Aufgabensammlung zur Analysis 1

WS 2003/2004

Andreas Kriegl

email:andreas.kriegl@univie.ac.at

Dies ist eine umfangreiche Aufgabensammlung zur Analysis 1. Es wird von den ProseminarteilnehmerInnen **keineswegs** erwartet sich **alle** Beispiele anzusehen, geschweige denn diese zu lösen. Die zu lösenden Aufgaben sind links neben der Nummer mit ◯ gekennzeichnet. Die übrigen Beispiele sind für jene gedacht, die entweder mehr Herausforderung suchen (nach meiner subjektiven Meinung schwerere Beispiele sind mit ★ rechts neben der Nummer gekennzeichnet) oder um mehr Sicherheit zu bekommen sich freiwillig noch mit weiteren Beispielen beschäftigen wollen. Zusätzlich habe ich jene Beispiele, wo Mathematica hilfreich sein kann, um eine Idee zur Lösung zu bekommen mit rechts neben der Nummer gekennzeichnet. Die Überschriften beziehen sich auf die jeweiligen Abschnitte in Skriptum und Vorlesung.

Bleibt mir noch Euch viel Erfolg beim Lösen zu wünschen.

Andreas Kriegl

2 Konvergenz von Folgen und Reihen

Motivation, siehe VO [1, 2.1]

2.1. Bestimme analog zu [1, 2.1.3] in der Vorlesung ein rekursives Näherungsverfahren zur Berechnung von $\sqrt[3]{a}$.
Hinweis: In Analogie zur Berechnung von $\sqrt{a}$ aus der Vorlesung, betrachte die Funktion $f(x) := a - x^3$ und bestimme deren Ableitung wie in der Schule.

2.2. Bestimme analog zu [1, 2.1.3] in der Vorlesung ein rekursives Näherungsverfahren zur Berechnung von $1/a$, welches ohne Benutzung der Division auskommt.
Hinweis: Betrachte die Funktion $f(x) := a - \frac{1}{x}$.

2.3. Es sei $\frac{m}{n}$ eine Näherung von $\sqrt{a}$, dann ist $\frac{m+a\,n}{m+n}$ eine bessere Näherung. Konvergiert dieses Verfahren gegen $\sqrt{a}$?

Metriken, siehe VO [1, 2.2]

2.4. Zeige, daß die Taxi-Metrik $d(x,y) := \sum_k |x_k - y_k|$ eine Metrik am $\mathbb{R}^n$ (und auch am $\mathbb{C}^n$) ist.
Hinweis: $|z+w| \le |z| + |w|$.

2.5. Zeige, daß die Maximum-Metrik $d(x,y) := \max\{|x_k - y_k| : 1 \le k \le n\}$ eine Metrik am $\mathbb{R}^n$ (und auch am $\mathbb{C}^n$) ist.
Hinweis: $|z+w| \le |z| + |w|$.

2.6. Zeige, daß die Hamming-Metrik (siehe Vorlesung [1, 2.2.5]) eine Metrik auf der Menge der endlichen Folgen in einem Alphabet A ist.

2.7. Es sei d die euklidische Metrik am $\mathbb{R}^2$. Es liege x_1 im offenen Ball $U_r(x_0)$. Wie groß kann der Radius s maximal gewählt werden, sodaß $U_s(x_1) \subseteq U_r(x_0)$ gilt. Stimmt diese Inklusion für dieses s auch für eine beliebige Metrik d auf einer Menge X? Ist es auch möglich für den abgeschlossenen Ball $B_r(x_0)$ einen entsprechenden Radius $s > 0$ immer zu finden?

2.8. Zeige, daß für die Euklidische Metrik d_2, die Taxi-Metrik d_1 und die Maximum-Metrik d_∞ bezüglich beliebiger Punkte in $\mathbb{R}^n$ folgendes gilt:

$$d_\infty(x,y) \le d_2(x,y) \le d_1(x,y) \le n\, d_\infty(x,y).$$

Was bedeutet dies für die Bälle (um 0 mit Radius 1)?
Hinweis: Zeige $|z_i| \le \sqrt{\sum_j |z_j|^2} \le \sum_j |z_j| \le n \max\{|z_i| : i \le n\}$.

2.9. Es sei d eine Metrik auf der Menge X. Zeige, daß $d'(x,y) := \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ ebenfalls eine Metrik auf X definiert. Sind die gleichen Folgen in dieser wie in der ursprünglichen Metrik konvergent?
Hinweis: Für die Dreiecksungleichung zeige, daß die Funktion $f : t \mapsto \frac{1}{1+t}$ monoton wachsend ist und $f(t+s) \le f(t) + f(s)$ erfüllt.

2.10. Versuche von mindestens 3 der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ festzustellen ob sie (bezüglich der üblichen Metrik) beschränkt?

a) $\{n - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$	*d)* $\{\frac{n^2}{n-1} - \frac{n^2}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$	*g)* $\{2^n/n! : n \in \mathbb{N}\}$
b) $\{n - n^2 : n \in \mathbb{N}\}$	*e)* $\{\sin(n) : n \in \mathbb{N}\}$	*h)* $\{n^2/2^n : n \in \mathbb{N}\}$
c) $\{\sqrt{n+1} - \sqrt{n} : n \in \mathbb{N}\}$	*f)* $\{\tan(n) : n \in \mathbb{N}\}$	*i)* $\{n/(1+n^2) : n \in \mathbb{N}\}$

2.11. Zeige, daß eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ genau dann beschränkt ist, wenn für jedes $i \in \{1, \dots, n\}$ die Menge $M_i := \{x_i : x \in M\} \subseteq \mathbb{R}$ der i-ten Koordinaten von Punkten $x \in M$ beschränkt ist.
Hinweis: Für die Maximums-Metrik ist dies leicht einzusehen, für die Euklidische Metrik folgt es aus Aufgabe (2.8).

Grenzwerte, siehe VO [1, 2.3]

2.12. Zeige, daß eine Folge von Zahlen/Vektoren a_n genau dann gegen a_∞ konvergiert, wenn $a_n - a_\infty$ gegen 0 konvergiert.

2.13. Zeige: $a_n \to a_\infty$ impliziert $|a_n| \to |a_\infty|$.
Hinweis: $\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|$ (wieso gilt dies?).

2.14. Zeige, daß $\max\{a_n, b_n\} \to \max\{a_\infty, b_\infty\}$, falls $a_n \to a_\infty$ und $b_n \to b_\infty$ (und analog für min)
Hinweis: $\max\{a, b\} = (a + b + |a - b|)/2$.

2.15. Es konvergiert a_n genau dann wenn $a_n^+ := \max\{a_n, 0\}$ und $a_n^- := \min\{a_n, 0\}$ konvergieren.
Hinweis: $a_n = a_n^+ + a_n^-$.

2.16. Zeige, daß $\sqrt{x_n} \to \sqrt{x_\infty}$ aus $0 \leq x_n \to x_\infty$ folgt.
Hinweis: Erweitere $(\sqrt{x_n} - \sqrt{x_\infty})/1$ mit $\sqrt{x_n} + \sqrt{x_\infty}$.

2.17. Verallgemeinere das vorige Beispiel auf die p-te Wurzel.
Hinweis: $(x^p - y^p) = (x - y) \cdot (x^{p-1} + x^{p-2}y + \cdots + xy^{p-2} + y^{p-1})$.

2.18. Es sei $a_n > 0$ für alle n und es strebe $a_n \to a_\infty > 0$. Für $r \in \mathbb{Q}$ gilt dann, daß $a_n^r \to a_\infty^r$.

2.19. Zeige, daß die rekursive definierte Folge $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + a/x_n)$ konvergiert (**Hinweis:** Monotonie). Kannst Du den Grenzwert bestimmen?

2.20. ★ Zeige, daß die Folge $\sqrt{6}, \sqrt{6 + \sqrt{6}}, \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}, \dots$ konvergiert (**Hinweis:** Rekursionsformel, Monotonie). Kannst Du den Grenzwert bestimmen?

2.21. Bestimme die Grenzwerte (sofern existent) von

$$a)\ \frac{2n^2 + 3n}{2n - 3n^2} \qquad b)\ \frac{2n^2 + 3n}{3n - 2n^3} \qquad c)\ \frac{2n^3 + 3n}{3n - 2n^2}.$$

2.22. Bestimme den Grenzwert (sofern existent) von $\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - n}$
Hinweis: Erweitere mit $\sqrt{n^2 + n} + \sqrt{n^2 - n}$

2.23. Zeige: $\sqrt{n}(\sqrt{n + 1} - \sqrt{n}) \to \frac{1}{2}$ sowie $n(1 - \sqrt{(1 - a/n)(1 - b/n)}) \to (a + b)/2$.

2.24. Bestimme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{7n^2 + 2(n - 1)}{5(n + 2)^3}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{n + 1}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1 + 2 \cdot 3^n}{5 + 4 \cdot 3^n}, \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^n k^3}{n^4}.$$

2.25. Bestimme den Grenzwert von $\sqrt[n]{n}^2$ und von $\sqrt[n]{n^5 + n^3 + 1}$ sofern diese existieren.

2.26. Es sei (a_n) beschränkt. Dann gilt: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sum_{k=1}^n |a_k|^n} = \sup\{a_k : k \in \mathbb{N}\}$.

2.27. Bestimme den Grenzwert (sofern existent) von $\frac{2^n}{n!}$.

2.28. Bestimme $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{a^n}$.

2.29. Bestimme $\lim_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $a > 1$.
Hinweis: $a^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(a-1)^k$.

2.30. Bestimme $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$.

Die Aufgaben (2.31)-(2.40) benötigen [1, 2.5.5] aus der VO.

2.31. Zeige: $n \mapsto (1+\frac{1}{n})^{n+1}$ ist monoton fallend und konvergiert gegen e.

2.32. ★ Zeige:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \le n! \le e\,n\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Hinweis: Induktion mittels Aufgabe (2.31) und [1, 2.5.5] aus der VO.

2.33. $\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \to e$. **Hinweis:** Aufgabe (2.32).

2.34. $\frac{1}{\sqrt[n]{n!}} \to 0$. **Hinweis:** Aufgabe (2.33).

2.35. Zeige: $\lim_{n\to\infty}(1+2/n)^n = e^2$.

2.36. Zeige: $\lim_{n\to\infty}(1+1/2n)^n = \sqrt{e}$.

2.37. Zeige: $\lim_{n\to\infty}(1+x/n)^n = e^x$ für $x \in \mathbb{Q}$. **Hinweis:** Aufgabe (2.18).

2.38. Berechne $\lim_{n\to\infty}(1+1/n^2)^n$.

2.39. Bestimme den Grenzwerte von: $(1-\frac{1}{n})^n$.

2.40. Bestimme den Grenzwerte von:

$$\frac{(1-\frac{2}{\sqrt[3]{n}})^4 + (1+\frac{1}{n^3})^5 + (1+\frac{1}{n})^{-n}}{2+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\frac{1}{3^n}}.$$

2.41. Betrachte die Folgen

$$\begin{aligned} a_n &:= \sqrt{n+10^3} - \sqrt{n} \\ b_n &:= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} \\ c_n &:= \sqrt{n+\frac{n}{10^3}} - \sqrt{n} \end{aligned}$$

und zeige $a_n > b_n > c_n$ für $n < 1000000$. Berechne die Limiten der drei Folgen sofern sie existieren.

2.42. Es sei $x_n < a$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_\infty := \lim_{n\to\infty} x_n$ existiere. Kann man daraus $x_\infty < a$ folgern?

2.43. Es existiere $x_\infty := \lim_{n\to\infty} x_n$ und es sei $x_\infty \neq 0$. Beweise die Existenz einer Zahl $N \in \mathbb{N}$, s.d. $|x_n| \geq |x_\infty|/2$ für alle $n \geq N$ gilt.

2.44. Es sei $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeige: $\frac{1}{a_n} \to 0 \Leftrightarrow \forall K > 0\ \exists n_0\ \forall n \geq n_0$: $a_n > K$ (d.h. $a_n \to \infty$)

○ **2.45.** Es seien $\{n_1, n_2, \dots\}$ und $\{m_1, m_2, \dots\}$ zwei abzählbar-unendliche disjunkte Teilmengen von $\mathbb{N}$ deren Vereinigung $\mathbb{N}$ ist. Dann konvergiert a_n genau dann gegen a_∞, wenn $a_{n_k} \to a_\infty$ und $a_{m_k} \to a_\infty$ für $k \to \infty$.

2.46. Zeige $a_n \to a_\infty$ impliziert $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \to a_\infty$. **Hinweis:** Betrachte eventuell zuerst den Fall $a_\infty = 0$.

2.47. Zeige: $\prod_{k=2}^n (1 - \frac{1}{k}) \to 0$ und $\prod_{k=2}^n (1 - \frac{1}{k^2}) \to \frac{1}{2}$.

2.48. Es sei $M \neq \emptyset$ nach oben beschränkt. Dann gibt es eine Folge in M die gegen $\sup(M)$ konvergiert.

2.49. ★ Zeige: $\sqrt[n]{\binom{2n}{n}} \to 4$.

Häufungspunkte, siehe VO [1, 2.4]

2.50. Bilde die Negation folgender Aussagen (dabei bezeichne x_n die Glieder einer Folge reeller Zahlen und U die Umgebung eines Punktes p):

1. Alle x_n liegen in U.
2. Alle x_n liegen außerhalb U.
3. Kein x_n liegt in U.
4. Unendlich viele x_n liegen in U; genauer: Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ liegt $x_n \in U$.
5. Unendlich viele x_n liegen außerhalb U; genauer: Für unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ liegt $x_n \notin U$.
6. Endlich viele x_n liegen in U, genauer: Für endlich viele $n \in \mathbb{N}$ liegt $x_n \in U$.
7. Höchstens endlich viele x_n liegen in U, genauer: Für höchstens endlich viele $n \in \mathbb{N}$ liegt $x_n \in U$.

Besagt eine dieser oder der negierten Aussagen für alle Umgebungen U von p genommen, daß p ein Grenzwert (oder ein Häufungswert) der Folge $(x_n)_n$ ist?

○ **2.51.** Gib ein Beispiel einer beschränkten Folge $(a_n)_n$ an mit

$$\inf_n a_n < \underline{\lim}_n a_n < \overline{\lim}_n a_n < \sup_n a_n.$$

○ **2.52.** Es sei $(a_n)_n$ eine beschränkte Folge und $\alpha_n := \inf\{a_k : k \geq n\}$. Zeige, daß α_n gegen $\underline{\lim}_n a_n$ konvergiert, also $\liminf_k a_k = \lim_n \inf_{k\geq n} a_k$ gilt. Formuliere ein entsprechendes Resultat für sup.

2.53. Es seien $(a_n)_n$ und $(b_n)_n$ beschränkt und ≥ 0. Zeige, daß dann $\overline{\lim}_n a_n b_n \leq \overline{\lim}_n a_n \cdot \overline{\lim}_n b_n$ ist. Gib auch ein Beispiel, daß Gleichheit nicht zu gelten braucht.

2.54. Wie könnte man Lemma [1, 2.4.4] auf unbeschränkte Folgen erweitern.
Hinweis: Betrachte uneigentliche Konvergenz.

2.55. Bestimme $\underline{\lim} = \liminf$ und $\overline{\lim} = \limsup$ von

$$\frac{n\sin(\pi n/3) + 1}{n + \cos(\pi n) + 1}.$$

Unendliche Reihen, siehe VO [1, 2.5]

2.56. Bestimme sofern vorhanden den Grenzwert der folgenden Reihen:

1. $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{2^k}$
2. $\sum_{k\geq 0} x_k - x_{k+1}$, wobei $x_k \to 0$
3. $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k(k+1)}$ (**Hinweis:** $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$)
4. $\sum_{k\geq 1} \frac{1}{4k^2-1}$

2.57. Zeige:

1. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{4}$,
2. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{4}$,
3. $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\log(1+\frac{1}{k})}{\log(k^{\log(k+1)})} = \frac{1}{\log(2)}$.

2.58. Zeige: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$.

2.59. Für welche α konvergiert:

$$\sum_k \frac{(-1)^k}{k^\alpha}, \quad \sum_k \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}, \quad \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} + \frac{1}{8^\alpha} + \dots.$$

2.60. Bestimme das Konvergenzverhalten von jeweils einer Reihe der folgenden drei Listen:

1.

$\sum_n \frac{n!}{n^n}$	$\sum_n \frac{n^2}{2^n}$	$\sum_n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$
$\sum_n \frac{a^n}{n!}$	$\sum_n \frac{n^n}{2^n n!}$	$\sum_k \frac{k}{\ln(k)^k}$
$\sum_k \binom{2k}{k} 2^{-3k-1}$	$\sum_k 1/\binom{4k}{3k}$	

2.

$\sum_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$	$\sum_n n^4 2^{-n^2}$	$\sum_k \frac{k}{\log(k)^k}$
$\sum_n n(\frac{2n+1}{3n+1})^n$	$\sum_n \frac{a^n}{n}$ für $\lvert a\rvert < 1$	

3.

$\sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$	$\sum_n \frac{(-1)^{n+1}\sqrt[n]{n}}{n}$	$\sum_k (-1)^k \frac{\log(k)}{k}$
$\sum_n \frac{(-1)^n}{2n+1}$	$\sum_n \frac{(-1)^n n}{2^n}$	$\sum_n \frac{(-1)^n a^n}{n^2}$ für $\lvert a\rvert < 1$
$\sum_k (-1)^{k-1} \frac{1}{k^a}$	$\sum_k (-1)^{k+1} \frac{1}{\sqrt[k]{k}}$	$\sum_k (-1)^k (e - (1+\frac{1}{k})^k)$

2.61. Bestimme das Konvergenzverhalten von jeweils einer Reihe der folgenden drei Listen:

1.

$\sum_n \frac{1}{n^2}$	$\sum_k \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt[4]{k^3}}$	$\sum_n \frac{1}{n^2+a^2}$
$\sum_n \frac{1}{2n+1}$	$\sum_k \frac{1}{\ln(k)^p}$ für $p \in \mathbb{N}$	
$\sum_k \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\ln(k^{\sqrt{k}})}$	$\sum_k (\sqrt[k]{a} - 1)$	$\sum_k (-1)^k (e - (1+\frac{1}{k})^k)$

2.

$$\sum_k \frac{1}{\ln(k)^{\ln(k)}} \qquad \sum_k a^{\ln(k)}$$

3.

$$\sum_k \frac{(-1)^k}{k}(1+\tfrac{1}{k})^k \qquad \sum_k \frac{(\sqrt[k]{k}-\sqrt[k+1]{k+1})}{k}$$

2.62. ★ Zeige die Konvergenz von:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1/\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}+1/\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}-1/\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}+1/\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{4}-1/\sqrt{4}}-\frac{1}{\sqrt{4}+1/\sqrt{5}}\cdots$$

2.63. Bestimme das Konvergenzverhalten von:

$$\sum_k \frac{1}{k\ln(k)\ln(\ln(k))}$$

2.64. Bestimme das Konvergenzverhalten von:

$$1-\frac{1}{5}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5^2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5^3}+-\dots$$

2.65. Welche der folgenden Reihen sind absolut bzw. bedingt konvergent:

$$\sum_n \frac{(-1)^n}{n\log(n)}, \qquad \sum_n \frac{(-1)^n}{2n+1} \text{ und } \sum_n \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}}.$$

2.66. Ist $a_k \geq 0$, monoton wachsend und beschränkt so konvergiert $\sum_k(\frac{a_{k+1}}{a_k}-1)$

2.67. Zeige, daß wenn die Konvergenz einer Reihe mittels Quotiententest erkannt werden kann, so auch mittels Wurzeltest. Umgekehrt nicht, wie $\sum_k \frac{2+(-1)^k}{2^{k-1}}$ zeigt.

2.68. Es sei $\sum_k a_k$ konvergent und (b_k) beschränkt. Gibt ein Beispiel, daß dann $\sum_k a_k b_k$ nicht zu konvergieren braucht. Ist jedoch $\sum_k a_k$ sogar absolut konvergent so auch $\sum_k a_k b_k$.

2.69. Es sei $a_0 := 0$ und $a_k := (-1)^{k-1}/\sqrt{k}$ für $k \geq 1$. Dann ist $\sum_k a_k$ bedingt konvergent und das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst divergent.

2.70. Zeige:

1. $\sum_{k=0}^\infty (k+1)x^k = 1/(1-x)^2$ für $|x|<1$.
2. $\sum_{k=1}^\infty kx^k = x/(1-x)^2$ für $|x|<1$.
3. $\sum_{k=2}^\infty \ln(1-\frac{1}{k^2}) = \ln(\frac{1}{2})$.

Hinweis: Beginne mit der rechten Seite.

2.71. Wenn $\sum_k a_k$ absolut konvergiert so auch $\sum_k a_k^2$, nicht aber umgekehrt.

2.72. Minkowski-Ungleichung: Sind $\sum_k a_k^2$ und $\sum_k b_k^2$ konvergent, so auch $\sum_k(a_k+b_k)^2$ und es gilt

$$\sqrt{\sum_{k=0}^\infty (a_k+b_k)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=0}^\infty a_k^2}+\sqrt{\sum_{k=0}^\infty b_k^2}.$$

2.73. Es seien $a_k \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $d(a) := \sum_k \frac{1}{2^k}\frac{|a_k|}{1+|a_k|}$ und es gilt $d(a+b) \leq d(a)+d(b)$.

Beispiele für den Mathematica-Teil

Die folgenden 10 Aufgaben sind im PC-Labor Teil des Proseminars auf Diskette abzugeben.

○ **2.74.** Bestimme folgende Grenzwerte:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{2n-3n^2} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^2+3n}{3n-2n^3} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+3n}{3n-2n^2}$$

○ **2.75.** Untersuche die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$\begin{array}{ccc} \sum_n \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} & \sum_n (-1)^{n+1}\, n^{1/n} & \sum_n \frac{n!}{n^n} \\ \sum_n \frac{2^n}{n^3} & \sum_n \frac{(n!)^2}{2n!} & \sum_n \frac{n}{1+2n} \\ \sum_n \frac{n^4}{2^{n^2}} & \sum_n \frac{a^n}{n!} & \sum_n \frac{1}{n^2} \end{array}$$

Sind die ersten beiden Reihen absolut konvergent?

○ **2.76.** Überprüfe das Konvergenzverhalten von 3 weiteren (wesentlich verschiedenen) Folgen oder Reihen.

○ **2.77.** Eine ägyptische Pyramide mit quadratischen Grundriß, Basislänge a und Höhe a sei aus Würfeln der fixen Seitenlänge a/n aufgebaut. Bestimme ihr Volumen (Hinweis: Summenformel $1^2+2^2+\dots+n^2$) und berechne den Grenzwert für $n \to \infty$ und somit das Volumen einer mathematischen Pyramide der selben Basis und Höhe.

○ **2.78.** Konvergieren die Reihen: $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cos(n)^2}$, $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(n)}$ und $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\log(\log(n))}$?

○ **2.79.** Finde die Grenzwerte von $x_{n+1} := f(x_n)$ für $f = \sin$ und $f = \cos$ (oder eine trigonometrische Funktion deiner Wahl) zu verschiedenen Anfangswerten x_0 und interpretiere das Ergebnis.

○ **2.80.** Finde den Wert von $\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\dots}}}$ (Hinweis: Rekursion).

○ **2.81.** Das Newtonverfahren zur approximativen Bestimmung einer Nullstelle einer Funktione f besteht darin die rekursiv definierte Folge $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ zu untersuchen. Verwende dies um $x = \sqrt[3]{2}$ (also die Lösung der Gleichung $x^3 = 2$) näherungsweise zu bestimmen.

○ **2.82.** Fertige ein Bild der Folge

$$n \mapsto \Big(3\sin(n)\cos(n)^2 - \sin(n)^3, \cos(n)^3 - 3\cos(n)\sin(n)^2\Big)$$

an und interpretiere es.

○ **2.83.** Stelle die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,\log(n)}$ graphisch dar indem Du die Partialsummen der ersten 2^n Summanden für $1 \le n \le 30$ betrachtest. Interpretiere das Ergebnis.

Die Liste der Aufgaben wird zu einem späteren Zeitpunkt fortgesetzt…

3 Stetige Funktionen

Stetigkeit, siehe VO [1, 3.1]

3.1. Ist die Funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$, mit $f(x) := 0$ für $x < \sqrt{2}$ und $f(x) := 1$ für $x > \sqrt{2}$ stetig?

3.2. Wo sind folgende Funktionen stetig:

- $x \mapsto \sqrt{x+1}$
- $x \mapsto \sqrt{x^2+1}$
- $x \mapsto \sqrt[3]{\frac{x^3+2}{x-1}}$

3.3. Wo sind folgende Funktionen stetig:

- $x \mapsto \sqrt[3]{x - \sqrt{x^2+2}}$
- $x \mapsto \sqrt[3]{x + \sqrt{x^2-2}}$
- $x \mapsto (x+1)^{2/3}$

3.4. Zeige, daß folgende Funktion genau in den irrationalen Punkten stetig ist:

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} \text{ mit minimal gewählten } q \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

3.5. Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f|_{\mathbb{Q}} = g|_{\mathbb{Q}}$. Dann ist $f = g$.

3.6. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton (oder stetig) und es gelte $f(x+y) = f(x)+f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $f(x) = x\,f(1)$ für alle $x \in \mathbb{R}$. **Hinweis:** Bestimme zuerst $f(nx)$ und dann $f(\frac{n}{m})$ für $0 \neq m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{Z}$.

3.7. Zu jedem $0 < t \le 1$ finde Folgen $\alpha_n \searrow 0$ and $\beta_n \searrow 0$ mit $\alpha_n^{\beta_n} \to t$.**Hinweis:** $t^n \to 0$.

3.8. Ist $(x, y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ bzw. ist $(x, y) \mapsto \sqrt[4]{x^4+y^4}$ stetig auf $\mathbb{R}^2$?

Unstetigkeit und Grenzwerte, siehe VO [1, 3.2]

3.9. Untersuche die Stetigkeit der Funktion $x \mapsto \frac{x^3+2x^2+2x+1}{x+1}$.

3.10. Es sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $x \mapsto x\,g(x)$ stetig bei 0.

3.11. Formuliere Grenzwertsätze analog zu [1, 2.3.5] und [1, 2.3.16] aus der VO für $\lim_{x \to x_\infty}$ und $\lim_{x \to \omega\infty}$. Wieso gelten diese?

3.12. Berechne die Grenzwerte von: $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x+1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x-1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$, $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$ und $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}$.

3.13. Berechne $\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x-1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^4-1}{x-1}$, $\lim_{x\to 1} \frac{x^n-1}{x-1}$, $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$,

3.14. Berechne $\lim_{x\to\xi} \frac{x^k-\xi^k}{x-\xi} = k\,\xi^{k-1}$. **Hinweis:** Aufgabe (3.13).

3.15. Berechne $\lim_{x\to 1-} \frac{x^2}{x-1}$ und $\lim_{x\to 1+} \frac{x^2}{x-1}$.

3.16. Welche der folgenden Funktionen sind stetig?
$x \mapsto \sin(\frac{x}{1-x^2})$, $x \mapsto \cos(\frac{x}{1+x^2})$ und $x \mapsto \tan(\frac{x^3}{1+x^2})$.

3.17. Ist die Funktion $f : (x,y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ stetig auf $\mathbb{R}^2$? **Hinweis:** $(x,y) = r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)$.

3.18. Es sei f wachsend auf (a,b) und nach unten (bzw. oben) beschränkt. Dann existiert $\lim_{x\to a+} f(x)$ (bzw. $\lim_{x\to b-} f(x)$).

3.19. Es sei $f : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ monoton und $\alpha := \lim_{\mathbb{N}\ni n\to\infty} f(n)$ existiere, so existiert $\lim_{\mathbb{R}\ni x\to+\infty} f(x)$ und ist gleich α.

3.20. Zeige, daß $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ genau dann existiert, wenn $\lim_{y\to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right)$ existiert. Es besteht Gleichheit zwischen den Limiten.

3.21. Berechne $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3+1}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+4x}{5x^2+1}$, $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1})$

3.22. Bestimme folgende Grenzwerte (falls sie existieren)

$$\begin{array}{cc}
\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x+\sin(x)} & \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \\
\lim_{x\to 1}(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^2}) & \lim_{x\to\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x) \\
\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(|x|)}{x+\frac{\pi}{2}}.
\end{array}$$

3.23. Berechne folgende Grenzwerte: $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{4x^2+2x-1}-2x)$,
$\lim_{x\to-\infty} \frac{8x^3+2x^2+1}{2x^3+7x}$, $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$ und $\lim_{x\to+\infty} \frac{(-1)^{[x]}}{x}$.

3.24. Berechne folgende Grenzwerte: $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^4-2x^3+1}{2x^5+x^3+x}$ und $\lim_{x\to+\infty} \frac{(2-\frac{3}{\sqrt{x}})^3(1+\frac{1}{x})^x-1}{1+\frac{1}{2^x}-\frac{2}{\sqrt[4]{x}}}$.

3.25. Berechne $\lim_{x\to\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$, $\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^3-1}{x}$ und $\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x^3-1}$.

3.26. Berechne folgende Limiten

$$\lim_{x\to 1+} \frac{1-x^3}{1-2x+x^2} \qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+1}{x^2-1}.$$

3.27. Eine auf einem Intervall I monotone Funktion besitzt höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen. **Hinweis:** Diese sind Sprungstellen.

3.28. Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ beschränkt. Dann ist $\sup(f(X)) - \inf(f(X)) = \sup\{f(x)-f(y) : x,y \in X\}$.

3.29. Für monotone Funktionen f ist $\omega_f(x) = |f(x+) - f(x-)|$.

3.30. Zeige die Doppelreihe $\sum_{k,j=2}^{\infty} \frac{1}{j^k}$ konvergiert.

3.31. Zeige die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+2}{2} x^k$ konvergiert für $|x| < 1$ und bestimme ihre Summe. **Hinweis:** $\binom{n+2}{2} = \sum_{j=0}^{n}(j+1)$.

3.32. ★ Zeige, daß die axiomatisch definierte Cosinusfunktion eine kleinste positive Nullstelle hat (die wir dann $\pi/2$ nennen können). **Hiweis:** Gehe indirekt vor und folgere die Monotonie (und Beschränktheit) von sin und cos auf $\{x : x \geq 0\}$. Betrachgtung der Grenzwerte $\lim_{x\to+\infty} \sin(x) = \lim_{x\to+\infty} \sin(2x)$ und $\lim_{x\to+\infty} \cos(x) = \lim_{x\to+\infty} \cos(2x)$ führt auf einen Widerspruch.

○ **3.33.** Zeige unter Verwendung von Aufgabe (3.32), daß die axiomatisch definierten Winkelfunktionen folgendes erfüllen:

- $\sin(\pi/2) = 1$.
- $\sin(\pi/2 - x) = \cos(x)$ für alle x.
- sin und cos sind 2π-periodisch, d.h. erfüllen die Gleichung $f(x + \pi) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
- sin ist streng monoton wachsend auf $[-\pi/2, \pi/2]$ und cos ist streng monoton fallend auf $[0, \pi]$

3.34. Es sei $x, y \geq 0$ mit $x^2 + y^2 = 1$. Zeige, daß genau ein t mit $0 \leq t \leq \pi/2$ existiert mit $\sin(t) = y$ und $\cos(t) = x$.

3.35. Beweisen sie folgende Identitäten für die axiomatisch definierten Winkelfunktionen:

- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$ und $\cos(2x) = 2\cos(x)^2 - 1$
- $\tan(2x) = \frac{2\tan(x)}{1-\tan(x)^2}$ (für $|x| < \frac{\pi}{4}$)
- $\sin(3x) = 3\sin(x) - 4\sin(x)^3$ und $\cos(3x) = 4\cos(x)^3 - 3\cos(x)$.
- $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$ und $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$
- Es sei $t = \tan(\frac{x}{2})$ mit $|x| < \pi$. Dann ist $\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}$ und $\cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Kompaktheit, gleichmäßige Stetigkeit, siehe VO [1, 3.3]

3.36. Eine Menge ist genau dann abgeschlossen, wenn ihr Komplement offen ist, d.h. mit jedem Punkt eine ε-Umgebung diese Punktes enthält.

3.37. Es sei f stetig. Dann sind folgende Mengen abgeschossen:

- $f^{-1}(0) := \{x : f(x) = 0\}$.
- $f^{-1}(a) := \{x : f(x) = a\}$.
- $\{x : f(x) \geq a\}$.
- $\{x : f(x) \leq b\}$.
- $\{x : a \leq f(x) \leq b\}$.

3.38. Eine Abbildung f ist genau dann stetig, wenn die Urbilder aller abgeschlossenen Mengen abgeschlossen sind.

3.39. Es sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig, $f \geq 0$ und X kompakt. Dann existiert ein $\alpha > 0$ mit $f(x) \geq \alpha$ für alle $x \in X$.

3.40. Zeige:

- $\mathbb{Z}$ ist nicht kompakt (aber abgeschlossen).
- $(0, 1]$ ist nicht kompakt (aber beschränkt).
- $\{1, 1/2, 1/4, \ldots, 1/2^n, \ldots\}$ ist nicht kompakt.

3.41. Jede abgeschlossene nach oben beschränkte nicht-leere Menge besitzt ein Maximum.

3.42. Ist die Funktion $x \mapsto x^3$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig?

3.43. Ist die Funktion $x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$ auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig?

3.44. Ist die Tangensfunktion $x \mapsto \tan(x)$ gleichmäßig stetig? Wie sieht es mit ihrer Umkehrfunktion arctan aus?

3.45. Gibt ein Beispiel einer beschränkten Funktion an, welche trotzdem kein Maximum besitzt. (Siehe (2.3.6))

3.46. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\varepsilon > 0$. Dann existiert eine Treppenfunktion g mit $\|f - g\|_\infty := \sup\{|f(x) - g(x)| : x \in [a, b]\} < \varepsilon$. **Hinweis:** In der Nähe von x können wir f durch die konstante Funktion $f(x)$ approximieren.

3.47. Bilder von Cauchy-Folgen unter stetigen Abbildungen müssen keine Cauchy-Folgen sein, wohl aber unter gleichmäßig stetigen Abbildungen.

3.48. Jede Lipschitz-stetige Funktion ist gleichmäßig stetig.

3.49. Jede gleichmäßig stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \supseteq X \to \mathbb{R}^q$ ist beschränkt auf beschränkten Mengen. **Hinweis:** Bolzano & Weierstraß.

3.50. Eine kompakte Schachtelung ist eine Folge kompakter Mengen K_n mit $K_n \supseteq K_{n+1}$ und $d(K_n) \to 0$. Zeige, daß eine solche einen eindeutigen Punkt $x_\infty \in \bigcap_n K_n$ besitzt. Jede Folge (a_n) mit $a_n \in K_n$ für alle n konvergiert gegen x_∞.

3.51. Finde stetige Funktionen aud $(0, 1]$ die nicht beschränkt sind und solche die zwar beschränkt sind aber dennoch kein Minimum und kein Maximum besitzen.

3.52. Welche der folgenden Funktionen f ist gleichmäßig stetig auf I:

- $f : x \mapsto 1/x$, $I := (0, +\infty)$.
- $f : x \mapsto 1/x$, $:= (1, +\infty)$.
- $f : x \mapsto x^2$, $I := \mathbb{R}$.
- $f : x \mapsto x^2$, $I := [a, b]$.

3.53. Welche der folgenden Funktionen f ist gleichmäßig stetig auf I:

- $x \mapsto \frac{x^2-1}{x+1}$, $I := [2, 3]$;
- $x \mapsto x^7$, $I := [-1, 1]$;
- $x \mapsto x^7$, $I := (-1, 1)$;
- $x \mapsto x^7$, $I := (a, b)$;

3.54. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt bei $\xi \in X$ nach oben halbstetig, wenn $\forall \varepsilon > 0$ eine Umgebung U von ξ existiert mit $f(x) < f(\xi) + \varepsilon$ für alle $x \in U$. Zeige:

- f ist nach oben halbstetig bei ξ genau dann, wenn $\limsup f(x_n) \le f(\xi)$ aus $x_n \to \xi$ folgt.
- f ist genau dann noch oben halbstetig, wenn $\{x \in X : f(x) < a\}$ offen ist für alle $a \in \mathbb{R}$, bzw. genau dann, wenn $\{x \in X : f(x) \ge a\}$ abgeschlossen ist für alle $a \in \mathbb{R}$.
- Die Funktion $\chi_{(-\infty,0]}$ ist nach oben halbstetig, die Funktion $\chi_{(-\infty,0)}$ ist es nicht. Eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn χ_A nach oben halbstetig ist.
- Ist f auf einer kompakten Mengen nach oben halbstetig, so besitzt sie ein Maximum.
- Das punktweise Infimum einer punktweise nach unten beschränkter Familie nach oben halbstetiger Funktionen ist nach oben halbstetig.

Stetige Gleichungen, siehe VO [1, 3.4]

3.55. Es sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig mit $f(I) \supseteq J$, wobei I und J kompakte Intervalle sind. Zeige die Existenz eines kompakten Intervalls $I' \subseteq I$ mit $f(I') = J$.

3.56. Es sei $f : [0,1] \to [0,1]$ stetig. Dann existiert ein $x_0 \in [0,1]$ mit $f(x_0) = x_0$.

3.57. Es sei $f : x \mapsto \sin(\frac{\pi x}{2})$ und $g : x \mapsto e^x - 2x$. Zeige, daß es ein $x_0 \in [0,1]$ gibt mit $f(x_0) = g(x_0)$.

3.58. Zeige, daß jedes reelle Polynom ungeraden Grades mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$ besitzt.

3.59. Jede injektive und stetige Funktion auf einem Intervall ist streng monoton (siehe VO [1, 3.4.3]). Sind diese Voraussetzungen notwendig?

3.60. Die Umkehrfunktion einer injektiven stetigen Funktion $f : \mathbb{R} \supseteq X \to \mathbb{R}$ ist immer dann stetig, wenn X kompakt oder offen ist. **Hinweis:** Bolzano & Weierstraß.

3.61. Es sei f streng monoton auf einem Intervall. Dann wissen wir, daß f^{-1} existiert und streng monoton ist. Wieso folgt aus dem Umkehrsatz nicht, daß $f = (f^{-1})^{-1}$ stetig ist?

3.62. Zeige, daß die folgenden Funktionen eine Umkehrfunktion besitzen:

$$x \mapsto \frac{1 - x^3}{x^3} \text{ für } x > 1$$
$$x \mapsto (1 + \sqrt{x})^3 \text{ für } x > 0$$

3.63. Zeige: Folgende Funktionen besitzen eine Umkehrfunktion und bestimme diese.

$$x \mapsto \frac{1 - x^3}{x^3} \text{ für } x > 1$$
$$x \mapsto (1 + \sqrt{x})^3 \text{ für } x > 0$$
$$x \mapsto \frac{1}{1 - x^3} \text{ für } x > 1$$

3.64. Es sei $\rho > 0$. Dann gilt:

- Ist $a_n \ge 0$ für alle n und $a_n \to 0$, so strebt $a_n^\rho \to 0$.

- $1/x^\rho \searrow 0$ für $x \to +\infty$.
- $x^\rho \to +\infty$ für $x \to +\infty$.

3.65. Zeige:

- Es sei $0 < a < 1$. Dann ist $\lim_{x\to+\infty} a^x = 0$.
- Es sei $a > 1$. Dann ist $\lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty$.

3.66. Es ist $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\log(x)} = 0$. **Hinweis:** Aufgabe (3.12).

3.67.

- Zeige:
$$\frac{1}{n+1} < \log(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$$
- Folgere die Existenz der Euler-Mascheroni'schen Konstante:
$$\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log(n)).$$

  Hinweis: Vergleiche mit $\sum_k \log(\frac{k+1}{k})$.

3.68. Zeige:
$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{2n}\frac{1}{k} = \log(2)$$
Hinweis: Aufgabe (3.67).

3.69. Zeige $\log_a(b)\cdot\log_b(a) = 1$ für $a, b > 0$.

3.70. Es sei $g : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$ monoton mit $g(s\,t) = g(s) + g(t)$ für $s, t > 0$. Dann existiert ein $c \in \mathbb{R}$ mit $g(t) = c\,\log(t)$ für alle $t > 0$. **Hinweis:** Aufgabe (3.6).

3.71. Finde eine stetige surjektive Funktion $f : (0,1) \to (0,1)$ ohne Fixpunkt.

3.72. Im Banach'schen Fixpunktsatz haben wir verlangt, daß $f(X) \subseteq X$ gilt. Zeige, daß für Kontraktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $d(f(x), f(y)) \le q\,d(x,y)$ für ein $q < 1$ dies auf der Menge $X := \left\{x : d(x,x_0) \le \frac{d(f(x_0),x_0)}{1-q}\right\}$ automatisch gilt.

Beispiele für den Mathematica-Teil

○ **3.73.** Untersuche die Stetigkeit (stetige Fortsetzbarkeit) von $x \mapsto \sin \frac{1}{x}$, $x \mapsto \log(x^2)$ und von $x \mapsto x \sin \frac{1}{x}$. Erstelle auch Graphiken dazu.

○ **3.74.** Bestimme $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ sowie $\lim_{x\to 3} \sqrt{x^2 - 6x + 9}/(x-3)$.

○ **3.75.** Bestimme $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin(x)}{x})^{1/x^2}$, $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin(x)}{x})^{1/(x \log x)}$ und $\lim_{x\to\infty}(1 + \frac{z}{x})^x$.

○ **3.76.** Welcher Unterschied existiert im Konvergenzverhalten der Folge $n \mapsto \tan((n + \frac{1}{n})\pi)$ und der Funktion $x \mapsto \tan((x + \frac{1}{x})\pi)$ bei $+\infty$. Mache Graphiken dazu.

○ **3.77.** Ist $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ stetig zu $(0, 0)$ fortsetzbar? Erstelle auch eine Graphik dazu.

○ **3.78.** Untersuche $\lim_{x,y\to 0} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}$. Mache eine Graphik dafür.

○ **3.79.** Untersuche die Funktion $x \mapsto x - \sin(x)$. Besitzt sie eine Umkehrfunktion? Ebenso für $x \mapsto x + \cos(x)$.

○ **3.80.** Bestimme $\lim_{x\to\infty} \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}}$ und begründe das Ergebnis.

○ **3.81.** Bestimme $\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan(x)}{\sin(x)}$ und begründe das Ergebnis.

4 Differenzierbare Funktionen

Differenzierbarkeit, siehe VO [1, 4.1]

4.1. Zeige unter direkter Verwendung der Definition (ohne Produktregel), daß die Funktion $x \mapsto x^n$ (für $n \in \mathbb{N}$) differenzierbar ist mit Ableitung $x \mapsto n\, x^{n-1}$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k\, h^{n-k} - x^n}{h} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k \lim_{h\to 0} h^{n-k-1} = n\, x^{n-1}.\end{aligned}$$

4.2. Sei ξ ein Punkt des offenen Intervalls I. Dann ist $f : I \to \mathbb{R}$ genau dann differenzierbar bei ξ, wenn die rechts- und links-seitigen Ableitungen $\lim_{x\to\xi\pm} \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi}$ existieren und gleich sind.

4.3. In welchen Punkten ist $x \mapsto |x|$ und in welchen ist $x \mapsto |x|^3$ differenzierbar. Da $|x| = x$ für $x > 0$ und $|x| = -x$ für $x < 0$ ist, ist sowohl $x \mapsto |x|$ also auch $x \mapsto |x|^3$ differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Erstere Funktion ist nicht differenzierbar bei 0 nach Aufgabe (4.3), denn die einseitigen Ableitungen sind ± 1. Die Funktion $x \mapsto |x|^3$ hat als einseitige Ableitungen bei 0

$$\lim_{h\to 0\pm} \frac{|h|^3 - |0|}{h} = \lim_{h\to 0\pm} \pm h^2 = 0$$

und ist somit differenzierbar auf $\mathbb{R}$.

4.4. Die Funktion $f : t \mapsto t \sin(1/t)$ kann stetig zu 0 fortgesetzt werden, aber nicht differenzierbar.

4.5. Die Funktion $f : t \mapsto t^2 \sin(1/t)$ für $t \neq 0$ und $f(0) := 0$ ist differenzierbar aber die Ableitung ist nicht stetig bei 0. Offensichtlich ist f' nicht stetig bei 0, denn $\cos(1/t)$ oszilliert zwischen ± 1 und $\lim_{t\to 0} 2t \sin(1/t) = 0$.

4.6. Es sei $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar bei $x_0 \in (a, b)$. Welche der folgenden Aussagen sind richtig:

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to x_0} \frac{f(h) - f(x_0)}{h - x_0} \\
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} \\
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h} \\
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + 2h) - f(x_0 + h)}{h} \\
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0+, k\to 0-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 + k)}{h - k} \\
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0+, k\to 0+} \frac{f(x_0 + h + k) - f(x_0 + k)}{h}.
\end{aligned}$$

4.7. Leite die Formel $\cos' = -\sin$ her.

4.8. Differenziere die folgenden Funktionen:
$x \mapsto \frac{x^3+1}{x^2+1}$, $x \mapsto \sin(x^2 + 1)$ und $x \mapsto \sqrt{\cos(x^2)}$.

4.9. Differenziere folgende Ausdrücke nach x:
a) $e^{a\,x}\,(a\,\cos(b\,x)+b\,\sin(b\,x))$ b) $e^x\,x^2$
c) $(1+\sqrt{x})^2$ d) $(1+e^x)^2$

4.10. Differenziere folgende Ausdrücke nach x:
a) $\frac{1+x^3}{1+x^2}$ b) $\frac{\sqrt{x}\,\sin(x)}{\log(x)}$ c) $\frac{1}{\cos(x)}+\tan(x)$

○ **4.11.** Differenziere in jeder der folgenden Zeilen einen Ausdruck nach x:

a) $\frac{a\,x+b}{c\,x+d}$	*b)* $\cot(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$	*c)* $\tan(x)+\frac{\tan(x)^3}{3}$
d) $\log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$	*e)* $\log\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$	*f)* $\log(\sin(x))$
g) $\log(\tan(x))$	*h)* $\log(\tan\left(\frac{x}{2}\right))$	*i)* $\arcsin\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$
j) $\arctan(\cot(x))$	*k)* $x\,\arctan(x)-\frac{\log(1+x^2)}{2}$	

4.12. Differenziere folgende Ausdrücke nach x:
a) $\sqrt{1+x^2}$ b) $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ c) $\sqrt{e^{1+x+x^2}}$
d) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$ e) $\sqrt{x^2+\cos(\sqrt{x^3})}$ f) $\frac{1}{\log(x)^2}$
g) $e^{-\sin(x)^2}$ h) $\log(1+x^2)$ i) $\log(\log(x))$
j) $\sin(1+x^2)$ k) $\sin(1+x^3)^2$ l) $\sqrt{\cos(x^2)}$
m) $\tan(\sqrt{x})^2$ n) $\sqrt{e^{\sin(\sqrt{x})}}$ o) $\arcsin(x^2)$
p) $\arcsin(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}})$ q) $\arccos(x)^2$ r) $\arctan(\frac{x-1}{x})$
s) $\arctan\left(\frac{x-2}{2\,\sqrt{x^2+x-1}}\right)$

○ **4.13.** Differenziere einen der folgende Ausdrücke nach x:
a) $\left(1+x^2\right)^{\sin(x)}$ b) $\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{x^2}$ c) x^{x^x}

4.14. Zeige die Leibniz-Formel:
Für $n\in\mathbb{N}$ und alle n-mal differenzierbaren Funktionen f und g gilt:

$$(f\,g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\,f^{(k)}\,g^{(n-k)}.$$

4.15. Bestimme die partiellen Ableitungen der Funktionen:
$(x,y,z)\mapsto\sin(x)^2+yz$ und $(x,y,z)\mapsto\cos(xy+z)$.

○ **4.16.** Bestimme die partiellen Ableitungen folgender Funktionen:
$(x,y)\mapsto(\sin(x\cdot y),\cos(x^2+y^2))$ und $(x,y)\mapsto(\frac{y}{x},\frac{x}{y})$.

4.17. Bestimme die Richtungsableitungen an der Stelle $(0,0)$ von

$$(x,y)\mapsto\begin{cases} y\frac{3x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4.18. Bestimme die Richtungsableitungen an der Stelle $(0,0)$ von

$$(x,y)\mapsto\begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{für } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

4.19. Berechne die ersten beiden Ableitungen von:

- $x \mapsto \sin(x^2)$;
- $x \mapsto \sin(x)\cos(x)^2$;
- $x \mapsto \tan(\frac{1}{1+x^2})$;

4.20. Berechne die ersten beiden Ableitungen von:

- $x \mapsto \cos(\sin(x))$
- $x \mapsto \arcsin(\sqrt{1-x})$
- $x \mapsto \arctan(x^3 + 2x)$

4.21. Verifiziere: $(\frac{d}{dx})^4(\cos(x)e^{-x}) = -4\cos(x)e^{-x}$,

4.22. Beweise die Existenz der Umkehrfunktion arccos von $\cos : [0,\pi] \to [-1,1]$ und bestimme deren Ableitung.

4.23. Berechne folgende Grenzwerte mit Hilfe des Mittelwertsatzes:

1. $\lim_{n\to\infty} n(1-\cos(1/n))$,
2. $\lim_{n\to\infty} (\sqrt[3]{n^2+a^2} - \sqrt[3]{n^2})$,
3. $\lim_{x\to a} \frac{x^\alpha - a^\alpha}{x^\beta - a^\beta}$ für $a > 0$ und $\beta \neq 0$.

4.24. Es seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Weiters sei $f(a) = g(a)$ und $0 \le f'(x) < g'(x)$ für $a < x < b$. Dann ist $f(x) < g(x)$ für alle $a < x \le b$.

4.25. Es sei f n-mal differenzierbar auf den offenen Intervall I und verschwinde auf $n+1$ verschiedenen Stellen in I. Dann existiert ein $\xi \in I$ mit $f^{(n)}(\xi) = 0$.

4.26. Es sei $0 < a \le 1$. Für jedes $b \in \mathbb{R}$ hat das Polynom $x \mapsto a\,x^3 - 3a\,x + b$ höchstens eine Nullstelle in $[-a, a]$.

○ **4.27.** Zeige: Eine auf einem Intervall differenzierbare Funktion ist genau dann Lipschitz stetig (d.h. es existiert eine Konstante $L \in \mathbb{R}$ mit $|f(x_1) - f(x_2)| \le L\,|x_1 - x_2|$ für alle x_1, x_2 im Definitionsbereich), wenn ihre Ableitung beschränkt ist.

4.28. Zeige: Die Funktion $x \mapsto (1 + \frac{1}{x})^x$ ist streng monoton wachsend für $x > 0$.

○ **4.29.** Es sei $f''(x) > 0$ für alle x. Dann ist $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ für alle $x \neq x_0$.

4.30. Diskutiere folgende Funktionen:

- $x \mapsto \frac{x^2-1}{x^2+x-2}$
- $x \mapsto x e^{-1/x}$
- $x \mapsto x^2 e^{-1/x^2}$
- $x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{x+2}{4}\ln(x+1)$

- $x \mapsto x^{1/x}$

4.31. Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ hat die Gleichung $x^3 - a\,x + b = 0$ drei reelle Lösungen?

4.32. Berechne die Nullstellen, horizontale, vertikale (und ev. andere) Asymptoten, sowie ev. Sprungstellenund skizziere die Funktionen:

$$\frac{x}{1+x^2}, \quad \frac{1-x}{1+x}, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}, \quad \frac{1+2x+x^2}{1+3x^2}, \quad \frac{x^3+1}{x^2-1}, \quad \frac{\operatorname{sign}(x)}{1+x^2}, \quad \frac{|x|}{1+x^2}.$$

4.33. Zeige: Für gerades n besitzt die Funktion $x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ keine reelle Nullstelle.

4.34. Zeige: Für ungerades n besitzt die Funktion $x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$ genau reelle Nullstelle x_n. Berechne die ersten x_n näherungsweise.

○ **4.35.** Für welche x nimmt $\sum_{k=1}^n (x - a_k)^2$ ein Minimum an?

4.36. Es seien P_1 und P_2 zwei Punkte auf der selben Seiten einer Geraden g der Ebene. Bestimme jenen Punkt P der Geraden g für welchen $\overline{P_1 P} + \overline{P_2 P}$ minimal wird.

○ **4.37.** Bestimme in jeder der folgenden Zeilen einen Grenzwert:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)}{x}$	b) $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ für $a, b > 0$	c) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x}-1}{\log(1+x)}$
d) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2}$	e) $\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1-\cos(x)}$	f) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)} - \sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$
g) $\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x) - x - x^3/6}{3x^5}$	h) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin(x)} - \cos(x)}{\sin(x/2)^2}$	i) $\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan(x)}{x-\sin(x)}$
j) $\lim_{x\to 0} x\,\log(x)$	k) $\lim_{x\to 0} x^n\, e^{1/x^2}$ für $n > 0$	
l) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \cot(x)\right)$	m) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}\right)$	n) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$
o) $\lim_{x\to 0} (1 + a\,x)^{1/x}$ für $a \in \mathbb{R}$	p) $\lim_{x\to 0} (\frac{\sin(x)}{x})^{3/x^2}$	

4.38. Bestimme in jeder der beiden folgenden Zeilen zwei Grenzwerte:

a) $\lim_{x\to 1-} \ln(x)\ln(1-x)$	b) $\lim_{x\to 1}(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{1}{x-1})$	c) $\lim_{x\to 2+} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}}$
d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{x^b}{a^x}$ für $b > 0 a > 1$	e) $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x}) = 1$	f) $\lim_{x\to -\infty} x^n\, e^x$ für $n > 0$

4.39. Es ist $\lim_{n\to\infty} n^2((1-\frac{1}{n})^\alpha - (1-\frac{\alpha}{n})) = \binom{\alpha}{2}$. Somit ist $(1-\frac{1}{n})^\alpha = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{b_n}{n^2}$ mit $|b_n| \le C$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

4.40. Warum ist die folgende zweifache Anwendung der Regel von l'Hospital nicht zulässig:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 2x - 1}{2x} = \lim_{x\to 1} \frac{6x+2}{2} = 4.$$

4.41. Für alle $a, b > 0$ zeige: $\lim_{r\to 0}(\frac{a^r + b^r}{2})^{1/r} = \sqrt{ab}$.

Beispiele für den Mathematica-Teil

4.42. Bestimme die Ableitung von $x \mapsto e^{-1/x^2}$ bei 0.

4.43. Bestimme die Ableitung von $x \mapsto x^2 \sin(1/x)$ bei 0.

4.44. Bestimme die Ableitung von $x \mapsto \sin(x)^{\cos(x)}$ oder $x \mapsto \log(x)^{\sin(x)}$.

4.45. Bestimme die Ableitung von $x \mapsto \log(\sin(x)^2)$ und von $x \mapsto \log(\sin(x^2))$.

4.46. Überprüfe die Gültigkeit des Mittelwertsatzes am Beispiel einer Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ deiner Wahl.

4.47. Bestimme $\lim_{x\to 0}(\frac{\sin(x)}{x})^{1/x^2}$ und begründe das Ergebnis.

4.48. Diskutiere die Funktion $x \mapsto x^x$, bzw. $x \mapsto x^{1/x}$.

4.49. Bestimme Rechteck mit Umfang 1 und maximaler Fläche. Oder: Löse eine Extremalaufgabe deiner Wahl.

4.50. Extremalproblem des weitesten Wurfs: Ein Körper wird mit Anfangsgeschwindigkeitsvektor (v, w) und Anfangsgeschwindigkeit $v^2 + w^2 = 1$ weggeschossen. Dabei ist w die horizontale und v die vertikale Komponente. Unter Einfluß der Schwerebeschleunigung g hat er sich zum Zeitpunkt t um $(v\,t, w\,t - \frac{g}{2}t^2)$ entfernt. Wie muß der Anfangsvektor gewählt werden, damit die Ausgangshöhe in möglichst weiter Entfernung erreicht wird.

4.51. Bestimme für eine nicht zu triviale Funktion f in zwei Variablen die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$. Vergleiche die Richtungsableitung $\frac{d}{dt}|_{t=0} f(x + a\,t, y + b\,t)$ in Richtung (a, b) mit $a\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} + b\,\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$

Potenzreihen, siehe VO [1, 4.2]

4.52. Es sei $p : x \mapsto \sum_{k=0}^n a_k x^k$ ein Polynom. Die Koeffizienten erfüllen $k!\, a_k = p^{(k)}(0)$. Weiters ist

$$p(x_0 + h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} h^k.$$

4.53. Es sei f n-mal differenzierbar und p ein Polynom vom Grad $\le n$ mit $p^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$ für $0 \le k \le n$. Dann ist p das n-te Taylor-Polynom von f an der Stelle x_0

4.54. Die Nullstelle ξ eines Polynoms p besitzt genau dann Vielfachheit k, wenn $0 = p(\xi) = \cdots = p^{(k-1)}(\xi)$ und $p^{(k)}(\xi) \neq 0$. Hierbei bedeutet die Aussage "ξ ist eine Nullstelle der Vielfachheit $\le k$ von p", daß $(x-\xi)$ das Polynom $p(x)$ teilt (mit polynomialen Quotienten). Vielfachheit gleich k bedeutet, Vielfachheit $\le k$ aber nicht $\le k+1$.

4.55. (Schlömilch'sche Restglied) Es genüge f den Voraussetzungen des Taylor'schen Satzes und $p \in \mathbb{N}$. Dann existiert ein $0 < \delta < 1$ mit

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \delta(x-x_0))}{n!p}(1-\delta)^{n+1-p}(x-x_0)^{n+1}.$$

Für $p = n+1$ erhalten wir das Lagrange Restglied

$$f^{(n+1)}(x_0 + \delta(x-x_0))\, \frac{(x_1 - x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

aus [1, 4.2.2]. Für $p = 1$ das sogenannte Cauchy'sche Restglied

$$\frac{f^{(n+1)}(x_0 + \delta(x-x_0))}{n!}(1-\delta)^n (x-x_0)^{n+1}.$$

Hinweis: Bei fixen x und x_0 sei $r(t) := f(x) - \sum_{k=0}^n f^{(k)}(t)\frac{(x-t)^k}{k!}$ und $s(t) := (x-t)^p$. Nun wende den Mittelwertsatz auf $\frac{r(x_0)-r(x)}{s(x_0)-s(x)}$ an.

○ **4.56.** Es sei f n-mal stetig differenzierbar und $0 = f(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) \neq f^{(n)}(x_0)$. Falls n ungerade ist, so ist x_0 keine Extremalstelle. Ist n gerade, dann ist x_0 eine Extremalstelle und zwar genau dann ein lokales Maximum (Minimum), wenn $f^{(n)}(x_0) < 0$ (> 0) ist.

4.57. Beweise folgende Formeln für $2 \le n \in \mathbb{N}$ durch Differenzieren des Binomschen Lehrsatzes:

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1},$$

$$\text{b)} \quad \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} k\binom{n}{k} = 0,$$

$$\text{c)} \quad \sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$$

○ **4.58.** Zeige:

- $\sin(x)^2 = x^2 - \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{45}x^6 + \dots$.

- $\sin(x)^3 = x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{13}{120}x^7 + \dots$.
- $\frac{\cos(x)}{1-x} = 1 + x + (1-\frac{1}{2!})x^2 + (1-\frac{1}{2!})x^3 + (1-\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!})x^4 + \dots$.
- $\sin(x)\, e^{-x} = x - x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x^5 + \dots$.

4.59. Bestimme die ersten 5 Koeffizienten der Potenzreihe von $x \mapsto \frac{\cos(x)}{e^x}$ indem Du die Koeffizienten des Quotienten mittels Koeffizientenvergleich bestimmst.

4.60. Bestimme die ersten 5 Koeffizienten der Potenzreihe der Umkehrfunktion arcsin von sin ebenfalls durch Koeffizientenvergleich.

4.61. Zeige für hinreichend kleine x folgende Entwicklungen:

1. $\frac{\tan(x)}{\cos(x)} = x + \frac{5}{6}x^3 + \frac{61}{120}x^5 + \dots,$
2. $\frac{e^x \sin(x)}{\cos(x)^2} = x + x^2 + \frac{4}{3}x^3 + x^4 + \dots,$
3. $\frac{x^2}{\sin(x)^2} = 1 + \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{15}x^4 + \dots,$
4. $\frac{x\ln(1/(1-x))}{\sin(x)^2} = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{5}{12}x^3 + \dots.$

4.62. Bestimme die Konvergenzradien von:
$\sum_k (\frac{k!}{3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2k+1)})^2\, x^k$, $\sum_k k^{\log(k)/k}\, x^k$, $\sum_k \binom{2k}{k}\, x^k$,
$\sum_k (k^4 - 4k^3)\, x^k$, $\sum_k \frac{e^k + e^{-k}}{2}\, x^k$, $\sum_k \sum_{j=1}^k \frac{1}{j}\, x^k$,
$\sum_k b^{\sqrt{k}} x^k$ für $b > 0$, $\sum_k a^{k^2}\, x^k$, $\sum_k x^k \prod_{j=1}^n (1+\frac{1}{j})^j$,
$\sum_k (-1)^k \binom{1/2}{k} 2^{-k} x^k$, $\sum_k \frac{(2k-1)^{2k-1}}{2^{2k}(2k)!} x^k$, $\sum_k k(\sqrt[k]{2}-1)x^k$.

4.63. Für jede global konvergente Potenzreihe $\sum_k a_k(x-x_0)^k$ strebt $\sqrt[k]{|a_k|}$ gegen 0. Somit ist $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}} = 0$.

4.64. Zeige, daß die Taylor-Reihe an der Stelle $x_0 = 0$ von $f(x) := e^x$ gegen $f(x)$ konvergiert.

4.65. Beweise für $-1 \le x \le 0$:
$$\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=1}^\infty \frac{x^k}{k}$$

4.66. Beweise für $0 \le x < 1$:
$$\sqrt{1+x} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^{k-1} \frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2k-3)}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot 2k}\, x^k$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot 2k}\, x^k$$
$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{k=0}^\infty (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot\dots\cdot(2k-1)}{2\cdot 4\cdot\dots\cdot 2k}\, x^{2k}$$

4.67. Für alle $|x| < 1$ und $p \in \mathbb{N}$ zeige: $\frac{1}{(1-x)^{p+1}} = \sum_{k=0}^\infty \binom{p+k}{k} x^k$.

○ **4.68.** ✵ $\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\right)$ für $|x| < 1$.

4.69. ✵ Bestimme die Konvergenzradien und die Summen folgender Potenzreihen: $\sum_{k=0}^{\infty}(2k+1)(2x)^{2k}$, $\sum_{k=1}^{\infty}(3k+2)\,x^k$, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{3k+3}$.

4.70. ✵ Gib die Taylorentwicklung von f bei $x = 0$ an und bestimme den Konvergenzradius: $f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$.

4.71. ✵ Zeige: $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x+x^2}{(1-x)^3}$ für $|x| < 1$.

4.72. ✵ Beweise für $n \in \mathbb{N}$ und beliebiges α, β mittels Koeffizientenvergleich:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k}\binom{\beta}{n-k} = \binom{\alpha+\beta}{n}$$

4.73. ✵ Bestimme mittels Potenzreihen folgende Summen:

$$\text{a)} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{1}{k\,2^k},$$
$$\text{b)} \quad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k+1}{2^k},$$
$$\text{c)} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{(k+1)!},$$
$$\text{d)} \quad \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{k}{2^k}\binom{1/2}{k}.$$

4.74. Es sei f in eine Potenzreihe $\sum_k a_k x^k$ für $|x| < R$ entwickelbar. Weiters sei f gerade, d.h. $f(x) = f(-x)$ für alle x. Dann ist $a_k = 0$ für all ungeraden k.

4.75. Finde Beispiele die Zeigen, daß Summen und Produkte von Konvergenzreihen größere Konvergenzradien haben können als die Komponenten.

4.76. ✵ Zeige mittels Reihenmultiplikation $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$.

4.77. Die Euler'sche Zahl e ist irrational.
Hinweis: Gehe indirekt vor und verwende den Taylor'sche Lehrsatz.

4.78. ✵ Beweise für alle x gilt:

$$\sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$
$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

4.79. Zeige folgende Aussagen für alle $x, y \in \mathbb{R}$:

a) $\sinh(2x) = 2\sinh(x)\cosh(x)$ b) $\cosh(2x) = \cosh(x)^2 + \sinh(x)^2$
c) $\sinh(x+y) = \sinh(h)\cosh(y) + \cosh(x)\sinh(y)$
d) $\cosh(x+y) = \cosh(x)\cosh(y) + \sinh(x)\sinh(y)$
e) $\sinh'(x) = \cosh(x)$ f) $\cosh'(x) = -\sinh(x)$
g) $\sinh(\frac{x}{2})^2 = \frac{\cosh(x)-1}{2}$ h) $\cosh(\frac{x}{2})^2 = \frac{\cosh(x)+1}{2}$
i) $\tanh(x+y) = \frac{\tanh(x)+\tanh(y)}{1+\tanh(x)\tanh(y)}$

4.80. Zeige folgende Identitäten:

a) $\operatorname{Arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
b) $\operatorname{Arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ für $x \geq 1$,
c) $\operatorname{Artanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln(\dfrac{1+x}{1-x})$ für $-1 < x < 1$.

4.81. Es sei

$$f : x \mapsto 2\ln(\cosh(x/2))$$
$$g : x \mapsto 2\ln(1+e^x) - x$$
$$h : x \mapsto \ln(1+\cosh(x))$$

Zeige $f = g - \ln(4) = h - \ln(2)$ mittels Differentiation.

4.82. Zeige:

a) $\operatorname{Arsinh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ b) $\operatorname{Arcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
c) $\operatorname{Artanh}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$ d) $\operatorname{Arcoth}'(x) = \frac{1}{1-x^2}$

4.83. Zeige: $\operatorname{Artanh}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ für $|x| < 1$.

4.84. Zeige: $\operatorname{Arsinh}(x) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots$ für $|x| < 1$.

4.85. $\operatorname{Arsinh}(x) = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7} + \dots$ für $|x| \leq 1$. Nach Aufgabe (4.84) gilt die Identität für $|x| < 1$. Wegen dem Leibnizkriterium konvergiert die Reihe auch für $|x| = 1$ und da Arsinh stetig ist bei ± 1 gilt die Gleichheit nach dem Abel'schen Grenzwertsatz.

4.86. Zeige:

$$\ln(1+\sqrt{2}) = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{7} + \dots.$$

4.87. Zeige:

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2}\frac{1}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{1}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{1}{7} + \dots.$$

4.88. Die Tangente an den Einheitskreis im Punkt $(\cos(t), \sin(t))$ schneidet die Koordinatenachsen in den Punkten $(\sec(t), 0)$ und $(0, \csc(t))$. Drücke diese beiden Winkelfunktionen Secans und Cosecans durch sin und cos aus.

4.89. Zeige, daß die Summensätze von Sinus und Kosinus mit folgender Formel für die komplexwertige Funktion $\operatorname{cis}(\alpha) := \cos(\alpha) + i\,\sin(\alpha)$ äquivalent sind:

$$\operatorname{cis}(\alpha+\beta) = \operatorname{cis}(\alpha)\cdot\cos(\beta).$$

4.90. Zeige:

- $2\arctan(x) = \arctan\left(\frac{2x}{1-x^2}\right) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$
- $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \pi/2$ für $x > 0$
- $\arcsin(x) = \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$ für $|x| < 1$

oder durch Differenzieren.

4.91. Leite Formeln für sin und cos von $4x$ und $5x$ her. (Hinweis: Moivre'sche Formel $\operatorname{cis}(n\,x) = (\operatorname{cis}(x))^n$).

4.92. Zeige $\sin(\pi/12) = (\sqrt{3} - \sqrt{1})/2\sqrt{2}$ und berechne $\cos(\pi/12)$ und $\cos(\pi/5)$.

4.93. Bestimme folgende Grenzwerte einerseits mittels Potenzreihenentwicklung und andererseits mittels der Regel von l'Hospital:

1. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{e^x-1-x-x^2/2}$,
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)^2-\sin(x)^2}{1-e^{-x^2}}$,
3. $\lim_{x\to 0} \frac{x^3\sin(x)}{(1-\cos(x))^2}$,
4. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{(1-\cos(x))^2}$,
5. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\cos(ax)}-\sqrt{\cos(bx)}}{x^2}$ und
6. $\lim_{x\to 0} \frac{\pi^2}{32x}\left(\frac{15x^2-35x+8}{2(1-x)^3(4-x)}\,\frac{\sin(\pi\sqrt{x})}{\pi\sqrt{x}} - \frac{\cos(\pi\sqrt{x})}{(1-x)^2}\right)$

4.94. Bestimme folgende Grenzwerte:

1. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \cot(x)\right)$,
2. $\lim_{x\to 0}\left(\coth(x^2) - \frac{1}{x}\coth(x)\right)$,
3. $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$,
4. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{\coth(x)\arcsin(x)}{x} - \frac{x}{\sin(x^2)}\right)$
5. $\lim_{x\to 0} \frac{4}{x}\left(\frac{\cot(x)}{1-x} - \frac{1}{x}\,\frac{\cosh(2\sqrt{x})}{1-\ln(1-x)}\right)$.
6. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{e^x-1}$
7. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x\sin(x)}$
8. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)^2-\sin(x)^2}{1-e^{-x^2}}$
9. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^4}-1}{(1-\cos(x))^2}$

Abel

4.95. Es habe die Potenzreihe $p(x) = \sum_k a_k\, x^k$ Konvergenzradius $0 < r < +\infty$ und es konvergiere $\sum_k a_k r^k$ und $\sum_k k\, a_k\, r^{k-1}$. Dann ist p im Punkt r linksseitig differenzierbar mit Ableitung $p'(r) = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, r^{k-1}$.

4.96. (Verallgemeinerte Abel'sche Grenzwertsatz) Die Potenzreihe $f(x) := \sum_k a_k\, x^k$ sei für $|x| < 1$ konvergent und $\frac{s_0+\dots+s_n}{n+1} \to s$ mit $s_n := a_0 + \dots + a_n$. Dann existiert $\lim_{x\to 1-} f(x)$ und ist gleich s.

4.97. Bestimme Konvergenzbereich und Verhalten am Rand:

a) $\sum_k k^2 x^k$
b) $\sum_k x(1-x)^k$
c) $\sum_k \frac{k!(x-3)^k}{3\cdot 5\cdot\dots\cdot(2k-1)}$
d) $\sum_k \frac{2^k\, x^{k+1}}{2k+1}$
e) $\sum_k \frac{x^{5k+1}}{1+2^k}$
f) $\sum_k (-1)^k 3^{2k} (x-1)^{2k+1}$
g) $\sum_n \frac{1}{n}\, x^n$
h) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n}\, x^n$
i) $\sum_n \frac{1}{n^2}\, x^n$
j) $\sum_n \frac{n!}{n^n}\, x^n$
k) $\sum_n n!\, x^n$
l) $\sum_n \frac{1}{(n+1)(n+2)}\, x^n$
m) $\sum_n n\, x^{2^n}$
n) $\sum_n n\, x^{3^n}$
o) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n!}\, x^n$
p) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n!}\, x^{2n-1}$
q) $\sum_k (k^4 - 4k^3) x^k$

Beispiele für den Mathematica-Teil

4.98. Bestimme das Taylor-Polynom der Ordnung 15 von $x \mapsto \log(\cos(x^2))$ bei $x = 0$.

4.99. Versuche die Taylor-Reihe von $x \mapsto e^{-1/x^2}$ bei 0 zu bestimmen. Hinweis: Versuche die (ungefähre) Bauart der Ableitungen bei $x \neq 0$ zu erkennen.

4.100. Wähle eine Funktion f mit $f(0) = 0$, bestimme das Taylor-Polynom bis zur Ordnung 10 von f bei 0 und der Umkehrfunktion von f bei $f(0)$. Und berechne die Zusammensetzung dieser Polynome. siehe InverseSeries.

4.101. Vereinfache $2\cos(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$ und $2\sin(\frac{x+y}{2})\cos(\frac{x-y}{2})$ und erkläre das Resultat.

4.102. Drücke $\tan(x + y)$ allein durch $\tan(x)$ und $\tan(y)$ aus. Geht das mit Mathematica???

4.103. Vereinfache $\sin(2\arctan(t))$, $\cos(2\arctan(t))$ und $\tan(2\arctan(t))$. (Hinweis: TrigExpand)

4.104. Berechne $\sum_{k=-n}^{n} \sin(n\,x)$ und erkläre das Ergebnis.

4.105. Berechne $\sum_{k=-n}^{n} \cos(n\,x)$ und mache einen Beweisvorschlag.

4.106. Differenziere $\cosh^{-1}$ sowie $x \mapsto \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$ und vergleiche die Ergebnisse. Was kannst Du daraus schließen?

4.107. Vergleiche die Ableitungen von $\tanh^{-1}$ sowie $\log\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ und ziehe daraus Deine Schlüsse.

Literatur

[1] Andreas Kriegl. *Analysis 1*. Vorlesung, Univ. Wien, 2003/04. 1, 2, 3, 4, 5, 8, 10, 12, 15, 20