Aufgabensammlung zu Liegruppen

WS 2016

Andreas Kriegl

1. Exponentialfunktion vertauscht mit Konjugation.
Zeige die Identität $T\cdot\exp(S)\cdot T^{-1}=\exp(T\cdot S\cdot T^{-1})$ für alle $T,S\in GL(E)$ (oder in einer Banach-Algebra) mit invertierbaren T.

2. Die Ableitung der Determinantenfunktion.
Bestimme die Ableitung von $\det : L(E)\to\mathbb{R}$ auch in Punkten $A\in L(E)\setminus GL(E)$.
Hinweis: Betrachte die Matrix $C(A)$ der algebraischen Komplemente von A (d.h. jene Matrix die an der (j,i)-ten Stelle die Determinante der Matrix die man aus A erhält indem man die Position (i,j) durch 1 ersetzt und alle anderen Eintragungen in der entsprechenden Zeile und Spalte durch 0 ersetzt). Nach dem Entwicklungssatz von Determinanten gilt $C(A)\cdot A=\det(A)\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$ (und für $A\in\mathrm{GL}$ ist somit $C(A)=\det(A)\cdot A^{-1}$). Nun verwende entweder die Dichtheit von $GL(E)$ in $L(E)$ und die Formel für $\det'$ auf $GL(E)$ aus der Vorlesung oder die Multilinearität von det.

3. Die Zusammensetzung von $\det$ **und** $\exp$**.**
Zeige die Gleichung $\det(\exp T)=e^{\operatorname{spur}T}$ für alle $T\in GL(E)$.
Hinweis: Bestimme dazu die Ableitung der Funktion $f:\mathbb{R}\to L(E)\overset{\exp}{\to}GL(E)\overset{\det}{\to}\mathbb{R}\setminus\{0\}\overset{\ln}{\to}\mathbb{R}$ gegeben durch $f(t):=\ln(\det(\exp(tT)))$.

4. Reelle versus komplexe Determinante.
Zeige $\det_{\mathbb{R}}(T)=|\det_{\mathbb{C}}(T)|^2$ für alle $T\in L_{\mathbb{C}}(n)\subseteq L_{\mathbb{R}}(2n)$, wobei $L_{\mathbb{K}}(m)$ den Vektorraum der $m\times m$-Matrizen mit Eintragungen im Körper $\mathbb{K}$ und $\det_{\mathbb{K}}$ die $\mathbb{K}$-wertige Determinante solcher Matrizen bezeichnet.
Hinweis: Da beide Seiten Polynome in (den reellen Eintragungen der Matrix von) T sind, genügt es dies für T nahe id zu zeigen. Solche T lassen sich als $T=\exp(S)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}S^k$ schreiben. Wegen $\det_{\mathbb{K}}(\exp(S))=e^{\operatorname{spur}_{\mathbb{K}}(S)}$ und $\operatorname{spur}_{\mathbb{R}}(S)=\operatorname{spur}_{\mathbb{C}}(S)+\overline{\operatorname{spur}_{\mathbb{C}}(S)}$ folgt die gewünschte Gleichung. Beachte, daß wir $\mathbb{C}^n$ mit $\mathbb{R}^{2n}$ vermöge der reellen Basis $(e_1,\dots,e_n,i\,e_1,\dots,i\,e_n)$ identifizieren können und dabei die reelle Matrixdarstellung von $A+iB$ durch $\begin{pmatrix}A&-B\\B&A\end{pmatrix}$ gegeben ist.

5. Das Inverse in $N\times_s H$**.**
Bestimme das Inverse zu (n,h) in $N\times_s H$ für beliebige Gruppenerweiterungen $N\hookrightarrow G\twoheadrightarrow H$ mit Schnitt $s:H\to N$ in Termen von ρ und c. Spezialisiere das Ergebnis auf den Fall semidirekter Produkte und den Fall zentraler Erweiterungen.

6. Beispiele semidirekter Produkte.
Bestimme die Darstellung $\rho:H\to\mathrm{Aut}(N)$ für die semidirekten Produkte $GL(\mathbb{R}^n)\cong GL_+(\mathbb{R}^n)\ltimes\mathbb{Z}_2$ und die $A\,x+b$-Gruppe $E\ltimes GL(E)$ aus [Kri16, 1.4].

7. Heisenberg-Gruppe.
Zeige, daß die in [Kri16, 1.6] vermöge $(x,t)\cdot(x',t'):=(x+y,t+s+b(x,y))$ definierte Heisenberg-Gruppe $H:=E\oplus\mathbb{R}$ wirklich eine Gruppe ist. Bestimme dazu explizit die Inversenbildung. Ist diese Gruppe Abelsch?

8. Gruppenkohomologie.
Sei $\rho:H\to\mathrm{Aut}(N)$ ein Darstellung von H auf einer Abelschen Gruppe N und für $c:H\times\ldots\times H\to N$

sei

$$\partial c(h_1,\dots,h_{k+1}) :=$$
$$= \rho(h_1)\Big(c(h_2,\dots,h_{k+1})\Big) + \sum_{j=1}^{k}(-1)^j c(h_1,\dots,h_j\cdot h_{j+1},\dots,h_{k+1}) + (-1)^{k+1}c(h_1,\dots,h_k).$$

Zeige: $\partial\partial c = 0$ (zumindest für $k = 1$).

9. Heisenberggruppe als Untergruppe von $GL(\mathbb{R}\times E\times\mathbb{R})$.
Zeige, daß

$$(x,y,t)\mapsto T(x,y,t) := \begin{pmatrix} 1 & x^* & (t+x^*(y))/2 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ein Gruppen-Monomorphismus von der Heisenberggruppe in die $GL(\mathbb{R}\times E\times\mathbb{R})$ ist.

10. Beispiel auflösbarer Gruppen.
Begründe, warum im Fall $\dim(F_i) = i$ für alle i die Gruppe $GL_{\mathcal{F}}(E)$ aus [Kri16, 1.4] auflösbar ist, d.h. durch endlich viele Erweiterungen aus Abelschen Gruppen erhalten werden kann.
Hinweis: Induktion nach der Dimension von E.

11. Untergruppen von $L_{\mathbb{C}}(n)$.
Betrachte für den komplexen Vektorraum $\mathbb{C}^n$ mit der Hermite'schen Form $\langle x,y\rangle_{\mathbb{C}};= \sum_j \bar{x}_j\, y_j$ den Vektorraum $L_{\mathbb{C}}(n) := \{T : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n : T \text{ ist } \mathbb{C}\text{-linear}\}$ und die Gruppen $GL_{\mathbb{C}}(n) := \{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : T \text{ ist invertierbar}\}$, $SL_{\mathbb{C}}(n) := \{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : \det_{\mathbb{C}}(T) = 1\}$, $U(n) := U_{\mathbb{C}}(n) := \{T \in L_{\mathbb{C}}(n) : \langle Tx,Ty\rangle_{\mathbb{C}} = \langle x,y\rangle_{\mathbb{C}}\}$ und $SU(n) := SU_{\mathbb{C}}(n) := U(n)\cap SL_{\mathbb{C}}(n)$. Zeige, daß diese Gruppen Lie-Gruppen sind und bestimme ihre Dimension.
Hinweis: Verfahre analog wie im Reellen.

12. Topologische Eigenschaften von Untergruppen von $L_{\mathbb{C}}(n)$.
Was kannst Du über Kompaktheit und Wegzusammenhang der Gruppen aus Aufgabe 11 aussagen?
Hinweis: Verfahre analog wie im Reellen.

13. Zusammenhängende Gruppen werden von Umgebungen erzeugt.
Zeige, daß in zusammenhängenden (Lie-)Gruppen jede Umgebung der 1 die Gruppe erzeugt:
Hinweis: Das Erzeugnis von U ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}(U\cup U^{-1})^n$ und somit(!) offen und damit auch abgeschlossen (denn das Komplement ist Vereinigung von Nebenklassen).

14. Zusammenhangskomponente der 1.
Die Zusammenhangskomponente der 1 jeder Lie-Gruppe ist offen und ein Normalteiler (sogar eine topologisch-charakteristische Untergruppe, d.h. invariant unter stetigen Automorphismen von G).
Hinweis: Stetige Bilder zusammenhängender Räume sind zusammenhängend.

15. Zentrum bei Erweiterungen.
Sei N ein diskreter Normalteiler einer zusammenhängenden Lie-Gruppe G und $N \to G \xrightarrow{p} H$ eine kurze exakte Sequenz von Gruppen. Zeige: $Z(G) = p^{-1}(Z(H))$.
Hinweis: Für $g \in p^{-1}(Z(H))$ bestimme das Bild der Abbildung $x \mapsto [x,g] := x^{-1}g^{-1}xg$.

16. Hamiltonsche Quaternionen.
Es sei

$$\mathbb{H} := \{T \in L_{\mathbb{C}}(2) : U\cdot T\cdot U^{-1} = \bar{T}\},\text{ wobei } U := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } \bar{T} := (T^*)^t.$$

Zeige:

1. $\mathbb{H}$ ist ein Schiefkörper, d.h. alle Axiome eines Körpers gelten mit Ausnahme des kommutativ Gesetzes der Multiplikation.
2. Die Abbildung $\iota : z \mapsto \left(\begin{smallmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar z \end{smallmatrix}\right)$ ist ein Ring-Monomorphismus $\mathbb{C} \hookrightarrow \mathbb{H}$.
3. Die Abbildung $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{H} \subseteq L_{\mathbb{C}}(2)$, $(a,b) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -\bar b & \bar a \end{smallmatrix}\right)$ ist eine $\mathbb{R}$-lineare Bijektion und $S^3 := \{x \in \mathbb{C}^2 : \|x\| = 1\} \cong SU(2) \subseteq \mathbb{H}$, wobei $\|x\|$ die standard-Norm auf $\mathbb{C}^2 \cong H \subseteq L_{\mathbb{C}}(2)$ bezeichnet.
4. Die Abbildung $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{H}$, $(t; s, z) \mapsto \left(\begin{smallmatrix} t+i\,s & z \\ -\bar z & t-i\,s \end{smallmatrix}\right)$ ist ein Ring-Isomorphismus, wenn wir die Multiplikation auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ durch $(s,v) \cdot (t,w) := (st - \langle v|w\rangle, sw + tv + v \times w)$ definieren.

Hinweis: Es definiert $(T,S) \mapsto \mathrm{Spur}(T^*S)$ ein hermitsches inneres Produkt $\langle \_|\_\rangle_{\mathbb{C}}$ auf $L_{\mathbb{C}}(n)$ so, daß für $n = 2$ die zugehörige Norm $\|T\| := \sqrt{\langle T|T\rangle_{\mathbb{C}}}$ die kanonische von $\mathbb{C}^{n^2} \cong L_{\mathbb{C}}(n)$ ist. Zeige, daß $TT^* = T^*T = \frac{1}{\|T\|^2} \cdot \mathrm{id}$ für $T \in \mathbb{H}$ gilt und somit $T^{-1} = \frac{1}{\|T\|^2} T^*$ ist.

17. $SO_{\mathbb{C}}(2) \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$**.**
Zeige

$$SO_{\mathbb{C}}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{C}, a^2 + b^2 = 1 \right\} \cong \left\{ \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & 1/z \end{pmatrix} : z \in \mathbb{C}_* \right\} \cong \mathbb{C}_*,$$

analog zu $SO(2)$ in der VO, indem Du die Elemente der $SO_{\mathbb{C}}(2)$ durch ein Matrizengleichung charakterisierst und sie dann gemeinsam diagonalisierst.

18. Die Überlagerung $SL(2) \times SL(2) \to SO^+(4,2)$**.**
Zeige, daß die Wirkung $\rho : SL_{\mathbb{C}}(2) \times SL_{\mathbb{C}}(2) \to SO_b(L_{\mathbb{C}}(2)) \cong SO_{\mathbb{C}}(4)$ aus [Kri16, 1.25] eingeschränkt auf $SL(2) \times SL(2)$ den Teilraum $L(2)$ invariant läßt und $b : (T,S) \mapsto \mathrm{Trace}(T \cdot S^{ad})$ auf diesem Signatur 2 hat (dabei ist $S^{ad} = C(S)$ die Matrix der algebraischen Komplemente und $SO^+(n,k)$ die Zusammenhangskomponente der 1 in $SO(n,k)$). Folgere die Existenz einer kurzen exakten Sequenz

$$\mathbb{Z}_2 \hookrightarrow SL(2) \times SL(2) \twoheadrightarrow SO^+(4,2)$$

(und somit einer Überlagerung).

19. $SO^+(n,k)$ **rekursiv.**
Zeige für $n - 1 > k$ wie in [Kri16, 1.26] folgende Sequenz

$$SO^+(n-1,k) \hookrightarrow SO^+(n,k) \twoheadrightarrow M,$$

wobei $M := \{x \in \mathbb{R}^n : b(x,x) = 1\} \cong \mathbb{R}^k \times S^{n-k-1}$.

20. $Sp_{\mathbb{C}}(n)$ **rekursiv.**
Zeige ebenso folgende Sequenz

$$Sp_{\mathbb{C}}(n-2) \hookrightarrow Sp_{\mathbb{C}}(n) \twoheadrightarrow M,$$

wobei $n = 2m$ und $M := \{(z,w) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : b(z,w) = \langle J\bar z, w\rangle_{\mathbb{C}} = 1\} \cong TS^{2n-1}$
Hinweis: Zerlege $\langle \_, \_\rangle_{\mathbb{C}}$ in Real- und Imaginärteil wie in [Kri16, 1.18].

21. $Sp_{\mathbb{C}}(2m)$ **ist einfachzusammenhängend.**
Zeige, daß $Sp_{\mathbb{C}}(2m)$ einfach zusammenhängend ist.
Hinweis: Analog zu $Sp(2) \cong SL(2)$ in [Kri16, 1.24] ist $Sp_{\mathbb{C}}(2) \cong SL_{\mathbb{C}}(2)$.

22. $Sp(2m)$ **ist nicht einfachzusammenhängend.**
Zeige, daß $\pi_1(Sp(2m)) \cong \mathbb{Z}$. **Hinweis:** Verwende $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ und $\pi_2(S^n) = \{0\}$ für $n > 2$.

23. Lie-Klammer rechtsinvarianter Vektorfelder.
Es ist $i : G \to G^{\mathrm{op}}$, $g \mapsto g^{-1}$ ein Lie-Gruppen-Isomorphismus, wobei G^{op} die Lie-Gruppe, welche als Mannigfaltigkeit G ist und die Multiplikation durch $g \bullet^{\mathrm{op}} h := h \bullet g$ gegeben ist. Bestimme $\mathcal{L}i : T_eG \cong \mathcal{L}G \to \mathcal{L}G^{\mathrm{op}} \cong T_eG$ und folgere, daß $[R^v, R^w] = R^{[w,v]}$ für die rechtsinvarianten Vektorfelder

$R^v : g \mapsto TR_g \cdot v$ gilt.
Hinweis: R^v ist i-verwandt mit L^{-v}.

24. Fluß rechtsinvarianter Vektorfelder.
Zeige, daß $(t, g) \mapsto \exp(t\,v) \cdot g$ der Fluß des rechtsinvarianten Vektorfelds R^v für $v \in T_eG$ ist.
Hinweis: Verwende Aufgabe 23.

25. Niveauflächen als Blätterung.
Es sei $f : M \to N$ eine Submersion. Zeige, daß $\ker(Tf) := \bigsqcup_{x\in M} \ker(T_xf)$ ein integrables Teilvektorbündel von TM ist.
Hinweis: Die Zusammenhangskomponenten der Niveauflächen $f^{-1}(q)$ sind die maximalen Integralmannigfaltigkeiten zu $\ker(Tf)$.

26. Ein nicht-integrables Teilbündel.
Zeige, daß $E_{(x,y,z)} := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 : w = y\,u\}$ ein nicht-integrables Teilbündel von $T\mathbb{R}^3$ definiert.

27. Kein bi-invariantes Maß.
Zeige, daß für die $ax + b$-Gruppe das linksinvariante Maß nicht rechtsinvariant ist.
Hinweis: Dieses ist gegeben durch $a^{-2}\,d(a, b)$ wobei $d(a, b)$ das Lebesgue-Maß auf $\{(a, b) : a > 0\}$ bezeichnet.

28. Lokal abgeschlossene Teilmengen.
Zeige die Äquivalenz folgender Aussagen für Teilmengen $X \subseteq Y$ eines topologischen Raum Y:

1. X is lokal abgeschlossen,
   d.h. $\forall x \in X\ \exists U_x$ Umgebung von x in Y mit $X \cap U_x$ abgeschlossen in U_x;
2. $\exists A \subseteq Y$ abgeschlossen und $\exists U \subseteq Y$ offen mit $X = A \cap U$;
3. $\exists A \subseteq Y$ abgeschlossen mit $X \subseteq A$ offen;
4. $\exists U \subseteq Y$ offen mit $X \subseteq U$ abgeschlossen;
5. $X \subseteq \overline{X}$ offen.

29. Zweiter Isomorphiesatz.
Es wirke eine Gruppe G auf einer Menge X und sei $N \lhd G$ eine Normalteiler. Dann induziert die Wirkung eine von G/N auf X/N und eine Bijektion $X/G \to (X/N)/(G/N)$.
Überlege auch was zusätzlich gesagt werden kann, wenn X selbst eine Gruppe und G eine Untergruppe ist, die durch links-Multiplikation wirkt, bzw. wenn zusätzlich N und G Normalteiler in X sind.

30. Freie Wirkungen.
Zeige, daß die äquivalenten Bedingungen aus [Kri16, 6.14] weiters äquivalent sind zu:
Für jede e-Umgebung V in G und $x \in M$ existiert eine Umgebung U von x mit $\{g : gU \cap U \neq \emptyset\} \subseteq V$.

31. Fundamentales Vektorfeld und adjungierte Darstellung.
Es wirke G auf M. Für $v \in T_eG$ sei $\zeta^v \in \mathfrak{X}(M)$ definiert durch $\zeta^v(x) := T_e\,\mathrm{ev}_x \cdot v$ wie in [Kri16, 4.15]. Zeige: $T_xL_g \cdot \zeta^v(x) = \zeta^{\mathrm{Ad}(g)(v)}(g \cdot x)$ für alle $x \in M$ und $g \in G$. Folgere daraus $R^v(g) = L^{\mathrm{Ad}(g^{-1})(v)}(g)$ für $g \in G$ gilt, wobei L^v das links-invariante und R^v das rechts-invarinate Vektorfeld zu v ist.
Hinweis: $L_g \circ \mathrm{ev}_x = \mathrm{ev}_{gx} \circ \mathrm{konj}(g)$.

32. Tangentialgruppe einer Lie-Gruppe.
Es sei G eine Lie-Gruppe mit Multiplikation μ. Zeige, daß TG eine Lie-Gruppe mit Multiplikation $T\mu : TG \times TG \cong T(G \times G) \to TG$ ist, welche ein semidirektes Produkt $\mathcal{L}G \ltimes G$ bzgl. der Darstellung Ad ist.
Hinweis: Verwende die **rechts**-Trivialisierung $T_eG \times G \to TG$, $(v, g) \mapsto TR_g \cdot v$.

33. Hauptfaserbündel als Faserbündel mit Strukturgruppe.
Zeige, daß G-Hauptfaserbündel nichts anderes sind als Faserbündel mit Faser G und Strukturgruppe G die auf G durch Linksmultiplikation wirkt.
Hinweis: Lokale Schnitte $\sigma : M \supseteq U \to p^{-1}(U) \subseteq P$ eines Hauptfaserbündels $p : P \to M$ liefern Faserbündelkarten $\varphi : U \times G \to p^{-1}(U)$, $(x, g) \mapsto \sigma(x) \cdot g$.

34. Nicht-kompakte Isotropiegruppe.
Betrachte die Wirkung von $GL(n)$ am Vektorraum $L_{\text{sym,definit}}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m; \mathbb{R})$ der bilinearen symmetrischen nicht-degenerierten Formen welche gegeben ist durch $g \cdot b := b \circ (g \times g)$. Zeige, daß diese nicht proper ist.

35. Unterhalbgruppe einer kompakten Gruppe.
Sei G eine kompakte Gruppe und $g \in G$. Zeige, daß der Abschluß von $H := \{g^n : n \in \mathbb{N}\}$ eine Untergruppe ist.
Hinweis: Es genügt $g^{-1} \in \overline{H}$ zu zeigen. Untersuche dazu die Fälle wo e in $\overline{H}$ isoliert ist oder nicht. Im ersten Fall ist H endlich und im zweiten ist e im Abschluß von $H \setminus \{e\}$.

36. Invariante Untergruppen bzgl. $\mathbf{konj}_g$.
Sei G eine kompakte Gruppe, H eine abgeschlossene Untergruppe und $g \in G$ mit $gHg^{-1} \subseteq H$. Zeige, daß daraus $gHg^{-1} = H$ folgt.
Hinweis: Aufgabe 35.

37. Prinzipale Orbits.
Ein Orbit $G \cdot x$ einer glatten Wirkung heißt prinzipaler Orbit (bzw. x regulärer Punkt), wenn für jedes y nahe x ein $g \in G$ existiert mit $G_x \subseteq gG_yg^{-1}$. Zeige, daß diese Bedingung äquivalent zur Existenz einer (surjektiven) äquivarianten Abbildung $G \cdot x \to G \cdot y$ ist.
Hinweis: $gG_yg^{-1} = G_{g \cdot y}$

38. Isotopiegruppen auf der Scheibe.
Zeige, daß $G_z \subseteq G_x$ für alle z in einer Scheibe S eines Orbits $G \cdot x$ gilt. Folgere daraus, daß wenn G_x kompakt ist und $G \cdot x$ ein prinzipaler Orbit ist, so ist $G_z = G_x$ für alle $z \in S$ hinreichend nahe an x, also $G \cdot y$ prinzipaler Orbit für alle y nahe x.
Hinweis: Aufgabe 36.

39. Exponentialabbildung Abelscher Lie-Gruppen.
Zeige, daß die Exponentialbbildung zusammenhängender Abelscher Lie-Gruppen $(G, \cdot)$ mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ eine Gruppen-Überlagerung $\exp : (\mathfrak{g}, +) \to (G, \cdot)$ ist.

40. Die Campbell-Baker-Hausdorff Formel.
Bestimme die Terme der Campbell-Baker-Hausdorff Formel [Kri16, 6.32] (in der korrigierten Version vom 9.Jänner) die aus maximal 3 geschachtelten Lie-Klammern bestehen.

41. Kettenregel für die linkslogarithmische Ableitung.
Seien E_1, E_2 Vektorräume, G_1, G_2 Liegruppen und $f : E_1 \to G_1$ glatt. Zeige:

1. $\delta(f \circ h)(x) = \delta(f)(hx) \circ h'(x)$ für glattes $h : E_2 \to E_1$.
2. $\delta(h \circ f)(x) = \mathcal{L}h \circ \delta f(x)$ für Lie-Homomorphismen $h : G_1 \to G_2$.

42. Die Regularität von $\exp$**.**
Zeige, daß $\exp$ genau dann ein lokaler Diffeomorphismus bei $X \in \mathfrak{g}$ ist, wenn $\operatorname{ad}(X)$ keinen Eigenwert in $2\pi i(\mathbb{Z} \setminus \{0\})$ hat.
Hinweis: Wende den Spektralabbildungssatz $\sigma(g(\operatorname{ad}(X))) = g(\sigma(\operatorname{ad} X))$ auf die ganze Funktion $g : z \mapsto \frac{1-e^{-z}}{z}$ an, wobei $\sigma(T)$ das Spektrum, also die Menge der Eigenwerte der Matrix T bezeichnet.

43. Kommutator von Idealen/Normalteilern.
Zeige: für $Y_i \lhd X$ ist $[Y_1, Y_2] \lhd X$. Folgere weiters daraus, daß $X^{(i)}, C^i X, C_i X \lhd X$.

44. Ideale mit Abelschen Quotienten.

1. Seien Y_1, Y_2 Unterobjekte von X und $Z \lhd Y_i$. Zeige: $Z \lhd [Y_1, Y_2]$ und $[Y_1/Z, Y_2/Z] = [Y_1, Y_2]/Z$.
2. Sei $Y < X$ ein Unterobjekt. Zeige: $X' \subseteq Y \Leftrightarrow (Y \lhd X$ und X/Y ist Abelsch).

45. Lie-Gruppen sind reellanalytisch.
Zeige, daß jede (zusammenhängende) Lie-Gruppe G einen reell-analytischen Atlas (d.h. mit lokal konvergenten Potenzreihen als Kartenwechsel) besitzt, für welchen die Gruppen-Multiplikation (und damit auch die Inversion) reell-analytisch ist.
Hinweis: Verwende $X \mapsto g \exp X$ als Karten $U \to g \cdot U \subseteq G$ für eine hinreichend kleine symmetrische 0-Umgebung U um einen analytischen Atlas zu erhalten, für welchen die Linksmultiplikationen L_g analytisch sind. Beachte, daß wegen der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel die Kartendarstellung der Multiplikation und der Inversion nahe 0 analytisch ist und damit die Rechtsmultiplikation R_g für g nahe e und schließlich auch die Multiplikation $\mu : G \times G$ analytisch sind.

46. Wirkung der Isotopiegruppe auf der Faser einer äquivarianten Abbildung.
Beweise das erste Lemma in [Kri16, 7.7]: Es wirke eine Gruppe G auf den Mengen M und transitiv auf N. Weiters sei $f : M \to N$ G-äquivariant, $y \in N$ und G_y die Isotropie-Gruppe der Wirkung auf $y \in N$. Dann induziert die Inklusion $\iota : f^{-1}(y) \hookrightarrow M$ eine Bijektion $f^{-1}(y)/G_y \cong M/G$.

47. Bianchi-Typ einiger Beispiele.
Bestimme den Bianchi-Typ mindestens 2 der folgenden Lie-Gruppen: die 3-dim. Heisenberggruppe H_3, das direkte Produkts aus $\mathbb{R}$ und der $ax + b$-Gruppe, die $SU(2)$ und die $SL(2)$.
Hinweis: Beachte, daß nach [Kri16, 3.9.2] die Lie-Klammer von Matrizen-Gruppen durch den Kommutator gegeben ist.

48. Äquivarianz der Abbildungen aus [Kri16, 7.7].
Zeige die Äquivarianz für mindestens 2 der Abbildungen $j : E^* \to L^2_{\mathrm{alt}}(E, E)$, $\mathrm{tr} : L^2_{\mathrm{alt}}(E, E) \to E^*$ und $\mathrm{Tr} : L^3_{\mathrm{alt}}(E, L^2_{\mathrm{sym}}(E^*, \mathbb{R})) \to L^2_{\mathrm{alt}}(E, E)$ aus [Kri16, 7.7].

Literatur

[Kri16] A. Kriegl. *Lie-Gruppen.* Univ. Wien, WS 2016. 1, 2, 3, 4, 5, 6