $\mathcal{E} \subseteq TM$, $y \mapsto P^g_\sigma(E)$ (wobei σ ein Weg in M ist, der x und y verbindet) ist involutiv. Die maximalen zusammenhängenden Integralmannigfaltigkeiten von E sind total-geodätische Untermannigfaltigkeiten von (M, g), die geodätisch vollständig sind, falls (M, g) geodätisch vollständig ist.*

Satz 5.6, [Bau09, S.146+10]. *Sei (M, g) eine n-dimensionale, semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit, deren Holonomiedarstellung einen k-dimensionalen, nichtausgearteten invarianten Teilraum besitzt. Dann ist (M, g) lokal isometrisch zu einem semi-Riemannschen Produkt, d.h., zu jedem Punkt $p \in M$ existieren eine Umgebung $U(p)$ und zwei semi-Riemannsche Mannigfaltigkeiten (U_1, g_1) und (U_2, g_2) der Dimension k bzw. $n - k$, so dass $(U(p), g) \cong_{isometr.} (U_1, g_1) \times (U_2, g_2)$.*

Satz 5.8, [Bau09, S.150+10]. *Sei (M, g) eine geodätisch vollständige, einfach-zusammenhängende semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $TM = E_1 \oplus E_2$ eine Zerlegung des Tangentialbündels in zwei nichtausgeartete, zueinander orthogonale, parallele Distributionen. Für $p \in M$ bezeichne $M_j(p)$ die maximale zusammenhängende Integralmannigfaltigkeit der Distribution E_j durch den Punkt p. Dann ist (M, g) isometrisch zum Produkt der Mannigfaltigkeiten $(M_1(p), g_1)$ und $(M_2(p), g_2)$, wobei g_j die durch g induzierte Metrik auf $M_j(p)$ bezeichnet:*

$$(M, g) \cong (M_1(p), g_1) \times (M_2(p), g_2).$$

Satz 5.9 (Cartan-Ambrose-Hicks), [Bau09, S.152+10]. *Es sei (N, h) eine einfach-zusammenhängende und (M, g) eine geodätisch vollständige semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit und $L : T_qN \to T_pM$ eine lineare Isometrie. Für jede gebrochene Geodäte $\gamma : [0, l] \to N$ mit dem Anfangspunkt $q \in N$ gelte*

$$L_\gamma(R^N_{\gamma(l)}(u, v)w) = R^M_{\gamma_L(l)}(L_\gamma(v), L_\gamma(w))L_\gamma(w) \quad \forall u, v, w \in T_{\gamma(l)}N.$$

Dabei ist $L_\gamma := L_r$, wobei $L_{i+1} := P^M_{\gamma_i} \circ L_i \circ (P^N_{\gamma_{i-1}})^{-1}$. Dann existiert eine lokale Isometrie $\varphi : N \to M$ mit $\varphi(q) = p$ und $T_q\varphi = L$. Sind sowohl (N, h) als auch (M, g) einfach-zusammenhängend und geodätisch vollständig, so ist φ eine Isometrie.

Satz 5.10 (Zerlegungssatz von de Rham und Wu), [Bau09, S.158+10]. *Es sei (M, g) eine einfach-zusammenhängende, geodätisch vollständige semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit. Dann ist (M, g) isometrisch zu einem Produkt einfach-zusammenhängender, geodätisch vollständiger semi-Riemannscher Mannigfaltigkeiten $(M, g) \cong (M_0, g_0) \times (M_1, g_1) \times ... \times (M_k, g_k)$, wobei (M_0, g_0) ein (evtl. null-dimensionaler) (pseudo-)Euklidischer Raum ist und $(M_1, g_1), \dots, (M_k, g_k)$ unzerlegbar und nicht flach sind.*

Definition 5.3 [**Bau09**, S.160+10]**.** Eine zusammenhängende, semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) heißt SYMMETRISCHER RAUM, wenn es zu jedem Punkt $x \in M$ eine Isometrie $s_x : M \to M$ mit dem Fixpunkt x und dem Differential $T_x s_x|_{T_x M} = -\mathrm{id}_{T_x M}$ gibt. Die Isometrie s_x heißt SYMMETRIE des Punktes x.

Beispiel 5.6 [**Bau09**, S.160+10]**.** Der euklidische Raum ist symmetrisch.

Beispiel 5.7 [**Bau09**, S.160+10]**.** Die n-Sphäre ist symmetrisch.

Beispiel 5.8 [**Bau09**, S.160+10]**.** Jede Lie-Gruppe mit biinvarianter Metrik ist symmetrisch.

Beispiel 5.9 [**Bau09**, S.160+10]**.** Sei K eine zusammenhängende Lie-Gruppe $\sigma : K \to K$ ein involutiver Automorphismus und $L \subseteq K^\sigma := \{a \in K : \sigma a = a\}$ eine abgeschlossene Untergruppe mit $(K^\sigma)^o \subseteq L$. Dann ist K/L symmetrisch für jede K-invariante Metrik.

Satz 5.11 [**Bau09**, S.161+10]**.** *Jeder symmetrische Raum (M, g) ist geodätisch vollständig, lokalsymmetrisch und homogen.*

Dabei heißt eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) HOMOGEN, wenn ihre Isometriegruppe transitiv auf M wirkt. Eine semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit mit parallelem Krümmungstensor R^g, d.h. mit $\nabla^g R^g = 0$, nennt man LOKAL-SYMMETRISCH.

Satz 5.12 [**Bau09**, S.162+10]**.** *Eine einfach-zusammenhängende, geodätisch vollständige, lokalsymmetrische semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) ist symmetrisch.*

Definition 5.4 [**Bau09**, S.164+10]**.** Ein Paar von Lie-Gruppen (G, H) heißt zum symmetrischen Raum (M, g, o) (mit $o \in M$) ASSOZIIERTES SYMMETRISCHES PAAR, wenn Folgendes gilt:

1. G ist eine zusammenhängende, σ-invariante Lie-Untergruppe der Isometriegruppe von (M, g), die transitiv auf M wirkt, wobei $\sigma(f) := s_o \circ f \circ s_o$.
2. $H \subseteq G$ ist der Stabilisator des Punktes o, d.h. $H = \{a \in G | a(o) = o\}$.

Satz 5.14 [**Bau09**, S.164+10]**.** *Sei (G, H) ein symmetrisches Paar zum symmetrischen Raum (M, g, o). Dann gilt $(G^\sigma)^o \subseteq H \subseteq G$. Der durch die Involution $\sigma : G \to G$ auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ induzierte Isomorphismus $\sigma_* : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ hat die Eigenwerte +1 und -1. Die Eigenräume von σ_* haben folgende Eigenschaften:*

1. $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g} | \sigma_*(X) = X\}$.
2. $\mathfrak{m} := \{X \in \mathfrak{g} | \sigma_*(X) = -X\}$ *ist ein* $\mathrm{Ad}(H)$*-invariantes algebraisches Komplement von* $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$. *Insbesondere ist* G/H *ein reduktiver homogener Raum.*
3. *Für die Zerlegung* $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ *gilt:*

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{h}.$$

Definition 5.5 [**Bau09**, S.165+10]**.** Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Eine Zerlegung $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ in Unterräume mit

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}, \quad [\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}, [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{h}.$$

nennen wir eine symmetrische Zerlegung von $\mathfrak{g}$.

Definition 5.6 [**Bau09**, S.166+10]**.** Die Darstellung der Stabilisatorgruppe H auf dem Tangentialraum T_oM

$$\begin{aligned}\lambda : H &\to GL(T_{[e]}G/H) \cong GL(T_oM)\\ h &\mapsto T_{[e]}l_h \cong T_0 h\end{aligned}$$

heißt Isotropiedarstellung des symmetrischen Raumes (M, g, o) bzgl. des assoziierten symmetrischen Paares (G, H).

Definition 5.7 [**Bau09**, S.170+10]**.** Sei (M, g) ein symmetrischer Raum. Dann heißt die von den Isometrien $s_x \circ s_y$ erzeugte Untergruppe

$$G(M) := \langle\{s_x \circ s_y | x, y \in M\}\rangle \subseteq \mathrm{Iso}(M, g)$$

Transvektionsgruppe von (M, g).

Satz 5.17 [**Bau09**, S.170+10]**.** *Die Transvektionsgruppe eines symmetrischen Raumes (M, g, o) hat folgende Eigenschaften:*

1. *$G(M)$ wirkt transitiv auf M.*
2. *$G(M)$ ist invariant gegenüber der Involution $\sigma = L_{s_o} \circ R^{-1}_{s_o}$ auf $\mathrm{Iso}(M, g)$.*
3. *$G(M)$ ist die kleinste Untergruppe von $\mathrm{Iso}(M, g)$, die transitiv auf M wirkt und invariant unter σ ist.*
4. *$G(M)$ ist eine zusammenhängende Lie-Untergruppe von $\mathrm{Iso}(M, g)$.*
5. *Für die durch σ definierte symmetrische Zerlegung $\mathfrak{g}(M) = \mathfrak{h}(M) \oplus \mathfrak{m}$ der Lie-Algebra von $G(M)$ gilt zusätzlich $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{h}(M)$.*
6. *Die Lie-Gruppe $G(M)$ wird von $\exp(\mathfrak{m})$ erzeugt.*

Folgerung 5.3 [**Bau09**, S.172+10]**.** *Sei (M, g) ein symmetrischer Raum, $G(M)$ seine Transvektionsgruppe mit der Lie-Algebra $\mathfrak{g}(M)$ und $H(M) := G(M)_o$ der Stabilisator von $o \in M$ mit der Lie-Algebra $\mathfrak{h}(M)$.*

1. *Für die Holonomiealgebra von (M, g) gilt:*

$$\mathfrak{hol}_o(M, g) \cong \mathrm{ad}(\mathfrak{h}(M)) \cong \mathfrak{h}(M).$$

2. *Sei $\mathcal{R}_o := \mathrm{span}\{R^g_o(X, Y) | X, Y \in T_oM\}$. $\mathcal{R}_o$ ist eine Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(T_oM)$ und die Lie-Algebra $\mathfrak{g}(M)$ ist isomorph zur Lie-Algebra $\tilde{\mathfrak{g}} := \mathcal{R}_o \oplus T_oM$ mit dem Kommutator*

$$\begin{aligned}[R^g_o(X, Y), R^g_o(U, V)] &:= R^g_o(X, Y) \circ R^g_o(U, V) - R^g_o(U, V) \circ R^g_o(X, Y),\\ [R^g_o(X, Y), U] &:= R^g_o(X, Y)U,\\ [U, V] &:= R^g_o(U, V).\end{aligned}$$

Satz 5.20 [**Bau09**, S.177+10]**.** *Sei (M, g, o) ein symmetrischer Raum und $G(M)$ seine Transvektionsgruppe. Mit $\lambda : H(M) \to GL(T_oM)$ bezeichnen wir die Isotropiedarstellung des Stabilisators $H(M) := G(M)_o$. Dann gilt*

$$\lambda(H(M)) = \mathrm{Hol}_o(M, g).$$

Insbesondere ist die Holonomiegruppe $\mathrm{Hol}_o(M, g)$ isomorph zur Stabilisatorgruppe $H(M)$, und die Holonomiedarstellung ρ geht bei diesem Isomorphismus in die Isotropiedarstellung λ über.

Definition 5.8 [**Bau09**, S.178+10]**.** Ein Paar $(\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}, B)$ heißt METRISCHE SYMMETRISCHE LIE-ALGEBRA, wenn Folgendes gilt:

1. $\mathfrak{g}$ ist eine Lie-Algebra und $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{m}$ sind Unterräume von $\mathfrak{g}$ mit $[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}$, $[\mathfrak{h}, \mathfrak{m}] \subseteq \mathfrak{m}$ und $[\mathfrak{m}, \mathfrak{m}] = \mathfrak{h}$.
2. B ist ein $\mathrm{ad}(\mathfrak{g})$-invariantes Skalarprodukt auf $\mathfrak{g}$, d.h. $B([X,Y],Z)+B(Y,[X,Z]) = 0$ für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$.
3. $B(\mathfrak{h}, \mathfrak{m}) = 0$.

Zwei metrische symmetrische Lie-Algebren $(\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{m}_1, B_1)$ und $(\mathfrak{g}_2 = \mathfrak{h}_2 \oplus \mathfrak{m}_2, B_2)$ heißen isomorph, wenn es einen Lie-Algebren-Isomorphismus $\varphi : g_1 \to g_2$ gibt mit $\varphi(\mathfrak{h}_1) = \mathfrak{h}_2$, $\varphi(\mathfrak{m}_1) = \mathfrak{m}_2$ und $\varphi^*(B_2) = B_1$.

Satz 5.21 (Riemannsche Berger-Liste) [**Bau09**, S.183+10]**.** *Es sei (M^n, g) eine n-dimensionale, einfach-zusammenhängende, irreduzible Riemannsche Mannigfaltigkeit, die nicht lokal-symmetrisch ist. Dann ist die Holonomiegruppe bis auf Konjugation in $O(n)$ entweder $SO(n)$ oder eine der folgenden Gruppen mit ihrer Standarddarstellung:*

n	*Holonomiegruppe*	*spezielle Geometrie*
$2m \geq 4$	$U(m)$	*Kähler-Mannigfaltigkeit*
$2m \geq 4$	$SU(m)$	*Ricci-flache Kähler-Mannigfaltigkeit*
$4m \geq 8$	$Sp(m)$	*Hyperkähler-Mannigfaltigkeit*
$4m \geq 8$	$Sp(m) \cdot Sp(1)$	*quaternionische Kähler-Mannigfaltigkeit*
7	G_2	*G_2-Mannigfaltigkeit*
8	$Spin(7)$	*$Spin(7)$-Mannigfaltigkeit*

Definition 5.9 [**Bau09**, S.184+10]**.** Ein Vektorbündel-Homomorphismus $J : TM \to TM$ heißt FAST-KOMPLEXE STRUKTUR auf M, wenn $J^2 = -Id_{TM}$ gilt. Ist (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit und J eine orthogonale fast-komplexe Struktur, d.h. eine fast-komplexe Struktur mit

$$g(JX, JY) = g(X, Y) \text{ für alle Vektorfelder } X \text{ und } Y,$$

so nennt man (M, g, J) FAST-HERMITESCHE MANNIGFALTIGKEIT.

Definition 5.10 [**Bau09**, S.185+10]**.** Eine KÄHLER-MANNIGFALTIGKEIT ist eine fast-hermitesche Mannigfaltigkeit (M, g, J), deren fast-komplexe Struktur J parallel ist, d.h., für die $\nabla^g J = 0$ gilt.

Definition 5.11 [**Bau09**, S.189+10]**.** Eine FAST-QUATERNIONISCHE STRUKTUR auf einer Mannigfaltigkeit M ist ein Tripel $\underline{J} = (J_1, J_2, J_3)$ von anti-kommutierenden fast-komplexen Strukturen mit $J_1 J_2 = J_3$. Sind die fast-komplexen Strukturen J zusätzlich orthogonal bezüglich einer Riemannschen Metrik g, so nennt man $\underline{J}$ orthogonale fast-quaternionische Struktur auf (M, g). Eine FAST-HYPERKÄHLER-MANNIGFALTIGKEIT ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit einer orthogonalen fast-quaternionischenen Struktur $\underline{J}$.

Definition 5.12 [**Bau09**, S.190+10]**.** Eine fast-quaternionische Struktur (J_1, J_2, J_3) auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) heißt PARALLEL, wenn $\nabla^g J_\alpha = 0$ für $\alpha = 1, 2, 3$ gilt. Eine HYPERKÄHLER-MANNIGFALTIGKEIT ist eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) der Dimension $4m \geq 8$ mit einer parallelen orthogonalen fast-quaternionischen Struktur (J_1, J_2, J_3).

Definition 5.13 [**Bau09**, S.191+10]**.** Eine Riemannsche Mannigfaltigkeit (M, g) der Dimension $4m \geq 8$ heißt FAST-QUATERNIONISCHE KÄHLER-MANNIGFALTIGKEIT, wenn ein 3-dimensionales Unterbündel $E \subseteq so(TM, g)$ existiert, das lokal durch fast-quaternionische Strukturen erzeugt wird. Für jeden Punkt $x \in M$ gibt es also eine Umgebung U und eine orthogonale fast-quaternionische Struktur $\underline{J}_U = (J_1, J_2, J_3)$ auf $(U, g|_U)$ mit $E|_U = span_{\mathbb{R}}(J_1, J_2, J_3)$. Ist das Bündel E parallel, so heißt (M, g, E) QUATERNIONISCHE KÄHLER-MANNIGFALTIGKEIT.

Definition 5.14 [**Bau09**, S.193+10]**.** Eine 3-Form $\omega \in \Omega^3(M)$ auf einer orientierten 7-dimensionalen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M^7, g) heißt ZULÄSSIG, wenn $x \in \mathcal{F}^3_x M$ fur alle $x \in M$.

Definition 5.15 [**Bau09**, S.194+10]**.** Eine 7-dimensionale, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^7, g) heißt G_2-MANNIGFALTIGKEIT, wenn sie eine parallele zulässige 3-Form ω besitzt.

Definition 5.16 [**Bau09**, S.195+10]**.** Eine 4-Form $\sigma \in \Omega^4(M)$ auf (M^8, g) heißt ZULÄSSIG, wenn $x \in \mathcal{F}^4_x M$ für alle $x \in M$. Eine 8-dimensionale, orientierte Riemannsche Mannigfaltigkeit (M^8, g) heißt $Spin(7)$-MANNIGFALTIGKEIT, wenn auf ihr eine parallele zulässige 4-Form σ existiert.

Satz 5.29 (Bergers Holonomietheorem) [**Bau09**, S.198+10]**.** *Wirkt die reduzierte Holonomiegruppe $\mathrm{Hol}^0_x(M, g)$ einer irreduziblen Riemannschen Mannigfaltigkeit (M, g) nicht transitiv auf der Einheitssphäre des Tangentialraumes T_xM, so ist (M, g) lokal-symmetrisch.*

Satz 5.31 (Pseudo-Riemannsche Berger-Liste) [**Bau09**, S.201+10]**.**
Sei $(M^{r,s}, g)$ eine einfach-zusammenhängende, irreduzible pseudo-Riemannsche Mannigfaltigkeit der Signatur (r, s), die nicht lokal-symmetrisch ist. Dann ist die Holonomiegruppe von (M, g) bis auf Konjugation in $O(r, s)$ entweder $SO^0(r, s)$ oder eine der folgenden Gruppen mit ihrer Standard-Darstellung:

Dimension	*Signatur*	*Holonomiegruppe*
$2m \geq 4$	$(2p, 2q)$	$U(p, q) und SU(p, q)$
$2m \geq 4$	(r, r)	$SO(r, C)$
$4m \geq 8$	$(4p, 4q)$	$Sp(p, q) und Sp(p, q) \cdot Sp(1)$
$4m \geq 8$	$(2p, 2p)$	$Sp(p, R) \cdot SL(2, R)$
$4m \geq 16$	$(4p, 4p)$	$Sp(p, C) \cdot SL(2, C)$
7	$(4, 3)$	$G2(2)$
14	$(7, 7)$	$GC2$
8	$(4, 4)$	$Spin(4, 3)$
16	$(8, 8)$	$Spin(7, C)$

Satz 5.34 (Die Holonomiegruppen von Lorentz-Mannigfaltigkeiten) [**Bau09**, S.202+10]**.** *Sei $(M^{1,n-1}, g)$ eine n-dimensionale, einfach-zusammenhängende, unzerlegbare, nicht-irreduzible Lorentz-Mannigfaltigkeit. Dann ist der orthogonale Teil $G \subseteq SO(n-2)$ von $\mathrm{Hol}_x(M, g)$ die Holonomiegruppe einer Riemannschen Mannigfaltigkeit und $\mathrm{Hol}_x(M, g)$ hat eine der folgenden Formen:*

1. $(\mathbb{R}^* \times G) \ltimes \mathbb{R}^{n-2}$.
2. $G \ltimes \mathbb{R}^{n-2}$.
3. $L \cdot G' \ltimes \mathbb{R}^{n-2}$*, wobei L die Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{l} := \{(\varphi(X), X, 0) | X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\}$ für einen surjektiven Lie-Algebren-Homomorphismus $\varphi : \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{R}$ ist.*
4. $\hat{L} \cdot G \ltimes \mathbb{R}^{n-2-m}$*, wobei $\hat{L}$ die Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\hat{\mathfrak{l}} := \{(0, X, \psi(X)) | X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{g})\}$ für einen surjektiven Lie-Algebren-Homomorphismus $\psi : \mathfrak{z}(\mathfrak{g}) \to \mathbb{R}^m$ ist.*

Literaturverzeichnis

[Bau09] H. Baum. *Eichfeldtheorie*. Springer, Berlin Heidelberg, 2009.

Index

A. . . Zusammenhangsform, 3
D_A, 5
F^A, 6
F^s, 6
$G(M)$, 14
G_2-Mannigfaltigkeit, 16
$P \times_G F$, 1
P^A, 9
R^∇, 7
$Spin(7)$-Mannigfaltigkeit, 16
Tv_uP, 3
$\Omega(x)$, 8
$\Omega_0(x)$, 8
λ-Erweiterung, 2
λ-Erweiterung von A, 8
λ-Reduktion von $\tilde{A}$, 8
∇^A, 5
$\mathrm{GL}(M)$, 1
$\mathrm{Hol}_u(A)$, 8
$\mathrm{Hol}_u^0(A)$, 8
$\mathrm{Hol}_x(\nabla)$, 9
$\mathrm{Hol}_x^0(\nabla)$, 9
(schwach) irreduzibel, 12

assoziierte Faserbündel, 1
assoziiertes symmetrisches Paar, 13

fast-hermitesche Mannigfaltigkeit, 15
fast-Hyperkähler-Mannigfaltigkeit, 15
fast-komplexe Struktur, 15
fast-quaternionische Kähler-Mannigfaltigkeit, 16
fast-quaternionische Struktur, 15
flach, 6

Holonomiebündel, 9
Holonomiegruppe, 8
homogen, 13
horizontal, 4
horizontaler Lift, 4
Hyperkähler-Mannigfaltigkeit, 15

induzierte absolute Differential, 5
induzierte kovariante Ableitung, 5
irreduzibel, 9, 11
Isotropiedarstellung, 14

Kähler-Mannigfaltigkeit, 15
kovariante Ableitung, 5
Krümmungsendomorphismus, 7
Krümmungsform, 6

lokal-symmetrisch, 13
lokale Krümmungsform, 6

metrische symmetrische Lie-Algebra, 15

parallel, 15
Parallelverschiebung, 4

quaternionische Kähler-Mannigfaltigkeit, 16

reduktiver homogener Raum, 3
reduzierte Holonomiegruppe, 8
Reperbündel, 1

schwach irreduzibel, 11
Stiefelmannigfaltigkeit, 1
Symmetrie, 13
symmetrischer Raum, 13

Transvektionsgruppe, 14

vertikale Tangentialraum, 3
vom Typ ρ, 4

zulässig, 16
Zusammenhang, 3
Zusammenhangsform, 3