Aufgabensammlung zu Analysis auf Mannigfaltigkeiten

SS 2013

Andreas Kriegl

1. Flächen von beliebigen Geschlecht.
Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^∞. Unter welchen Bedingungen an $\varepsilon > 0$ wird durch die Gleichung

$$(f(x) + y^2)^2 - \varepsilon\,(f(x) + y^2) + z^2 = 0$$

eine Mannigfaltigkeit beschrieben? Zeige weiters: Falls f ein Polynom mit $2g$ einfachen Nullstellen und positiven höchsten Koeffizienten ist und ε geeignet gewählt wird, dann ist diese Mannigfaltigkeit eine orientierte Fläche vom Geschlecht g. **Hinweis:** Hinweise betrachte die Schnittkurven mit den zur y-z-Ebene parallelen Ebenen für $f(x) < 0$ und für $f(x) > 0$.

2. Quadriken.
Es sei $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bilinear, symmetrisch und $a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Finde hinreichende Bedingungen, unter welchen die Quadrik $M := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x, x) + a(x) = 1\}$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n - 1$ ist. Identifiziere Paraboloid, Hyperboloid und Ellipsoid als Spezialfall.

3. Konforme lineare Abbildungen.
Zeige, daß eine bijektive lineare Abbildung $f : E \to E$ des Euklid'ischen Raums E genau dann konform (d.h. winkelerhaltend) ist, wenn ein $\lambda > 0$ existiert, s.d. $\langle f(x)|f(y)\rangle = \lambda\langle x|y\rangle$ für alle $x, y \in E$ gilt, also $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} f$ eine Isometrie ist. **Hinweis:** ($\Rightarrow$) Für $v \in E$ definiere $\lambda(v) > 0$ durch $\|f(v)\|^2 = \lambda(v)\,\|v\|^2$. Sei $(e_1, \dots, e_n)$ eine orthonormal-Basis. Dann ist $e_i + e_j \perp e_i - e_j$ und somit auch die Bilder unter f. Schließe daraus $\lambda(e_i) = \lambda(e_j)$. Schließe weiter, daß λ auf ganz E konstant ist und verwende schließlich die Polarisierungsgleichung um die gewünschte Identität zu erhalten.

4. Konformität der stereographischen Projektion.
Zeige, daß die stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ winkelerhaltend ist, d.h. ihre Ableitung an jeder Stelle konform ist. **Hinweis:** Zeige, daß die Umkehrabbildung $h : \mathbb{R}^n \to S^n$ konform ist.

5. Hypersphären unter der stereographischen Projektion.
Zeige, dass die stereographische Projektion $S^n \to \mathbb{R}^n$ alle $(n-1)$-Sphären auf $(n-1)$-Sphären bzw. Hyperebenen des $\mathbb{R}^n$ abbildet. **Hinweis:** Die Gleichung einer $(n-1)$-Sphäre bzw. Hyperebene ist

$$\alpha(x_1^2 + \dots + x_n^2) + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n + \gamma = 0$$

mit $4\alpha\gamma < \beta_1^2 + \dots + \beta_n^2$ und die stereographische Projektion bildet $(y_1, \dots, y_{n+1})$ ab auf $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i = \frac{y_i}{1 - y_{i+1}}$.

6. Quaternionen.
Man zeige: Die Menge $\left\{\left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a}\end{smallmatrix}\right) : a, b \in \mathbb{C}\right\}$ ist ein Teilring der komplexen 2×2-Matrizen und sogar ein Schiefkörper. Identifiziert man $\mathbb{C}^2$ mit diesen Körper, vermöge der linearen Abbildung $(a, b) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a}\end{smallmatrix}\right)$, so wird auch $\mathbb{C}^2$ ein Schiefkörper, der Körper $\mathbb{H}$ der Quaternionen. Die Norm von (a, b) ist die Determinante von $\left(\begin{smallmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a}\end{smallmatrix}\right)$. Somit gilt für die Multiplikation $|(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)| = |(a_1, b_1)| \cdot |(a_2, b_2)|$ und die Menge $S^3 \subseteq \mathbb{H}$ der Einheitsquaternionen ist eine Untergruppe von $\mathbb{H}$. Identifiziert man $\mathbb{C}^2$ mit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, so nimmt die Multiplikation die folgende Gestalt an: $(t, x) \cdot (s, y) = (ts - \langle x, y\rangle, ty + sx + x \times y)$ für $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$.

Zeige weiters, daß $(\forall x \in \{0\}\times\mathbb{R}^3 : xy = yx) \Rightarrow y \in \mathbb{R}\times\{0\}$ und $(\forall x \in \mathbb{H} : xy = zx) \Rightarrow y = z \in \mathbb{R}\times\{0\}$. Durch Differenzieren der Gleichung $xx^{-1} = 1$ berechne die Ableitung der Abbildung $\operatorname{inv} : x \mapsto x^{-1}$.

7. Glattheit der Abbildung Bild.
Zeige, daß $T \mapsto \operatorname{Bild}(T)$, $L_r(m.n) \to G(r,n)$ C^∞ ist. **Hinweis:** Beschreibe diese Abbildung lokal als Zusammensetzung

$$L_r(m,n) \to L_r(r,n) \to V(r,n) \to G(r,n)$$

wobei die erste (lokale!) Abbildung durch Einschränken auf eine geeignet gewählten r-dimensionalen Teilraum gegeben ist, die zweite Gram-Schmidt-Orthonormalisieren der Spalten der Matrix bedeutet und die letzte das Bild nehmen aus der VO ist.

8. Glattheit der Abbildung Kern.
Zeige, daß $T \mapsto \operatorname{Ker}(T)$, $L_r(m,n) \to G(m-r,m)$ C^∞ ist. **Hinweis:** $\operatorname{Ker} T = (\operatorname{Bild} T^t)^\perp$.

9. Möbiusband, Teil 1.
Es sei $M := [-1,1]\times(-1,1)/\sim$, wobei $\sim$ die von $\forall s : (-1,-s) \sim (1,s)$ erzeugte Äquivalenzrelation ist, und $q : [-1,1]\times(-1,1) \to M$ die Quotientenabbildung $(t,s) \mapsto [(t,s)]$.

Weiters seien $\bar\varphi_0, \bar\varphi_1 : (-1,1)\times(-1,1) \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$\bar\varphi_0(t,s) := (t,s) \text{ und } \bar\varphi_1(t,s) := \begin{cases} (t+1,s) & \text{für } t < 0 \\ (t-1,-s) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

und $\varphi_i := q \circ \bar\varphi_i$. Zeige, daß $\{\varphi_0, \varphi_1\}$ ein C^∞-Atlas für M ist.

10. Möbiusband, Teil 2.
Zeige daß die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (t,s) \mapsto \Big(\big(1 + s\cos(\tfrac{\pi}{2}t)\big)\cos(\pi t), \big(1 + s\cos(\tfrac{\pi}{2}t)\big)\sin(\pi t), s\sin(\tfrac{\pi}{2}t)\Big)$$

einen Diffeomorphismus $\tilde f : [(t,s)] \mapsto f(t,s)$ von M aus Beispiel 9 mit der Teilmannigfaltigkeit Möb:$= f(\mathbb{R}\times(-1,1)) \subseteq \mathbb{R}^3$ induziert.
Hinweis: Verwende, daß f lokal eine Parametrisierung von Möb ist und $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$ für $x, y \in [-1,1]\times(-1,1)$ gilt.

11. Tangentialraum Abbildungen vom Rang k.
Bestimme den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit $L_k(n,m)$ an der Stelle

$$f : (x,y) \mapsto (x,0), \quad \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \to (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}).$$

12. Tangentialraum der Grassmannmannigfaltigkeit.
Bestimme den Tangentialraum der Grassmannmannigfaltigkeit $G(k,n)$ im Punkte $P : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x,0)$.

13. Tangentialraum der Stiefelmannigfaltigkeit.
Bestimme den Tangentialraum der Stiefelmannigfaltigkeit $V(k,n)$ im Punkte $A : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $x \mapsto (x,0)$.

14. Normalraum einer Fläche.
Zeige, daß der Normalraum $(T_pM)^\perp$ jeder 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^3$ durch den Gradienten $\operatorname{grad}_p f$ einer regulären Gleichung bzw. auch durch das Kreuzprodukt $\partial_1\varphi(0) \times \partial_2\varphi(0)$ einer Parametrisierung φ mit $\varphi(0) = p$ erzeugt wird.

15. Kettenregel.
Beweise für abstrakte Mannigfaltigleiten das Lemma 10.4.

Hinweis: Um $T_p f$ zu bestimmen evaluiere diesen Ausdruck auf $\partial \in \mathrm{Der}_p(C^\infty(M,\mathbb{R}),\mathbb{R})$ und das Ergebnis auf $h \in C^\infty(M,\mathbb{R})$, betrachte also $(T_p f)(\partial)(h)$. Für die Produktregel verwende den Isomorphismus $\mathrm{Der}_p(C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}),\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$, $\partial \mapsto \partial(\mathrm{id})$.

16. Einbettung des projektiven Raums.
Zeige, daß der Raum $\mathbb{P}^n$ der Geraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ in den $\mathbb{R}^{2n}$ einbettbar ist.

Hinweis: Sei $h : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{2n+1}$ gegeben durch

$$(x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_n) \mapsto \Big(\sum_{i+j=0; i,j \le n}^{k} x_i y_j \Big)_{k=0}^{2n} =$$
$$= \Big(x_0 y_0, x_0 y_1 + x_1 y_0, \dots, \sum_{i=0}^{n} x_i y_{n-i}, \dots, x_{n-1} y_n + x_n y_{n-1}, x_n y_n \Big)$$

und sei $g : S^n \to S^{2n}$ gegeben durch $g(x) = \frac{h(x,x)}{|h(x,x)|}$. Dann gilt $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$ (falls $h(x,x) = \lambda^2 h(y,y)$ so ist $h(x+\lambda y, x-\lambda y) = 0$ und damit $x + \lambda y = 0$ oder $x - \lambda y = 0$) und liefert also eine injektive Abbildung $\mathbb{P}^n \to \{(z_0, \dots, z_{2n}) \in S^{2n} : z_0 \ge 0\}$.

17. Universelles Vektorbündel.
Zeige, daß $E(k,n) := \{(\varepsilon, v) \in G(k,n) \times \mathbb{R}^n : v \in \varepsilon\} \to G(k,n)$, $(\varepsilon, v) \mapsto \varepsilon$ ein (das sogenannte universelle) Vektorbündel über der Grassmannmannigfaltigkeit ist. Seine Faser über einen Punkt in $G(k,n)$ also über einer k-Ebene ε im $\mathbb{R}^n$ ist somit gerade diese Ebene. **Hinweis:** Um $E(k,n)$ als Teilvektorbündel von $G(k,s) \times \mathbb{R}^s$ (und damit insbesonders als Mannigfaltigkeit) zu erkennen betrachte die lokal definierte Abbildung $\varphi : G(k,n) \to GL(n)$,

$$\varphi : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, daß $\varphi(\varepsilon)(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \varepsilon$ ist und somit $(\varepsilon, v) \mapsto (\varepsilon, \varphi(\varepsilon) \cdot v)$ ein lokaler Diffeomorphismus von $G(k,n) \times \mathbb{R}^n$ ist, welcher lokal den Teilraum $G(k,n) \times \mathbb{R}^k \times \{0\}$ auf $E(k,n)$ abbildet.

18. Universalität von $E(k,s) \to G(k,s)$.
Es sei $p : E \to M$ ein k-Ebenen Bündel und $f : E \to M \times \mathbb{R}^s$ eine VB-Monomorphismus über id_M. Zeige, daß E isomorph zum Pull-back-Bündel $g^*(E(k,s))$ ist, wobei g die in 27.20 beschriebene klassifizierende Abbildung ist. **Hinweis:** Zeige mittels 27.10, daß die natürliche Abbildung $E \to M \times_{G(k,s)} E(k,s)$ ein VB-Isomorphismus ist

19. Glatte Normalität.
Sei M eine parakompakte Hausdorff-Mannigfaltigkeit und $A_0, A_1 \subseteq M$ abgeschlossen und disjunkt. Zeige die Existenz einer glatten Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ mit $f|_{A_i} = i$ für $i \in \{0,1\}$. **Hinweis:** Betrachte die Partition der 1, welche der Überdeckung $\{M \setminus A_0, M \setminus A_1\}$ untergeordnet ist.

20. Dichtheit der glatten Funktionen.
Sei M eine parakompakte Hausdorffmannigfaltigkeit, $g : M \to \mathbb{R}$ und $\varepsilon : M \to (0, +\infty)$ stetig. Zeige die Existenz einer glatten Abbildung $h : M \to \mathbb{R}$ mit $|h(x) - g(x)| < \varepsilon(x)$ für alle $x \in M$. **Hinweis:** Verwende eine Partition $\mathcal{F}$ der 1, welche der Überdeckung mit den Mengen $U_x := \{y : |g(y) - g(x)| < \varepsilon(y)\}$ für $x \in M$ untergeordnet ist und setze $h(x) := \sum_{f \in \mathcal{F}} f(x)\, g(x_f)$, wobei $\mathrm{Trg}(f) \subseteq U_{x_f}$.

21. Spezielle Indizierung der Partition der 1.
Zeige, daß die einer Überdeckung $\mathcal{U}$ untergordnete Partition $\mathcal{F}$ der 1 als $\mathcal{F} = \{f_U : U \in \mathcal{U}\}$ mit $\mathrm{Trg}(f_U) \subseteq U$ für alle $U \in \mathcal{U}$ gewählt werden kann. **Hinweis:** Sei $\mathcal{F}$ irgend eine untergordnete Partition der 1, d.h. zu $f \in \mathcal{F}$ existiert ein $U \in \mathcal{U}$ mit $\mathrm{Trg}(f) \subseteq U$. Wähle zu jeden f so ein U_f und definiere eine neue Partition der 1 durch $f_U := \sum_{f \in \mathcal{F} : U_f = U} f$.

22. Ein nichtintegrables Teilbündel.
Zeige direkt, daß das in 18.3.3 definierte Teilvektorbündel von $T\mathbb{R}^3$ nicht integrabel ist. **Hinweis:** Bestimme die Lieklammer der beiden erzeugenden Vektorfelder.

In den folgenden Beispielen 23-28 betrachten wir $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ als Riemann-Mannigfaltigkeit mit der von $\mathbb{R}^3$ geerbten Metrik. Als Karten außerhalb der Pole verwenden wir

- die Kugelkoordinaten $(\theta, \varphi) \mapsto (\cos\theta\cos\varphi, \cos\theta\sin\varphi, \sin\theta)$ aus 3.4
- und die stereographischen Koordinaten $(t, s) \mapsto \frac{1}{t^2+s^2+1}(2t, 2s, t^2+s^2-1)$ aus 3.5.

23. Einschränkung eines Vektorfelds auf die S^2.
Betrachte das Geschwindigkeitsfeld $(x, y, z) \mapsto (-y, x, 0)$ am $\mathbb{R}^3$, welches der Rotation um die z-Achse entspricht. Drücke die Einschränkung ξ dieses Vektorfelds auf S^2 in den beiden genannten Koordinaten aus.

Führe auch für das Vektorfeld $\eta : (x, y, z) \mapsto (xz, yz, -x^2-y^2)$ die analoge Rechnung aus.

24. Riemannmetrik auf der S^2.
Beschreibe die Riemann-Metrik von S^2 als 2-fach kontravariantes Tensorfeld in obigen Koordinaten.

25. Assoziierte 1-Form auf der S^2.
Beschreibe die vermöge $\sharp$ zu den Vektorfeldern aus Aufgabe 23 gehörenden 1-Formen in obigen Koordinaten.

26. Volumsform auf der S^2.
Beschreibe die Volumsform von S^2 in obigen Koordinaten.

27. $\wedge$-Produkt auf S^2.
Bestimme das $\wedge$-Produkt der 1-Formen aus Aufgabe 25 und vergleiche es mit der Volumsform aus Aufgabe 26.

28. Pullback längs Kurve von 1-Form auf S^2.
Bestimme das Pullback der 1-Formen aus Aufgabe 25 längs der Abbildung $f : \mathbb{R} \to S^2$, $t \mapsto (\sin t, \frac{3}{5}\cos t, \frac{4}{5}\cos t)$.

29. 1-Formen verwandter Vektorfelder.
Es sei $f : M \to \tilde{M}$ eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten mit Riemann-Metriken g und $\tilde{g}$. Weiters sei $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ und $\tilde{\xi} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$. Zeige: Falls ξ f-verwandt mit $\tilde{\xi}$ und $g = f^*\tilde{g}$ ist, so ist $\sharp\xi = f^*(\sharp\tilde{\xi})$.

30. Hodge-Stern Operator.
Sei E ein orientierter m-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist $\dim\left(\bigwedge^k E\right) = \binom{m}{k}$. Und somit ist $\bigwedge^k E \cong \bigwedge^{m-k} E$. Wir wollen nun einen Isomorphismus $* : \bigwedge^k E \to \bigwedge^{m-k} E$ angeben, der nicht von der Wahl einer Basis abhängt. Dieser heißt Hodge-Sternoperator und ist durch folgende implizite Gleichung gegeben:

$$\eta \wedge *\omega = \langle \eta, \omega \rangle \cdot \det \text{ für } \eta, \omega \in \bigwedge^k E.$$

Wobei das innere Produkt auf $\bigwedge^k$ dadurch definiert ist, daß $e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$ eine Orthonormalbasis sein soll, falls (e^i) eine solche von E ist. Zeige, daß dadurch wirklich ein linearer Operator eindeutig bestimmt ist.

Berechne dazu die Koeffizienten von $*(e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_k})$ bzgl. der assoziierten Basis von $\bigwedge^{n-k} E$.

31. Inverse des Hodge-Stern Operators.
Zeige, daß der Hodge-Stern-Operator eine Isometrie ist, welche $* \circ * = (-1)^{k(m-k)} : \bigwedge^k E \to \bigwedge^{m-k} E \to \bigwedge^k E$ erfüllt.

32. Hodge-Stern Operator für Riemann-Mannigfaltigkeiten.
Für eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit (M, g) der Dimension m definieren wir den Hodge-Sternoperator $* : \Omega^k(M) \to \Omega^{m-k}(M)$ durch $(*\omega)(x) := *(\omega(x))$. Zeige, daß $* : C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^0(M) \to \Omega^m(M)$ gegeben ist durch $f \mapsto f \cdot \operatorname{vol}$ und von $\mathfrak{X}(M) \cong \Omega^1(M) \to \Omega^{m-1}(M)$ durch $\xi \mapsto i_\xi \operatorname{vol}$.

33. Inneres Produkt am Dualraum.
Sei E ein endlich-dimensionaler Euklidischer Vektorraum und E^* sein Dualraum. Definiere das kanonische innere Produkt auf E^* durch $\langle v, w\rangle := \langle \flat v, \flat w\rangle$ für alle $v, w \in E^*$. Zeige, daß die duale Basis jeder Orthonomalbasis von E eine Orthonormalbasis ist und $(\langle g^i, g^j\rangle)_{i,j}$ die inverse Matrix zu $(\langle g_i, g_j\rangle)_{i,j}$ für jede Basis $(g_i)_i$ von E mit dualer Basis g^i ist.

34. Divergenz von Vektorfeldern.
Die Divergenz eines Vektorfelds $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ wird durch

$$\operatorname{div} \xi := *\Big(d\big(\iota_\xi \operatorname{vol}_M\big)\Big) \overset{32}{=} (* \circ d \circ * \circ \sharp)(\xi) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

definiert. Zeige, daß $\operatorname{div} \xi \cdot \operatorname{vol}_M = \mathcal{L}_\xi \operatorname{vol}_M$ gilt und bestimme die lokale Formel für $\operatorname{div} \xi$.
Hinweis: Für letzteres benutze die lokale Formel aus Aufgabe 32:

$$\iota_\xi \operatorname{vol}_M = \sqrt{G} \sum_j (-1)^{j-1} \xi^j du^1 \wedge \ldots \wedge \widehat{du^j} \wedge \ldots \wedge du^m$$

35. Urbilder und Durchschnitte von Teilmannigfaltigkeiten.
Beweise 27.9 mittels 27.8.
Hinweis: Für $g : X \to Y$ ist $X \cong \operatorname{Graph}(f)$.

36. Poincaré Lemma.
Es sei ω eine geschlossene k-Form auf einer offenen (bzgl. 0) sternförmigen Menge $U \subseteq \mathbb{R}^n$. Bestimme eine explizie Formel für η mit $d\eta = \omega$.
Hinweis: Nach dem Beweis des Homotopieaxioms ist $\eta = I_0^1(i_\xi(H^*(\omega))$ wobei $H : U \times \mathbb{R} \to U$ die Homotopie $(x, t) \mapsto tx$ und $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$ ist.

37. Volumselement der S^n.
Verwende 28.10 um das Volumselement der S^n als

$$\operatorname{vol}_{S^n} = \iota^*\Big(\sum_k (-1)^k x^k \, dx^0 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \cdots \wedge dx^n\Big)$$

zu erkennen. Drücke dieses für $n = 2$ in Kugelkoordinaten aus und bestimme die Oberfläche $\int_{S^2} \operatorname{vol}_{S^2}$.

38. Zerlegung von Volumsformen auf einen Produkt.
Es seien M und N zwei orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension m und n. Für $\omega \in \Omega_c^m(M)$ und $\eta \in \Omega_c^n(N)$ sei $\omega \wedge \eta := \operatorname{pr}_1^*(\omega) \wedge \operatorname{pr}_2^*(\eta) \in \Omega_c^{m+n}(M \times N)$. Für $f \in C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$ sei $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ definiert durch $g(x) := \int_N f(x, \_)\, \eta$. Zeige:

$$\int_{M \times N} f \cdot \omega \wedge \eta = \int_M g \cdot \omega$$

Jede $m + n$-Form auf $M \times N$ läßt sich als $f \cdot \omega \wedge \eta$ mit passenden $f \in C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$, $\omega \in \Omega^m(M)$ und $\eta \in \Omega^n(N)$ schreiben.

39. Kohomologie mit kompakten Träger von Zylindern.
Bestimme $H_c^k(S^j \times \mathbb{R}^n)$ mittels Induktion nach j unter Verwendung der Mayer-Vietoris Sequenz für kompakte Träger.

40. 5'er Lemma.
Zeige, daß im Beweis von 29.23 alle Quadrate für die Anwendung des 5'er Lemmas kommutieren, mit Ausnahme von

$$\begin{tikzcd} H^{k-1}(U \cap V) \arrow[r] \arrow[d] & H^k(U \cup V) \arrow[d] \\ H_c^{l+1}(U \cap V)^* \arrow[r] & H_c^l(U \cup V)^* \end{tikzcd}$$

welches nur bis auf ein Vorzeichen kommutiert. **Hinweis:** Im Beweis von 26.3.4 ist $\varphi_U := h_V \varphi$ und $\varphi_V := -h_U \varphi$ die korrekte Definition.