Aufgaben zur Funktional Analysis

2014SS

Andreas Kriegl

1. Aufgabe.
Zeige, daß eine Abbildung $f : E \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ genau dann sublinear ist, wenn

$$\forall x, y \in E\ \forall\lambda > 0 : f(x + \lambda \cdot y) \le f(x) + \lambda \cdot f(y)$$

2. Aufgabe.
Gib eine Beschreibung aller sublinearen Funktionen, aller linearen Funktionen, aller Seminormen $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

3. Aufgabe.
Zeige, daß für Funktionen $f : E \to \mathbb{R}$ auf Vektorräumen E folgendes äquivalent ist:

1. f ist konvex;
2. $\{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \le t\}$ ist konvex;
3. $\{(x, t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) < t\}$ ist konvex.

4. Aufgabe.
Sei sei $f : E \to F$ linear und $p : F \to \mathbb{R}$ eine sublineare Abbildung bzw. eine Seminorm. Zeige, daß dann $p \circ f : E \to \mathbb{R}$ sublinear bzw. eine Seminorm ist.

5. Aufgabe.
Es seien A und B (absolut) konvex. Dann ist die (absolut) konvexe Hülle von $A \cup B$ durch $\{t\, a + (1-t)\, b : 0 \le t \le 1, a \in A, b \in B\}$ gegeben.

6. Aufgabe.
Zeige, daß das Innere konvexer Mengen konvex ist.
Hinweis: Sei x_0 im Inneren K^o einer konvexen Menge K und $x_1 \in K$. Dann ist $\{t\, x_0 + (1 - t)\, x_1 : 0 < t \le 1\} \subseteq K^o$.

7. Aufgabe.
Zeige, daß der Abschluß der absolut-konvexen Hülle jeder beschränkten Teilmenge selbst beschränkt ist.

8. Aufgabe.
Zeige, daß Vereinigungen endlich vieler beschränkte Mengen beschränkt sind und folgere die Beschränkheit jeder endlichen Teilmenge.

9. Aufgabe.
Es sei $p : E \to \mathbb{R}$ eine Seminorm. Zeige, daß $F := p^{-1}(0)$ ein linearer Teilraum ist und p über die kanonische Quotientenabbildung $\pi : E \to E/F$ zu einer Norm auf E/F faktorisiert.

10. Aufgabe.
Es sei E ein lokalkonvexer Vektorraum und $\mathcal{U}$ eine 0-Umgebungsbasis von E. Zeige, daß $\bigcap \mathcal{U}$ der Abschluß von $\{0\}$ ist.

11. Aufgabe.
Zeige, daß $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ zu einem abzählbar seminormierten Raum gemacht werden kann, der die gleichmäßige Konvergenz auf Kompakta beschreibt.
Beweise weiters, daß dieser Raum nicht normierbar ist.

12. Aufgabe.
Zeige, daß der Raum $C^\infty([-\pi, \pi], \mathbb{R})$ der glatten reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ mit

der gleichmäßigen Konvergenz in jeder Ableitung zu einem abzählbar seminormierten Raum gemacht werden kann.
Zeige weiters, daß dieser Raum nicht normierbar ist.

13. Aufgabe.
Es seien E und F seminormierte Räume. Auf welche Weise kann auf dem kartesischen Produkt $E \times F$ eine Subbasis von Seminormen für die komponentenweise Konvergenz konstruiert werden? Ist $E \times F$ normierbar, wenn E und F es sind?

14. Aufgabe.
Zeige daß eine bei 0 stetige 3-lineare (oder allgemeiner eine m-lineare) Abbildung überall stetig ist.

15. Aufgabe.
Zeige, daß eine lineare Abbildung $A : c_0 \to \mathbb{K}$ existiert, welche nicht stetig ist.
Hinweis: Betrachte die Standardbasis $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ und erweitere diese zu einer Basis des Vektorraums c_0. Es sei b eines der hinzugefügten Basis-Elemente. Dann ist das zugehörige Koeffizientenfunktional nicht stetig ($c_k \subseteq f^{-1}(0)$).

16. Aufgabe.
Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Finde eine Norm die den Raum $C^1(I, \mathbb{K})$ der 1-mal stetig differenzierbaren Funktionen zu einen Banach-Raum macht. Ist es möglich $C^1(I, \mathbb{K})$ zu einer Banach-Algebra zu machen? Geht das auch für den Raum $C^n(I, \mathbb{R})$ der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen mit $n \in \mathbb{N}$?

17. Aufgabe.
Man betrachte folgende Folge $(x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ in $\prod_{c_0} \mathbb{R}$: Für $\lambda \in c_0$ sei die λ-te Koordinate $x^{(n)}_\lambda := \lambda(n)$. Zeige (indirekt), daß zwar $x^{(n)} \to 0$ in $\prod_{c_0} \mathbb{R}$, aber $x^{(n)}$ nicht Mackey-konvergent ist (und auch keine ihrer Teilfolgen).

18. Aufgabe.
Betrachte das abzählbare Koprodukt $E := \mathbb{R}^{(\mathbb{N})} := \coprod_{\mathbb{N}} \mathbb{R}$ aller endlichen reellen Folgen. Zeige, daß dieses der strikt induktive Limes der $\mathbb{R}^n$ für $n \in \mathbb{N}$ ist. Entscheide, ob dieser Raum ein Fréchet-Raum ist.

19. Aufgabe.
Es sei P eine Teilmenge von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Der Köthe-Folgenraum $\Lambda(P)$ ist dann definiert als

$$\Lambda(P) := \{(x_n)_n \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : (\lambda_n \, x_n)_n \in \ell^1 \forall (\lambda_n)_n \in P\}.$$

Für $\lambda \in P$ und $x \in \Lambda(P)$ sei $p_\lambda(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\lambda_n \, x_n|$. Die Menge $\{p_\lambda : \lambda \in P\}$ fungiere als Subbasis von Seminormen.

Unter welchen Voraussetzungen an P ist dieser Raum separiert? Ist er vollständig?
Hinweis: Betrachte, das Produkt $\prod_P \ell^1$.

20. Aufgabe.
Es sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Betrachte Funktionen $u : U \to \mathbb{R}$ die auf offenen Teilmengen $U \supseteq A$ stetig sind. Nenne zwei solche Funktionen $u : U \to \mathbb{R}$ und $v : V \to \mathbb{R}$ äquivalent, wenn sie auf einer offenen Teilmenge $W \supseteq A$ ihres gemeinsamen Definitionsbereiches übereinstimmen. Der Raum E der Äquivalenz-Klassen $[f]$ heißt Raum der Keime stetiger Funktionen bei A. Versehe diesen mit der finalen Struktur bzgl. aller Abbildungen $C(U, \mathbb{R}) \to E$, $f \mapsto [f]$. Zeige, daß für $n = 1$ und $A = \{0\}$ dieser Raum nicht separiert ist.
Hinweis: Es sei eine Funktion $h(t) = 1$ für $|t| \geq 2$ und $h(t) = 0$ für $|t| \leq 1$ fix gewählt. Für stetige u mit $u(0) = 0$ konvergiert die Folge der Funktionen $u_n : t \mapsto u(t)\, h(n\, t)$ gleichmäßig gegen u und $[u_n] = 0$ aber nicht notwendigerweise $[u] = 0$.

21. Aufgabe.
Für $r > 0$ sei E_r der Raum der Potenzreihen mit Konvergenzradius $> r$ versehen mit der Norm $\|a\|_r := \sup\{r^k |a_k| : k \in \mathbb{N}\}$. Weiters sei $E = \bigcup_{r>0} E_r$ der Raum der Potenzreihen mit positiven Konvergenzradius versehen mit der finalen Struktur bzgl. aller Inklusionen $E_r \subseteq E$. Zeige, daß die

Inklusion $E \subseteq \mathbb{R}^\mathbb{N}$ stetig ist und folgere daraus die Separiertheit. Zeige, daß für $0 < r < s$ die Inklusion $E_s \to E_r$ stetig aber keine topologische Einbettung ist.

22. Aufgabe.
Zeige, daß es keine Baire'sche LKV mit abzählbar unendlicher Dimension gibt. Verwende dies um einen metrisierbaren Baire'schen nicht vollständigen LKV anzugeben.
Hinweis: Ergänze die Standard-Basis $\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ in ℓ^p zu einer Vektorraum-Basis B. Wähle abzählbar viele Elemente f_j unter den Hinzugefügten. Es sei E_k das (dichte) lineare Erzeugnis von $B\backslash\{f_j : j > k\}$, dann ist $\ell^p = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_k$ und mindestens eines der E_k nicht mager, also der gesuchte Raum.

23. Aufgabe.
Zeige, daß das Banach-Steinhaus-Theorem nicht für Netze gilt.
Hinweis: Sei $\ell : E \to \mathbb{K}$ ein unstetiges Funktional. Für jeden endlich dimensionalen Teilraum $F \subseteq E$ konstruiere ein $\ell_F \in E^*$ mit $\ell_F|_F = \ell|_F$.

24. Aufgabe.
Es seien E_1 und E_2 zwei Fréchet-Räume und $f_i : E \to F$ stetig linear in einen SNR F. Für jedes $x_1 \in E_1$ existiere ein eindeutiges $x_2 \in E_2$ mit $f_1(x_1) = f_2(x_2)$.
Zeige, daß die Abbildung $x_1 \mapsto x_2$ (mit $f_1(x_1) = f_2(x_2)$) stetig ist.

25. Aufgabe.
Zeige für Folgen in ℓ^2 gilt:

$x_n \to 0$ bzgl. der Norm $\Rightarrow x_n \to 0$ bzgl. der schwachen Topologie $\sigma(\ell^2, (\ell^2)^*) \Rightarrow x_n \to 0$ koordinatenweise.

Zeige weiters, daß die Umkehrungen falsch sind.

26. Beispiel.
Finde Beispiele die zeigen, daß der Satz vom abgeschlossenen Graphen und der von der offenen Abbildung nicht allgemein gilt, wenn nur einer der beiden involvierten Räume eine Banach-Raum ist.
Hinweis: Betrachte dazu die Identität auf einem Vektorraum versehen mit zwei verschiedenen Strukturen. Der Dualraum eines Banach-Raums liefert ein Beispiel. Ein anderes ergibt sich, wenn man einen Banach-Raum mit der initialen Topologie bzgl. der Identität und einem unstetig linearen Funktional auf ihm verwendet.

In den folgenden Beispielen versuchen wir die kompakten Teilmenge von gegebenen metrisierbaren LKV'en zu bestimmen. Wir verwenden dabei, daß eine Teilmenge eines metrischen Raums genau dann kompakt ist, wenn jede Folge in ihr eine in ihr konvergente Teilfolge besitzt.

27. Aufgabe.
Zeige (ohne Verwendung des Satzes von Tychonoff für Produkte kompakter Mengen), daß eine Teilmenge von $\mathbb{R}^\mathbb{N}$ genau dann kompakt ist, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.
Hinweis: Für eine beschränkte Folge wähle iterative für jede Koordinate eine konvergente Teilfolge und betrachte die "Diagonalfolge".

28. Aufgabe.
Zeige: Eine Teilmenge $K \subseteq c_0$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist und zusätzlich $\sup\{|x^k| : k \geq n\}$ gegen 0 konvergiert und zwar gleichmäßig für $x = (x^1, x^2, \dots) \in K$.
Hinweis: Beginne wie in Aufgabe (27).

29. Aufgabe.
Es sei $1 \leq p < \infty$. Zeige: Eine Teilmenge $K \subseteq \ell^p$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist, und $\sum_{k=n}^\infty |x^k|^p$ für $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert und zwar gleichmäßig für $x = (x_1, x_2, \dots) \in K$.
Hinweis: Beginne wie in Aufgabe (27) und (28).

30. Aufgabe.
Zeige, daß das kartesische Produkt präkompakter Mengen präkompakt ist.

31. Aufgabe.
Zeige, daß die abgeschlossene (absolut-)konvexe Hülle präkompakter Mengen präkompakt ist.
Hinweis: Zeige dies zuerst für die konvexe Hülle und zwar zuerst für eine endliche Menge.

32. Aufgabe.
Zeige, das die präkompakten Teilmengen jedes metrischen LKV genau die Teilmengen abgeschlossener konvexer Hülle von 0-Folgen sind.
Hinweis: Konstruieren zu präkompakten A_0 rekursiv präkompakte Mengen A_i mit $A_{n-1} \subseteq F_n + \frac{1}{2^{n+1}} U_{n+1}$ für endliches $F_n \subseteq A_{n-1}$ und eine 0-Umgebungsbasis (U_n) durch $A_n := (A_{n-1} - F_n) \cap \frac{1}{2^{n+1} U_{n+1}}$. Nun betrachte die Folge die durch $\bigsqcup_n 2^n F_n$ gegeben ist.

33. Aufgabe.
Es sei F ein abgeschlossener linearer Teilraum eines Fréchet-Raumes. Zeige, daß jede kompakte Menge in E/F Bild einer kompakten Menge in E ist.
Hinweis: Aufgabe (32).

34. Aufgabe.
Zeige, daß die (absolut-)konvexe Hülle einer endlichen Vereinigung kompakter (absolut-)konvexer Mengen kompakt ist.
Hinweis: Aufgabe (5).

35. Aufgabe.
Es sei A eine nicht-leere Teilmenge eines LKV's E. Dann ist $\{x \in E : |\ell(x)| \leq \|\ell|_A\|_\infty \forall \ell \in E^*\}$ die abgeschlossen absolut-konvexe Hülle von A.

36. Aufgabe.
Zeige, daß die abgeschlossene absolut-konvexe Hülle kompakter Mengen nicht kompakt zu sein braucht.
Hinweis: Betrachte im lokalkonvexen Teilraum $E \subseteq \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der endlichen Folgen die Standardbasis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

37. Aufgabe.
Gib ein Beispiel, für welches die Mackey-Topologie $\mu(E^*, E)$ nicht die Topologie der glm. Konvergenz auf allen $\sigma(E, E^*)$-kompakten Teilmengen ist.
Hinweis: Aufgabe (36).

38. Aufgabe.
Zeige, daß lineare Funktionale auf E^* für vollständiges separables E genau dann $\sigma(E^*, E)$-stetig sind, wenn es $\sigma(E^*, E)$-Folgen-stetig sind.
Hinweis: Verwende Grothendieck's Vervollständigungssatz und zeige, daß für separables E die $\sigma(E^*, E)$-Topologie auf gleichgradig stetigen Mengen metrisierbar ist. Betrachte dazu $\sigma(E^*, E_0)$ für den von einer abzählbaren dichten Teilmenge in E erzeugten linearen Teilraum E_0.

39. Aufgabe.
Es seien A und B zwei Banach-Algebren mit 1 und B sei halbeinfach. Zeige, daß jeder Algebra-Homomorphismus $\varphi : A \to B$ stetig ist.
Hinweis: Satz vom abgeschlossenen Graphen.

40. Aufgabe.
Zeige, daß für die Gelfand-Transformation $\mathcal{G}$ folgendes gilt:

$$s := \inf\{\|\mathcal{G}(x)\|_\infty : \|x\| = 1\} \geq \inf\{\|x^2\| : \|x\| = 1\} \geq s^2.$$

Folgere daraus, daß $\mathcal{G}$ genau dann eine Isometrie ist, wenn $\|x^2\| = \|x\|^2 \ \forall x \in A$ gilt.