

# Aufgabensammlung zu Analysis auf Mannigfaltigkeiten

SS 2015  
Andreas Kriegl

## 1. Flächen von beliebigem Geschlecht.

Es sei  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} C^\infty$ . Unter welchen Bedingungen an  $\varepsilon > 0$  wird durch die Gleichung

$$(f(x) + y^2)^2 - \varepsilon(f(x) + y^2) + z^2 = 0$$

eine Mannigfaltigkeit beschrieben? Zeige weiters: Falls  $f$  ein Polynom mit  $2g$  einfachen Nullstellen und positiven höchsten Koeffizienten ist und  $\varepsilon$  geeignet gewählt wird, dann ist diese Mannigfaltigkeit eine orientierte Fläche vom Geschlecht  $g$ . **Hinweis:** Hinweise betrachte die Schnittkurven mit den zur  $y$ - $z$ -Ebene parallelen Ebenen für  $f(x) < 0$  und für  $f(x) > 0$ .

## 2. Quadriken.

Es sei  $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  bilinear, symmetrisch und  $a \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ . Finde hinreichende Bedingungen, unter welchen die Quadrik  $M := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x, x) + a(x) = 1\}$  eine Mannigfaltigkeit der Dimension  $n - 1$  ist. Identifiziere Paraboloid, Hyperboloid und Ellipsoid als Spezialfall.

## 3. Konforme lineare Abbildungen.

Zeige, daß eine bijektive lineare Abbildung  $f : E \rightarrow E$  des Euklid'schen Raums  $E$  genau dann konform (d.h. winkelerhaltend) ist, wenn ein  $\lambda > 0$  existiert, s.d.  $\langle f(x)|f(y) \rangle = \lambda \langle x|y \rangle$  für alle  $x, y \in E$  gilt, also  $\frac{1}{\sqrt{\lambda}} f$  eine Isometrie ist. **Hinweis:** ( $\Rightarrow$ ) Für  $v \in E$  definiere  $\lambda(v) > 0$  durch  $\|f(v)\|^2 = \lambda(v) \|v\|^2$ . Sei  $(e_1, \dots, e_n)$  eine orthonormal-Basis. Dann ist  $e_i + e_j \perp e_i - e_j$  und somit auch die Bilder unter  $f$ . Schließe daraus  $\lambda(e_i) = \lambda(e_j)$ . Schließe weiter, daß  $\lambda$  auf ganz  $E$  konstant ist und verwende schließlich die Polarisierungsgleichung um die gewünschte Identität zu erhalten.

## 4. Konformität der stereographischen Projektion.

Zeige, daß die stereographische Projektion  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  winkelerhaltend ist, d.h. ihre Ableitung an jeder Stelle konform ist. **Hinweis:** Zeige, daß die Umkehrabbildung  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow S^n$  konform ist.

## 5. Hypersphären unter der stereographischen Projektion.

Zeige, dass die stereographische Projektion  $S^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  alle  $(n - 1)$ -Sphären auf  $(n - 1)$ -Sphären bzw. Hyperebenen des  $\mathbb{R}^n$  abbildet. **Hinweis:** Die Gleichung einer  $(n - 1)$ -Sphäre bzw. Hyperebene ist

$$\alpha(x_1^2 + \dots + x_n^2) + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n + \gamma = 0$$

mit  $4\alpha\gamma < \beta_1^2 + \dots + \beta_n^2$  und die stereographische Projektion bildet  $(y_1, \dots, y_{n+1})$  ab auf  $(x_1, \dots, x_n)$  mit  $x_i = \frac{y_i}{1 - y_{i+1}}$ .

## 6. Quaternionen.

Man zeige: Die Menge  $\left\{ \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C} \right\}$  ist ein Teilring der komplexen  $2 \times 2$ -Matrizen und sogar ein Schiefkörper. Identifiziert man  $\mathbb{C}^2$  mit diesen Körper, vermöge der linearen Abbildung  $(a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ , so wird auch  $\mathbb{C}^2$  ein Schiefkörper, der Körper  $\mathbb{H}$  der Quaternionen. Das Quadrat der Norm von  $(a, b)$  ist die Determinante von  $\begin{pmatrix} a & -\bar{b} \\ b & \bar{a} \end{pmatrix}$ . Somit gilt für die Multiplikation  $|(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2)| = |(a_1, b_1)| \cdot |(a_2, b_2)|$  und die Menge  $S^3 \subseteq \mathbb{H}$  der Einheitsquaternionen ist eine Untergruppe von  $\mathbb{H}$ . Identifiziert man  $\mathbb{C}^2$  mit  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ , so nimmt die Multiplikation die folgende Gestalt an:  $(t, x) \cdot (s, y) = (ts - \langle x, y \rangle, ty + sx - x \times y)$  für  $(t, x), (s, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ .

Zeige weiters, daß  $(\forall x \in \{0\} \times \mathbb{R}^3 : xy = yx) \Rightarrow y \in \mathbb{R} \times \{0\}$  und  $(\forall x \in \mathbb{H} : xy = zx) \Rightarrow y = z \in \mathbb{R} \times \{0\}$ .  
Durch Differenzieren der Gleichung  $xx^{-1} = 1$  berechne die Ableitung der Abbildung  $\text{inv} : x \mapsto x^{-1}$ .

### 7. Glattheit der Abbildung Bild.

Zeige, daß  $T \mapsto \text{Bild}(T)$ ,  $L_r(m, n) \rightarrow G(r, n)$   $C^\infty$  ist. **Hinweis:** Beschreibe diese Abbildung lokal als Zusammensetzung

$$L_r(m, n) \rightarrow L_r(r, n) \rightarrow V(r, n) \rightarrow G(r, n)$$

wobei die erste (lokale!) Abbildung durch Einschränken auf eine geeignet gewählten  $r$ -dimensionalen Teilraum gegeben ist, die zweite Gram-Schmidt-Orthonormalisieren der Spalten der Matrix bedeutet und die letzte das Bild nehmen aus der VO ist.

### 8. Glattheit der Abbildung Kern.

Zeige, daß  $T \mapsto \text{Ker}(T)$ ,  $L_r(m, n) \rightarrow G(m - r, m)$   $C^\infty$  ist. **Hinweis:**  $\text{Ker } T = (\text{Bild } T^t)^\perp$ .

### 9. Möbiusband, Teil 1.

Es sei  $M := [-1, 1] \times (-1, 1) / \sim$ , wobei  $\sim$  die von  $\forall s : (-1, -s) \sim (1, s)$  erzeugte Äquivalenzrelation ist, und  $q : [-1, 1] \times (-1, 1) \rightarrow M$  die Quotientenabbildung  $(t, s) \mapsto [(t, s)]$ .

Weiters seien  $\bar{\varphi}_0, \bar{\varphi}_1 : (-1, 1) \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}^2$  gegeben durch

$$\bar{\varphi}_0(t, s) := (t, s) \text{ und } \bar{\varphi}_1(t, s) := \begin{cases} (t + 1, s) & \text{für } t < 0 \\ (t - 1, -s) & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

und  $\varphi_i := q \circ \bar{\varphi}_i$ . Zeige, daß  $\{\varphi_0, \varphi_1\}$  ein  $C^\infty$ -Atlas für  $M$  ist.

### 10. Möbiusband, Teil 2.

Zeige daß die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (t, s) \mapsto \left( (1 + s \cos(\frac{\pi}{2}t)) \cos(\pi t), (1 + s \cos(\frac{\pi}{2}t)) \sin(\pi t), s \sin(\frac{\pi}{2}t) \right)$$

einen Diffeomorphismus  $\tilde{f} : [(t, s)] \mapsto f(t, s)$  von  $M$  aus Beispiel 9 mit der Teilmannigfaltigkeit  $\text{Möb} := f(\mathbb{R} \times (-1, 1)) \subseteq \mathbb{R}^3$  induziert.

**Hinweis:** Verwende, daß  $f$  lokal eine Parametrisierung von  $\text{Möb}$  ist und  $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x \sim y$  für  $x, y \in [-1, 1] \times (-1, 1)$  gilt.

### 11. Tangentialraum Abbildungen vom Rang $k$ .

Bestimme den Tangentialraum der Mannigfaltigkeit  $L_k(n, m)$  an der Stelle

$$f : (x, y) \mapsto (x, 0), \quad \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k} \rightarrow (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}).$$

### 12. Tangentialraum der Grassmannmannigfaltigkeit.

Bestimme den Tangentialraum der Grassmannmannigfaltigkeit  $G(k, n)$  im Punkte  $P : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto (x, 0)$ .

### 13. Tangentialraum der Stiefelmannigfaltigkeit.

Bestimme den Tangentialraum der Stiefelmannigfaltigkeit  $V(k, n)$  im Punkte  $A : \mathbb{R}^k \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $x \mapsto (x, 0)$ .

### 14. Normalraum einer Fläche.

Zeige, daß der Normalraum  $(T_p M)^\perp$  jeder 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  durch den Gradienten  $\text{grad}_p f$  einer regulären Gleichung bzw. auch durch das Kreuzprodukt  $\partial_1 \varphi(0) \times \partial_2 \varphi(0)$  einer Parametrisierung  $\varphi$  mit  $\varphi(0) = p$  erzeugt wird.

### 15. Kettenregel.

Beweise für abstrakte Mannigfaltigkeiten das Lemma 20.4.

**Hinweis:** Um  $T_p f$  zu bestimmen evaluiere diesen Ausdruck auf  $\partial \in \text{Der}_p(C^\infty(M, \mathbb{R}), \mathbb{R})$  und das Ergebnis auf  $h \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ , betrachte also  $(T_p f)(\partial)(h)$ . Für die Produktregel verwende den Isomorphismus  $\text{Der}_p(C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$ ,  $\partial \mapsto \partial(\text{id})$ .

### 16. Einbettung des projektiven Raums.

Zeige, daß der Raum  $\mathbb{P}^n$  der Geraden im  $\mathbb{R}^{n+1}$  in den  $\mathbb{R}^{2n}$  einbettbar ist.

**Hinweis:** Sei  $h : \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{2n+1}$  gegeben durch

$$\begin{aligned} (x_0, \dots, x_n; y_0, \dots, y_n) &\mapsto \left( \sum_{i+j=0; i, j \leq n}^k x_i y_j \right)_{k=0}^{2n} = \\ &= \left( x_0 y_0, x_0 y_1 + x_1 y_0, \dots, \sum_{i=0}^n x_i y_{n-i}, \dots, x_{n-1} y_n + x_n y_{n-1}, x_n y_n \right) \end{aligned}$$

und sei  $g : S^n \rightarrow S^{2n}$  gegeben durch  $g(x) = \frac{h(x, x)}{|h(x, x)|}$ . Dann gilt  $g(x_1) = g(x_2) \Leftrightarrow x_1 = \pm x_2$  (falls  $h(x, x) = \lambda^2 h(y, y)$  so ist  $h(x + \lambda y, x - \lambda y) = 0$  und damit  $x + \lambda y = 0$  oder  $x - \lambda y = 0$ ) und liefert also eine injektive Abbildung  $\mathbb{P}^n \rightarrow \{(z_0, \dots, z_{2n}) \in S^{2n} : z_0 \geq 0\}$ .

### 17. Universelles Vektorbündel.

Zeige, daß  $E(k, n) := \{(\varepsilon, v) \in G(k, n) \times \mathbb{R}^n : v \in \varepsilon\} \rightarrow G(k, n)$ ,  $(\varepsilon, v) \mapsto \varepsilon$  ein (das sogenannte universelle) Vektorbündel über der Grassmannmannigfaltigkeit ist. Seine Faser über einen Punkt in  $G(k, n)$  also über einer  $k$ -Ebene  $\varepsilon$  im  $\mathbb{R}^n$  ist somit gerade diese Ebene.

**Hinweis:** Um  $E(k, n)$  als Teilvektorbündel von  $G(k, n) \times \mathbb{R}^n$  (und damit insbesondere als Mannigfaltigkeit) zu erkennen betrachte die lokal definierte Abbildung  $\varphi : G(k, n) \rightarrow GL(n)$ ,

$$\varphi : \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ C & 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, daß  $\varphi(\varepsilon)(\mathbb{R}^k \times \{0\}) = \varepsilon$  ist und somit  $(\varepsilon, v) \mapsto (\varepsilon, \varphi(\varepsilon) \cdot v)$  ein lokaler Diffeomorphismus von  $G(k, n) \times \mathbb{R}^n$  ist, welcher lokal den Teilraum  $G(k, n) \times \mathbb{R}^k \times \{0\}$  auf  $E(k, n)$  abbildet.

### 18. Universalität von $E(k, s) \rightarrow G(k, s)$ .

Es sei  $p : E \rightarrow M$  ein  $k$ -Ebenen Bündel und  $f : E \rightarrow M \times \mathbb{R}^s$  eine VB-Monomorphismus über  $\text{id}_M$ . Zeige, daß  $E$  isomorph zum Pull-back-Bündel  $g^*(E(k, s))$  ist, wobei  $g$  die in [1, 27.23] beschriebene klassifizierende Abbildung ist. **Hinweis:** Zeige mittels [1, 27.11], daß die natürliche Abbildung  $E \rightarrow M \times_{G(k, s)} E(k, s)$  ein VB-Isomorphismus ist

### 19. Glatte Normalität.

Sei  $M$  eine parakompakte Hausdorff-Mannigfaltigkeit und  $A_0, A_1 \subseteq M$  abgeschlossen und disjunkt. Zeige die Existenz einer glatten Funktion  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f|_{A_i} = i$  für  $i \in \{0, 1\}$ . **Hinweis:** Betrachte die Partition der 1, welche der Überdeckung  $\{M \setminus A_0, M \setminus A_1\}$  untergeordnet ist.

### 20. Dichttheit der glatten Funktionen.

Sei  $M$  eine parakompakte Hausdorffmannigfaltigkeit,  $g : M \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\varepsilon : M \rightarrow (0, +\infty)$  stetig. Zeige die Existenz einer glatten Abbildung  $h : M \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $|h(x) - g(x)| < \varepsilon(x)$  für alle  $x \in M$ . **Hinweis:** Verwende eine Partition  $\mathcal{F}$  der 1, welche der Überdeckung mit den Mengen  $U_x := \{y : |g(y) - g(x)| < \varepsilon(y)\}$  für  $x \in M$  untergeordnet ist und setze  $h(x) := \sum_{f \in \mathcal{F}} f(x) g(x_f)$ , wobei  $\text{Trg}(f) \subseteq U_{x_f}$ .

### 21. Spezielle Indizierung der Partition der 1.

Zeige, daß die einer Überdeckung  $\mathcal{U}$  untergeordnete Partition  $\mathcal{F}$  der 1 als  $\mathcal{F} = \{f_U : U \in \mathcal{U}\}$  mit  $\text{Trg}(f_U) \subseteq U$  für alle  $U \in \mathcal{U}$  gewählt werden kann. **Hinweis:** Sei  $\mathcal{F}$  irgendeine untergeordnete Partition der 1, d.h. zu  $f \in \mathcal{F}$  existiert ein  $U \in \mathcal{U}$  mit  $\text{Trg}(f) \subseteq U$ . Wähle zu jedem  $f$  so ein  $U_f$  und definiere eine neue Partition der 1 durch  $f_U := \sum_{f \in \mathcal{F}: U_f = U} f$ .

**22. Ein nichtintegrables Teilbündel.**

Zeige direkt, daß das in [1, 18.3.3] definierte Teilvektorbündel von  $T\mathbb{R}^3$  nicht integrabel ist. **Hinweis:** Bestimme die Lieklammer der beiden erzeugenden Vektorfelder.

In den folgenden Beispielen 23-28 betrachten wir  $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$  als Riemann-Mannigfaltigkeit mit der von  $\mathbb{R}^3$  geerbten Metrik. Als Karten außerhalb der Pole verwenden wir

- die Kugelkoordinaten  $(\theta, \varphi) \mapsto (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, \sin \theta)$  aus [1, 3.4]
- und die stereographischen Koordinaten  $(t, s) \mapsto \frac{1}{t^2+s^2+1}(2t, 2s, t^2+s^2-1)$  aus [1, 3.5].

**23. Einschränkung eines Vektorfelds auf die  $S^2$ .**

Betrachte das Geschwindigkeitsfeld  $(x, y, z) \mapsto (-y, x, 0)$  am  $\mathbb{R}^3$ , welches der Rotation um die  $z$ -Achse entspricht. Drücke die Einschränkung  $\xi$  dieses Vektorfelds auf  $S^2$  in den beiden genannten Koordinaten aus.

Führe auch für das Vektorfeld  $\eta : (x, y, z) \mapsto (xz, yz, -x^2 - y^2)$  die analoge Rechnung aus.

**24. Riemannmetrik auf der  $S^2$ .**

Beschreibe die Riemann-Metrik von  $S^2$  als 2-fach kontravariantes Tensorfeld in obigen Koordinaten.

**25. Assoziierte 1-Form auf der  $S^2$ .**

Beschreibe die vermöge  $\sharp$  zu den Vektorfeldern aus Aufgabe 23 gehörenden 1-Formen in obigen Koordinaten.

**26. Volumsform auf der  $S^2$ .**

Beschreibe die Volumsform von  $S^2$  in obigen Koordinaten.

**27.  $\wedge$ -Produkt auf  $S^2$ .**

Bestimme das  $\wedge$ -Produkt der 1-Formen aus Aufgabe 25 und vergleiche es mit der Volumsform aus Aufgabe 26.

**28. Pullback längs Kurve von 1-Form auf  $S^2$ .**

Bestimme das Pullback der 1-Formen aus Aufgabe 25 längs der Abbildung  $f : \mathbb{R} \rightarrow S^2$ ,  $t \mapsto (\sin t, \frac{3}{5} \cos t, \frac{4}{5} \cos t)$ .

**29. 1-Formen verwandter Vektorfelder.**

Es sei  $f : M \rightarrow \tilde{M}$  eine glatte Abbildung zwischen Mannigfaltigkeiten mit Riemann-Metriken  $g$  und  $\tilde{g}$ . Weiters sei  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  und  $\tilde{\xi} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ . Zeige: Falls  $\xi$   $f$ -verwandt mit  $\tilde{\xi}$  und  $g = f^*\tilde{g}$  ist, so ist  $\sharp\xi = f^*(\sharp\tilde{\xi})$ .

**30. Hodge-Stern Operator.**

Sei  $E$  ein orientierter  $m$ -dimensionaler euklidischer Vektorraum. Dann ist  $\dim(\wedge^k E) = \binom{m}{k}$ . Und somit ist  $\wedge^k E \cong \wedge^{m-k} E$ . Wir wollen nun einen Isomorphismus  $*$  :  $\wedge^k E \rightarrow \wedge^{m-k} E$  angeben, der nicht von der Wahl einer Basis abhängt. Dieser heißt Hodge-Sternoperator und ist durch folgende implizite Gleichung gegeben:

$$\eta \wedge * \omega = \langle \eta, \omega \rangle \cdot \det \text{ für } \eta, \omega \in \wedge^k E.$$

Wobei das innere Produkt auf  $\wedge^k$  dadurch definiert ist, daß  $e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}$  eine Orthonormalbasis sein soll, falls  $(e^i)$  eine solche von  $E$  ist. Zeige, daß dadurch wirklich ein linearer Operator eindeutig bestimmt ist.

Berechne dazu die Koeffizienten von  $*(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k})$  bzgl. der assoziierten Basis von  $\wedge^{n-k} E$ .

### 31. Inverse des Hodge-Stern Operators.

Zeige, daß der Hodge-Stern-Operator eine Isometrie ist, welche  $*\circ* = (-1)^{k(m-k)} : \bigwedge^k E \rightarrow \bigwedge^{m-k} E \rightarrow \bigwedge^k E$  erfüllt.

### 32. Hodge-Stern Operator für Riemann-Mannigfaltigkeiten.

Für eine orientierte Riemann-Mannigfaltigkeit  $(M, g)$  der Dimension  $m$  definieren wir den HODGE-STERNOPERATOR  $*$  :  $\Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{m-k}(M)$  durch  $(*\omega)(x) := *(\omega(x))$ . Zeige, daß  $*$  :  $C^\infty(M, \mathbb{R}) = \Omega^0(M) \rightarrow \Omega^m(M)$  gegeben ist durch  $f \mapsto f \cdot \text{vol}$  und von  $\mathfrak{X}(M) \cong \Omega^1(M) \rightarrow \Omega^{m-1}(M)$  durch  $\xi \mapsto i_\xi \text{vol}$ .

### 33. Inneres Produkt am Dualraum.

Sei  $E$  ein endlich-dimensionaler Euklidischer Vektorraum und  $E^*$  sein Dualraum. Definiere das kanonische innere Produkt auf  $E^*$  durch  $\langle v, w \rangle := \langle bv, bw \rangle$  für alle  $v, w \in E^*$ . Zeige, daß die duale Basis jeder Orthonormalbasis von  $E$  eine Orthonormalbasis ist und  $(\langle g^i, g^j \rangle)_{i,j}$  die inverse Matrix zu  $(\langle g_i, g_j \rangle)_{i,j}$  für jede Basis  $(g_i)_i$  von  $E$  mit dualer Basis  $g^i$  ist.

### 34. Divergenz von Vektorfeldern.

Die Divergenz eines Vektorfelds  $\xi \in \mathfrak{X}(M)$  wird durch

$$\text{div } \xi := * \left( d(\iota_\xi \text{vol}_M) \right) \stackrel{32}{=} (* \circ d \circ * \circ \#)(\xi) \in C^\infty(M, \mathbb{R})$$

definiert. Zeige, daß  $\text{div } \xi \cdot \text{vol}_M = \mathcal{L}_\xi \text{vol}_M$  gilt und bestimme die lokale Formel für  $\text{div } \xi$ .

**Hinweis:** Für letzteres benutze die lokale Formel aus Aufgabe 32:

$$\iota_\xi \text{vol}_M = \sqrt{G} \sum_j (-1)^{j-1} \xi^j du^1 \wedge \dots \wedge \widehat{du^j} \wedge \dots \wedge du^m$$

### 35. Urbilder und Durchschnitte von Teilmannigfaltigkeiten.

Beweise [1, 27.9] mittels [1, 27.8].

**Hinweis:** Für  $g : X \rightarrow Y$  ist  $X \cong \text{Graph}(f)$ .

### 36. Poincaré Lemma.

Es sei  $\omega$  eine geschlossene  $k$ -Form auf einer offenen (bzgl. 0) sternförmigen Menge  $U \subseteq \mathbb{R}^n$ . Bestimme eine explizite Formel für  $\eta$  mit  $d\eta = \omega$ .

**Hinweis:** Nach dem Beweis des Homotopieaxioms ist  $\eta = I_0^1(i_\xi(H^*(\omega)))$  wobei  $H : U \times \mathbb{R} \rightarrow U$  die Homotopie  $(x, t) \mapsto tx$  und  $\xi = \frac{\partial}{\partial t}$  ist.

### 37. Volumenelement der $S^n$ .

Verwende [1, 28.10] um das Volumenelement der  $S^n$  als

$$\text{vol}_{S^n} = \iota^* \left( \sum_k (-1)^k x^k dx^0 \wedge \dots \wedge \widehat{dx^k} \wedge \dots \wedge dx^n \right)$$

zu erkennen. Drücke dieses für  $n = 2$  in Kugelkoordinaten aus und bestimme die Oberfläche  $\int_{S^2} \text{vol}_{S^2}$ .

### 38. Zerlegung von Volumensformen auf einen Produkt.

Es seien  $M$  und  $N$  zwei orientierte Mannigfaltigkeiten der Dimension  $m$  und  $n$ . Für  $\omega \in \Omega_c^m(M)$  und  $\eta \in \Omega_c^n(N)$  sei  $\omega \wedge \eta := \text{pr}_1^*(\omega) \wedge \text{pr}_2^*(\eta) \in \Omega_c^{m+n}(M \times N)$ . Für  $f \in C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$  sei  $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$  definiert durch  $g(x) := \int_N f(x, \cdot) \eta$ . Zeige:

$$\int_{M \times N} f \cdot \omega \wedge \eta = \int_M g \cdot \omega$$

Jede  $m+n$ -Form auf  $M \times N$  läßt sich als  $f \cdot \omega \wedge \eta$  mit passenden  $f \in C^\infty(M \times N, \mathbb{R})$ ,  $\omega \in \Omega^m(M)$  und  $\eta \in \Omega^n(N)$  schreiben.

### 39. Kohomologie mit kompakten Träger von Zylindern.

Bestimme  $H_c^k(S^j \times \mathbb{R}^n)$  mittels Induktion nach  $j$  unter Verwendung der Mayer-Vietoris Sequenz für kompakte Träger.

### 40. 5'er Lemma.

Zeige, daß im Beweis von [1, 29.22] alle Quadrate für die Anwendung des 5'er Lemmas kommutieren, mit Ausnahme von

$$\begin{array}{ccc} H^{k-1}(U \cap V) & \longrightarrow & H^k(U \cup V) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H_c^{l+1}(U \cap V)^* & \longrightarrow & H_c^l(U \cup V)^* \end{array}$$

welches nur bis auf ein Vorzeichen kommutiert. **Hinweis:** Im Beweis von [1, 26.3.4] ist  $\varphi_U := h_V \varphi$  und  $\varphi_V := -h_U \varphi$  die korrekte Definition.

## Literatur

- [1] A. Kriegel. *Analysis auf Mannigfaltigkeiten*. Univ. Wien, SS 2015.