Aufgabensammlung zur algorithmischen Geometrie

2012WS

Andreas Kriegl

1. Konvexe Hülle als Durchschnitt.
Zeige, daß der Durchschnitt konvexer Mengen wieder konvex ist und somit die konvexe Hülle einer Menge A (definiert als Durchschnitt aller konvexen Obermengen von A) die kleinste konvexe Menge ist die A enthält.

2. Konvexe Hülle als Linearkombinationen.
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^2$ und $p_1, p_2, p_3 \in A$. Dann ist $\langle\{p_1, p_2, p_3\}\rangle := \{\sum_{i=1}^3 \lambda_i\, p_i : \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^3 \lambda_i = 1\}$ das volle Dreieck mit Ecken p_1, p_2 und p_3. Zeige, daß die konvexe Hülle von A gegeben ist durch $\bigcup_{p_1,p_2,p_3 \in A} \langle\{p_1, p_2, p_3\}\rangle$

3. Halbebene.
Die Positivität welches Ausdrucks kann verwendet werden um Festzustellen, ob ein Punkt p links von der orientierten Gerade von p_0 nach $p_1 \neq p_0$ liegt.
Die Positivität welches Ausdrucks beschreibt, daß der Polygonzug $p_0 \to p_1 \to p_2$ einen Linksknick macht?

4. Konvexe Hülle eines einfach geschlossenen Polygons.
Beschreibe einen Algorithmus der die konvexe Hülle eines einfach geschlossenen (d.h. ohne Überscheidungen) Polygons mit n Ecken mit Laufzeit $O(n)$ bestimmt.
Hinweis: Verfahre wie beim verbesserten Algorithmus für die konvexe Hülle aber mit einer anderen Ordnung auf den Ecken.

5. Konvexe Hülle zweier konvexer Polygone.
Beschreibe einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n)$ der die konvexe Hülle zweier disjunkter konvexer Polygone mit Gesamteckenanzahl n bestimmt. Wie kann dieser verwendet werden um einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log(n))$ für die konvexe Hülle von n Punkten durch "Teilen und Erobern" zu erhalten.

6. Konvexe Hülle geht nicht schneller als Sortieren.
Zeige, daß n Zahlen $x_1, \dots, x_n$ durch Bestimmen der konvexen Hülle von daraus gebildeten Punkten in zusätzlicher $O(n)$-Zeit sortiert werden können.

7. Löschen im AVL-Baum.
Entferne im Fibonacci-Baum F_6 (mit 20 Knoten) den am weitesten links stehenden Knoten (wobei wir im Rekursionsschritt den kürzeren Baum immer links verwenden) und führe das Rebalanzieren durch bis wieder ein AVL-Baum entsteht.

8. Leiter mit schiefen Sprossen.
Es seien n paarweise disjunkte Geradensegmente mit jeweils oberen Endpunkt auf der Gerade $y = 1$ und unteren auf $y = 0$ gegeben. Diese zerlegen den Streifen $0 \leq y \leq 1$ in $n + 1$ Bereiche. Finde einen Algorithmus mit Laufzeit $O(n \log n)$ der einen binären Suchbaum erzeugt mit dessen Hilfe in

$O(\log n)$-Zeit jener Bereich bestimmt werden kann, welcher einen angegebenen Punkt des Streifens enthält.

9. Echt schneidene Kanten bei Bildung der Verfeinerung.
Beschreibe für zwei sich in inneren Punkten treffende Kanten zweier Unterteilungen wie diese in der doppelt-verbundenen Liste der gemeinsamen Verfeinerung durch neue Kanten mit entsprecheden Pointer ersetzt werden müssen.

10. Schnittpunkt-Existenz-Erkennung.
Beschreibe einen Plane-Sweep Algorithmus der in $O(n \log n)$-Zeit feststellt, ob unter n viele Geradensegmente mindestens zwei einen inneren Schnittpunkt besitzen.

11. Duale Graph der Triangulierung eines monotonen Polygons.
Zeige oder widerlege mittels Gegenbeispiel, daß der duale Graph der durch TRIANGULATEMONOTONE-POLYGON gegebenen Triangulierung eine Kette ist, d.h. ein Baum bei dem von jedem Knoten höchstens 2 Kanten ausgehen.

12. Zerschneiden längs Diagonale.
Mit welchem Algorithmus lassen sich einfach zusammenhängende Polygone mit $n > 3$ Ecken in $O(n \log n)$-Zeit in jeweils 2 Teile mit höchstens $\lfloor \frac{2n}{3} \rfloor + 1$ Ecken zerlegen?
Hinweis: Verwende den dualen Graphen.

13. Sichtbare Bereich.
Beschreibe einen Algorithmus der zu einem gegebenen inneren Punkt q eines einfach geschlossenen Polygons P den von q aus sichtbaren Bereich von P bestimmt. Wie behandeln wir Ecken am selben Strahl durch p?
Die Reihenfolge von Ecke/Schnittpunkt ist hierbei nicht immer korrekt!

14. Gießen platonischer Körper.
Welche der platonischen Körper (Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder) sind gießbar? Ist es möglich, für jeden der nicht-gießbaren unter ihnen eine Gußform zu finden, die durch eine Ebene so in 2 Teile geteilt werden kann, daß er entfernt werden kann?

15. Dreiteilige Gußformen.
Kannst Du ein Polyeder finden, bei welchem 3-teilige Gußformen notwendig sind. Gib auch Argumente für die Notwendigkeit!

16. Eigenschaften der Verschiebungsgeraden.
Sei P ein gießbares Polyeder mit f als oberster Seite. Sei d eine der möglichen Richtungen für das Entfernen. Zeige, daß jede Gerade ℓ mit diesem Richtungsvektor das Polyeder P genau dann trifft, wenn sie f trifft. Zeige weiters, daß $\ell \cap P$ zusammenhängend ist.

17. Entfernen aus der Gußform durch Drehung.
Untersuche das 2-dim. Problem ein einfach geschlossenes Polygon statt durch eine Translation durch eine Drehung im Urzeigersinn in der Gußform (d.h. dem Komplement des Polygons in einer umfassenden Halbebene) etwas bewegt werden kann. Zeige, daß die Menge der möglichen Drehmittelpunkt als Durchschnitt gewisser Halbebenen beschrieben werden kann.

Finde ein Polygon, welches zwar durch eine Translation aber nicht durch eine Drehung entfernt werden kann und weiters eines, welches durch eine Drehung aber nicht durch eine Translation entfernt werden kann.

18. Wettlauf.
Auf n parallelen geraden Laufstrecken sind n Läufer mit Geschwindigkeiten $v_1, \ldots, v_n$ unterwegs.

Jedem Läufer wird jeweils ein Vorsprung von d_i gewährt. Zu bestimmen sind all jene Läufer, die jeweils zumindesten zu einem Zeitpunkt führend sind.

Zeige, daß dieses Problem auf die Bestimmung eines Durchschnitts von Halbebenen zurückgeführt werden kann.

19. MiniDiscWithBdryPoints.
Beschreibe einen Algorithmus MiniDiscWithBdryPoints(P,R) mit erwarteter Laufzeit $O(n)$ (wobei n die Gesamtanzahl von $P \cup R$ ist), der als Eingabe zwei endliche disjunkte Teilmengen $P, R \subseteq \mathbb{R}^2$ nimmt und als Ausgabe die kleinste Scheibe D, mit $P \subseteq D$ und $R \subseteq \partial D$ liefert, sofern diese existiert.

20. Rekursion für $O(\sqrt{n})$.
Zeige, daß die Rekursion

$$Q(n) := \begin{cases} Q(1) & \text{für } n \leq 1 \\ 2 + 2\,Q(n/4) & \text{für } n > 1 \end{cases}$$

die Aussage $Q(n) = O(\sqrt{n})$ zur Folge hat.
Hinweis: Für $q(x) := Q(4^x)$ mache den Ansatz $q(x) = k(x) \cdot 2^x$ und benutze die resultierende Rekursionsformel um die nötige Abschätzung für k zu zeigen.

21. Ergänzung zu Aufgabe (17).
Finde ein Polygon, welches zwar ein wenig aber nicht vollständig aus seiner Gußform gedreht werden kann.
Zeige weiters, daß Mittelpunkte oberhalb der Gußform, um die kleine Drehungen möglich sind, auch für das vollständige Herausdrehen gut sind.
Hinweis: Wähle das Polygon (5-Eck genügt) so, daß der einzig mögliche Mittelpunkt für eine kleine Drehung $(0, -1)$ ist, das rechte Ende der obersten Kante so nahe an $(0, 0)$ liegt, daß nur so kleine Drehwinkel für diese Ecke zulässig ist, die das Drehen einer anderen Ecke in die obere Halbebene nicht ermöglichen.

22. Bereichsabzähl-Abfragen.
Beschreibe, wie man die Struktur von 1-dimensionalen Bereichsbäumen so adaptieren kann, daß Abfragen nach der **Anzahl** der Punkte, die in einem Bereich liegen, in $O(\log n)$-Zeit durchführbar sind. Beweise diese Zeit-Schranke. Verallgemeinere dies auf d-dimensionale Abfragen mit $O((\log n)^d)$-Laufzeit.

23. Suche unter Polygonen anstatt Punkten.
Sei S eine endliche Menge Achsen-paralleler Rechtecke in der Ebene. Gesucht sind alle jene Rechtecke, die vollständig im Suchbereich $[x, x'] \times [y, y']$ enthalten sind. Beschreibe eine Datenstruktur für dieses Problem mit $O(n(\log n)^3)$-Platzbedarf und $O(k + (\log n)^4)$-Abfragezeit. Verallgemeinere dies auf eine endliche Menge von Polygonen mit gleicher fixer Eckenanzahl in der Ebene. Geht dies auch unabhängig von der Eckenanzahl?
Hinweis: Übersetze dies in eine gewöhnliche orthogonale Bereichssuche in höherer Dimension.

24. Speicherbedarf und Aufbauzeit in Theorem 5.11.
Beweise die $O(n(\log n)^{d-1})$ Schranken für den Speicherbedarf und die Aufbauzeit von Theorem 5.11.

Die folgenden Aufgaben (25)-(27) liefern eine vollständige Lösung von Aufgabe (17). Sei dazu p_0 die rechte Randecke der obersten Seite und p eine Ecke in der unteren Halbebene.

25. Bedingung dafür, daß der Durchstoßpunkt links liegt.
Bestimme die Menge der Mittelpunkte aller Drehungen, für welche p auf einen Punkt der x-Achse links von p_0 trifft.
Hinweis: Betrachte die Mittelpunkte jener Kreise, die durch p und einen fixen Punkt p' der x-Achse gehen. Untersuche insbesonders die Situation, wo der Kreis die x-Achse berührt.

26. Bedingung dafür, daß der Winkel paßt.
Bestimme die Menge aller Punkte, um die eine Rechtsdrehung von p in die obere Halbebene möglich

ist, welche p_0 nicht in die untere Halbebene dreht.
Hinweis: Bestimme die Menge der Drehmittelpunkte, für welche der für p_0 maximal mögliche Drehwinkel φ ist. Bestimme weiters die Menge der Drehmittelpunkte, für welche der für p minimal nötige Drehwinkel φ ist.

27. Bedingung für die vollständige Lösbarkeit.
Zeige, daß, durch den Schnitt von gewissen aus dem Polygon konstruierbaren Halbebenen, die Menge der Drehmittelpunkte für Drehungen, die das Polygon vollständig aus der Gußform entfernen, beschrieben werden kann.
Hinweis: Zeige, daß der Durchschnitt der beiden Mengen aus Aufgabe (25) und (26) ein Schnitt zweier Halbebenen ist. Nun kombiniere diese mit den in Aufgabe (17) für die infinitesimale Lösung verwendeten.

28. Maximale Suchzeit und Speicherbedarf der trapezoidalen Verfeinerung.
Zeige mittels eines Beispiels von n Geradensegmenten, daß bei einer gewissen Reihenfolge des Einfügens der Segmente der Speicherbedarf von $O(n^2)$ und die Suchzeit von $O(n)$ nicht verbessert werden kann.
Hinweis: Aufgabe 6.1 im Buch auf Seite 144.

29. Durchschnittliche Anzahl der Ecken einer Voronoi-Zelle.
Zeige, daß die durchschnittliche Eckenanzahl der Voronoi-Zellen kleiner als 6 ist.
Hinweis: Theorem 7.3

30. Voronoi geht nicht schneller als Sortieren.
Zeige, daß n Zahlen $x_1, \dots, x_n$ durch Bestimmen des Voronoi-Diagramms von daraus gebildeten Punkten in zusätzlicher $O(n)$-Zeit sortiert werden können.

31. Späte Kreisereignisse.
Gib ein Beispiel von 6 Standorten, wo der Planesweep des Algorithmuses VoronoiDiagram erst nach allen Standorten das erste Kreisereignis erreicht. Dabei sollen keine 3 Standorte auf einer Geraden und keine 4 Standorte auf einem Kreis liegen.

32. Versagen einer inkrementellen Konstruktion des dünnsten Kreisrings.
Gib ein Beispiel einer endlichen Menge $P \subseteq \mathbb{R}^2$ und eines weiteren Punktes $q \notin P$, s.d. q weder im Kreisring minimaler Dicke von P liegt noch am Rand jenes von $P \cup \{q\}$.

33. Komplexität des Voronoi-Diagramms für weitest entfernte Punkte.
Zeige, daß das Voronoi-Diagramm für $n \geq 2$ weitest entfernte Punkte höchstens $2n - 3$ (beschränkte oder unbeschänkte) Kanten besitzt. Gib auch eine scharfe Abschätzung für die Anzahl seiner Ecken.
Hinweis: Eulersche Polyederformel.

34. Dual eines Dreiecks.
Wie sieht $\bigcup_{p\in\triangle} p^*$ aus, wenn $\triangle$ ein Dreieck mit Ecken a, b und c ist.

35. Dual einer Zelle um 0.
Sei L eine endliche Menge nicht-vertikaler Geraden und sei f die Fläche von $A(L)$, welche den Ursprung $(0,0)$ enthält. Beschreibe die Vereinigung der Geraden, die dual zu den Punkten in f sind. Beschreibe weiters die Geraden, die dual zu Ecken in f sind. Unterscheide dabei, ob die Ecke der Schnittpunkt zweier Geraden aus L ist, die beide oberhalb, bzw. beide unterhalb, bzw. eine ober- und eine unterhalb des Ursprungs liegen.

36. Geraden durch möglichst viele Punkte.
Beschreibe einen Algorithmus der unter n Punkten der Ebene in $O(n^2)$-Zeit eine jener Geraden findet, auf welcher die meisten Punkte liegen.

37. Äquivalenz von Triangulierungen.
Zeige, daß je zwei Triangulierungen einer endlichen Menge $P \subseteq \mathbb{R}^2$ durch Kanten-Flips ineinander übergeführt werden können.
Hinweis: Zeige dies zuerst für Triangulierungen konvexer Polygone.

38. Triangulierungen mit maximalem Index einer Ecke.
Gib ein Beispiel einer n-elementigen Menge $P \subseteq \mathbb{R}^2$ so, daß jede ihrer Triangulierungen eine Ecke besitzt, welche Endpunkt von $n-1$ Kanten ist.

39. Illegalitätstest.
Es seien p, q, r, s verschiedene Punkte in der Ebene und die Ecken p, q, r von $\triangle(pqr)$ positiv orientiert durchlaufen. Zeige, daß s genau dann im Inneren des Umkreises von $\triangle(pqr)$ liegt, wenn gilt:

$$\det \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \|p\|^2 & 1 \\ q_1 & q_2 & \|q\|^2 & 1 \\ r_1 & r_2 & \|r\|^2 & 1 \\ s_1 & s_2 & \|s\|^2 & 1 \end{pmatrix} > 0$$